

V354

# **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

David Rolf

david.rolf@tu-dortmund.de

Jonah Blank

jonah.blank@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.01.2018

Abgabe: 23.01.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Das Geiger-Müller-Zählrohr (GMZ) . . . . .	3
2.2	Totzeit eines Geiger-Müller-Zählrohres . . . . .	4
2.2.1	Nachentladungen und Charakteristik des Geiger-Müller-Zählrohrs .	5
2.2.2	Totzeit-Bestimmung: Zwei-Quellen-Methode . . . . .	6
2.3	Freigesetzte Ladungsmenge pro eindringendem Teilchen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Charakteristik des GMZ . . . . .	6
3.2	Tot- und Erholungszeit des GMZ . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Die Zählrohr-Charakteristik . . . . .	9
4.2	Bestimmung der Totzeit . . . . .	11
4.3	Bestimmung der freigesetzten Ladungsmenge pro einfallendem Teilchen .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist die Plateau-Steigung und die Totzeit eines Geiger-Müller-Zählrohrs, sowie die pro Teilchen freigesetzte Ladungsmenge zu bestimmen. Darüber hinaus wird die Erholungszeit gemessen.

## 2 Theorie

### 2.1 Das Geiger-Müller-Zählrohr (GMZ)

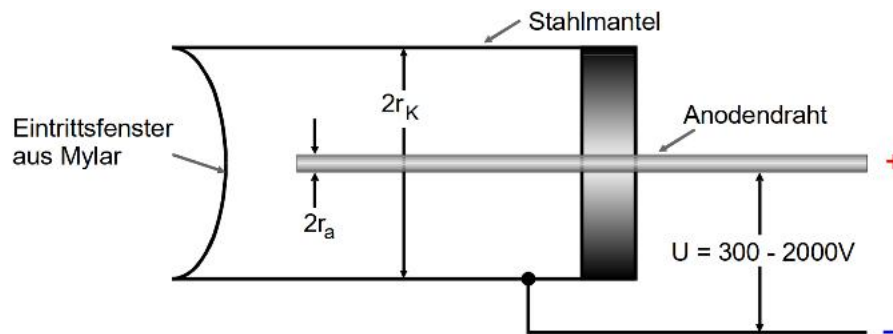


Abbildung 1: Aufbau eines Geiger-Müller-Zählrohrs [1].

Das verwendete Zählrohr besteht, wie in Abbildung 1 zu sehen ist, aus einem Zylindermantel aus Stahl, der als Kathode dient und einem Anodendraht. Zwischen Mantel und Draht wird eine Spannung von  $U = 300 - 2000\text{V}$  angelegt. Das dadurch entstehende elektrische Feld in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zur Zählrohrachse ist gegeben durch

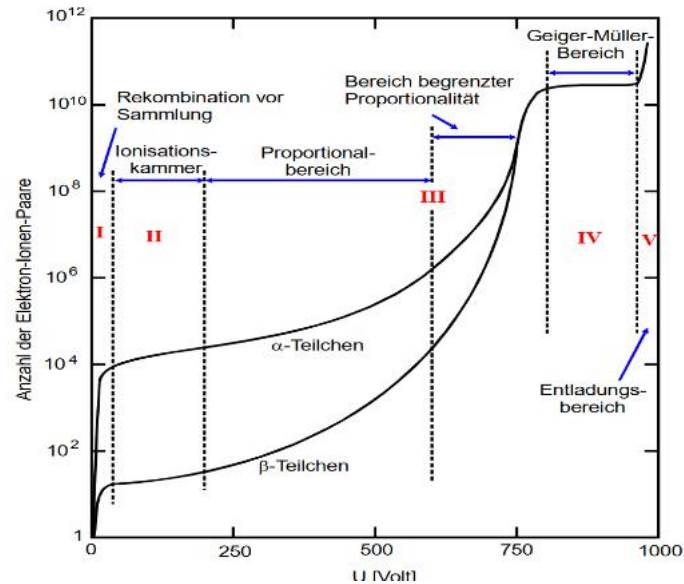
$$E(r) = \frac{U}{r \ln \left( \frac{r_K}{r_A} \right)},$$

