

V301

Elektrische Brückenschaltungen

Christopher Breitfeld

christopher.breitfeld@tu-dortmund.de

Henry Krämerkämper

henry.kraemerkaemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.06.2021

Abgabe: 15.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemeines zu Brückenschaltungen	3
2.2	Wheatstone'sche Brückenschaltung	5
2.3	Kapazitätsmessbrücke	6
2.4	Induktivitätsmessbrücke	7
2.5	Maxwell-Brücke	8
2.6	Frequenzabhängigkeit der Abgleichbedingung	8
2.7	Wien-Robinson-Brücke	9
3	Durchführung	10
3.1	Wheatstone'sche Brückenschaltung	10
3.2	Kapazitätsmessbrücke	10
3.3	Induktivitätsmessbrücke	10
3.4	Maxwell	10
3.5	Wien-Robinson-Brücke	11
4	Auswertung	11
4.1	Die Wheatstonesche Brückenschaltung	11
4.2	Die Kapazitätsmessbrücke	11
4.3	Die Induktivitätsmessbrücke	12
4.4	Die Maxwellbrücke	12
4.5	Die Wien-Robinson Brücke	14
5	Diskussion	15
	Literatur	16

1 Einleitung

In dem folgenden Versuch werden verschiedene Brückenschaltungen untersucht, mit denen unbekannte Widerstände, Induktivitäten und Kondensatoren bestimmt werden können. Des Weiteren wird die Frequenzabhängigkeit einer Wien-Robinson-Brücke untersucht und der Klirrfaktor eines Sinusgenerators bestimmt.

2 Theorie

Eine Brückenschaltung ist eine elektrische Schaltung, mit der in der Messtechnik diverse physikalische Größen über die Messung von Widerständen bestimmt werden können. Zudem kann mit Brückenschaltungen durch die Nullmethode die Auflösung einer Messung erhöht werden. Diese wird in den folgenden Abschnitten noch erläutert.

2.1 Allgemeines zu Brückenschaltungen

Eine Brückenschaltung besteht prinzipiell aus vier Widerständen. Diese sind so angeordnet, dass je zwei Widerstände in Reihe und die in Reihe geschalteten Widerstände parallel geschaltet sind. Die Schaltung ist dabei an eine Speisespannung U_S angeschlossen. In Abbildung 1 ist dieses Prinzip an einem Schaltbild verdeutlicht.

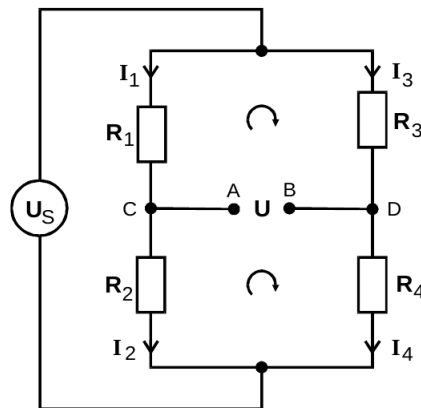


Abbildung 1: Prinzip einer Brückenschaltung. [1]

Zwischen den eingezeichneten Punkten A und B entsteht eine Potentialdifferenz, die als Brückenspannung U bezeichnet wird. Diese kann über die Kirchhoff'schen Regeln hergeleitet werden. Die Kirchhoff'schen Regeln sind im Folgenden kurz beschrieben.

1. Knotenregel

Die Knotenregel besagt, dass die Summe aller eingehenden und ausgehenden Ströme in einem Knoten null ist, wobei eingehenden Strömen ein positives und ausgehenden ein negatives Vorzeichen zugeordnet wird. Die Knotenregel ist dabei äquivalent zu

der Ladungserhaltung. Mathematisch ausgedrückt lautet sie

$$\sum_k I_k = 0 . \quad (1)$$

2. Maschenregel

Die Maschenregel besagt, dass die Summe aller Spannungen in einer Masche null ist. Eine Masche ist dabei ein geschlossener Stromkreis. Das Vorzeichen ist dabei abhängig von der Stromrichtung. So ist $U_K > 0$ für einen mathematisch negativen Drehsinn und $I_K < 0$ für einen positiven Drehsinn. Die Maschenregel ist äquivalent zu der Energieerhaltung. Sie wird beschrieben durch

