

TuS

# **Thermodynamik und Statistik**

Nicolai Weitkemper  
nicolai.weitkemper@tu-dortmund.de

Wintersemester 2016/2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Aufgabe 1: Kurzfragen

a)

Betrachten Sie ein System  $B$  das Sie in zwei Teile  $B_1$  und  $B_2$  aufteilen. Wenn sich die Systeme isoliert voneinander im Gleichgewicht befinden, wie setzt sich die Gesamtentropie  $S$  des Systems  $B$  aus den Teilentropien  $S_1$  und  $S_2$  zusammen? Was können Sie über die Gesamtentropie  $S$  des Systems  $B$  sagen, wenn die Teilsysteme gekoppelt werden? Wird sie größer, gleich oder kleiner sein als die Gesamtentropie ohne Kopplung?

b)

Wie lautet die Zustandsgleichung des idealen Gases? Welche Korrekturen werden für ein reales Gas benötigt? Geben Sie auch den physikalischen Ursprung der Korrekturterme an.

c)

Von welchen thermodynamischen Variablen hängt die freie Energie  $F$  ab? Durch welche Transformation erhält man die innere Energie  $U$  und von welchen Variablen hängt  $U$  ab? Wie gewinnt man die Entropie  $S$  und den Druck aus  $F$ ? Ist  $F$  eine extensive oder eine intensive Größe und warum?

d)

Wie lautet die mittlere Besetzung  $n$  eines bosonischen Zustands mit der Energie  $\epsilon$  bei der Temperatur  $T$ ? Wann benötigen Sie für die Besetzung ein chemisches Potential? Wenn Sie die Dispersion des Lichts zugrunde legen, wie lautet dann die Energiedichte einer thermischen Lichtwelle (Plancksches Strahlungsgesetz)?

*Hinweis:* Summieren Sie alle  $k$ -Moden mit konstanter Energie auf und berücksichtigen Sie, dass das Licht zwei Polarisationsrichtungen besitzt.

e)

Wie berechnet man die kanonische Zustandssumme  $Z$  für ein diskretes System? Geben Sie den Wert von  $Z$  für ein System von  $N$  unabhängigen Spins  $s = \frac{1}{2}$  in einem endlichen externen Magnetfeld  $B$  an. Wie lautet die Entropie  $S$  des Systems im Grenzfall  $B \rightarrow 0$ ? Woran sehen Sie, dass die Entropie extensiv ist?

f)

Wie unterscheiden sich die beiden spezifischen Wärmen  $C_p$  und  $C_v$ ? Wie lautet die Verknüpfung von Entropie und spezifischer Wärme? Aus welchen verschiedenen thermo-

dynamischen Potentialen gewinnt man  $C_v$  oder  $C_p$  und warum?

## Aufgabe 2: Klassisches Gas im Potential

$N$  nicht miteinander wechselwirkende unterscheidbare Teilchen der Masse  $m$  befinden sich im Inneren eines *endlichen* Würfels mit Seitenlänge  $L$  mit dem Potential

$$V(\vec{r}) = \alpha(x + y + z), \quad \alpha > 0.$$

Der Würfel befindet sich im ersten Quadranten des Koordinatensystems und eine seiner Ecken berührt den Koordinatenursprung.

**a)**

Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme

**b)**

Berechnen Sie aus der kanonischen Zustandssumme die freie Energie  $F$ . Geben Sie den Zusammenhang zwischen der freien Energie  $F$  und dem Druck  $p$  an und berechnen Sie den Druck  $p$ .

**c)**

Wie lautet der Druck im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$ ? Entwickeln Sie dazu die Exponentialfunktion bis zur ersten Ordnung. Welche Zustandsgleichung ergibt sich?

### Aufgabe 3: Kreisprozess

Betrachten Sie folgenden Kreisprozess, der sich aus den vier angegebenen Teilprozessen zusammensetzt. Das Arbeitsmaterial ist ein ideales Gas.

- $1 \rightarrow 2$ : adiabatische Kompression
- $2 \rightarrow 3$ : isochore Druckerhöhung
- $3 \rightarrow 4$ : adiabatische Expansion
- $4 \rightarrow 1$ : isochore Druckverringerung

**a)**

Zeichnen und beschriften Sie das  $pV$ - und das  $TS$ -Diagramm für diesen Kreisprozess.

*Hinweis:* Für adiabatische Prozesse gilt die Adiabatengleichung

$$pV^\gamma = \text{const.} ,$$

wobei  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$  für ein ideales Gas ist.

**b)**

Berechnen Sie für jeden Teilprozess die verrichtete Arbeit und Wärmeänderung. Sie brauchen nicht explizit angeben, ob dem Gas Wärme/Arbeit zu- oder abgeführt wird.

**c)**

Drücken Sie die gesamte Arbeit  $W_{\text{ges}}(V_1, V_2, p_2, p_3)$  als Funktion der beiden Volumina sowie der beiden Drücke  $p_2$  und  $p_3$  aus.

**d)**

Berechnen Sie den Wirkungsgrad  $\eta(V_1, V_2)$  als Funktion der beiden Volumina.

