V-101

Das Trägheitsmoment

Christopher Krause
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 07.11.2017 Abgabe: 14.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Dieser Versuch dient dazu Trägheitsmomente von verschiedenen Körpern zu ermitteln, sowie den Steiner'schen Satz zu verifizieren.

2 Theorie

[1] Dreht sich eine punktförmige Masse m mit dem Abstand r zu seiner Drehachse, so ist das Trägheitsmoment I dieser Masse definiert als:

$$I = mr^2 \tag{1}$$

Bei mehreren Massepunkten in einem Körper addieren sich die einzelnen Trägheitsmomente. Wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft, so kann die Achse parallel in den Schwerpunkt verschoben werden. Dies besagt der Steiner'sche Satz. Es gilt:

$$I = I_s + ma^2 \tag{2}$$

I_s ist die neue Drehachse durch den Schwerpunkt, m die Gesmatmasse des Körpers und a der Abstand zwischen der alten und der neuen Drehachse. In diesem Versuch wird ein schwingungsfähiges System betrachtet. Wird also ein Körper um den Winkel ϕ ausgelenkt, so wirkt der Auslenkung ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ entgegen. Der Körper führt harmonische Schwingung aus, wenn er ausgelenkt und losgelassen wird. Die Periodendauer T der Schwingung ist definiert durch:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{3}$$

D ist dabei die Winkelrichtgröße. Diese Gleichung gilt nur für kleine Auslenkungen von ϕ und für D gilt außerdem:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D}\phi \tag{4}$$

Das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ist definiert als:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{r} = Frsin(\phi) \tag{5}$$

Die Körper werden in dem Versuch an eine Drillachse befestigt. Um das Trägheitsmoment der Körper zu berechnen wird das Trägheitsmoment der Drillachse benötigt, da sich das Trägheitsmoment I aus Gleichung (3) wie folgt zusammensetzt:

$$I = I_K + I_D \tag{6}$$

I_K ist dabei das Trägheitsmoment des Körpers und I_D das Trägheitsmoment der Drillachse.

Die Trägheitsmomente von einer Kugel und einem Zylinder werden für den Versuch benötigt und betragen:

$$I_K = \frac{2}{5} m r^2 \tag{7}$$

$$I_Z = \frac{1}{2} m r^2 \tag{8}$$

2.1 Statische Methode

Hierbei wird die Winkelrichtgröße aus Gleichung (4) ermittelt. Dafür muss die Kraft $\boldsymbol{F}$ bekannt sein, welche in einem Abstand $\boldsymbol{r}$ auf den Körper wirkt, sowie der Auslenkungswinkel ϕ.

2.2 Dynamische Methode

Aus Gleichung (3) kann bei bekanntem I die Winkelrichtgröße berechnet werden. Dafür misst man die Periodendauer der Schwingung des Systems.

2.3 Trägheitsmoment einer Modellpuppe

Das Trägheitsmoment einer Modellpuppe mit angewinkelten Armen und Beinen lässt sich wie folgt berechnen:

$$I_1 = I_K + I_R + 2(I_A + m_A(R_R + R_A)^2) + 2(I_B + m_B R_B^2) \tag{9}$$

Sind die Arme der Puppe ausgestreckt lässt sich das Trägheitsmoment mit der Gleichung:

$$I_2 = I_K + I_R + 2(I_A + m_A(R_R + \frac{h_A}{2})^2) + 2(I_B + m_B R_B^2) \tag{10}$$

berechnen. I_K ist das Trägheitsmoment des Kopfes, m_A die Masse des Armes, I_A das Trägheitsmoment des Armes, I_R das Trägheitsmoment des Rumpfes, R_Rm der Radius des Rumpfes, R_A der Radius des Armes, I_B das Trägheitsmoment des Beines, m_B die Masse des Beines und R_B der Radius des Beines.

3 Durchführung

Die Trägheitsmomente von zwei Körpern, sowie einer Puppe, werden mithilfe einer Drillachse bestimmt. Dazu werden die Körper auf einer drehbaren Achse befestigt, welche über eine Spiralfeder mit einem Rahmen verbunden ist. Zunächst wird eine Federwaage in einen Haken eingehängt. Die Federwaage muss dabei möglichst senkrecht zur Drehachse und zum Radius der Kreisbahn der schwingenden Körper gehalten werden, da die Federwaage sonst eine ungenauere Kraft anzeigt.

$$M = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = rFsin(\theta) \tag{11}$$

$sin(\theta)$ ist bei einem 90° Winkel maximal. Die Federwaage wird für 10 unterschiedliche Winkel ausgelenkt und die zugehörige Kraft von der Federwaage abgelesen.