$$\sum_k U_k = 0 . \quad (2)$$

Durch Ausnutzen der Knotenregel wird schnell ersichtlich, dass in der Brückenschaltung 1 $I_1 = I_2$ und $I_3 = I_4$ gilt. Die Maschenregel liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U &= -R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ -U &= -R_2 I_2 + R_4 I_4 = -R_2 I_1 + R_4 I_3 , \end{aligned}$$

welche durch Gleichsetzen zu

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_3 + R_4} I_1$$

führen. Mittels

$$U_S = I_1 (R_1 + R_2)$$

kann die Brückenspannung U dann vollständig über die Widerstände und die Speisespannung U_S ausgedrückt werden

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} U_S . \quad (3)$$

Der Ausdruck (3) wird offensichtlich für

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (4)$$

null. Für dieses Verhältnis an Widerständen wird von einer abgeglichenen Brücke gesprochen. Mit dieser kann ein unbekannter Widerstand ermittelt werden, indem mindestens einer der anderen drei so lange variiert wird, bis $U = 0$ gilt.

Die Brückenschaltung kann nun für Wechselströme auch auf komplexe Impedanzen $Z = X + jY$ erweitert werden, um neben Widerständen R auch Induktivitäten L und Kondensatoren C zuzulassen. Die verschiedenen Impedanzen sind dabei gegeben durch

$$Z_C = -\frac{j}{\omega} C \quad Z_L = j\omega L \quad Z_R = R ,$$

wobei j ist imaginäre Einheit und ω die Kreisfrequenz ist. Die Abgleichbedingung ist analog zu jener mit reellen Widerständen (4) $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$. Für die Realteile folgt demnach

$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3$$

und für die Imaginärteile

$$X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2 .$$

Die Abgleichbedingung für Impedanzen besteht demnach aus zwei Gleichungen, welche den Betrag und die Phase beschreiben.

2.2 Wheatstone'sche Brückenschaltung

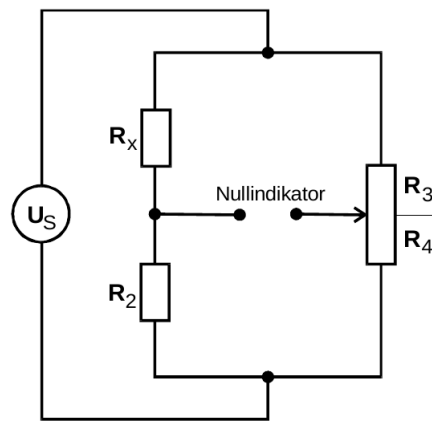


Abbildung 2: Wheatstone'sche Brückenschaltung. [1]

Die Wheatstone'sche Brückenschaltung besitzt nur reelle Widerstände R und kann somit für Gleich- und Wechselstrom verwendet werden. Ziel ist es den unbekannten Widerstand R_x zu bestimmen, indem die Abgleichbedingung (4) ausgenutzt wird. Umstellen ergibt

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} . \quad (5)$$

Da es auf R_3 und R_4 im Speziellen nicht ankommt, sondern nur das Verhältnis relevant ist, sind diese beiden Widerstände wie in Abbildung 2 zu erkennen als Potentiometer realisiert.

