V106

Gekoppelte Pendel

Christopher Breitfeld
christopher.breitfeld@tu-dortmund.de

Henry Krämerkämper
henry.kraemerkaemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.11.2020 Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Versuch "gekoppelte Pendel", welcher im Folgenden erklärt und ausgewertet wird, behandelt die Schwingung zweier, durch eine Feder gekoppelte Pendel in verschiedenen Konstellationen.

2 Theorie

2.1 Der harmonische Oszillator

Ein harmonischer Oszillatorist ein physikalisches System, welches eine Schwingung ausführt. Das einfachste Beispiel hierfür ist eine Feder, an welcher eine Masse m um die Ruhelage x_0 oszilliert. Ein harmonischer Oszillator kann dabei über die Differentailgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \tag{1}$$

definiert werden. Im mechanischen Fall ist dabei x der Ort, $\ddot{x}$ die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, also die Beschleunigung, und ω eine Konstante, welche weitere Informationen über das System, wie zum Beispiel die Masse m, ergänzt. Zudem wird sich noch zeigen, dass ω die Frequenz der Schwingung beschreibt.
Die Differentailgleichung kann bei der Feder aus dem zweiten Newton'schen Axiom

$$F = m \cdot \ddot{x} \tag{2}$$

hergeleitet werden. Dafür wird das zweite Newton'sche Axiom der rücktreibenden Kraft der Feder gleichgesetzt. Die Gleichheit der beiden Kräfte folgt aus dem Reaktionsprinzip. Die rücktreibende Kraft wird bei dem obrigen Beispiel durch das Hook'sche Gesetz beschrieben

$$F = -k \cdot x. \tag{3}$$

Dabei ist k die Federkonstante der Feder.
Durch das Gleichsetzen erhält man:

$$m \cdot \ddot{x} = k \cdot x \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \tag{4}$$

Gesucht ist nun die Funktion $x(t)$, die die Differentailgleichung löst. Man wählt nun den Ansatz

$$x(t) = A \cdot cos(\omega \cdot t) + B \cdot sin(\omega \cdot t) \tag{5}$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \tag{6}$$

A und B sind dabi Konstanten, die durch die Anfangsbedingung bestimmt werden. Einsetzen des Ansatzes (6) in die Differentailgleichung (4) ergibt dann:

$$A \cdot cos(\omega \cdot t) + B \cdot sin(\omega \cdot t)(\frac{k}{m} - \omega^2) = 0 \tag{7}$$

Da der erste Fraktor der Gleichung nicht für alle Zeiten $t = 0$ sein kann, muss der zweite Faktor null ergeben

$$\frac{k}{m} - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m} = \omega^2. \tag{8}$$

3 Durchführung

4 Auswertung

5 Fehlerrechnung

5.1 Berechnung des Mittelwerts

Für den Mittelwert gilt

$$\bar{x}_\mathrm{k} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_\mathrm{k}. \tag{9}$$

5.2 Berechnung der Standardabweichung

Die Standardabweichung berechnet sich wie folgt:

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(x_\mathrm{k} - \bar{x})^2} \tag{10}$$

mit Messwerten x_k mit zufälligem Fehler.

5.3 Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Für n Messgrößen n_1, n_2, ..., n_N mit der Unsicherheit Δn_1, Δn_2, ..., Δn_N. Für die Unsicherheit der abgeleiteten Größe gilt

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial n_1}\right)^2 (\Delta n_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial n_2}\right)^2 (\Delta n_2)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial n_\mathrm{n}}\right)^2 (\Delta n_\mathrm{n})^2} \tag{11}$$

5.4 Lineare Regression

Für $(x_1,\, y_1 \pm \sigma)$, ..., $(x_\mathrm{N},\, y_\mathrm{N} \pm \sigma)$ linear abhängige Größen und der Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ ergibt sich die Regression zu

$$\hat{m} = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \tag{12}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \tag{13}$$

Für die Unsicherheit σ_m^2 und σ_b^2 gilt dann

$$\sigma_\mathrm{m}^2 = \frac{\sigma^2}{N(\bar{x^2} - \bar{x}^2)} \tag{14}$$

$$\sigma_\mathrm{b}^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x^2}}{N(\bar{x^2} - \bar{x}^2)} \tag{15}$$

6 Diskussion