

Anfängerpraktikum V408

## **Geometrische Optik**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 14. April 2015    Erstabgabe: 21. April 2015  
Zweitabgabe: 05. Mai 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Ziel

Versuchsziel ist es, Brennweiten verschiedener Linsen sowohl mit Hilfe der Linsengleichung als auch mit der Methode nach BESSEL zu berechnen. Außerdem werden Brennweite und Lage der Hauptebenen eines Linsensystems mit der Methode nach ABBE bestimmt.

## 2 Theorie

Nach der geometrischen Optik breitet sich Licht in Form von Strahlen aus. Dies ist eine gültige Näherung, wenn alle Abmessungen einer Apparatur groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes sind. Tritt ein Lichtstrahl in ein Medium mit anderer optischer Dichte, wird er nach dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz gebrochen. Diese Brechung wird für die Konstruktion von Linsen, deren Material die Dichte von Luft übersteigt, benutzt. In Abhängigkeit von der Dicke und Krümmung weisen Linsen verschiedene Eigenschaften auf.

*Sammellinsen* sind konvex gekrümmt und bündeln parallel eintreffende Lichtstrahlen im Brennpunkt. Dieser Brennpunkt befindet sich im Abstand  $f$ , der Brennweite, von der Mittelebene entfernt. Wird ein Gegenstand im Abstand der doppelten Brennweite von der Linse aufgestellt, entsteht im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Linse ein reelles Bild von dem Objekt. Im Allgemeinen wird der Abstand zwischen Linsenmittelachse und Bild als *Bildweite*  $b$ , der Abstand zwischen Linsenmittelachse und Gegenstand als *Gegenstandsweite*  $g$  bezeichnet. Beide Größen  $b$ ,  $g$  sind Projektionsweiten und sind bei Sammellinsen positiv.

*Zerstreuungslinsen* sind konkav gekrümmt und zerstreuen parallel auftreffende Lichtstrahlen. Der virtuelle Schnittpunkt der Lichtstrahlen, die als parallele Lichtstrahlen von der Linse zerstreut wurden, ist der virtuelle Brennpunkt der Linse. Bei Zerstreuungslinsen sind Projektions- und Brennweite negativ.

Anders als bei dünnen Linsen geschieht die Brechung bei einer dicken Linse an zwei Hauptebenen,  $H$  und  $H'$ , da der Strahl einen weiteren Weg im Medium zurücklegt. Relativ zu den Hauptebenen sind, wie in Abbildung 2 erkennbar,  $b$ ,  $b'$  und  $g$ ,  $g'$  die kennzeichnenden Größen der Linse. Der Strahlengang wird durch Parallel-, Brennpunkt- und Mittelpunktstrahl wie in Abbildung 2 dargestellt.

Durchquert ein Lichtstrahl eine dünne Linse, wird er an der Mittelebene gebrochen. Die Brechkraft  $D$  – der Kehrwert der Brennweite  $f$  mit der Einheit  $\text{dpt} = 1/\text{m}$  – kann für dünne Linsen berechnet werden mit der *Linsengleichung*

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (1)$$

Über das *Abbildungsgesetz*

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2)$$

mit Bildgröße  $B$  und Gegenstandsgröße  $G$  wird die Bildvergrößerung  $V$  bestimmt.

Es treten bei der Verwendung von Linsen *Abbildungsfehler* auf. Die Näherung der geometrischen Optik gilt nur für achsennahe Strahlen, achsenferne Strahlen befinden sich weit von der optischen Achse eines Systems entfernt und werden stärker gebrochen. Dadurch liegt der Brennpunkt der achsenfernen Strahlen nicht auf dem Brennpunkt der achsennahen Strahlen, wodurch nicht das gesamte Licht durch die Linse scharf abgebildet wird. Dieses Phänomen wird *sphärische Aberration* genannt.

Ist die optische Dichte des Linsenmaterials abhängig von der Wellenlänge des Lichtes, kommt es zur *chromatischen Aberration*. Wird nicht-monochromatisches Licht durch eine Linse geschickt, liegen die Brennpunkte der einzelnen Lichtfarben nicht übereinander, wodurch ein unscharfes Bild entsteht.

