

V301

# **EMK und Innenwiderstand von Spannungsquellen**

Jan Lukas Schubert  
jan-lukas.schubert@tu-dortmund.de

Jan Lukas Späh  
janlukas.spah@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.12.17

Abgabe: 19.12.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

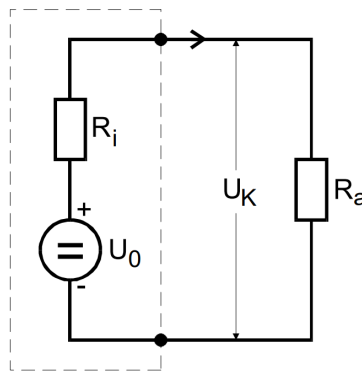
<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

## 1 Ziel

In diesem Versuch sollen die Leerlaufspannungen und die Innenwiderstände verschiedener Spannungsquellen bestimmt werden. Auch ist die umgesetzte Leistung für eine der Spannungsquellen mit der theoretisch zu erwartenden qualitativ zu vergleichen.

## 2 Theorie

Unter einer Spannungsquelle ist ein elektrisches Bauteil zu verstehen, welches für eine endliche Zeit eine konstante Spannung bereitstellen kann. Stellt die Spannungsquelle keinen Strom zur Verfügung, so liegt an ihr die sogenannte Leerlaufspannung  $U_0$  an. Wird ein Lastwiderstand mit dem Widerstand  $R_a$  mit einer realen Spannungsquelle in Reihe geschaltet, dann fällt am Lastwiderstand eine Klemmenspannung  $U_K$  ab, die geringer als die Leerlaufspannung  $U_0$  ist. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die reale Spannungsquelle einer idealen Spannungsquelle entspricht, die mit dem Innenwiderstand  $R_i$  in Reihe geschaltet ist. Die ideale Spannungsquelle ist in der Lage, eine konstante Spannung  $U_0$  bei einem Innenwiderstand von null zu liefern. Die dann vorliegende Schaltung ist in Abbildung 1 zu sehen.



**Abbildung 1:** Schaltbild einer realen Spannungsquelle und eines Lastwiderstands in Reihe [1].

Um Informationen über die Beziehungen zwischen den Größen in dieser Schaltung zu erhalten, wird die Kirchhoffsche Maschenregel angewandt: Die Summe aller Spannungen in einer Masche addiert sich zu null, das bedeutet also

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0, \quad (1)$$

falls an der Masche insgesamt  $N$  Teilspannungen abfallen. Nach Anwendung dieser Formel auf diese konkrete Schaltung ergibt sich die Zuordnung

$$U_K(I) = IR_a = U_0 - IR_i \quad (2)$$

für die Klemmenspannung in Abhängigkeit der Stromstärke  $I$ . Wird eine Spannung durch ein Voltmeter gemessen, dann verfügt dieses für gewöhnlich über einen hohen Widerstand, sodass der Stromfluss näherungsweise null beträgt und der zweite Summand vernachlässigt werden kann. In diesem Grenzfall gilt  $U_0 \approx U_K$ , die abzulesende Klemmenspannung ist ungefähr gleich der Leerlaufspannung der Spannungsquelle.

Für die Leistung  $P$ , die an einem Lastwiderstand  $R_a$  umgesetzt wird, gilt

$$P = I^2 R_a. \quad (3)$$

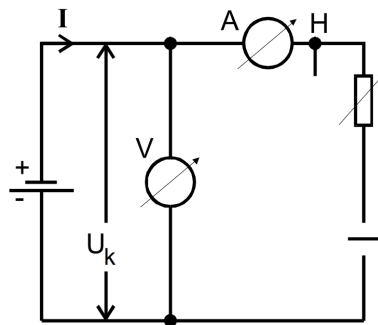
Diese Leistung kann nicht beliebig groß werden. Stattdessen durchläuft sie ein Maximum. Der Versuch, die maximale Leistung am Verbraucher umzusetzen, wird als Leistungsanpassung bezeichnet. Dies kann hier erreicht werden, indem  $R_a$  geeignet gewählt wird.