wobei  $r_K$  und  $r_A$  die Radien des Zählrohrmantels bzw. des Drahtes sind. Die eine Seite des Zylinders ist geschlossen auf der anderen befindet sich ein aus Mylarfolie bestehendes Endfenster, durch das die Teilchen eindringen können. Das Zählrohrinnere ist mit einem Argon-Gasgemisch gefüllt. Dringen Teilchen durch das Fenster ein, wechselwirken sie mit dem Gas bis ihre gesamte Energie durch Ionisation und Anregung des Gases aufgebraucht ist.

Abhängig von der angelegten Spannung (siehe Abbildung 2) kommen mehr oder weniger der ausgelösten Elektronen beim Draht an. Bei niedrigen Spannungen rekombinieren viele der freien Elektronen schnell wieder mit den entstandenen Gasionen und gelangen somit nicht zum Draht (Bereich I, Abb.2). Bei höheren Spannungen hingegen können die Elektronen so sehr beschleunigt werden, dass sie ihrerseits wieder durch Stöße das Gas weiter ionisieren und somit ihre Anzahl in einer Townsend-Lawine stark erhöhen [1] (Bereich III, Abb.2).

Bei weiterer Spannungserhöhung kommt es durch die vielen angeregten Gas-Atome zu

Photonenemissionen, wenn diese in ihren Grundzustand zurückkehren. Da die Photonen neutral geladen sind, breiten sie sich auch senkrecht zum E-Feld aus, sodass sich die Elektronen-Lawine auf das ganze Zählrohr ausweitet. Dies ist der Geiger-Müller-Bereich, der als reiner Impulszähler dient (Bereich IV, Abb.2).



**Abbildung 2:** Halblogarithmische Darstellung Elektronen-Ionen-Paare in Abhängigkeit von der Spannung  $U$  [1].

## 2.2 Totzeit eines Geiger-Müller-Zählrohres

Als Totzeit  $T$  wird der Zeitraum bezeichnet, indem das Zählrohr unempfindlich gegen neue Anregungen durch eindringende Teilchen ist (siehe Abb.3). Da sich die erzeugten Ionen auf Grund ihrer Trägheit für längere Zeit um den Anodendraht herum aufhalten und so das elektrische Feld schwächen, werden keine neuen Teilchen registriert, bis die Ionen zum Zylindermantel abwandern [1]. Die ursprüngliche Impulsstärke wird erst wieder erreicht, sobald alle Ionen neutralisiert sind. Die Zeit bis die ursprüngliche Impulsstärke wieder erreicht ist, wird Erholungszeit genannt.

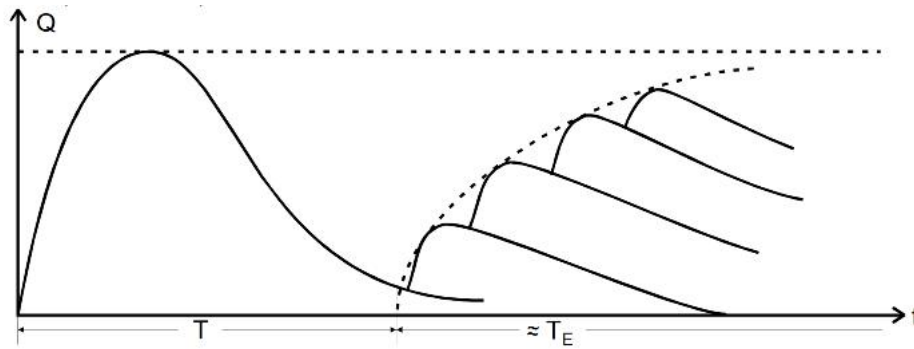


Abbildung 3: Ladung pro Teilchen in Abhängigkeit von der Zeit [1].

