802

Fourier Synthese

AUTOR A
samuel.haefs@tu-dortmund.de

AUTOR B
max.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 22.10.2019

Abgabe: 29.10.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Jede periodische Funktion läßt sich in eine Reihe aus sin- und cos-Termen entwickeln (Fourierreihe)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_k \cdot cos(\omega_k t) + B_k \cdot sin(\omega_k t)) \tag{1}$$

mit

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \tag{2}$$

2 Fourier-Zerlegung der Funktion |sin(x)|

Im folgenden soll die Funktion $f(x) = |sin(x)|$ mit einer Fourierreihe angenähert werden. Die Koeffizienten sind definiert als

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot cos(\omega_k \cdot t) dt \tag{3}$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot sin(\omega_k \cdot t) dt \tag{4}$$

Die Funktion $|sin(x)|$ erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ und ist somit eine gerade Funktion. Somit ist unser $B_k = 0$. Zunächst wählen wir $T = 2\pi$. Somit ist $\omega_k = k$. Daraus folgt für A_k

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |sin(t)| \cdot cos(\omega_k \cdot t) dt \tag{5}$$

Die Funktion $|sin(x)|$ ist π-periodisch und hat bei $x = 0$ eine Nullstelle. Wir integrieren nun über eine Periode. Damit das Ergebnis weiterhin stimmt, erhalten wir zusätlich einen Faktor 2.

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |sin(t)| \cdot cos(\omega_k \cdot t) dt \tag{6}$$

Es gilt $|sin(x)| = sin(x)$ im Intervall $I = [0, \pi]$, so können wir unser Integral vereinfachen

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} sin(t) \cdot cos(\omega_k \cdot t) dt \tag{7}$$

$$\Rightarrow A_k = \left[\frac{\omega_k sin(t) sin(\omega_k t) + cos(t) cos(\omega_k t)}{\omega_k^2 - 1} \right]_0^{\pi} \tag{8}$$