V106

Gekoppelte Pendel

Christopher Breitfeld
christopher.breitfeld@tu-dortmund.de

Henry Krämerkämper
henry.kraemerkaemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.11.2020 Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Versuch "gekoppelte Pendel", welcher im Folgenden erklärt und ausgewertet wird, behandelt die Schwingung zweier, durch eine Feder gekoppelte Pendel in verschiedenen Konstellationen.

2 Theorie

2.1 Der harmonische Oszillator

Ein harmonischer Oszillatorist ein physikalisches System, welches eine Schwingung ausführt. Das einfachste Beispiel hierfür ist eine Feder, an welcher eine Masse m um die Ruhelage x_0 oszilliert. Ein harmonischer Oszillator kann dabei über die Differentailgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \tag{1}$$

definiert werden. Im mechanischen Fall ist dabei x der Ort, $\ddot{x}$ die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, also die Beschleunigung, und ω eine Konstante, welche weitere Informationen über das System, wie zum Beispiel die Masse m, ergänzt. Zudem wird sich noch zeigen, dass ω die Frequenz der Schwingung beschreibt.
Die Differentailgleichung kann bei der Feder aus dem zweiten Newton'schen Axiom

$$F = m \cdot \ddot{x} \tag{2}$$

hergeleitet werden. Dafür wird das zweite Newton'sche Axiom der rücktreibenden Kraft der Feder gleichgesetzt. Die Gleichheit der beiden Kräfte folgt aus dem Reaktionsprinzip. Die rücktreibende Kraft wird bei dem obrigen Beispiel durch das Hook'sche Gesetz beschrieben

$$F = -k \cdot x. \tag{3}$$

Dabei ist k die Federkonstante der Feder. Durch das Gleichsetzen von (**??**) und (**??**) erhält man:

$$m \cdot \ddot{x} = k \cdot x \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \tag{4}$$

Gesucht ist nun die Funktion $x(t)$, die die Differentailgleichung löst. Man wählt nun den Ansatz:

$$x(t) = A \cdot cos(\omega \cdot t) + B \cdot sin(\omega \cdot t) \tag{5}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \tag{6}$$

A und B sind dabei Konstanten, die durch die Anfangsbedingung bestimmt werden. Einsetzen des Ansatzes (**??**) in die Differentailgleichung (**??**) ergibt dann:

$$A \cdot cos(\omega \cdot t) + B \cdot sin(\omega \cdot t)(\frac{k}{m} - \omega^2) = 0 \tag{7}$$

Da der erste Fraktor der Gleichung nicht für alle Zeiten $t = 0$ sein kann, muss der zweite Faktor null ergeben

$$\frac{k}{m} - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{m} = \omega^2. \tag{8}$$

Aus dem Ansatz (**??**) wird nun auch ersichtlich, dass ω die Frequenz der Schwingung beschreibt. Dies erfolgt unter anderem aus der Überlegung, dass das Produkt innherhalb des Sinus einheitenlos sein muss. Da die Zeit t in Sekunden gegeben ist, muss ω die Einheit $[\omega] = s^{-1}$ besitzen, also die Einheit einer Frequenz. Die Schwingungsdauer T des Pendles kann nun aus der Frequenz ω berechnet werden mit:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{9}$$

2.2 Das mathematische Pendel

Auch ein mathematisches Pendel ist für kleine Auslenkungen näherungsweise ein harmonischer Oszillator. Das Pendel soll dabei eine Punktmasse m am Ende eines massenlosen Fadens sein, welcher eine konstatnte Länge l hat und reibungsfrei hin und her schwingen kann. Die Differentailgleichung erlangt man wieder durch das gleichsetzen von (**??**) und der rücktreibenden Kraft des Systems. Diese ist nun aber:

$$F_{\text{rück}} = -m \cdot g \cdot sin(\phi(t)) \tag{10}$$

In (**??**) müssen wir jetzt noch die Beschleunigung $\ddot{x}$ an das Prolem anpassen. Diese ist bei einem Pendel die tangentiale Beschleunigung. Es gilt:

$$\ddot{x}(t) = l \cdot \ddot{\phi}(t) \tag{11}$$

Der Winkel $\phi(t)$ beschreibt dabei die Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t. Durch Gleihsetzen von (**??**) und (**??**) erhält man nun die Differentailgleichung