### 2.2.1 Nachentladungen und Charakteristik des Geiger-Müller-Zählrohrs

Bei der Neutralisation der Argon-Ionen entsteht bei ihrem Auftreffen auf den Zylindermantel genügend Energie, damit wieder Elektronen freigesetzt werden können, die auf ihrem Weg zum Anodendraht erneut Stoßionisationen ausführen und damit die Zählrohrentladung wieder neu zünden können. So kann es ohne das ein neues Teilchen eingetreten ist zu mehreren zeitlich versetzten Impulsen kommen, wie sie in Abbildung ?? zu sehen sind. Zur Vermeidung solcher Nachentladungen können verschiedene Alkohol-Dämpfe zur Gasmischung hinzugefügt werden, die die Elektronen abfangen.

Um die Qualität eines Zählrohrs zu bestimmen muss der Bereich IV aus Abbildung 2 genauer betrachtet werden. Die Abbildung 4 zeigt diesen Ausschnitt noch einmal vergrößert. Der zu sehende lineare Teil des Graphen wird als Plateau bezeichnet und hätte bei einem idealen Zählrohr eine Steigung 0. Es können jedoch nicht alle Nachentladungen durch Gaszusätze verhindert werden, sodass diese zu einem leichten Anstieg führen. Je geringer dieser und je größer der Spannungsbereich des Plateaus, desto besser arbeitet das Zählrohr.

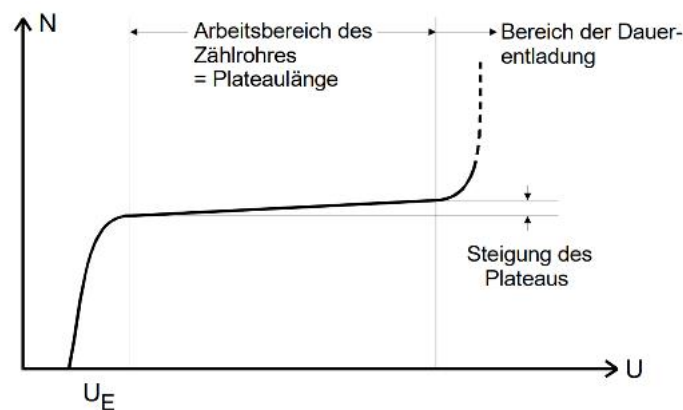


Abbildung 4: Charakteristik eines Geiger-Müller-Zählrohrs [1].

### 2.2.2 Totzeit-Bestimmung: Zwei-Quellen-Methode

Wegen der Totzeit  $T$  kann das Geiger-Müller-Zählrohr nicht die wirkliche Impulsrate  $N_w$  messen, sondern nur eine Impulsrate  $N_r$  registrieren. Unter der vereinfachten Annahme, dass bei dieser Rate für den Teil  $T \cdot N_r$  der Zeit das Zählrohr unempfindlich ist, gilt:

$$N_w = \frac{N_r}{1 - T \cdot N_r} \quad (1)$$

Wird  $N_1$  einer Probe gemessen und anschließend eine zweite Probe hinzugefügt und  $N_{1+2}$  gemessen, worauf die Zählrate  $N_2$  alleine gemessen wird, kann wegen der Totzeit beobachtet werden, dass

$$N_{1+2} < N_1 + N_2$$

gilt. Da die wirklichen Zählraten aber unabhängig von  $T$  sind folgt:

$$N_{w_{1+2}} = N_{w_1} + N_{w_2}$$

und mit (1)

$$\frac{N_{1+2}}{1 - T \cdot N_{1+2}} = \frac{N_1}{1 - T \cdot N_1} + \frac{N_2}{1 - T \cdot N_2}.$$

Mit der Annahme das  $T^2 N_r^2 \ll 1$  kann die Totzeit deshalb berechnet werden zu

$$T = \frac{N_1 + N_2 - N_{1+2}}{2N_1N_2} \quad (2)$$

### 2.3 Freigesetzte Ladungsmenge pro eindringendem Teilchen

Für den im Zählrohr fließenden Strom gilt, wenn  $Z$  Teilchen im Zeitraum  $\Delta t$  eindringen:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot Z. \quad (3)$$

Da nur der zeitlich gemittelte Strom gemessen wird, gilt mit dem Ohmschen Gesetz:

$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{U(t)}{R} dt.$$

Gleichsetzen liefert, das  $\Delta Q$  abhängig von  $U$  ist.

