

TuS

# **Thermodynamik und Statistik**

Nicolai Weitkemper  
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Wintersemester 2017/2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Aufgabe 1: Kurzfragen

**a)**

Welche Aussagen machen der 2. und 3. Hauptsatz über die Entropie?

Geben Sie eine Version des 2. Hauptsatzes an, die den Begriff Entropie nicht enthält.

**b)**

Ein mit einem idealen Gas gefüllter Ballon hat ein Volumen  $V_B$  und der Luftdruck betrage  $p_L = 1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Nun wird dieser Ballon 10 Meter tief in Wasser abgesenkt, das sich in vollständigem thermischen Gleichgewicht mit der Luft befindet. Der Schweredruck des Wassers in Tiefe  $h$  ist  $p_W = \rho g h$  ( $\rho_{\text{Wasser}} = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  und rechnen Sie mit  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Wie groß ist das Volumen des Ballons in 10 Meter Tiefe?

**c)**

Wie lautet die Gibbssche Phasenregel (auftretende Größen definieren)? Wie viele Phasen können in einem zweikomponentigen System höchstens koexistieren?

**d)**

Wie lautet die Clausius-Clapeyron-Gleichung? Wie sind die auftretenden Größen definiert? Was sagt die Clausius-Clapeyron-Gleichung über die Steigung der Schmelzlinie von Wasser im  $p$ - $T$ -Diagramm aus?

**e)**

Wie groß ist im klassischen Hochtemperaturlimes die spezifische Wärme eines linearen 3-atomigen Moleküls der Form  $A-A-A$ ?

**f)**

Zu einem Makrozustand gehören  $M$  Mikrozustände. Wie groß ist die Entropie des Makrozustands?

**g)**

Ein einzelnes Teilchen befindet sich in einem Wärmebad mit Temperatur  $T$  in einem äußeren Potential  $V(\vec{r})$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen bei  $\vec{r}$  zu finden (bis auf einen konstanten Normierungsfaktor)?

**h)**

Für das Photonengas gilt das Plancksche Strahlungsgesetz

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} .$$

Leiten Sie daraus die Gesamtenergie  $E = E(T, V)$  her (bis auf einen konstanten nicht zu berechnenden Zahlfaktor in Form eines Integrals). Welche Temperaturabhängigkeit hat die spezifische Wärme?

**i)**

Was sind die natürlichen Variablen der Energie  $E$  und der freien Energie  $F$ ? Berechnen Sie die zur Energie

$$E = p_0 V \exp\left(\frac{2S}{2k_B N}\right)$$

gehörige freie Energie in ihren natürlichen Variablen.  $p_0$  ist hierbei eine einheitenbehaftete Konstante.

**j)**

Wie verhält sich der Ordnungsparameter an einem diskontinuierlichen Phasenübergang? Geben Sie ein Beispiel an.

**k)**

Wie lautet die kanonische Dichte  $\rho = \rho(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  eines klassischen  $N$ -Teilchensystems mit Hamiltonfunktion  $H = H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  und wie berechnen sich die Zustandssumme und die Entropie eines Systems?

## Aufgabe 2: Punktteilchen in Kasten

Gegeben sei ein Punktteilchen mit der Masse  $m$  in einem zweidimensionalen Kasten  $L_x \times L_y$ , bei dem vor der Wand  $y = 0$  ein Kastenpotential

$$\mathcal{H}_{\text{pot}}(y) = V_0 \Theta(l - y)$$

existiert (siehe Abbildung).

**a)**

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme  $Z_k$  und die freie Energie  $F$  des Systems.

**b)**

Bestimmen Sie die mittlere potentielle Energie  $\langle \mathcal{H}_{\text{pot}} \rangle$ .

Für welche Potentialstärke  $V_0$  als Funktion von  $L_y$  und  $l$  ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Bereich  $\mathcal{H}_{\text{pot}} = V_0$  (grauer Bereich)

**c)**

Berechnen Sie die innere Energie  $E$ . Diskutieren Sie die beiden Fälle

1.  $V_0 = 0$
2.  $V_0 \rightarrow \infty$

und erläutern Sie jeweils das Verhalten des Punktteilchens.

### Aufgabe 3: Kreisprozess

Betrachten Sie einen aus den **drei** Teilprozessen

- $1 \rightarrow 2$ : adiabatische Expansion,
- $2 \rightarrow 3$ : isotherme Kompression,
- $3 \rightarrow 1$ : isonbare Erwärmung

bestehenden Kreisprozess, der als Arbeitssubstanz ein ideales Gas verwendet.

**a)**

Zeichnen Sie das zugehörige  $p, V$ - sowie das zugehörige  $T, S$ -Diagramm. Kennzeichnen Sie im  $p, V$ -Diagramm für alle Teilschritte, ob Wärme oder Arbeit zu- oder abgeführt wird. Ist die Gesamtarbeit  $\Delta$  positiv oder negativ?

**b)**

Berechnen Sie für jeden Teilschritt die Änderung der Wärme  $\Delta Q_{i \rightarrow j}$  und der Arbeit  $\Delta W_{i \rightarrow j}$  in Abhängigkeit der Volumina und Temperaturen sowie geeigneter thermodynamischer Koeffizienten.