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l} sin(\phi(t)) = 0. \tag{12}$$

Die Differentailgleichung ist auf Grund des Sinus jedoch nicht linear, und deswegen weder analytisch lösbar, noch ein harmonischer Oszillator. Um die Differentailgleichung trotzdem lösen zu können, betrachten wir die Taylorfunktion des Sinus:

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{13}$$

Für $n = 0$ ergibt sich die sogenannte Kleinwinkelnäherung

$$sin(x) \approx x. \tag{14}$$

Durch diese erlangt man zumindest für kleine Winkel ϕ eine lineare Differentailgleichung der Form (**??**). Zwar macht man bei der Kleinwinkelnäherung einen Fehler, dieser ist für

kleine Winkel jedoch so gering, dass wir die Näherung für die weiteren Berechnungen verwenden. Dies bedeutet aber auch, dass im Folgenden nurnoch von kleinen AUslenkungen des Pendels ausgegangen wird!
Die Differentailgleichung lautet nun

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l}\phi(t) = 0 \tag{15}$$

und wird durch den Ansatz (**??**) gelöst. Die Frequenz ergibt sich dabei zu

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{16}$$

Die Frequenz des Pendels ist also sowohl unabhängig von der Masse m, als auch von der Auslenkung, solange diese hinreichend klein ist.

2.3 Das physikalische Pendel

Anders als bei dem mathematischen Pendel ist die Masse des physikalischen Pendels nicht in einem Punkt am Ende eines massenlosen Fadens komprimiert. Das Pendel hat nun auf der gesamten Länge eine Masse und kann beliebig geformt sein. Um die zusätzlichen Informationen in die Differentailgleichung zu integrieren, führt man die Größe des Trägheitsmoments J ein. Dieses ist definiert als:

$$J = \rho \int \vec{r}^2 \rho(\vec{r}) dV \tag{17}$$

Dabei ist ρ die Dichte des Körpers an der jeweiligen Stelle.
Die Differentailgleichung des Pendles wird dadurch zu:

$$\ddot{\phi} + \frac{mgl}{J} = 0 \tag{18}$$

Die Frequenz ändert sich zu:

$$\omega = \frac{mgl}{J} \tag{19}$$

2.4 Gekoppelte Pendel

Koppelt man zwei identische Pendel mit einer Feder, so schwingen diese nicht mehr unabhängig von einander, da die Pendel zusätzliche Kräfte auf einander auswirken. Als zusätzlichen Größen erhält man die Federkonstatnt k. Zudem sind nun zwei Längen für das System relevant, nämlich die Länge der Pendel L und der Abstand l an dem die Feder an den Pendeln befestigt ist.
Man erhält nun ein Systemaus zwei Differentailgleichungen, die zudem mit einander gekoppelt sind:

$$J\ddot{\phi}_1 = -mgl\phi_1 + kl^2(\phi_2 - \phi_1) \tag{20}$$
$$J\ddot{\phi}_2 = -mgl\phi_2 + kl^2(\phi_2 - \phi_1) \tag{21}$$

Das Differentailgleichung-System wird im Folgenden nur für drei verschiedene Anfangsbedingungen gelöst, da nur diese für den Versuch relevant sind. Die Anfangsbedingungen sind hierbei die Winkel α_1 und α_2 mit denen die Pendel zu Beginn ausgelenkt werden, und die Geschwindigkeiten v_1 und v_2, die die Pendel zu Beginn erhalten. Für die drei relevanten Fälle gilt: $v_1 = v_2 = 0$