## 2.1 Brennweitenbestimmung nach Bessel

Ist der Abstand  $e = g + b$  zwischen Gegenstand und Schirm konstant und größer als die vierfache Brennweite  $f$  der Linse, lassen sich zwei Linsenpositionen finden, die ein scharfes Bild erzeugen. Dabei sind die zwei paarweise gefundenen Gegenstands- und Bildweiten symmetrisch, es gilt

$$b_1 = g_2 \quad \text{und} \quad b_2 = g_1. \quad (3)$$

Mit der Differenz der Projektionsweiten  $d = g - b$  gilt weiter

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (4)$$

## 2.2 Bestimmung der Lage von Hauptachsen nach Abbe

Über die Methode von ABBE können dicke Linsen oder Linsensysteme auf die Lage der Hauptachsen  $H$ ,  $H'$  und Gesamtbrennweite  $f$  untersucht werden. Es gelten die Beziehungen

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (5a)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h', \quad (5b)$$

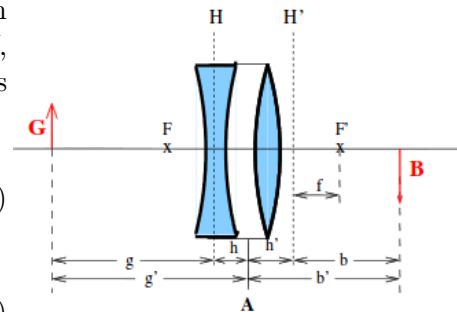
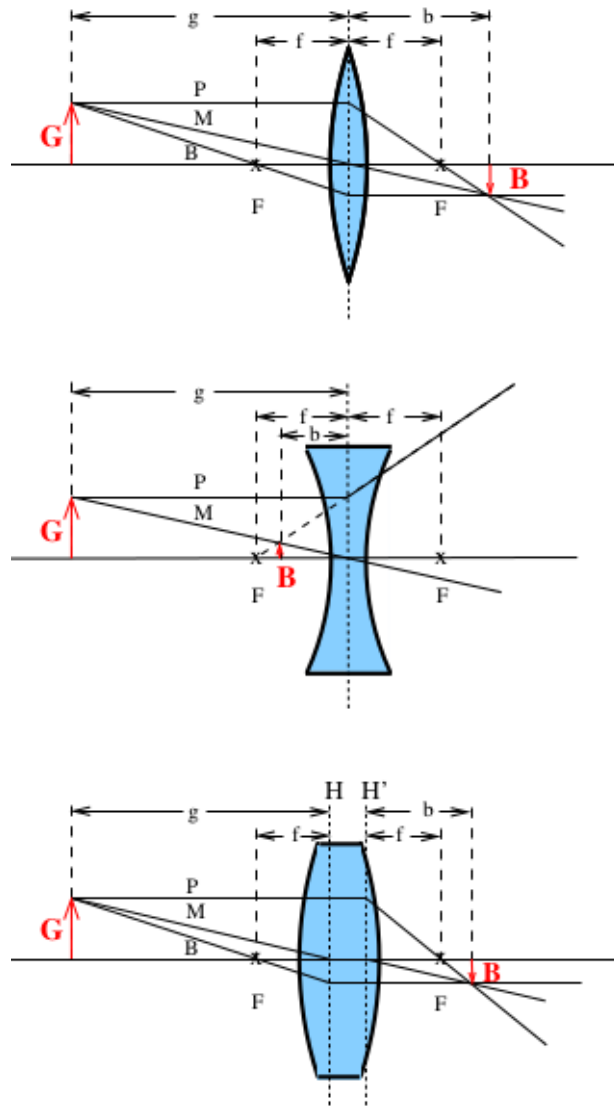


Abbildung 1: Bezeichnung an einem Linsensystem. [1]

welche bei bekannter Vergrößerung  $V$  sowie Bild- und Gegenstandsweiten  $g'$  und  $b'$  bezogen auf einen festen Punkt des Linsensystems, Aussagen über die Lage der Hauptachsen zulassen.



**Abbildung 2:** Strahlengänge verschiedener Linsen (von oben nach unten: Sammellinse, Zerstreuungslinse, dicke (Sammel-)linse). [1]

## 3 Durchführung

### 3.1 Verifikation der Linsengleichung

Die Brennweite  $f$  einer dünnen Linse wird mithilfe der Linsengleichung bestimmt und mit der Herstellerangabe verglichen. Dazu wird auf einer optischen Bank eine Halogenlampe, ein Gegenstand "Pearl L", eine Linse mit der Brennweite  $\tilde{f}_1 = 100 \text{ mm}$  und ein Schirm gestellt.