**c)**

Drücken Sie das Verhältnis  $p_2/p_3$  als Funktion der Volumina  $V_1$  und  $V_2$  aus. Verwenden Sie hierzu neben der Zustandsgleichung auch die Adiabaten Gleichung des idealen Gases.

*Hinweis:* Sie müssen sich die Eigenschaften sämtlicher Teilprozesse zunutze machen.

## Aufgabe 4: Bose-Gas mit schwacher Wechselwirkung

Bei niedrigen Temperaturen können die Entropie  $S$  und die isotherme Kompressibilität  $\kappa_T$  eines schwach wechselwirkenden Bose-Gases beschrieben werden durch Hierbei sind  $a$  und  $c$  Konstanten. Im Grenzfall niedriger Temperaturen und großer Volumen verschwinde der Druck  $p$ .

**a)**

Wie lautet das totale Differential der freien Energie  $F(T, V)$  bei konstanter Teilchenzahl? Welche Maxwell-Relation können Sie daraus herleiten? Tun Sie dies.

**b)**

Bestimmen Sie die Zustandsgleichung des Drucks  $p(T, V)$  in Abhängigkeit von Temperatur und Volumen. Stellen Sie hierzu zunächst das vollständige Differential von  $p(T, V)$  auf und integrieren Sie anschließend.

**c)**

Leiten Sie ausgehend von

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial \rho} \right|_T$$

einen Ausdruck für die isotherme Kompressibilität  $\kappa_T$  her, der die zweite Ableitung eines thermodynamischen Potentials nach einer Zustandsvariablen beinhaltet.

## Aufgabe 5: Dichteoperator eines Zwei-Niveau-Systems

Ein quantenmechanisches System besitzt zwei Energieniveaus  $\epsilon_1 = 0 < \epsilon_2$ . Es gibt keine Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Niveaus und das System ist in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur  $T$ . Der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  des System lautet also in Matrix-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}.$$

**a)**

Geben Sie den Dichteoperator  $\hat{\rho}$  in Matrixdarstellung an.

**b)**

Berechnen Sie den Dichteoperator in den Grenzfällen  $T \rightarrow 0$  und  $T \rightarrow \infty$ . Handelt es sich jeweils um einen reinen Zustand?

**c)**

Berechnen Sie die Entropie  $S$  und die innere Energie  $E$ .

**d)**

Betrachten Sie  $S$  und  $E$  für die Grenzfälle  $T \rightarrow 0$  und  $T \rightarrow \infty$ . Interpretieren Sie die Ergebnisse dieser Grenzfälle.

## Aufgabe 6: Reales Gas

Die Zustandsgleichung eines realen Gases wird um einen Punkt im  $p, V$ -Diagramm entwickelt. Es ergibt sich folgende näherungsweise Zustandsgleichung

$$p(t, v) = p_0 - Atv - Bv^3$$

mit  $v \equiv V - V_0$  und  $t \equiv T - T_0$ .  $A$  und  $B$  seien positive einheitenbehaftete Konstanten, welche die richtige Dimensionalität gewährleisten.

**a)**

Fertigen Sie je eine Skizze von  $p(t, v)$  für  $t < 0$ ,  $t = 0$  und  $t > 0$  an.

**b)**

Für welche  $t$  tritt thermodynamische Instabilität auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Betrachten Sie im Folgenden nur den instabilen Fall und zeichnen Sie die berechneten Größen in Ihre Skizze ein.

**c)**

Wie lauten die Bestimmungsgleichungen für eine Maxwellkonstruktion um thermodynamische Stabilität zu erreichen? Welcher Druck  $p_{\text{pg}}$  erfüllt die Bestimmungsgleichungen?

**d)**

Zwischen welchen Volumina  $V_+$  und  $v_-$  findet der Phasenübergang statt?

**e)**

Berechnen Sie die Grenzen der Bereiche, in denen metastabile Zustände auftreten können.



## Aufgabe 7: Abstraktes Fermigas

Diese Aufgabe behandelt ein abstraktes, ideales Fermigas aus Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit der allgemeinen Dispersionsrelation

$$\tilde{\epsilon}(\vec{p}) = \frac{1}{\alpha} |\vec{p}|^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

$\alpha$  ist eine Konstante mit passender Einheit. Betrachten Sie das Gas in drei Dimensionen bei der Temperatur  $T = 0$ .

**a)**

Berechnen Sie die Fermienergie  $\varepsilon_F$  und die Fermiwellenzahl  $k_F$ . *Kontrollerggebnis:*

$$\varepsilon_F = \frac{1}{\alpha} \left( 3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V} \right)^{\gamma/3}$$

**b)**

Die Einteilchenzustandsdichte ist durch

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2}{V} \sum_{\vec{p}} \delta(\varepsilon - \tilde{\epsilon}(\vec{p})) = \frac{\alpha^{3/\gamma} \varepsilon^{(3-\gamma)/\gamma}}{\pi^2 \hbar^3 \gamma}$$

gegeben. Bestimmen Sie hiermit die Grundzustandsenergie  $E_0(N, V)$ . Wie lautet der Koeffizient  $\eta$  in

$$\frac{E_0}{N} = \eta \varepsilon_F ?$$

**c)**

Berechnen Sie den inneren Druck  $P_0(N, V)$  des Fermi-Gases. *Tipp:* Sie dürfen das Kontrollerggebnis **(2)** und Formel **(4)** verwenden.