## 3 Durchführung

### 3.1 Charakteristik des GMZ

Die  $\beta$ -Quelle wird vor das Endfenster gestellt und die Zählrate  $N$  in Abhängigkeit von  $U$  für Werte zwischen 300 und 700 V gemessen, um Schäden durch die selbstständige Gasentladung zu vermeiden. Als Messzeit werden  $t = 60$  s gewählt, damit die Zählrate groß genug ist, sodass der statistische Fehler weniger als 1% beträgt. Mit dem in Abbildung ?? zu sehenden Strommessgerät wird für die verschiedenen Zählrohrspannungen  $U$  der mittlere Strom im Zählrohr gemessen.

### 3.2 Tot- und Erholungszeit des GMZ

Zur Bestimmung von Tot- und Erholungszeit werden zwei Methoden angewandt: Für die Messung mittels Oszilloskop wird die Spannung erhöht, sodass ein Abbildung 3 ähnlicher Graph entsteht, aus dem Tot- und Erholungszeit abgelesen werden können.

Zur Totzeit-Messung über zwei Quellen wird die Zählrate  $N_1$  einer Quelle gemessen. Eine zweite Quelle wird auf das Zählrohr gerichtet und  $N_{1+2}$  gemessen. Nach Entfernen der ersten Quelle wird  $N_2$  gemessen.

## 4 Auswertung

Die Graphen werden sowohl mit Matplotlib [2] als auch NumPy [4] erstellt. Die Fehlerrechnung wird mithilfe von Uncertainties [3] durchgeführt.

**Tabelle 1:** Die Messwerte für die Impulsrate  $N$ , die Spannung  $U$  und den Strom  $I$ , sowie die berechneten Werte für die pro Teilchen freigesetzte Ladungsmenge  $\Delta Q$ .