Im Allgemeinen liegt kein linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Größen vor. Dies ist insbesondere der Fall, wenn statt Gleichstrom ein Wechselstrom anliegt. Dann ist der Quotient  $\frac{U}{I}$  nicht konstant und der Innenwiderstand ist die differenzielle Größe

$$R_i = \frac{dU_K}{dI}. \quad (4)$$

### 3 Durchführung

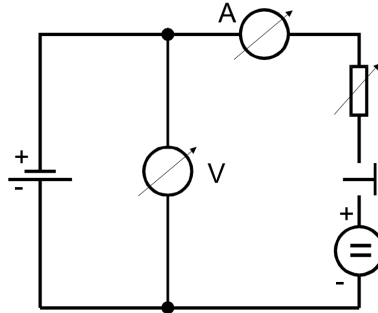
Die erste Messaufgabe besteht aus der direkten Messung der Leerlaufspannung einer Monozelle. Dies geschieht über ein hochohmiges Voltmeter. Der Eingangswiderstand  $R_V$  und die abgelesene Leerlaufspannung werden notiert. Danach wird die Schaltung mit dem Schaltbild, welches in Abbildung 2 zu sehen ist, aufgebaut.



**Abbildung 2:** Schaltbild zur Reihenschaltung einer realen Spannungsquelle mit einer Last und Messgeräten [1]

Der Lastwiderstand  $R_a$  ist dabei in einem Bereich von 0 bis  $50\,\Omega$  regelbar. Über die Variation des Lastwiderstand wird die Stromstärke, welche durch das vor den Lastwiderstand geschaltete Amperemeter gemessen wird, verändert. Dadurch lässt sich die Klemmenspannung  $U_K$  in Abhängigkeit der Stromstärke  $I$  aufnehmen.

Nun wird hinter den regelbaren Widerstand eine Gegenspannung geschaltet, welche ungefähr 2 V über der bereits näherungsweise gemessenen Leerlaufspannung liegt. Dies ist in Abbildung 3 veranschaulicht.



**Abbildung 3:** Schaltbild zur gleichen Schaltung, jedoch mit einer Gegenspannung [1]

Bei diesem Aufbau erfolgt die Aufnahme der Messwerte genau so wie zuvor beschrieben.

Zuletzt sind Messreihen mit dem Aufbau in Abbildung 2 für Wechselspannungsquellen aufzunehmen. Diese sind ein 1 V-Rechteckausgang und ein 1 V-Sinusausgang. Die Lastwiderstände sind erneut regelbar. Für die Rechteckspannung wird ein Widerstand im Bereich von  $20\ \Omega$  bis  $250\ \Omega$  verwendet, für die Sinusspannung gilt der Bereich von  $0,1\ \text{k}\Omega$  bis  $5\ \text{k}\Omega$ . Außerdem ist auf die Frequenzeichnung der Messgeräte zu achten. Die Frequenz der Wechselspannung ist dieser anzupassen.

## 4 Auswertung

Die direkte Messung der Leerlaufspannung  $U_0$  über das Voltmeter mit einem Eingangswiderstand  $R_v \geq 10\ \text{M}\Omega$  ergibt