1. Gleichsinnige Schwingung: $\alpha_1 = \alpha_2$

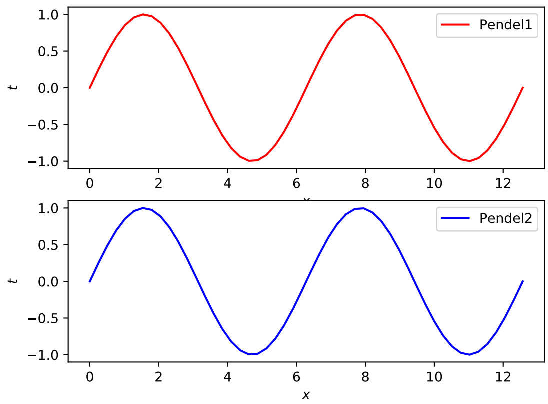

Abbildung 1: Amplituden in Abhängigkeit von t bei gleichsinniger Schwingung

2. Gegensinnige Schwingung: $\alpha_1 = -\alpha_2$

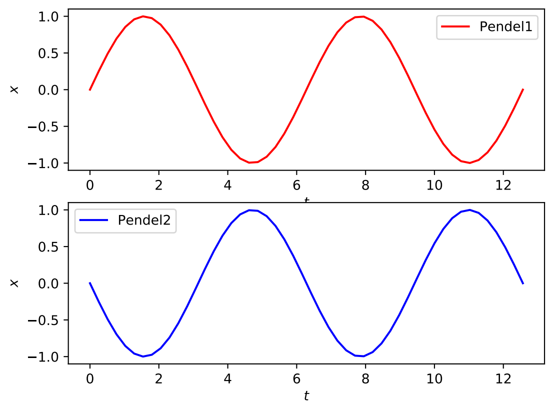

Abbildung 2: Amplituden in Abhängigkeit von t bei gegensinniger Schwingung

3. Gekoppelte Schwingung: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$

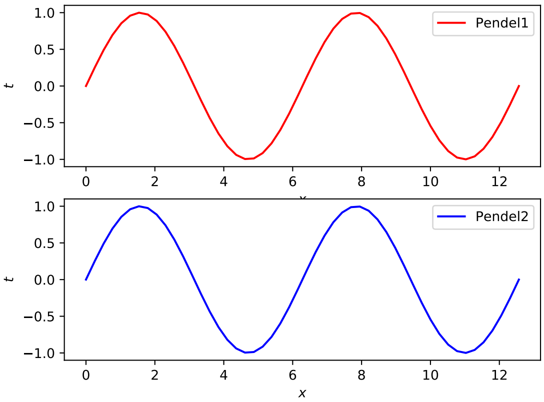

Abbildung 3: Amplituden in Abhängigkeit von t bei gekoppelter Schwingung

3 Durchführung

4 Auswertung

5 Fehlerrechnung

5.1 Berechnung des Mittelwerts

Für den Mittelwert gilt

$$\bar{x}_\mathrm{k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_\mathrm{k}. \tag{22}$$

5.2 Berechnung der Standardabweichung

Die Standardabweichung berechnet sich wie folgt:

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N} (x_\mathrm{k} - \bar{x})^2} \tag{23}$$

mit Messwerten x_k mit zufälligem Fehler.

5.3 Fehlerfortpflanzung nach Gauß

Für n Messgrößen n_1, n_2, ..., n_N mit der Unsicherheit Δn_1, Δn_2, ..., Δn_N. Für die Unsicherheit der abgeleiteten Größe gilt

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial n_1}\right)^2 (\Delta n_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial n_2}\right)^2 (\Delta n_2)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial n_\mathrm{n}}\right)^2 (\Delta n_\mathrm{n})^2} \tag{24}$$

5.4 Lineare Regression

Für $(x_1,\, y_1 \pm \sigma)$, ..., $(x_\mathrm{N},\, y_\mathrm{N} \pm \sigma)$ linear abhängige Größen und der Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ ergibt sich die Regression zu

$$\hat{m} = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \tag{25}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \tag{26}$$

Für die Unsicherheit σ_m^2 und σ_b^2 gilt dann

$$\sigma_\mathrm{m}^2 = \frac{\sigma^2}{N(\bar{x^2} - \bar{x}^2)} \tag{27}$$

$$\sigma_\mathrm{b}^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x^2}}{N(\bar{x^2} - \bar{x}^2)} \tag{28}$$

6 Diskussion