$N_{\text{minute}}/1/\text{min}$	$N/\text{Bq}$	$U/\text{V}$	$I/10^{-6}\text{A}$	$\Delta Q/10^8\text{e}$
$0 \pm 0$	$0 \pm 0$	300	0,00	$0,0 \pm 0,0$
$15\,346 \pm 124$	$256 \pm 2$	310	0,05	$12,2 \pm 0,1$
$16\,073 \pm 127$	$268 \pm 2$	320	0,10	$23,3 \pm 0,2$
$16\,196 \pm 127$	$270 \pm 2$	330	0,15	$34,7 \pm 0,3$
$16\,190 \pm 127$	$270 \pm 2$	340	0,20	$46,3 \pm 0,4$
$16\,592 \pm 129$	$277 \pm 2$	350	0,20	$45,1 \pm 0,4$
$16\,365 \pm 128$	$273 \pm 2$	360	0,25	$57,2 \pm 0,4$
$16\,575 \pm 129$	$276 \pm 2$	370	0,30	$67,8 \pm 0,5$
$16\,543 \pm 129$	$276 \pm 2$	380	0,30	$67,9 \pm 0,5$
$16\,877 \pm 130$	$281 \pm 2$	390	0,35	$77,7 \pm 0,6$
$16\,663 \pm 129$	$278 \pm 2$	400	0,40	$89,9 \pm 0,7$
$16\,648 \pm 129$	$277 \pm 2$	410	0,40	$90,0 \pm 0,7$
$16\,491 \pm 128$	$275 \pm 2$	420	0,45	$102,2 \pm 0,8$
$16\,680 \pm 129$	$278 \pm 2$	430	0,45	$101,0 \pm 0,8$
$16\,783 \pm 130$	$280 \pm 2$	440	0,50	$111,6 \pm 0,9$
$16\,932 \pm 130$	$282 \pm 2$	450	0,55	$121,6 \pm 0,9$
$16\,901 \pm 130$	$282 \pm 2$	460	0,60	$132,9 \pm 1,0$
$16\,976 \pm 130$	$283 \pm 2$	470	0,60	$132,4 \pm 1,0$
$16\,856 \pm 130$	$281 \pm 2$	480	0,65	$144,4 \pm 1,1$
$16\,815 \pm 130$	$280 \pm 2$	490	0,65	$144,8 \pm 1,1$
$16\,936 \pm 130$	$282 \pm 2$	500	0,70	$154,8 \pm 1,2$
$16\,970 \pm 130$	$283 \pm 2$	510	0,80	$176,5 \pm 1,4$
$16\,704 \pm 129$	$278 \pm 2$	520	0,80	$179,4 \pm 1,4$
$16\,949 \pm 130$	$282 \pm 2$	530	0,85	$187,8 \pm 1,4$
$17\,096 \pm 131$	$285 \pm 2$	540	0,90	$197,1 \pm 1,5$
$17\,328 \pm 132$	$289 \pm 2$	550	0,95	$205,3 \pm 1,6$
$16\,883 \pm 130$	$281 \pm 2$	560	0,95	$210,7 \pm 1,6$
$17\,153 \pm 131$	$286 \pm 2$	570	1,00	$218,3 \pm 1,7$
$16\,992 \pm 130$	$283 \pm 2$	580	1,05	$231,4 \pm 1,8$
$17\,148 \pm 131$	$286 \pm 2$	590	1,10	$240,2 \pm 1,8$
$17\,111 \pm 131$	$285 \pm 2$	600	1,10	$240,7 \pm 1,8$
$16\,826 \pm 130$	$280 \pm 2$	610	1,10	$244,8 \pm 1,9$
$17\,411 \pm 132$	$290 \pm 2$	620	1,15	$247,4 \pm 1,9$
$17\,223 \pm 131$	$287 \pm 2$	630	1,20	$260,9 \pm 2,0$
$17\,259 \pm 131$	$288 \pm 2$	640	1,25	$271,2 \pm 2,1$
$17\,281 \pm 131$	$288 \pm 2$	650	1,25	$270,9 \pm 2,1$
$17\,549 \pm 132$	$292 \pm 2$	660	1,30	$277,4 \pm 2,1$
$17\,835 \pm 134$	$297 \pm 2$	670	1,40	$294,0 \pm 2,2$
$17\,923 \pm 134$	$299 \pm 2$	680	1,40	$292,5 \pm 2,2$
$17\,801 \pm 133$	$297 \pm 2$	690	1,40	$294,5 \pm 2,2$
$17\,950 \pm 134$	$299 \pm 2$	700	1,50	$312,9 \pm 2,3$



## 4.1 Die Zählrohr-Charakteristik

In Abbildung 5 ist die Zählrohr-Charakteristik graphisch mithilfe der Werte aus Tabelle 1 dargestellt. Der Fehler der registrierten Impulse bestimmt sich nach der Poisson-Statistik zu:

$$\sigma_N = \frac{\sqrt{N_{\text{minute}}}}{\Delta t}.$$

Dabei ist  $\Delta t$  das Zeitintervall, in dem die Impulse gemessen werden und entspricht einer Minute. Das Plateau der Charakteristik ist im Bereich zwischen 330 V und 660 V zu erkennen. Es ist in Abbildung 6 vergrößert dargestellt und besitzt eine Länge von  $\Delta U = 330$  V. Eine lineare Ausgleichsrechnung in diesen Bereich der Form  $N(U) = mU + N_0$  liefert für die Steigung  $m$  und den Achsenabschnitt  $N_0$ :

$$m = (4,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-2} \frac{\text{Bq}}{\text{V}},$$

$$N_0 = (258 \pm 2) \text{ Bq}.$$

Der relative Plateauanstieg  $m_{\text{rel}}$  wird berechnet durch:

$$m_{\text{rel}} = \frac{N_{\text{max}} - N_{\text{min}}}{N_{\text{min}}} \cdot \frac{1}{\Delta U} = \frac{m}{N_{\text{min}}}. \quad (4)$$