Indem die Gegenstandsweite  $g$  festgelegt und die Bildweite  $b$  so variiert wird, dass der Gegenstand auf dem Schirm scharf abgebildet wird, wird die Bildweite  $b_i$  für jeweils zehn verschiedene Gegenstandsweiten  $g_i$  gemessen. Um die Messgenauigkeit graphisch darzustellen, werden in einem  $g$ - $b$ -Diagramm die ermittelten Werte als  $(0, b_i)$  und  $(g_i, 0)$  mit  $i \in \{0, \dots, 10\}$  eingezeichnet und linear verbunden.

Dies wird für eine Linse mit einer Brennweite  $\tilde{f}_2 = 50 \text{ mm}$  wiederholt.

### 3.2 Methode nach Bessel

Die Messvorrichtung wird analog zum ersten Teil aufgebaut. Der Abstand  $e = b + g$  zwischen Gegenstand und Schirm wird festgehalten und zur Abbildung eine Linse bekannter Brennweite  $\tilde{f}_1 = 100 \text{ mm}$  benutzt, wobei  $e \geq 4\tilde{f}$  gelten muss. Für zehn verschiedene Abstände  $e_i$  werden jeweils die beiden Linsenpositionen gesucht, die ein scharfes Bild erzeugen. Die beiden Wertepaare  $(b_i, g_i)$  pro Abstand  $e_i$  werden aufgenommen und der Vorgang für neun weitere Abstände  $e_i$  wiederholt, sodass insgesamt 20 Wertepaare mit je zwei Projektionsweiten aufgenommen werden.

Mit der Sammellinse  $\tilde{f}_1$  wird im Anschluss das Verfahren für blaues und für rotes Licht wiederholt. Hierzu werden nebst der Halogenlampe Farbfilter verwendet.

### 3.3 Methode nach Abbe

Die Messvorrichtung wird analog zum ersten Teil aufgebaut, zusätzlich wird eine Zerstreuungslinse  $\tilde{f}_3 = -100 \text{ mm}$  zwischen Sammellinse und Gegenstand gesetzt. Der Abstand zwischen den Linsen ist kleinstmöglich zu wählen. Das Linsenpaar wird als ein festes Linsensystem betrachtet und der Mittelpunkt der Sammellinse als Messpunkt  $A$  betrachtet.

Ausgehend vom Messpunkt  $A$  wird das Projektionsweitenpaar  $(b', g')$  sowie die Vergrößerung  $V$  des Gegenstandes bei scharfer Abbildung gemessen. Mithilfe der Gleichungen (5) kann die relative Lage  $h$  und  $h'$  der Hauptachsen bezogen auf den Messpunkt  $A$  bestimmt werden. Hierzu werden in einem Diagramm  $g'$  gegen  $(1 + \frac{1}{V})$  und  $b'$  gegen  $(1 + V)$  aufgetragen und mittels linearer Regression die Gesamtbrennweite  $f$  und die relativen Lagen  $h$  und  $h'$  bestimmt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Verifikation der Linsengleichung

Die Ergebnisse der ersten Messung sind in Tabelle 1 aufgetragen. Für die berechnete

Linse mit $\tilde{f} = 100$ mm			Linse mit $\tilde{f} = 50$ mm		
$g_1$ / mm	$b_1$ / mm	$f_1$ / mm	$g_2$ / mm	$b_2$ / mm	$f_2$ / mm
120	525	97,67	60	270	49,1
130	390	97,50	70	157	48,4
140	319	97,30	80	121	48,2
150	277	97,31	90	104	48,2
160	251	97,71	100	92	47,9
170	227	97,20	110	87	48,6
180	204	95,63	120	80	48,0
190	198	96,96	130	77	48,4
200	192	97,59	140	75	48,8
210	186	98,64	150	72	48,2
220	177	98,09			

**Tabelle 1:** Messung der Bildweiten  $b_i$  bei festgelegter Gegenstandsweite  $g_i$  sowie die daraus berechneten Brennweiten nach der Linsengleichung.

