802

Fourier Synthese

Samuel Haefs
samuel.haefs@tu-dortmund.de

Max Koch
max.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 22.10.2019

Abgabe: 29.10.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Jede periodische Funktion läßt sich in eine Reihe aus sin- und cos-Termen entwickeln (Fourierreihe)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_k \cdot cos(\omega_k t) + B_k \cdot sin(\omega_k t)) \tag{1}$$

mit

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \tag{2}$$

2 Fourier-Zerlegung der Funktion |sin(x)|

2.1 Berechnung der Integrale

Im folgenden soll die Funktion $f(x) = |sin(x)|$ mit einer Fourierreihe angenähert werden. Die Koeffizienten sind definiert als

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot cos(\omega_k \cdot t) \, \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot sin(\omega_k \cdot t) \, \mathrm{d}t \tag{4}$$

A_0 und B_0 sind seperat definiert

$$A_0 = \frac{1}{T} \int f(t) \, \mathrm{d}t \tag{5}$$

$$B_0 = 0 \tag{6}$$

Die Funktion $|sin(x)|$ erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ und ist somit eine gerade Funktion. Somit ist unser $B_k = 0$. Zunächst wählen wir $T = 2\pi$. Daraus folgt für A_0 und A_k

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |sin(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \left[-cos(t) sgn(sin(t))\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.6366197723675814 \tag{7}$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |sin(t)| \cdot cos(\omega_k \cdot t) \, \mathrm{d}t \tag{8}$$

Die Funktion $|sin(x)|$ ist π-periodisch und hat bei $x = 0$ eine Nullstelle. Wir integrieren nun über eine, statt wie zuvor über zwei Perioden. Es gilt $\int_{-\pi}^{0} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$ erhalten wir zusätlich einen Faktor 2

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |sin(t)| \cdot cos(\omega_k \cdot t) \, \mathrm{d}t \tag{9}$$

Es gilt $|sin(x)| = sin(x)$ im Intervall $I = [0, \pi]$, so können wir unser Integral vereinfachen

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} sin(t) \cdot cos(\omega_k \cdot t) \, \mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\Rightarrow A_k = \frac{2}{\pi}\left[\frac{cos((\omega_k-1)t)}{2(w-1)} - \frac{cos((\omega_k+1)t)}{2(\omega_k^2+1)}\right]_0^\pi \tag{11}$$

mit $\omega_k = k$ (2) und Grenzen eingesetzt erhalten wir

$$A_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{cos(2k\pi-\pi)}{4k-2} - \frac{cos(2k\pi+\pi)}{4k+2} - \frac{cos(0)}{4k-2} + \frac{cos(0)}{4k+2}\right) \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow A_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{4k-2} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k+2}\right) \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow A_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-8}{(4k-2)(4k+2)}\right) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow A_k = \frac{4}{-4k^2\pi+\pi} \tag{15}$$

2.2 Wertetabelle für die Koeffizienten

Für das online-Experiment werden 17 Koeffizienten benötigt um die Regler einzustellen

k	A_k
0	0.6366197723675814
1	-4.24413182e-01
2	-8.48826363e-02
3	-3.63782727e-02
4	-2.02101515e-02
5	-1.28610055e-02
6	-8.90377304e-03
7	-6.52943356e-03
8	-4.99309625e-03
9	-3.94191810e-03
10	-3.19107655e-03
11	-2.63610672e-03
12	-2.21432964e-03
13	-1.88628081e-03
14	-1.62610414e-03
15	-1.41628425e-03
16	-1.24461344e-03
17	-1.10237190e-03