## Aufgabe 4: Drei-Zustand-System

Wir betrachten ein Teilchen in einem Zwei-Niveau-System mit den Energieniveaus  $\epsilon_0$  und  $\epsilon_1$  ( $\epsilon_0 < \epsilon_1$ ). Der angeregte Zustand  $\epsilon_1$  sei zweifach entartet und der Grundzustand  $\epsilon_0$  sei nicht entartet. Der Hamiltonoperator enthalte keine Übergänge zwischen den beiden Niveaus. Das System stehe in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur  $T$ .

**a)**

Geben Sie den Hamiltonoperator sowie den Dichteoperator im thermischen Gleichgewicht explizit als Matrizen an.

Setzen Sie nun für die folgenden Aufgabenteile  $\epsilon_0 = 0$  und  $\epsilon_1 = \epsilon$ .

**b)**

Beschreibt der Dichteoperator

- (i) im Grenzfall  $T \rightarrow 0$
- (ii) im Grenzfall  $T \rightarrow \infty$

einen reinen Zustand? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

**c)**

Bestimmen Sie die innere Energie  $U$  und die spezifische Wärme  $C_V$ . Skizzieren Sie den Verlauf der spezifischen Wärme  $C_V$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$ .

## Aufgabe 5: Thermodynamische Potentiale

Betrachten Sie eine Substanz, die durch die beiden Zustandsgleichungen

$$pV = \alpha \left( \frac{TV^{1/3}}{\sqrt{6}} \right)^2$$

und

$$T = \left( \frac{\sqrt{\tau S}}{V^{1/3} \sqrt{\alpha}} \right)^2$$

charakterisiert ist, wobei  $\tau \in \mathbb{R}$ , und  $\alpha = 1 \text{ N K}^2/\text{m}$  eine Einheiten-behaftete Konstante ist.

**a)**

Wie lautet das totale Differential der inneren Energie  $E$  in ihren natürlichen Variablen? Drücken Sie dabei alle auftretenden partiellen Ableitungen der Energie durch die Ihnen bekannten thermodynamischen Größen aus. Leiten Sie dann daraus das vollständige Differential der freien Energie  $F$  her. Was sind hier die natürlichen Variablen?

Im Folgenden soll das Differential der freien Energie  $F$  bei konstanter Teilchenzahl untersucht werden.

**b)**

Für welche Wahl von  $\tau$  sind die Zustandsgleichungen sinnvoll, wenn sich diese aus dem vollständigen Differential der freien Energie  $F$  ergeben sollen? *Lösen Sie diese Teilaufgabe ohne zu integrieren.*

**c)**

Rekonstruieren Sie für diese Wahl von  $\tau$  die freie Energie  $F$  aus den Zustandsgleichungen. Achten Sie darauf, diese in den natürlichen Größen anzugeben!

Die spezifische Wärme bei konstantem Volumen ist durch

$$C_V = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_S \right) \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T \right)$$

gegeben.

**d)**

Bestimmen Sie die spezifische Wärme als zweite Ableitung der freien Energie und berechnen Sie  $C_V$ . *Geben Sie in jedem Schritt explizit die Maxwell-Relation an, die Sie benutzt haben.*

## Aufgabe 6: Ideale Quantengase

Im Folgenden wollen wir ideale Quantengase mit einem vereinfachten Modell beschreiben, in welchem die Teilchen einen einzigen Zustand der Energie  $\epsilon$  besetzen können.

**a)**

Welche Werte kann die Besetzungszahl für Bosonen beziehungsweise Fermionen in diesem System annehmen?

**b)**

Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme  $Z_{\text{gk}}$  und das großkanonische Potential  $\Phi$  für den bosonischen und den fermionischen Fall.

*Sollten Sie diesen Aufgabenteil nicht lösen können, dürfen Sie mit folgendem Ergebnis weiter rechnen:*

$$\Phi = \pm k_B T \ln(1 \mp e^{\beta(\mu - \epsilon)})$$

**c)**

Berechnen Sie nun die mittlere Besetzungszahl  $N(T, \epsilon)$ .

**d)**

Welche Teilchenzahl ergibt sich im verdünnten Limes (Fugazität  $z \ll 1$ )?

**e)**

Wie heißen die Funktionen, welche Sie in Aufgabenteil **c)** und **d)** berechnet haben? Skizzieren Sie deren Verlauf.

*Diesen Aufgabenteil können Sie auch lösen, ohne die vorherigen Teilaufgaben explizit berechnet zu haben.*



## Aufgabe 7: Drei identische Teilchen

Betrachten Sie ein System aus drei identischen, nicht-wechselwirkenden Teilchen. Jedes der Teilchen kann genau zwei verschiedene Zustände mit den (Einteilchen-)Energien  $\epsilon_1 = -\epsilon$  und  $\epsilon_2 = \epsilon$  einnehmen. Das System ist in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur  $T$ .

**a)**

Wie viele verschiedene 3-Teilchenzustände gibt es für die Fälle, dass die Teilchen

- (i) unterscheidbar
- (ii) Bosonen mit Spin 0
- (iii) Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$

sind?

**b)**

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des Systems und seine innere Energie  $U$  als Funktion von  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  für die drei Fälle.

**c)**

Berechnen Sie die Grenzfälle der inneren Energie für hohe und tiefe Temperaturen für die drei Fälle und interpretieren Sie die Ergebnisse physikalisch.