Brennweite der Linsen ergeben sich Werte von

$$f_1 = (97,5 \pm 0,2) \text{ mm} \quad (6)$$

$$f_2 = (48,4 \pm 0,1) \text{ mm}. \quad (7)$$

Das  $b$ - $g$ -Diagramm 3 zeigt dadurch, dass sich die Linien auf einem kleinen, nahezu punktförmigen Gebiet untereinander schneiden, die verhältnismäßig hohe Präzession der Messergebnisse an. Des Weiteren bestätigt die Lage des Schnittpunktes mit den abgeschätzten Koordinaten  $(f_1|f_1)$  respektive  $(f_2|f_2)$  die Messergebnisse für die Brennweiten  $f$ . Die Berechnung ist somit plausibel. Die Mittelwerte weichen von der Herstellerangabe um

$$f_1 = 2.5\% \quad \text{und} \quad f_2 = 3.2\% \quad (8)$$

ab. Daher ist für die verwendeten Linsen die Brennweite  $f$  über die Linsengleichung (1) verifizierbar.

## 4.2 Methode nach Bessel

Die Ergebnisse der Messung nach dem BESSEL-Verfahren sind in Tabelle 2 aufgetragen. Für die Brennweiten ergeben sich Werte für die beiden Linsenpositionen von

Abstand $e/\text{mm}$	Linsenposition 1			Linsenposition 2		
	$g_1/\text{mm}$	$b_1/\text{mm}$	$f_1/\text{mm}$	$g_2/\text{mm}$	$b_2/\text{mm}$	$f_2/\text{mm}$
450	144	306	97,9	142	308	97,2
500	134	366	98,1	135	365	98,6
550	127	423	97,7	127	423	97,7
600	122	478	97,2	123	477	97,8
650	119	531	97,2	120	530	97,8
700	118	482	127,7	117	583	97,4
750	116	734	60,2	115	735	59,4
800	114	688	97,8	116	688	99,1
850	114	736	98,7	114	736	98,7
900	113	787	98,8	113	788	98,4

**Tabelle 2:** Messung der Projektionsweiten  $b_i$  und  $g_i$  bei festgelegtem Abstand  $e$  nach BESSEL; weißes Licht.

$$f_{\text{Pos.1}} = (97 \pm 5) \text{ mm} \quad \text{und} \quad f_{\text{Pos.2}} = (94 \pm 4) \text{ mm}. \quad (9)$$

Die gemessene Brennweite weicht in Abhängigkeit von der Linsenposition geringfügig ab, die Schwankungen sind als statistische Fehler zu bewerten. Der Mittelwert

$$f = (96 \pm 3) \text{ mm} \quad (10)$$

zeigt eine Abweichung von der Herstellerangabe von 4%.

Die Ergebnisse der Messung mit einfarbigem Licht sind in den Tabellen 3 und 4 aufgetragen. Die ermittelten Brennweiten in Abhängigkeit von der Linsenposition betragen

$$f_{\text{Rot, Pos.1}} = (97,9 \pm 0,5) \text{ mm} \quad f_{\text{Rot, Pos.2}} = (97,3 \pm 0,2) \text{ mm} \quad (11a)$$

$$f_{\text{Rot}} = (97,6 \pm 0,3) \text{ mm} \quad (11b)$$

$$f_{\text{Blau, Pos.1}} = (98,2 \pm 0,2) \text{ mm} \quad f_{\text{Blau, Pos.2}} = (97,2 \pm 0,2) \text{ mm} \quad (11c)$$

$$f_{\text{Blau}} = (97,7 \pm 0,2) \text{ mm} \quad (11d)$$

und zeigen damit die Abhängigkeit der Brennweite von der Wellenlänge des Lichtes. Auch hier wird sichtbar, dass die errechneten Brennweiten von der Linsenposition abhängen; die Schwankungen sind aber als statistische Fehler zu bewerten.

