TuS

Thermodynamik und Statistik

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Wintersemester 2007/2008

TU Dortmund – Fakultät Physik

Aufgabe 1: Kurzfragen

a)

Was besagt das Wiederkehrtheorem?

Inwiefern scheint es der makrosopischen Erfahrung, dass Systeme sich einem thermischen Gleichgewicht annähern, zu widersprechen?

Wie löst sich der scheinbare Widerspruch auf?

b)

Inwieweit scheint die mikroskopische Reversibilität der Bewegungsgleichungen der makrosopischen Erfahrung, dass Systeme sich einem thermischen Gleichgewicht annähern, zu widersprechen?

Geben Sie zwei Überlegungen an, wie sich dieser scheinbare Widerspruch auflöst.

c)

Worin besteht in der klassischen Statistik das Gibbs'sche Paradoxon?

Wie löst es sich in der Quantenmechanik auf?

d)

Was ist die Boltzmann-Entropie?

Was ist die Informationsentropie?

Wann werden die beiden Größen gleich?

e)

Erklären Sie die Begriffe extensive und intensive Zustandsgröße. Was gilt für das Vorzeichen der zweiten Ableitungen thermodynamischer Potentiala nach extensiven oder nach intensiven Zustandsgrößen und mit welcher Begründung?

f)

Benennen Sie die drei Üblichen Gesamtheiten (Ensembles) und geben Sie jeweils die zugehörige thermodynamische Größe an, die bei diesen Gesamtheiten minimal oder maximal wird.

Welche natürlichen Variablen haben diese Größen jeweils?

Aufgabe 2: Auf noch einer anderen Welt

Betrachten Sie in drei Dimensionen ein System von N wechselwirkungsfreien, ununterscheidbaren Teilchen, deren Energie durch

$$\epsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(z)$$

gegeben ist. Das Potential $V(z)$ sei

$$V(z) = k\sqrt{z}$$

für $0 \leq z \leq \infty$ und mit $k > 0$.

a)

Leiten Sie die Einteilchenzustandssumme Z_1 als Funktion der thermischen de-Broglie-Wellenlänge λ_β her. Wie lautet die Zustandssumme des gesamten Systems?

b)

Bestimmen Sie daraus die mittlere Gesamtenergie.

c)

Bestimmen Sie die Entropie S und die freie Energie F.

Hinweis: Zur Berechnung des Zustandssummenintegrals substituieren Sie $\beta k\sqrt{z} = u$.

Aufgabe 3: Quantenmechanischer harmonischer Oszillator in 2D

Der Hamilton-Operator eines harmonischen Oszillators in zwei Dimensionen sei in zweiter Quantisierung durch

$$H = \hbar\omega_0 \sum_{i=0}^{2} \left(b_i^\dagger b_i + \frac{1}{2} \right)$$

gegeben.

a)

Begründen Sie, dass zur Energie $E_m = (m+1)\hbar\omega_0$ der Entartungsgrad durch

$$g(m) = m + 1$$

gegeben ist.

b)

Berechnen Sie nun im Limes $\hbar\omega_0 \ll E$ die Zustandssumme

$$Z = \int_0^\infty D(E) \exp(-\beta E) \mathrm{d}E \, .$$

Dafür benötigen Sie die Zustandsdichte

$$D(E := \sum_{m=0}^{\infty} \delta\left(E - (m+1)\hbar\omega_0\right) g(m) \, .$$

Sie können $D(E)$ am einfachsten berechnen, wenn Sie die Summe in ein Integral umschreiben, wofür Sie $\hbar\omega_0 \ll E$ ausnutzen sollen.

c)

Berechnen Sie die Entropie S f+ür $\hbar\omega_0 \ll k_B T$.

Aufgabe 4: Informationsentropie

Die allgemeine Rechnung für ein quantenmechanisches System kann leicht auf ein Zwei-Zustands-System mit Energien ϵ_1 und ϵ_2 spezialisiert werden, bzw. auf ein $S = \frac{\hbar}{2}$-System.

a)

Bestimmen Sie – analog zur Vorlesung – die Wahrscheinlichkeiten p_i so, dass die Entropie unter den Nebenbedingungen

- $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$
- und konstanter mittlerer Energie $\tilde{\epsilon}$

maximiert wird. Was bedeutet die Maximierung der Entropie?

b)

Der Hamiltonoperator des Zweiniveausystems sei durch $\hat{H} = \mu B \hat{S}_z$ gegeben. Dabei ist μ das magnetische Moment, B das Magnetfeld und S_z die z-Komponente des Spinoperators. Identifizieren Sie die Energien ϵ_i und bestimmen Sie die freie Energie F.

c)

Geben Sie die Magnetisierung $M = \frac{\partial F}{\partial B}\Big|_T$ als Funktion von β, μ und B an.

d)

Berechnen Sie die Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}\Big|_{B=0}$.

Aufgabe 5: Dichteoperatoren

Für ein Drei-Zustandssystem mit Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

seien zur Zeit $t = 0$ die folgenden Dichteoperatoren gegeben:

$$p_\alpha = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_\gamma = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a)

Geben Sie für jeden der drei Dichteoperatoren an, ob er i) *rein* und ii) *zeitlich konstant* ist. Begründen Sie Ihre Angaben.

b)

Berechnen Sie für alle drei Fälle $\langle H \rangle$ und $\langle H^2 \rangle$ für $t = 0$.

c)

Hängen die Erwartungswerte $\langle H \rangle$ und $\langle H^2 \rangle$ im Allgemeinen von t ab? (Begründung!)

Aufgabe 6: Thermodynamische Relationen

Leiten Sie die folgenden thermodynamischen Relationen ab:

a)

$$\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V$$

b)

$$\left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V$$

c)

$$\frac{\kappa_S}{\kappa_T} = \frac{C_V}{C_p}$$

d)

$$C_p - C_v = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}$$