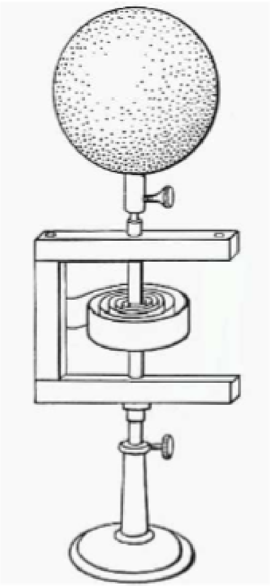

Abbildung 1: Die Drillachse.

Eine als masselos angenommene Stange wird auf der Drehachse befestigt. An beiden Seiten werden Gewichte angebracht und das System wird ausgelenkt und in Schwingung versetzt, wobei die Periodendauer T der Schwingung gemessen wird. Dieser Vorgang wird 10 mal für verschiedene Abstände a der Gewichte zum Mittelpunkt durchgeführt.

Ein Zylinder und eine Kugel werden nacheinander auf der Drillachse befestigt und in Schwingung versetzt. Es wird die Periodendauer T für jeweils 5 Auslenkungen aus der Ruhelage mit einer Stoppuhr gemessen.

Die Periodendauer einer Holzpuppe wird analog bestimmt. Die Holzpuppe hat für die ersten 5 Messungen angelehnte Arme und Beine. Bei den nächsten 5 Messungen sind ihre Arme ausgestreckt und ihre Beine angelehnt.

4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert eines Datensatzes mit N Werten ist definiert durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{12}$$

Die Standardabweichung eines Datensatzes von seinem Mittelwert durch:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})} \tag{13}$$

Pflanzen sich Unsicherheiten fort, wird der Fehler mit der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2} \tag{14}$$

Der Fehler der Steigung m und des Achsenabschnittes b einer linearen Regression wird wie folgt berechnet:

$$\sigma_m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \tag{15}$$

$$\sigma_b = \frac{\bar{x^2}\bar{y} - \overline{xy}\bar{x}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \tag{16}$$

5 Auswertung

5.1 Betimmung der Winkelrichtgröße

Die Winkelrichtgröße D wird mit Gleichung (4) ermittelt. Die gemessenen Kräfte der Federwaage für 10 unterschiedliche Auslenkungen, sowie die zugehörigen Winkelrichtgrößen, werden im folgenden dargestellt. Dabei beträgt der Abstand des Ortes der gemessenen Kräfte zum Mittelpunkt der Drillachse (17.1 ± 0.1)cm.

Tabelle 1: Gemessene Kräfte und Auslenkungen

ϕ	F/N	D/Nm
30°	0.10	0.03266 ± 0.00019
60°	0.22	0.03592 ± 0.00021
90°	0.24	0.02613 ± 0.00015
120°	0.32	0.02613 ± 0.00015
150°	0.36	0.02351 ± 0.00014
180°	0.49	0.02667 ± 0.00016
210°	0.54	0.02519 ± 0.00015
240°	0.62	0.02531 ± 0.00015
270°	0.69	0.02504 ± 0.00015
300°	0.75	0.02449 ± 0.00014

Die Unsicherheit von 1mm wird bei der Messung des Abstandes abgeschätzt.

Es ergibt sich der folgende Mittelwert:

$$D = (0.02711 \pm 0.00005)\mathrm{Nm} \tag{17}$$

5.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse

Die Schwingungsdauer T der als masselos angenommenen Stange, sowie der Abstand a der befestigten Gewichte werden im folgenden dargestellt. Der Abstand der einzelnen Gewichte zum Mittelpunkt ist dabei identisch.

Tabelle 2: Gemessene Schwingungsdauern und Abstände

a/cm	T/s
7.0	2.73
8.0	3.06
9.0	3.15
10.0	3.52
11.0	3.67
12.0	3.87
13.0	4.18
14.0	4.29
15.0	4.55
16.0	4.69

Die Unsicherheit der gemessenen Abstände wird auf 0.1cm geschätzt. Das Quadrat der Schwingungsdauer wird auf das Quadrat des Abstandes aufgetragen. Eine lineare Regression wird mit den Messpunkten durchgeführt.