2.3 Kapazitätsmessbrücke

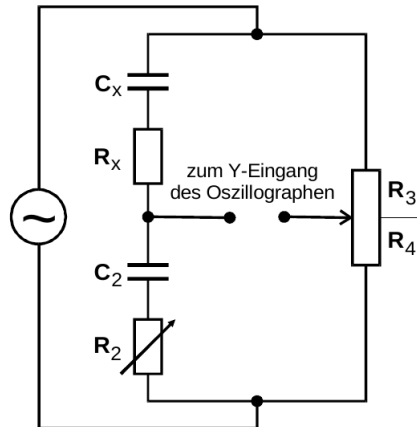


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke für reale Kondensatoren. [1]

Bei der Kapazitätsbrücke (vgl. Abb. 3) wird ein unbekannter, realer Kondensator C_x ausgemessen. Ein realer Kondensator weist dabei im Gegensatz zu einem Idealen dielektrische Verluste auf, sodass er einen gewissen Widerstand R besitzt. Die Impedanz eines realen Kondensators ist also gegeben durch

$$Z_{C,\text{real}} = R - \frac{j}{\omega} C . \quad (6)$$

Da Z_C sowohl Real- als auch Imaginärteil besitzt, kommen nun zwei Abgleichbedingungen zum tragen. Diese lauten

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} . \quad (7)$$

2.4 Induktivitätsmessbrücke

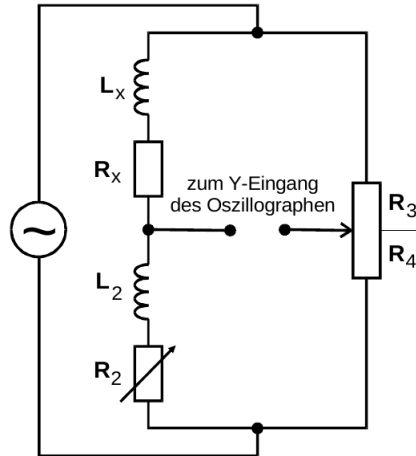


Abbildung 4: Induktivitätsmessbrücke für reale Induktivitäten. [1]

Die Induktivitätsmessbrücke (vgl. Abb. 4) ist prinzipiell ähnlich zu der Kapazitätsbrücke 2.3, nur dass anstatt eines realen Kondensators eine reale Induktivität L_x ausgemessen wird. Eine reale Induktivität ist dabei analog zu dem realen Kondensator verlustbehaftet, wobei diesmal magnetische Feldenergie in Wärme umgewandelt wird. Die reale Induktivität kann wieder über einen reellen Widerstand und eine ideale Induktivität ausgedrückt werden, sodass sich für die Impedanz

$$Z_{L,\text{real}} = R + j\omega L$$

ergibt. Für die Abgleichbedingungen folgt

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} . \quad (8)$$

Bei dieser Schaltung ist darauf zu achten, dass L_2 möglichst verlustfrei ist und dass der Wirkanteil möglichst allein durch R_2 realisiert ist. Da diese Forderungen gerade bei niedrigen Frequenzen nicht umsetzbar sind, werden für solche Messungen oft andere Schaltungen wie die Maxwell-Brücke 2.5 verwendet.

2.5 Maxwell-Brücke

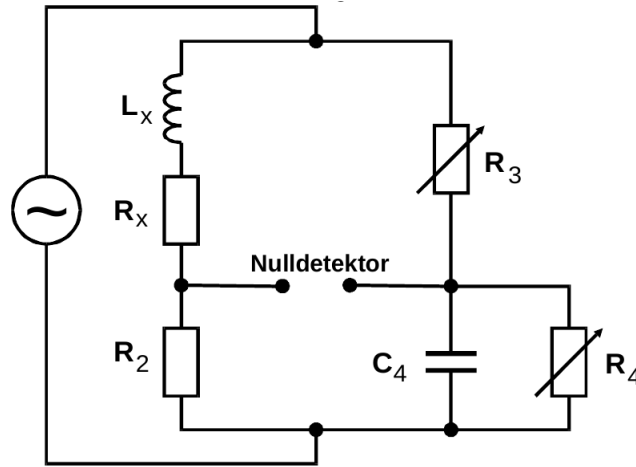


Abbildung 5: Maxwell-Brücke für reale Induktivitäten. [1]

Auch mit der Maxwell-Brücke (vgl. Abb. 5) kann wie bei der Induktivitätsmessbrücke 2.4 eine unbekannte, reale Induktivität L_x ausgemessen werden. Der Vorteil der Maxwellbrücke besteht jedoch darin, dass keine zweite Induktivität L_2 benötigt wird. Dafür ist ein Kondensator C_4 verbaut, welcher möglichst verlustarm sein sollte. Die regelbaren Widerstände R_3 und R_4 stellen in dieser Schaltung die Abgleichelemente dar. Die Impedanzen sind der Form

$$Z_1 = R_x + j\omega L_x \quad \text{und} \quad Z_4 = \frac{R_4 - j\omega C_4 R_4^2}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2}, \quad (9)$$

womit sich die Abgleichbedingungen

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (10)$$

ergeben.