$$U_{0,\text{exp}} = 1,335\ \text{V}.$$

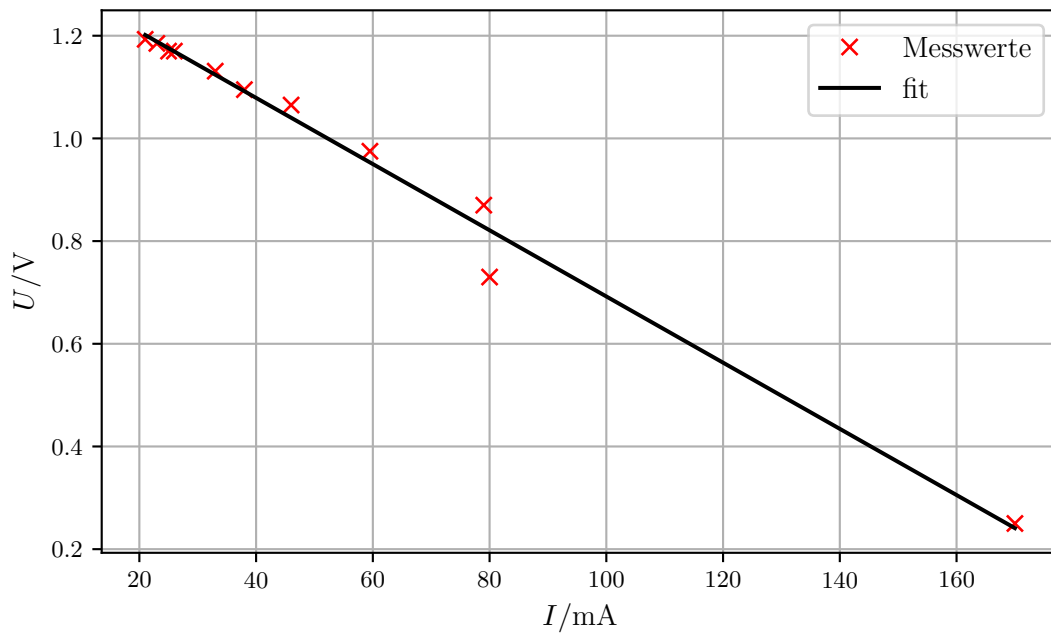
Nun sollen der Innenwiderstand  $R_i$  und die Leerlaufspannung  $U_0$  für alle vier Messreihen durch eine lineare Ausgleichsrechnung berechnet werden. Dazu wird die Klemmenspannung  $U_K$  gegen die Stromstärke  $I$  aufgetragen und anschließend eine lineare Ausgleichsrechnung nach  $f(x) = ax + b$  mit python scipy.optimize durchgeführt. Nach Gleichung (2) entspricht der Betrag der Steigung  $a$  der Ausgleichsgeraden dabei dem Innenwiderstand des Gerätes und die Leerlaufspannung dem y-Achsenabschnitt  $b$ . Für die Monozelle ergibt sich der in Abbildung 4 dargestellte Zusammenhang mit den Parametern

$$\begin{aligned} R_{i,\text{mono}} &= -a_{\text{mono}} = (6,446 \pm 0,257)\ \Omega, \\ U_{0,\text{mono}} &= b_{\text{mono}} = (1,337 \pm 0,018)\ \text{V}. \end{aligned}$$

Die hierfür verwendeten Messdaten finden sich in Tabelle 1.

**Tabelle 1:** Messdaten zur an der Monozelle gemessenen Klemmenspannung  $U_K$  in Abhängigkeit von der durch den Widerstand geregelten Stromstärke  $I$

$U_K/\text{V}$	$I/\text{mA}$
0,25	170
0,73	80
0,87	79
0,975	59,5
1,065	46,0
1,095	38,0
1,131	33,0
1,170	26,0
1,170	25,0
1,185	23,0
1,193	21,0



**Abbildung 4:** Auftragung der an der Monozelle gemessenen Klemmenspannung  $U_K$  gegen die Stromstärke  $I$

Deutlich erkennbar ist hier eine Sprungstelle. Da diese jedoch nicht mit dem Wechsel der Skalen der Messgeräte zusammenhängt, kann die Ausgleichsrechnung hier nicht besser durchgeführt werden.

Nun soll der gemessene Wert für die Leerlaufspannung  $U_0$  mit dem berechneten Wert verglichen werden. Da der Widerstand des Voltmeters entgegen der theoretischen, idealen Erwartung endlich ist, liegt bei der direkten Messung ein systematischer Fehler vor. Der Zusammenhang für die Leerlaufspannung folgt nach Gleichung (2) zu

$$U_0 = U_K + U_K \frac{R_i}{R_v} . \quad (5)$$

Dabei entspricht  $U_K$  dem gemessenen Wert für die Leerlaufspannung und  $R_v$  dem Eingangswiderstand des Voltmeters. Der Systematische Fehler bei der manuellen Messung der Leerlaufspannung ergibt sich damit zu

$$\frac{\Delta U}{U_K} = \frac{R_i}{R_v} \leq (6,45 \pm 0,26) \cdot 10^{-5} \% .$$

Auch wenn das Voltmeter hinter das Amperemeter gelegt wird, entstehen systematische Fehler. In diesem Fall enthält die gemessene Spannung  $U_K$  zusätzlich zur am Innenwiderstand der Spannungsquelle abfallenden Spannung noch die am Innenwiderstand des Amperemeters abfallende Spannung.