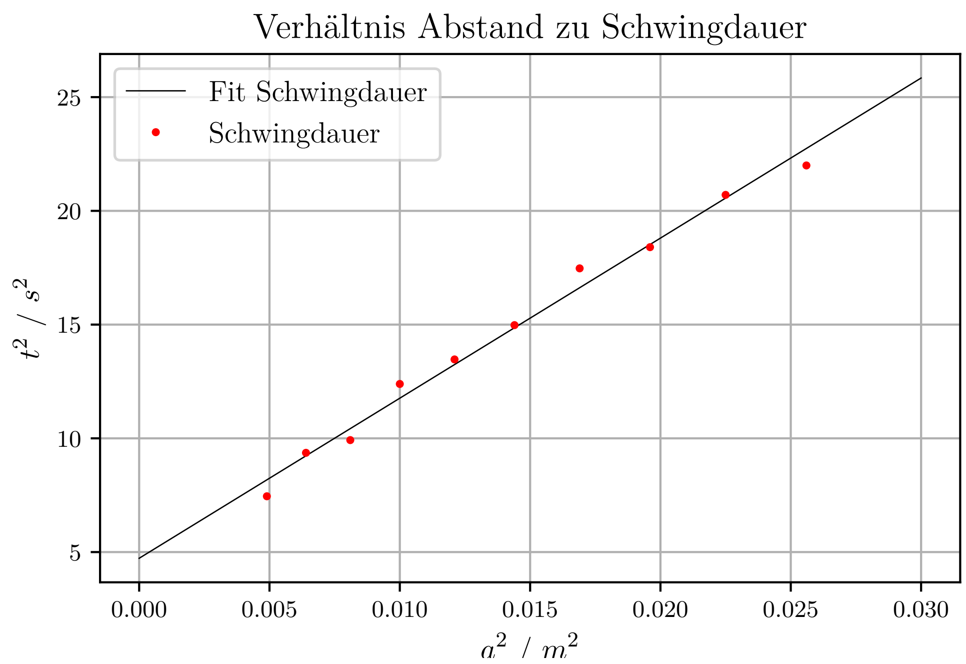

Abbildung 2: Plot.

Die Gerade wird beschrieben durch die Gleichung:

$$y = (703 \pm 26)x + (4.72 \pm 0.42) \tag{18}$$

Es gilt nach Gleichung (3):

$$T^2(a^2) = \frac{4\pi^2}{D}(I_D + 2ma^2) \tag{19}$$

$$\Rightarrow T^2(a^2) = \underbrace{\frac{8\pi^2}{D}}_{Steigung\, m} \cdot a^2 + \underbrace{\frac{4\pi^2}{D} I_D}_{Achsenabschnitt\, b} \tag{20}$$

$$\Rightarrow I_D = \frac{2mb}{a} \tag{21}$$

Für das Trägheitsmoment der Drillachse ergibt sich:

$$I_D = (0.0030 \pm 0.0003)\text{kgm}^2 \tag{22}$$

5.3 Bestimmung des Trägheitsmomente zweier Körper

Die Schwingungsdauer eines Zylinders und einer Kugel werden im folgenden tabelliert.

Tabelle 3: Schwingungsdauer von Zylinder und Kugel

T_Z/s	T_K/s
2.29	1.56
2.23	1.53
2.23	1.64
2.07	1.58
2.07	1.60

Mit diesen Werten ergeben sich nach Gleichung (3) folgende Trägheitsmomente für Zylinder und Kugel:

Tabelle 4: Trägheitsmoment von Kugel und Zylinder

I_Z/kgm^2	I_K/kgm^2
0.003601 ± 0.000007	0.0016712 ± 0.0000031
0.003415 ± 0.000006	0.0016075 ± 0.0000030
0.003415 ± 0.000006	0.0018470 ± 0.0000034
0.002942 ± 0.000005	0.0017143 ± 0.0000032
0.002942 ± 0.000005	0.0017580 ± 0.0000032

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$I_Z = (0.0032630 \pm 0.0000026)\text{kgm}^2 \tag{23}$$

$$I_K = (0.0017196 \pm 0.0000014)\text{kgm}^2 \tag{24}$$

Dabei wurde das Trägheitsmoment der Drillachse nicht berücksichtigt, da sich ansonsten negative Trägheitsmomente für Zylinder und Kugel ergeben würden. Der Theoriewert des Trägheitsmoments des Zylinders mit einer Masse von $m = 0.2369$ kg und einem Radius von $r = 0.051$ m beträgt $I_Z = 0.0031160\text{kgm}^2$. Die Abweichung beträgt 4.5 %. Der Theoriewert der Kugel bei einer Masse $m = 0.8125$ kg und einem Radius von $r = 0.066$ m beträgt $I_K = 0.0014157\text{kgm}^2$. Die Abweichung beträgt 21.5 %.