### 4.3 Methode nach Abbe

Die Linearisierung der Gleichungen

$$\underset{y_{\text{lin}}}{g'} = \underset{m_{\text{lin}}}{f} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{V}\right)}_{x_{\text{lin}}} + \underset{b_{\text{lin}}}{h} \quad (12a)$$

$$\underset{y_{\text{lin}}}{b'} = \underset{m_{\text{lin}}}{f} \cdot \underbrace{(1 + V)}_{x_{\text{lin}}} + \underset{b_{\text{lin}}}{h'} \quad (12b)$$

mit den Werten der Tabelle 5 sind in Abbildung 4 und 5 dargestellt. Die Regression mithilfe der Formeln

$$\Delta = N \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2, \quad (13a)$$

$$a_{\text{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\Delta}, \quad (13b)$$

$$b_{\text{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\Delta}, \quad (13c)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - a_{\text{Reg}} \cdot x - b_{\text{Reg}})^2}{N - 2}}, \quad (13d)$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}, \quad (13e)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}, \quad (13f)$$

mit den in Gleichung (12b) definierten Abkürzungen und der Anzahl der Datenpaare N, ergibt

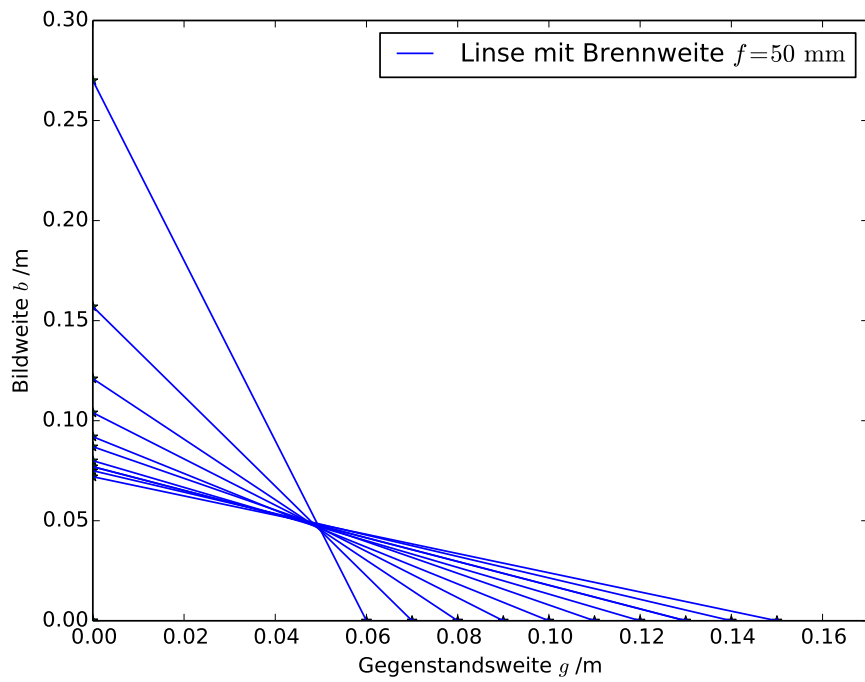
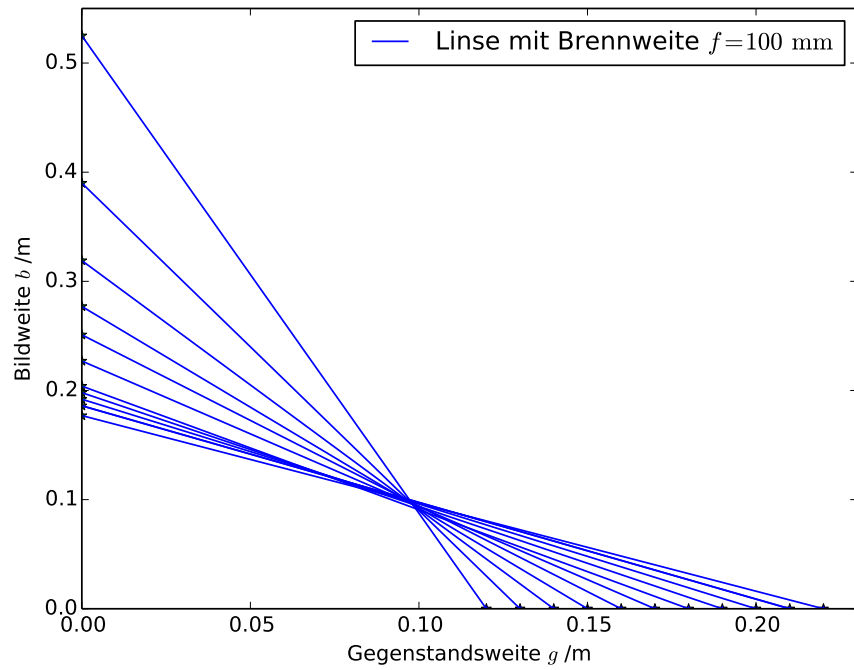
$$f_1 = (183 \pm 5) \text{ mm} \quad f_2 = (195 \pm 4) \text{ mm} \quad (14)$$