Dabei sind  $N_{\text{max}}$  und  $N_{\text{min}}$  die Werte der Ausgleichsgeraden für die Impulsrate an den Rändern des Plateaus. Der Fehler bestimmt sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{m_{\text{rel}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{N_{\text{min}}} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{m}{N_{\text{min}}^2} \sigma_{N_{\text{min}}}\right)^2}. \quad (5)$$

Dabei ist  $\sigma_m$  der Fehler von  $m$  und  $\sigma_{N_{\text{min}}}$  der Fehler von  $N_{\text{min}}$ , welches sich über die Geradengleichung bestimmen lässt zu:

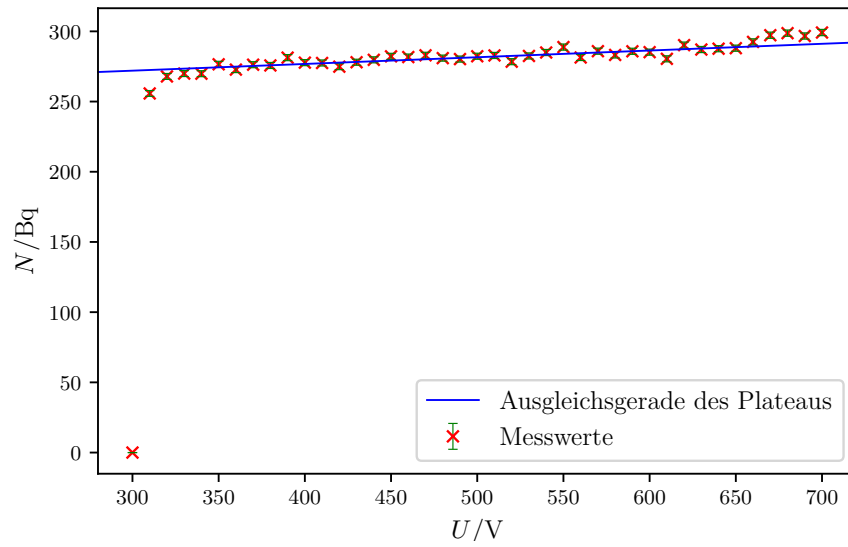
$$N_{\text{min}} = (273 \pm 3) \text{ Bq}.$$

Der Fehler berechnet sich nach:

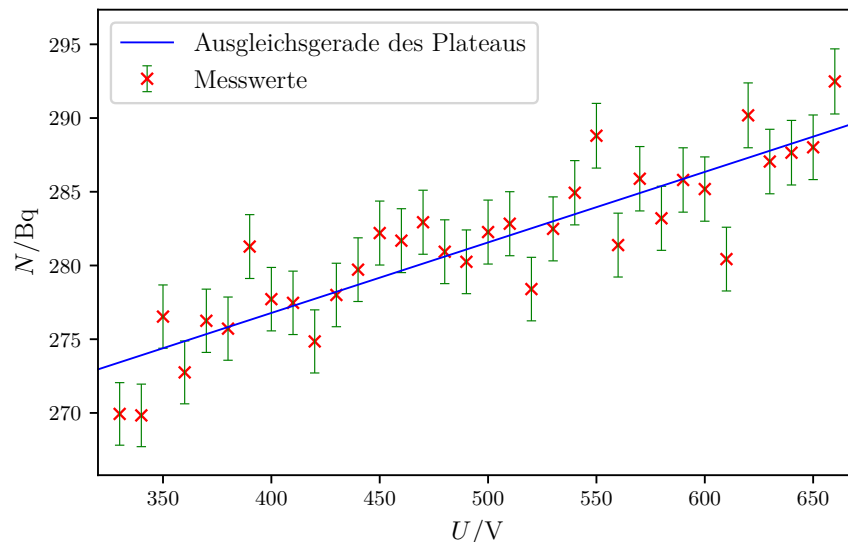
$$\sigma_{N_{\text{min}}} = \sqrt{(U_{\text{min}} \sigma_m)^2 + \sigma_{N_0}^2}.$$