2.6 Frequenzabhängigkeit der Abgleichbedingung

Die in Abschnitt 2.1 hergeleitete Abgleichbedingung (4) ist unabhängig von der Frequenz der Speisespannung U_S . Für große Frequenzen ν wird jedoch die Streukapazität in der Schaltung so groß, dass die beschriebenen Abgleichverfahren nicht mehr möglich sind. Ist die Frequenz zu gering, kann der Abgleich erst nach einer längeren Einschwingphase erfolgen. Die optimale Frequenz liegt dann vor, wenn der Wirkwiderstand X die gleiche Größenordnung wie der Blindwiderstand Y besitzt.

Es gibt auch Schaltungen bei denen ein Abgleich nur bei diskreten Frequenzen möglich ist. Eine solche Schaltung wird im Folgenden betrachtet.

2.7 Wien-Robinson-Brücke

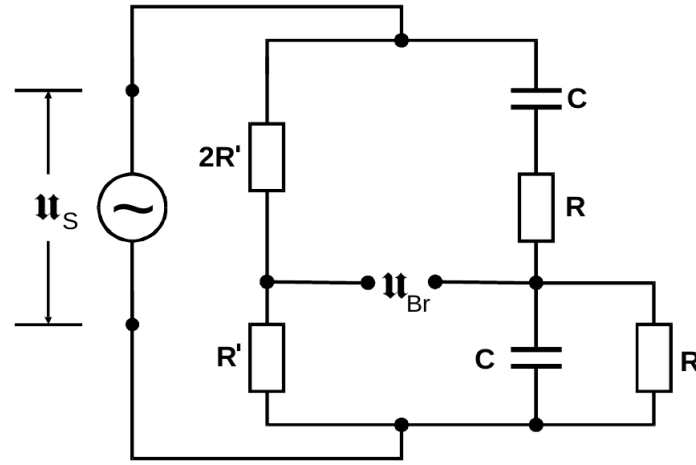


Abbildung 6: Wien-Robinson-Brücke. [1]

Die Wien-Robinson-Brücke (vgl. Abb. 6) besitzt keine Abgleichelemente. Es ist desweiteren darauf zu achten, dass C , R und R' möglichst genau bekannt sind und dass C möglichst verlustfrei ist. Die Impedanzen in dieser Schaltung sind gegeben durch

$$Z_1 = 2R' , \quad Z_2 = R' , \quad Z_3 = \frac{j\omega CR + 1}{j\omega C} , \quad Z_4 = \frac{R}{1 + j\omega RC} .$$

Einsetzen in Gleichung 3 liefert für die nun komplexe Brückenspannung U_{Br}

$$\begin{aligned} U_{Br} &= \frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC} U_S \\ \Leftrightarrow \frac{U_{Br}}{U_S} &= \frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC} . \end{aligned}$$

Die Bildung des Betragsquadrates ergibt

$$\frac{U_{Br}}{U_S} = \frac{1}{9} \frac{\Omega^2 - 1}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} , \quad (11)$$

wobei $\Omega = \omega/\omega_0$ mit $\omega_0 = 1/LC$ ist. ω_0 ist also genau die Nullstelle des Zählers. Die Schaltung entfernt demnach die Frequenz ω_0 aus einem kontinuierlichen Frequenzspektrum und kann somit als elektronischer Filter angesehen werden. Die um ω_0 herum liegenden Frequenzen werden zudem noch stark abgeschwächt.