5.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe

Die Schwingundsdauer einer Modellpuppe wird gemessen. Die Puppe nimmt zwei unterschiedliche Posen P_1 und P_2 ein. Bei der ersten Pose sind Arme und Beine am Körper angelegt. In der zweiten streckt sie die Arme senkrecht nach außen. Die Schwingungsdauern der Puppe betragen:

Tabelle 5: Schwingungsdauer der Modellpuppe

T_{P_1}/s	T_{P_2}/s
0.41	0.60
0.41	0.55
0.36	0.50
0.50	0.64
0.52	0.64

Mit diesen Werten ergeben sich nach Gleichung (3) folgende Trägheitsmomente für die Puppe:

Tabelle 6: Trägheitsmomente der Puppe

I_{P_1}/kgm^2	I_{P_2}/kgm^2
$(1.1543 \pm 0.0021) \cdot 10^{-4}$	$(2.472 \pm 0.005) \cdot 10^{-4}$
$(1.1543 \pm 0.0021) \cdot 10^{-4}$	$(2.077 \pm 0.004) \cdot 10^{-4}$
$(0.8900 \pm 0.0016) \cdot 10^{-4}$	$(1.717 \pm 0.003) \cdot 10^{-4}$
$(1.7168 \pm 0.0032) \cdot 10^{-4}$	$(2.813 \pm 0.005) \cdot 10^{-4}$
$(1.8568 \pm 0.0034) \cdot 10^{-4}$	$(2.813 \pm 0.005) \cdot 10^{-4}$

Als Mittelwerte ergeben sich:

$$I_{P_1} = (1.3544 \pm 0.0012) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kgm}^2 \tag{25}$$

$$I_{P_2} = (2.3784 \pm 0.0020) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kgm}^2 \tag{26}$$

Das Trägheitsmoment der Puppe in Pose 1 lässt sich mit Gleichung (9) berechnen. Die Arme und Beine, sowie der Rumpf der Puppe werden als Zylinder angenähert. Der Kopf wird als Kugel angenähert. Die dafür benötigten Größen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Tabelle 7: Eigenschaften der Puppe

I_K/kgm^2	m_A/kg	I_A/kgm^2	R_A/m	R_R/m	I_R/kgm^2	m_B/m	I_B/kgm^2
$4.3 \cdot 10^{-6}$	0.02	$6.89 \cdot 10^{-7}$	0.0083	0.0188	$1.27 \cdot 10^{-5}$	0.024	$8.67 \cdot 10^{-7}$

Mit diesen Werten folgt für das Trägheitsmoment der Puppe in Pose 1:

$$I_{P_1} = 1.894 \cdot 10^{-4}\mathrm{kgm}^2 \tag{27}$$

Die Abweichung des berechneten Wertes von dem Theoriewert beträgt 28.5%

Für das Trägheitsmoment der Puppe in Pose 2 gilt:

$$I_{P_2} = I_K + I_R + 2(I_A + m_A(R_R + \frac{h_A}{2})^2) + 2(I_B + m_B R_B^2) \tag{28}$$

I_A ist nun das Trägheitsmoment eines Zylinder dessen Drehachse durch den Zylindermantel verläuft und $h_A = 0.0138\text{m}$ die Höhe des Zylinders. Das Trägheitsmoment I_{P_2} beträgt:

$$I_{P_2} = 1.2787 \cdot 10^{-4}\text{kgm}^2 \tag{29}$$

Die Abweichung des berechneten Wertes von dem Theoriewert beträgt 46.2%.

6 Diskussion

Die Abmessungen von Abständen konnte nur mit ungenauen Methoden durchgeführt werden, da es aus dem Versuchsaufbau nicht möglich war die Schieblehre effektiv einzusetzen. Das Ablesen der Auslenkungen aus der Ruhelage wird mit dem Auge vorgenommen, was den Winkel ϕ ungenau werden lässt. Das Messen der Periodendauer der Schwingungen mit einer Stoppuhr führt ebenfalls zu systematischen Fehler. Außerdem wird angenommen, dass die Stange masselos ist, was in der Realität nicht der Fall ist. Für die Berechnung der Drillachse werden die Gewichte idealerweise als Punktmassen angenommen, was für eine starke Abweichung sorgt, welche später für negative Trägheitsmomente verantwortlich ist. Gleichung (4) gilt nur für kleine Auslenkungen ϕ , wobei in diesem Versuch bis zu 300° ausgelenkt wird. Das führt zu größeren Abweichungen der Trägheitsmomente von den Theoriewerten. Es ist zudem Fragwürdig inwiefern die berechneten Trägheitsmomente mit den realen übereinstimmen, da das Trägheitsmoment der Drillachse vernachlässigt wurde. Der Theoriewert des Trägheitsmoments der Puppe weicht stark von dem Trägheitsmoment der tatsächlichen Puppe ab, da für die Berechnungen starke Vereinfachungen vorgenommen werden. Die Messung der Periodendauer der Schwingung der Puppe ist wegen einer sehr kleinen Periodendauer schwierig und ungenau. Zudem ändert die Puppe während der Schwingung ein wenig ihre Haltung was zu weiteren Abweichungen von den tatsächlichen Trägheitsmomenten führt. Somit ist der Vergleich der berechneten Trägheitsmomente zu den Theoriewerten nicht wirklich möglich, da es zu viele systematische Fehler gibt.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. 2014.