TuS

Thermodynamik und Statistik

Nicolai Weitkemper
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Wintersemester 2017/2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Aufgabe 1: Kurzfragen

a)

Welche Aussagen machen der 2. und 3. Hauptsatz über die Entropie?

Geben Sie eine Version des 2. Hauptsatzes an, die den Begriff Entropie nicht enthält.

b)

Ein mit einem idealen Gas gefüllter Ballon hat ein Volumen V_{B} und der Luftdruck betrage $p_{\mathrm{L}} = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$. Nun wird dieser Ballon 10 Meter tief in Wasser abgesenkt, das sich in vollständigem thermischen Gleichgewicht mit der Luft befindet. Der Schweredruck des Wassers in Tiefe h ist $p_{\mathrm{W}} = \rho g h$ ($\rho_{\mathrm{Wasser}} = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ und rechnen Sie mit $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$). Wie groß ist das Volumen des Ballons in 10 Meter Tiefe?

c)

Wie lautet die Gibbssche Phasenregel (auftretende Größen definieren)? Wie viele Phasen können in einem zweikomponentigen System höchstens koexistieren?

d)

Wie lautet die Clausius-Clapeyron-Gleichung? Wie sind die auftretenden Größen definiert? Was sagt die Clausius-Clapeyron-Gleichung über die Steigung der Schmelzlinie von Wasser im p-T-Diagramm aus?

e)

Wie groß ist im klassischen Hochtemperaturlimes die spezifische Wärme eines linearen 3-atomigen Moleküls der Form A–A–A?

f)

Zu einem Makrozustand gehören M Mikrozustände. Wie groß ist die Entropie des Makrozustands?

g)

Ein einzelnes Teilchen befindet sich in einem Wärmebad mit Temperatur T in einem äußeren Potential $V(\vec{r})$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen bei $\vec{r}$ zu finden (bis auf einen konstanten Normierungsfaktor)?

h)

Für das Photonengas gilt das Plancksche Strahlungsgesetz

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \; .$$

Leiten Sie daraus die Gesamtenergie $E = E(T, V)$ her (bis auf einen konstanten nicht zu berechnenden Zahlfaktor in Form eines Integrals). Welche Temperaturabhängigkeit hat die spezifische Wärme?

i)

Was sind die natürlichen Variablen der Energie E und der freien Energie F? Berechnen Sie die zur Energie

$$E = p_0 V \exp\left(\frac{2S}{2k_\mathrm{B}N}\right)$$

gehörige freie Energie in ihren natürlichen Variablen. p_0 ist hierbei eine einheitenbehaftete Konstante.

j)

Wie verhält sich der Ordnungsparameter an einem diskontinuierlichen Phasenübergang? Geben Sie ein Beispiel an.

k)

Wie lautet die kanonische Dichte $\rho = \rho(q_1, \dots q_N, p_1, \dots, p_N)$ eines klassischen N-Teilchensystems mit Hamiltonfunktion $H = H(q_1, \dots q_N, p_1, \dots, p_N)$ und wie berechnen sich die Zustandssumme und die Entropie eines Systems?

Aufgabe 2: Punktteilchen in Kasten

Gegeben sei ein Punktteilchen mit der Masse m in einem zweidimensionalen Kasten $L_x \times L_y$, bei dem vor der Wand $y = 0$ ein Kastenpotential

$$\mathcal{H}_{\text{pot}}(y) = V_0 \Theta(l - y)$$

existiert (siehe Abbildung).

a)

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_k und die freie Energie F des Systems.

b)

Bestimmen Sie die mittlere potentielle Energie $\langle \mathcal{H}_{\text{pot}} \rangle$.
Für welche Potentialstärke V_0 als Funktion von L_y und l ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Bereich $\mathcal{H}_{\text{pot}} = V_0$ (grauer Bereich)

c)

Berechnen Sie die innere Energie E. Diskutieren Sie die beiden Fälle

1. $V_0 = 0$
2. $V_0 \to \infty$

und erläutern Sie jeweils das Verhalten des Punktteilchens.

Aufgabe 3: Kreisprozess

Betrachten Sie einen aus den **drei** Teilprozessen

- $1 \to 2$: adiabatische Expansion,
- $2 \to 3$: isotherme Kompression,
- $3 \to 1$: isobare Erwärmung

bestehenden Kreisprozess, der als Arbeitssubstanz ein ideales Gas verwendet.

a)

Zeichnen Sie das zugehörige p, V- sowie das zugehörige T, S-Diagramm. Kennzeichnen Sie im p, V-Diagramm für alle Teilschritte, ob Wärme oder Arbeit zu- oder abgeführt wird. Ist die Gesamtarbeit Δ positiv oder negativ?

b)

Berechnen Sie für jeden Teilschritt die Änderung der Wärme $\Delta Q_{i\to j}$ und der Arbeit $\Delta W_{i\to j}$ in Abhängigkeit der Volumina und Temperaturen sowie geeigneter thermodynamischer Koeffizienten.

c)

Drücken Sie das Verhältnis p_2/p_3 als Funktion der Volumina V_1 und V_2 aus. Verwenden Sie hierzu neben der Zustandsgleichung auch die Adiabatengleichung des idealen Gases.