Wird die Schaltung über einen Sinusgenerator gespeißt, welcher gerade die Frequenz ω_0 besitzt, kann mit der Wien-Robinson-Brücke eine Untersuchung der Oberwellen, die durch den Generator erzeugt werden, durchführen. Das Verhältnis der Oberwellen U_2

bis U_N zur Grundwelle U_1 wird dabei als sogenannter Klirrfaktor definiert. Dieser ist gegeben durch

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N U_i^2}}{U_1}. \quad (12)$$

3 Durchführung

Alle in Kapitel 2 beschriebenen Brückenschaltungen werden an eine Wechselstromquelle mit einer Frequenz von $\omega = 1 \text{ kHz}$ angeschlossen. Für die Messung der Brückenspannung wird ein Oszilloskop verwendet. Der Aufbau der Schaltungen wurde in Kapitel 2 ausführlich behandelt.

3.1 Wheatstone'sche Brückenschaltung

Bei der Messung mit der Wheatstone'schen Brückenschaltung (vgl. 2.2) wird ein unbekannter Widerstand ausgemessen. Das Potentiometer R_3/R_4 dafür so lange variiert, bis die gemessene Brückenspannung gleich null ist. Die Werte der bekannten Widerstände R_2 , R_3 und R_4 werden abgelesen notiert. Diese Messung wird für zwei verschiedene Widerstände R_2 durchgeführt. Falls Hochfrequente Störspannungen die Messung stören, können diese mit einem Tiefpass unterdrückt werden.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Bei der Messung mit der Kapazitätsmessbrücke (vgl. 2.3) wird ein unbekannter Kondensator ausgemessen. Die Stellglieder R_2 und Potentiometer R_3/R_4 werden dafür so lange variiert, bis die Brückenspannung gleich null ist. Die Werte der bekannten Widerstände R_3 und R_4 und der Kapazität C_2 werden abgelesen und notiert. Diese Messung wird für zwei verschiedene Kondensatoren C_2 durchgeführt. Anschließend wird die Messung für ein RC -Element wiederholt.

3.3 Induktivitätsmessbrücke

Bei der Messung mit der Kapazitätsmessbrücke (vgl. 2.4) wird eine unbekannte Induktivität ausgemessen. Die Stellglieder R_2 und Potentiometer R_3/R_4 werden dafür so lange variiert, bis die Brückenspannung gleich null ist. Die Werte der bekannten Widerstände R_3 und R_4 und der Induktivität L_2 werden abgelesen und notiert. Diese Messung wird für zwei verschiedene Widerstände R_2 durchgeführt.

3.4 Maxwell

Die beiden Induktivitäten, die mit der Induktivitätsmessbrücke ausgemessen wurden, werden nun erneut mit der Maxwell-Brücke (vgl. 2.5) ausgemessen. R_3 und R_4 sind dabei nach Abbildung 5 nicht mehr als Potentiometer verbaut, sondern dienen als getrennte Stellglieder, die zur Ausmessung alternierend variiert werden, bis die Brückenspannung

gleich null ist. Die Werte der bekannten Widerstände R_2 , R_3 und R_4 und der Kapazität C_4 werden abgelesen und notiert. Diese Messung wird für zwei verschiedene Widerstände R_2 durchgeführt.

3.5 Wien-Robinson-Brücke

Bei der Messung mit der Wien-Robinson-Brücke, wird nun die Frequenz ν in einem Intervall von [100 Hz, 20 000 Hz] variiert. Dabei wird die Brückenspannung gemessen und notiert. Es werden mindestens 20 Messdaten aufgenommen, wobei um das Minimum herum kleinere Messschritte gewählt werden.

4 Auswertung

4.1 Die Wheatstonesche Brückenschaltung

Die Messwerte und Ergebnisse der Wheatstoneschen Brückenschaltung für den Wert 11 sind in folgender Tabelle dargestellt. R_x berechnet sich nach (5). Der Koeffizient $\frac{R_3}{R_4}$ besitzt eine Unsicherheit von $\pm 0.5\%$. Die Unsicherheit wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mittels *uncertainties* in *python* berechnet.