$$h_1 = (55 \pm 14) \text{ mm} \quad h_2 = (72 \pm 7) \text{ mm}. \quad (15)$$

Daraus folgt für die Brennweite  $f$  des Linsensystems

$$f = (189 \pm 5) \text{ mm}. \quad (16)$$





**Abbildung 3:**  $b$ - $g$ -Diagramme zur Darstellung der Messgenauigkeit. [2]

Abstand $e/\text{mm}$	Linsenposition 1			Linsenposition 2		
	$g_{1,r}/\text{mm}$	$b_{1,r}/\text{mm}$	$f_{1,r}/\text{mm}$	$g_{2,r}/\text{mm}$	$b_{2,r}/\text{mm}$	$f_{2,r}/\text{mm}$
450	143	307	97,6	306	144	97,9
550	126	424	97,1	424	126	97,1
650	118	532	96,6	531	119	97,2
750	117	633	98,7	636	117	97,7
850	115	735	99,4	739	111	96,5

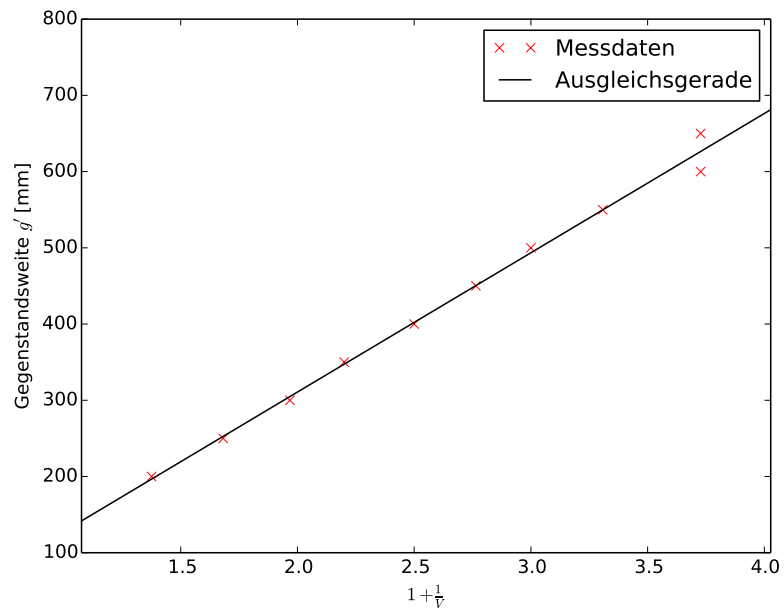
**Tabelle 3:** Messung der Projektionsweiten  $b_i$  und  $g_i$  bei festgelegtem Abstand  $e$  nach BESSEL; rotes Licht.

Abstand $e/\text{mm}$	Linsenposition 1			Linsenposition 2		
	$g_{1,b}/\text{mm}$	$b_{1,b}/\text{mm}$	$f_{1,b}/\text{mm}$	$g_{2,b}/\text{mm}$	$b_{2,b}/\text{mm}$	$f_{2,b}/\text{mm}$
500	366	134	98,1	132	368	97,2
600	477	123	97,8	122	478	97,2
700	582	118	98,1	116	584	96,8
800	684	116	99,1	114	686	97,8
900	788	112	98,1	111	789	97,3