2.3 Plot

Wir erhalten folgenden Plot

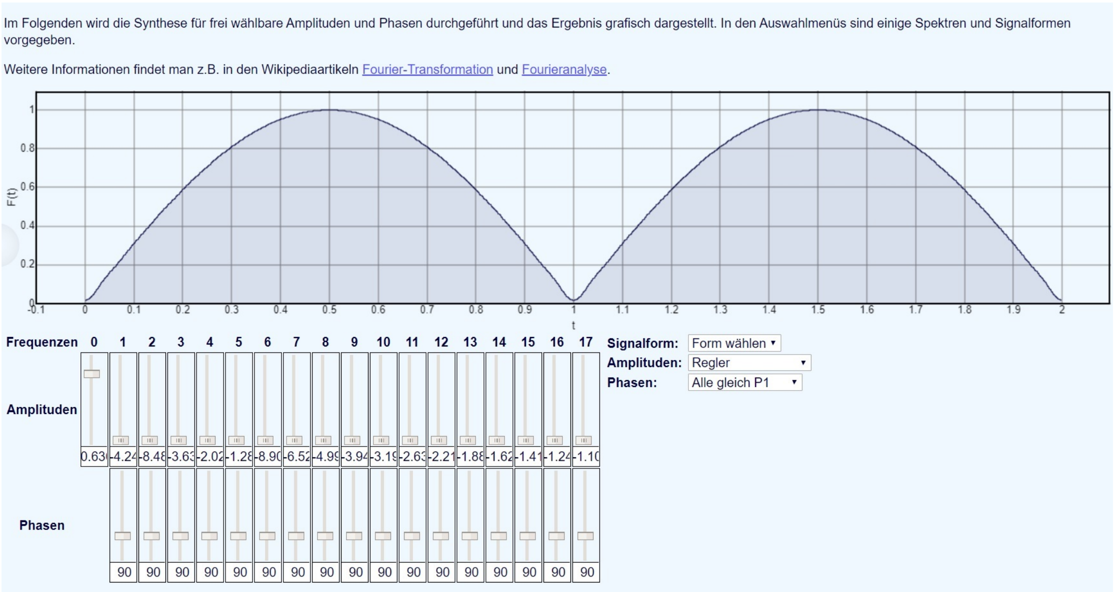

Abbildung 1: Fouriersynthese von $|sin(x)|$. (Quelle: www.j-berkemeier.de)

3 Fourier-Zerlegung der Funktion f(x)=x

3.1 Berechnung der Integrale

Im folgenden soll die Funktion $f(x) = |x|$ für $-\pi < x < \pi$ mit einer Fourierreihe angenähert werden. Die Koeffizienten sind definiert als

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,cos(\omega_k\,t)\,dt \tag{16}$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,sin(\omega_k\,t)\,dt \tag{17}$$

Zunächst wird der Koeffizient A_k berechnet, dafür $t\ -\pi < t < \pi$ gilt, ist $T = 2\pi$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,cos(\omega_k\,t)dt \tag{18}$$

Durch eine partielle Integration ergibt sich für A_k

$$A_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(\omega_k\,t)}{\omega_k} + \frac{cos(\omega_k\,t)}{\omega_k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} \tag{19}$$

Nach einsetzten der Grenzen ergibt sich für A_k

$$A_k = \frac{2\,sin(\pi k)}{\omega_k} = 0 \tag{20}$$

Nun zu B_k

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,sin(\omega_k t)\,dt \tag{21}$$

Durch eine partielle Integration ergibt sich für B_k

$$B_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\,cos(\omega_k\,t)}{\omega} + \frac{sin(\omega_k t)}{\omega_k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} \tag{22}$$

Nach einsetzten der Grenzen fällt die sinus Funktion und für B_k ergibt sich

$$B_k = \frac{-2\,(-1)^k}{k} \tag{23}$$

3.2 Wertetabelle für die Koeffizienten

Damit ergeben sich folgende Werte für den Koeffizient B_k

k	A_k
0	0
1	-1.0
2	0.6666666666666666
3	-0.5
4	0.4
5	-0.3333333333333333
6	0.2857142857142857
7	-0.25
8	0.2222222222222222
9	-0.2
10	0.18181818181818182
11	-0.16666666666666666
12	0.15384615384615385
13	-0.14285714285714285
14	0.13333333333333333
15	-0.125
16	0.11764705882352941
17	0.1111111111111111

3.3 Plot

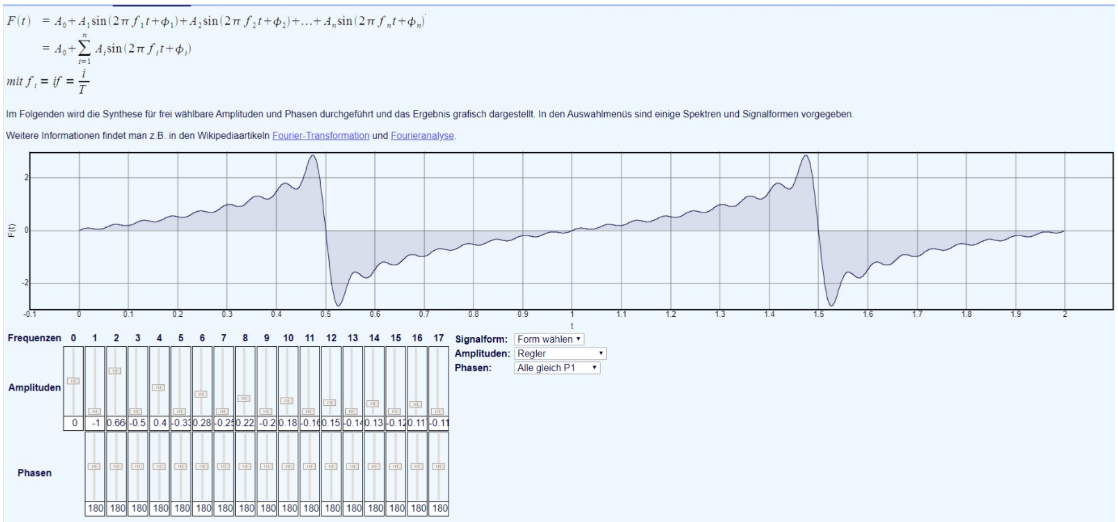

Abbildung 2: Die Funktion mit eingesetzten Koeffizienten auf der Website