Tabelle 1: Die Messwerte und Ergebnisse der Messung mittels Wheatstonescher Brückenschaltung.

$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$\Delta \frac{R_3}{R_4}$	$R_x[\Omega]$	$\Delta R_x[\Omega]$
1000	333	667	3,335	499,3	2,5
332	601	399	1,995	500,1	2,5

Die Abweichungen von dem Literaturwert sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

Tabelle 2: Die Abweichungen der Berechnung von Wert 11.

$R_{xLit}[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	$\Delta R_x[\Omega]$	Abweichung[%]
489,9	499,3	2,5	1,9
489,9	500,1	2,5	2,1

4.2 Die Kapazitätsmessbrücke

Die Messwerte und die nach (7) berechneten Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefasst. Bei der Messung wurde der Wert 15 verwendet. Der Widerstand R_2 besitzt eine Unsicherheit von 3%. Die Unsicherheiten wurden ebenfalls mit *uncertainties* berechnet.

Tabelle 3: Die Messwerte und Ergebnisse der Berechnung mittels Kapazitätsmessbrücke.

$R_2[\Omega]$	$\Delta R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$C_2[\text{nF}]$	$R_x[\Omega]$	$\Delta R_x[\Omega]$	$C_x[\text{nF}]$
684	20,25	411	589	450	477,29	14	644,89
316	9,48	605	395	992	484,0	15	647,67

Die Abweichungen der errechneten Werte von den Literaturwerten sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

Tabelle 4: Die Abweichungen der Berechnung von Wert 15.

$R_{xLit}[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	Abw[%]	$C_{xLit}[\text{nF}]$	$C_x[\text{nF}]$	Abw[%]
473	477,29	0,9	652	644,89	1,09
473	484,0	2,32	652	647,67	0,66

4.3 Die Induktivitätsmessbrücke

Die Messwerte und die nach (8) berechneten Ergebnisse sind in folgender Tabelle wiedergegeben. Es wurde der Wert 18 verwendet.

Tabelle 5: Die Messwerte und Ergebnisse der Berechnung mittels Induktivitätsmessbrücke.

$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$L_2[\text{mH}]$	$R_x[\Omega]$	$L_x[\text{mH}]$
722	403	597	20,1	487,38	13,57
700	408	592	20,1	482,43	13,85

Die Abweichungen der errechneten Werte von den Literaturwerten sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

Tabelle 6: Die Abweichungen der Berechnung von Wert 18.

$R_{xLit}[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	Abw[%]	$L_{xLit}[\text{mH}]$	$L_x[\text{mH}]$	Abw[%]
360	487,38	35,38	49,82	13,57	72,77
360	482,43	34,0	49,82	13,85	72,19

4.4 Die Maxwellbrücke

Die Messwerte und die nach (10) berechneten Ergebnisse sind in folgender Tabelle wiedergegeben. Hierbei besitzen die Widerstände R_3 und R_4 eine Unsicherheit von $\pm 3\%$.

Die resultierenden Unsicherheiten wurden hier ebenfalls mit *uncertainties* berechnet.

Tabelle 7: Die Messwerte und Ergebnisse der Berechnung mittels Maxwellbrücke.

$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$\Delta R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$\Delta R_4[\Omega]$	$C_4[\text{nF}]$	$R_x[\Omega]$	$\Delta R_x[\Omega]$	$L_x[\text{mH}]$	$\Delta L_x[\text{mH}]$
1000	340	10,2	307	9,21	450	1107	33	153,0	5
1000	115	3,45	308	9,24	450	373	11	51,8	1,6

Die Abweichungen der Werte von den Literaturwerten ist in folgender Tabelle angegeben.

Tabelle 8: Die Abweichungen der Berechnung von Wert 18 aus der Berechnung mittels Maxwellbrücke.

$R_{xLit}[\Omega]$	$R_x[\Omega]$	Abw[%]	$L_{xLit}[\text{mH}]$	$L_x[\text{mH}]$	Abw[%]
360	1107	208	49,82	153	207
360	373	3,7	49,82	51,8	3,9

4.5 Die Wien-Robinson Brücke

Tabelle 9: Die Messwerte der Wien-Robinson-Brücke.