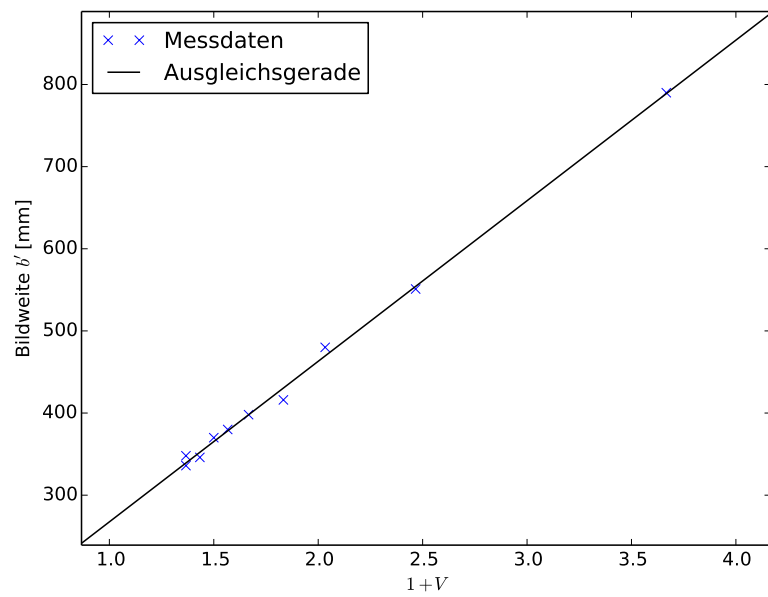
**Tabelle 4:** Messung der Projektionsweiten  $b_i$  und  $g_i$  bei festgelegtem Abstand  $e$  nach BESSEL; blaues Licht.

Linsensystem			
$g'/\text{mm}$	$b'/\text{mm}$	$B/\text{mm}$	$V/\text{mm}$
200	790	80	2,67
250	551	44	1,47
300	480	31	1,03
350	416	25	0,83
400	398	20	0,67
450	380	17	0,57
500	370	15	0,50
550	346	13	0,43
600	348	11	0,37
650	336	11	0,37

**Tabelle 5:** Messwerte zur Bestimmung der Brennweite des Linsensystems nach ABBE.



**Abbildung 4:** Messwerte für ABBE-Methode und Regression der Gleichung (12a). [2]



**Abbildung 5:** Messwerte für ABBE-Methode und Regression der Gleichung (12b). [2]

## 5 Diskussion

### 5.1 Fehlerdiskussion

Über die einzelnen Teile des Experimentes hinweg wird eine scharfe Abbildung des Gegenstandes "Perl L" gefordert. Die in Abschnitt 2 genannten Abbildungsfehler, insbesondere die in Abschnitt 4.2 bestätigte chromatische Abberation, erschweren das Finden der richtigen Projektionsweiten. Das exakte Bestimmen der Projektionsweiten ist ohne weitere Maßnahmen oder geräte-unterstützte Messung, etwa durch einen CCD-Chip, nicht möglich. Durch Bisektion kann die Größenordnung und die Umgebung von  $b$  und  $g$  bestimmt werden; dies weist sich als eine brauchbare Näherung. Im Abschnitt 4.1 wird die verhältnismäßig hohe Sicherheit in  $b$  und  $g$  besonders durch das Diagramm 3 erkennbar.

### 5.2 Linsengleichung

Mit einer Abweichung von wenigen Prozent von der Herstellerangabe, konnte die Brennweite einer Linse mithilfe der Linsengleichung (1) berechnet werden. Die Messung bestätigt die damit Gültigkeit der Linsengleichung.

### 5.3 Methode nach Bessel

Die Methode von BESSEL kann mit der konventionellen Methode über die Linse 1 verglichen werden.

Die Abweichung des Mittelwertes von der Herstellerangabe ist ein direktes Maß für die Fehleranfälligkeit der Methoden. Es ist erkennbar, dass die Methode nach BESSEL für die in diesem Experiment durchgeführte Bestimmung der konventionelle Methode unterlegen ist.

Für die Methode nach BESSEL werden der Abstand von Gegenstand und Schirm sowie die Differenz der Projektionslängen benötigt. Da diese in abgewandelter Form ebenfalls für die Referenzmethode gilt, kann bei der höheren Unsicherheit von statistischen Fehlern ausgegangen werden.

Die Messung an einfarbigem Licht zeigt die chromatische Abberation. Der Unterschied in den Brennweiten  $f$  für verschiedene Wellenlängen  $\lambda$  ist gering, muss aber bei hochpräzisen Messungen berücksichtigt werden. Hierzu finden Achromaten-Anordnungen Verwendung.

## 5.4 Methode nach Abbe

Die Standardabweichung der relativen Lage  $h$  und  $h'$  von den Hauptachsen zeigen mit 10% und 25% starke Unsicherheit an. Dass die Summe eines Linsensystems über die Summe der Brechkräfte  $D$  beschrieben werden kann, wird mit diesem Ergebnis nicht bestätigt.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V408: Geometrische Optik*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V408.pdf> (besucht am 18.04.2015).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.