Für die Messreihe der Monozelle mit einer angelagerten Gegenspannung ergibt sich bei einem analogen Vorgehen der in Abbildung 5 gezeigte Zusammenhang. Die zugrundeliegenden Messwerte können Tabelle 2 entnommen werden. Dabei ist eine starke Sprungstelle beim Skalenwechsel zu verzeichnen, weswegen für die Messwerte getrennte Ausgleichsrechnungen durchgeführt werden. Die Parameter ergeben sich zu

$$\begin{aligned} a_{1,\text{gegen}} &= (6,14 \pm 0,21) \, \Omega , \\ b_{1,\text{gegen}} &= (1,60 \pm 0,04) \, \text{V} , \\ a_{2,\text{gegen}} &= (5,85 \pm 0,24) \, \Omega , \\ b_{2,\text{gegen}} &= (1,281 \pm 0,014) \, \text{V} . \end{aligned}$$

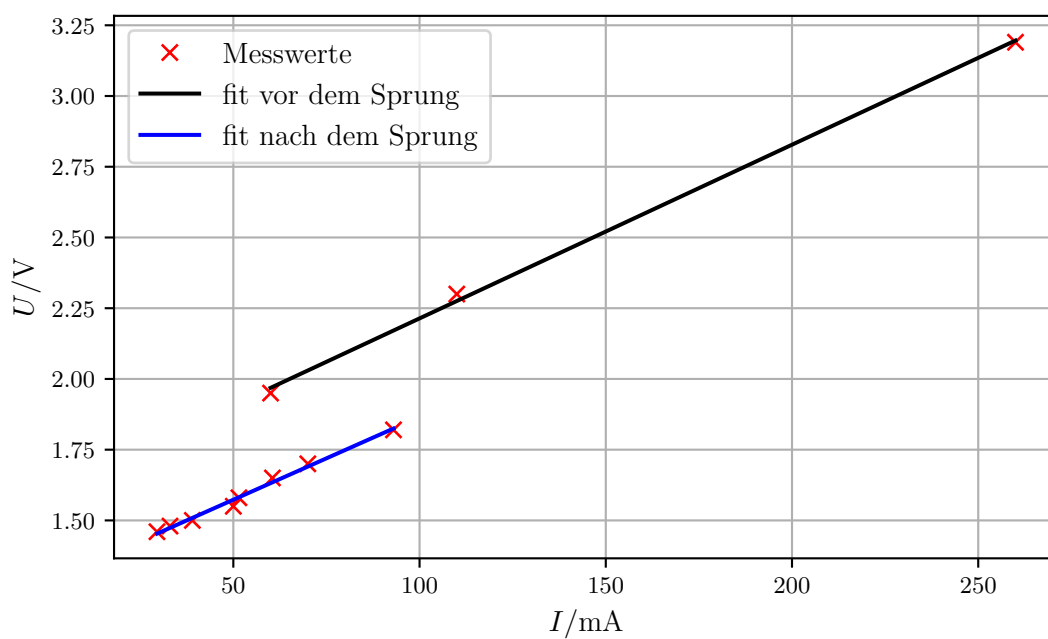
Da die Steigungen der Ausgleichsgeraden annähernd gleich sind, wird als Innenwiderstand  $R_i$  das Mittel dieser beiden Werte gebildet. Für die Leerlaufspannung wird ebenso verfahren. Damit ergeben sich unter Beachtung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung die Werte zu

$$\begin{aligned} R_{i,\text{gegen}} &= (6,00 \pm 0,16) \, \Omega , \\ U_{0,\text{gegen}} &= (1,440 \pm 0,019) \, \text{V} . \end{aligned}$$

Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung wird dabei mit `pyhton uncertainties.unumpy` berechnet.

**Tabelle 2:** Messdaten zur an der Monozelle gemessenen Klemmenspannung  $U_K$  in Abhängigkeit von der durch den Widerstand geregelten Stromstärke  $I$  bei angelegter Gegenspannung  $U_{\text{gegen}}$

$U_K/\text{V}$	$I/\text{mA}$
3,19	260
2,30	110
1,95	60
1,82	93
1,70	70
1,65	60,5
1,58	51,5
1,55	50
1,50	39
1,48	33
1,46	29,5



**Abbildung 5:** Auftragung der an der Monozelle gemessenen Klemmenspannung  $U_K$  gegen die Stromstärke  $I$  bei angelegter Gegenspannung  $U_{\text{gegen}}$



Für die Sinus- und die Rechteckspannung wird analog zur Monozelle verfahren. Dabei wird als Ausgangsspannung eine Spannung von  $U_0 \approx 1 \text{ V}$  verwendet. Daraus ergeben sich die in Abbildung 6 und 7 dargestellten Zusammenhänge. Die zugrundeliegenden Daten können Tabelle 3 entnommen werden.