$f[\text{Hz}]$	$U[\text{V}]$
20	3
100	1
120	0,65
140	0,31
150	0,16
160	0,011
170	0,17
180	0,25
200	0,5
250	1
300	1,35
350	1,6
400	1,9
500	2,2
600	2,5
800	2,9
1000	3
2000	3,2
3000	3,3
4000	3,25
5000	3,3
10 000	3,3
15 000	3,2
20 000	3,2

Die in Tabelle 9 aufgeführten Messwerte sind in folgender Abbildung grafisch dargestellt.

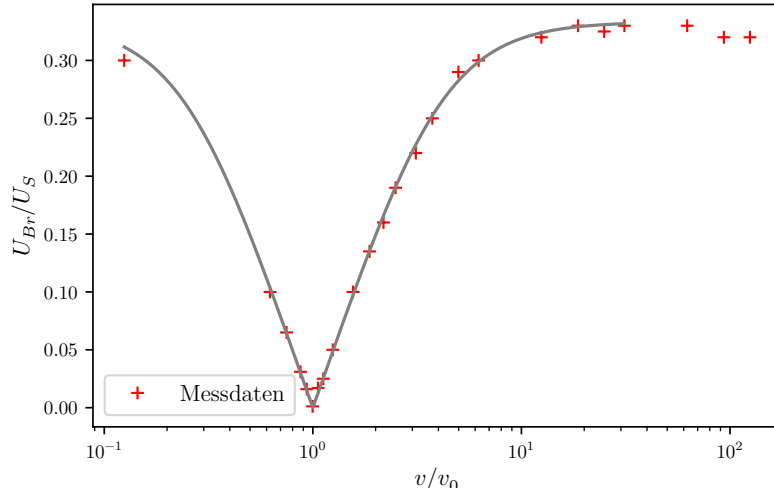


Abbildung 7: Die Messwerte und die an diese gefittete Theoriekurve.

Die Theoriekurve (11) wurde mittels *Scientific Python* an die Messwerte gefittet. Aus dem Fit lässt sich eine Sperrfrequenz von $v_0 = 160.43\text{Hz}$ ermitteln. Der Klirrfaktor berechnet sich zu $k = 7.379 \cdot 10^3$.

5 Diskussion

Die Abweichungen der Messungen an der Wheatstoneschen Brückenschaltung 2 sowie der Kapazitätsmessbrücke 4 sind in derselben Größenordnung wie die Unsicherheiten der Bauteile, die Messungen scheinen also recht genau zu sein. Die Abweichungen der Induktivitätsmessbrücke 6 zeigen, dass Induktivitäten aufgrund des Energieverlustes durch ihren recht hohen Innenwiderstand nicht gut als Vergleichselement geeignet ist. Verglichen mit dem Ergebnis der Maxwellbrücke der zweiten Messreihe 8 zeigt sich, dass diese wesentlich genauer arbeitet als die Induktivitätsmessbrücke, was auf die bereits genannten Gründe zurückzuführen ist. Das Ergebnis der ersten Messreihe der Maxwellbrücke zeigt jedoch eine sehr hohe Abweichung von $\Delta = 207\%$. Dies wurde vermutlich durch ein beschädigtes Bauteil ausgelöst. Die Verbindung zu dem Oszilloskop oder der Tiefpass schienen einen Wackelkontakt zu haben, weshalb diese zwischendurch gewechselt werden mussten. Da auch die Kabel und die anderen Bauteile in einem nicht perfektem Zustand waren, kann auch hier die hohe Abweichung entstanden sein. Die in 7 dargestellte Theoriekurve weicht nur für hohe Werte von den gemessenen Werten ab, der Abschnitt um die Sperrfrequenz zeigt nur recht geringe Abweichungen. Dies deckt sich auch mit dem errechneten sehr geringen Klirrfaktor.

Literatur

- [1] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 302 Elektrische Brückenschaltungen.* Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.