Hinweis: Sie müssen sich die Eigenschaften sämtlicher Teilprozesse zunutze machen.

Aufgabe 4: Bose-Gas mit schwacher Wechselwirkung

Bei niedrigen Temperaturen können die Entropie S und die isotherme Kompressibilität κ_T eines schwach wechselwirkenden Bose-Gases beschrieben werden durch Hierbei sind a und c Konstanten. Im Grenzfall niedriger Temperaturen und großer Volumen verschwinde der Druck p.

a)

Wie lautet das totale Differential der freien Energie $F(T, V)$ bei konstanter Teilchenzahl? Welche Maxwell-Relation können Sie daraus herleiten? Tun Sie dies.

b)

Bestimmen Sie die Zustandsgleichung des Drucks $p(T, V)$ in Abhängigkeit von Temperatur und Volumen. Stellen Sie hierzu zunächst das vollständige Differential von $p(T, V)$ auf und integrieren Sie anschließend.

c)

Leiten Sie ausgehend von

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \rho}\bigg|_T$$

einen Ausdruck für die isotherme Kompressibilität κ_T her, der die zweite Ableitung eines thermodynamischen Potentials nach einer Zustandsvariablen beinhaltet.

Aufgabe 5: Dichteoperator eines Zwei-Niveau-Systems

Ein quantenmechanisches System besitzt zwei Energieniveaus $\epsilon_1 = 0 < \epsilon_2$. Es gibt keine Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Niveaus und das System ist in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Der Hamilton-Operator $\hat{H}$ des System lautet also in Matrix-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} .$$

a)

Geben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ in Matrixdarstellung an.

b)

Berechnen Sie den Dichteoperator in den Grenzfällen $T \to 0$ und $T \to \infty$. Handelt es sich jeweils um einen reinen Zustand?

c)

Berechnen Sie die Entropie S und die innere Energie E.

d)

Betrachten Sie S und E für die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \to \infty$. Interpretieren Sie die Ergebnisse dieser Grenzfälle.

Aufgabe 6: Reales Gas

Die Zustandsgleichung eines realen gases wird um einen Punkt im p, V-Diagramm entwickelt. Es ergibt sich folgende näherungsweise Zustandsgleichung

$$p(t, v) = p_0 - Atv - Bv^3$$

mit $v \equiv V - V_0$ und $t \equiv T - T_0$. A und B seien positive einheitenbehaftete Konstanten, welche die richtige Dimensionalität gewährleisten.

a)

Fertigen Sie je eine Skizze von $p(t, v)$ für $t < 0$, $t = 0$ und $t > 0$ an.

b)

Für welche t tritt thermodynamische Instabilität auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Betrachten Sie im Folgenden nur den instabilen Fall und zeichnen Sie die berechneten Größen in Ihre Skizze ein.

c)

Wie lauten die Bestimmungsgleichungen für eine Maxwellkonstruktion um thermodynamische Stabilität zu erreichen? Welcher Druck p_{pg} erfüllt die Bestimmungsgleichungen?

d)

Zwischen welchen Volumina V_+ und v_- findet der Phasenübergang statt?

e)

Berechnen Sie die Grenzen der Bereiche, in denen metastabile Zustände auftreten können.

Aufgabe 7: Abstraktes Fermigas

Diese Aufgabe behandelt ein abstraktes, ideales Fermigas aus Spin-½-Teilchen mit der allgemeinen Dispersionsrelation

$$\tilde{\epsilon}(\vec{p}) = \frac{1}{\alpha}|\vec{p}|^{\gamma}, \quad \gamma \geq 1 \ .$$

α ist eine Konstante mit passender Einheit. Betrachten Sie das Gas in drei Dimensionen bei der Temperatur $T = 0$.

a)

Berechnen Sie die Fermienergie ε_{F} und die Fermiwellenzahl k_{F}. *Kontrollergebnis:*

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{1}{\alpha}\left(3\pi^2\hbar^3\frac{N}{V}\right)^{\gamma/3}$$

b)

Die Einteilchenzustandsdichte ist durch

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2}{V}\sum_{\vec{p}}\delta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}(\vec{p})) = \frac{\alpha^{3/\gamma}}{\pi^2\hbar^3}\frac{\varepsilon^{(3-\gamma)/\gamma}}{\gamma}$$

gegeben. Bestimmen Sie hiermit die Grundzustandsenergie $E_0(N,V)$. Wie lautet der Koeffizient η in

$$\frac{E_0}{N} = \eta\varepsilon_{\mathrm{F}} \ ?$$

c)

Berechnen Sie den inneren Druck $P_0(N,V)$ des Fermi-Gases. *Tipp:* Sie dürfen das Kontrollergebnis **(2)** und Formel **(4)** verwenden.