Dabei ist  $U_{\text{min}} = 330$  V der Wert der Spannung bei Beginn des Plateaus und  $\sigma_{N_0}$  der Fehler von  $N_0$ . Damit berechnet sich  $m_{\text{rel}}$  nach Formel (4) und (5) zu:

$$m_{\text{rel}} = (1,8 \pm 0,2) \% / 100 \text{ V}.$$



**Abbildung 5:** Die Impulsrate  $N$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U$ .



**Abbildung 6:** Die Impulsrate  $N$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U$  im Plateaubereich.

## 4.2 Bestimmung der Totzeit

Bei  $U = 500 \text{ V}$  lässt sich am Oszilloskop eine Totzeit von  $T_1 = (100 \pm 25) \cdot 10^{-6} \text{ s}$  ablesen. Die Erholungszeit bei  $U = 600 \text{ V}$  wird zu  $T_E = 225 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  abgeschätzt.

Bei der Messung mit zwei Quellen kann die Totzeit nach Formel (2) berechnet werden. Dabei sind  $N_1$  die Impulsrate der ersten,  $N_2$  die der zweiten und  $N_{1+2}$  die Impulsrate beider Quellen und haben die Werte:

$$\begin{aligned} N_1 &= (286 \pm 2) \text{ Bq} \\ N_2 &= (18 \pm 1) \text{ Bq} \\ N_{1+2} &= (302 \pm 2) \text{ Bq} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für  $T$ :

$$T_2 = (120 \pm 310) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Der Fehler  $\sigma_{T_2}$  von  $T_2$  berechnet sich dabei nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{T_2} = \sqrt{\left(\frac{N_{1+2} - N_2}{2N_1^2 N_2} \sigma_{N_1}\right)^2 + \left(\frac{N_{1+2} - N_1}{2N_1 N_2^2} \sigma_{N_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2N_1 N_2} \sigma_{N_{1+2}}\right)^2} \quad (6)$$

## 4.3 Bestimmung der freigesetzten Ladungsmenge pro einfallendem Teilchen

Nach Formel (3) berechnet sich die freigesetzte Ladungsmenge mit:

$$\Delta Q = \frac{I}{N}.$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 eingetragen. Dabei wird die Ladung in Einheiten der Elementarladung angegeben und der Fehler  $\sigma_Q$  von  $\Delta Q$  berechnet sich nach:

$$\sigma_Q = \frac{\sigma_N}{N^2}.$$

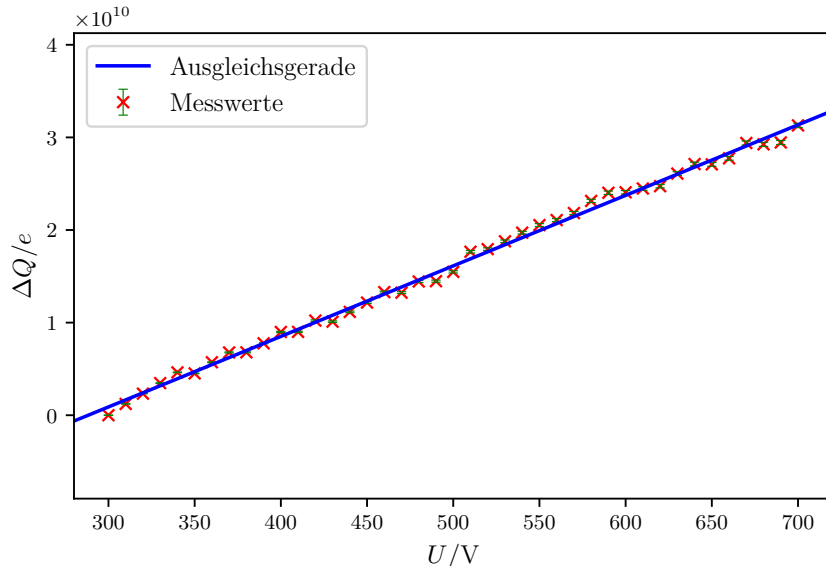
In Abbildung 7 ist  $\Delta Q$  gegen  $U$  aufgetragen und es wird eine lineare Ausgleichsrechnung der Form  $\Delta Q(U) = mU + Q_0$  ausgeführt um die Linearität zu überprüfen:

$$\begin{aligned} m &= (7,62 \pm 0,07) \cdot 10^7 \frac{\text{Bq}}{\text{V}}, \\ Q_0 &= (-2,20 \pm 0,04) \cdot 10^{10} \text{ Bq}, \\ R^2 &= 99,7 \%. \end{aligned}$$

Bei  $R^2$  handelt es sich um das Bestimmtheitsmaß der Ausgleichsgeraden, welches angibt wie gut die Messwerte mit der Ausgleichsgeraden übereinstimmen. Es wird berechnet durch:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Q}_i - \bar{Q})^2}{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}.$$

Dabei sind die  $Q_i$  die Messwerte für  $\Delta Q$ , die  $\hat{Q}_i$  sind die durch die Ausgleichsgerade vorhergesagten Werte für  $\Delta Q$  und  $\bar{Q}$  ist der Mittelwert der  $Q_i$ .



**Abbildung 7:** Die pro Teilchen freigesetzte Ladungsmenge  $\Delta Q$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U$ .

## 5 Diskussion

Die Plateauanstiegung  $m_{\text{rel}}$  liegt mit  $(1,8 \pm 0,2) \text{ } \%/100\text{V}$  unterhalb von  $2 \text{ } \%/100\text{V}$ . Da auch der Fehler gering ist und das Plateau, wie in Abbildung 5 zu sehen, frühzeitig auf einen Wert größer als 250 Bq ansteigt und diesen bis zum Ende der Messung nahezu hält, kann auf eine gute Qualität des Zählrohrs geschlossen werden. Dabei ist in Abbildung 6 zu sehen, dass einzelne Werte leicht von der Ausgleichsgeraden abweichen. Dies liegt an der statistischen Ungenauigkeit, da die Fehlerbalken nur die Standardabweichung angeben und Abweichungen zu erwarten sind.

Die Bestimmte Totzeit von  $T_2 = (120 \pm 310) \cdot 10^{-6} \text{ s}$  ist mit einer Abweichung von 20 % in der Nähe von dem abgelesenen Wert  $T_1 = (100 \pm 25) \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . Allerdings ist der Wert aufgrund seines großen Fehlers nicht sehr aussagekräftig. Der große Fehler kommt zustande, da die Totzeit sich relativ zu der Impulsrate in einer sehr kleinen Größenordnung befindet und der Fehler durch die Fehlerfortpflanzung angehoben wird. Die Erholungszeit  $T_E = 225 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  ist nur ungenügend genau am Oszilloskop abgeschätzt. Sie kann jedoch in dieser Größenordnung angenommen werden.

Wird die freigesetzte Ladungsmenge wie in Abbildung 7 in Abhängigkeit von der Spannung betrachtet, so lässt sich ein linearer Zusammenhang zwischen den Größen feststellen. Die Abweichungen von der Ausgleichsgeraden sind mit einem Bestimmtheitsmaß von 99% wie bei der Plateauanstiegung gering, was die gute Qualität des Zählrohrs unterstützt. Zudem befindet sich die freigesetzte Ladungsmenge in der zu erwartenden Größenordnung des Geiger Müller Bereichs (vergleiche Abbildung 2 und 7).

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V703 Das Geiger-Müller-Zählrohr*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V703.pdf> (besucht am 10.04.2018).
- [2] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Version 1.5.3. URL: <http://matplotlib.org/> (besucht am 13.11.2017).
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/> (besucht am 13.11.2017).
- [4] Travis E. Oliphant. *NumPy: Python for Scientific Computing*. Version 1.11.1. URL: <http://www.numpy.org/> (besucht am 13.11.2017).