**Tabelle 3:** Messdaten zur Klemmenspannung  $U_K$  in Abhängigkeit von der Stromstärke  $I$  bei einer Rechteck- und bei einer Sinusspannung.

Rechteckspannung		Sinusspannung	
$U_K/\text{V}$	$I/\text{mA}$	$U_K/\text{V}$	$I/\text{mA}$
0,849	1,9	2,130	0,903
0,846	1,95	2,106	0,903
0,834	2,17	2,076	0,906
0,816	2,34	2,040	0,921
0,801	2,75	1,998	0,942
0,780	3,15	1,947	0,990
0,750	3,68	1,848	1,089
0,696	4,49	1,776	1,173
0,633	5,50	1,635	1,359
0,516	7,32	1,500	1,536
0,330	9,20	1,296	1,830
-	-	0,837	2,493
-	-	0,756	2,604

Die Ausgleichsrechnung ergibt dabei bei der Rechteckspannung für den Innenwiderstand und die Leerlaufspannung die Werte

$$R_{i,\text{rechteck}} = -a_{\text{rechteck}} = (67,7 \pm 2,3) \Omega,$$

$$U_{0,\text{rechteck}} = b_{\text{rechteck}} = (0,987 \pm 0,011) \text{ V}.$$

Für die Sinusspannung ergibt sich

$$R_{i,\text{sinus}} = -a_{\text{sinus}} = (775 \pm 24) \Omega,$$

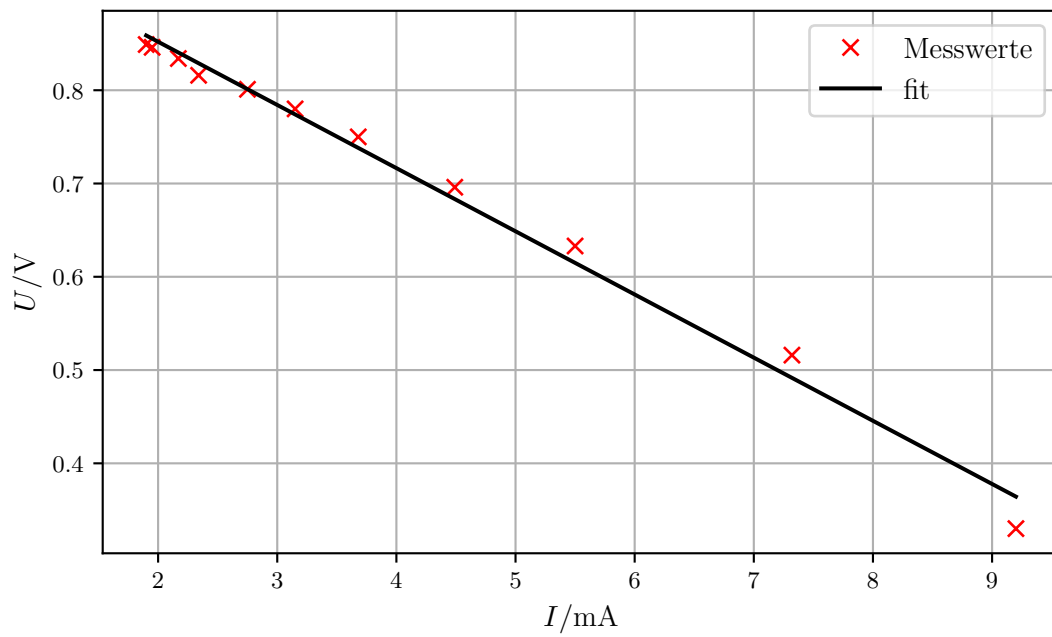
$$U_{0,\text{sinus}} = b_{\text{sinus}} = (2,74 \pm 0,04) \text{ V}.$$

Nun soll noch die bei der Monozelle im Belastungswiderstand  $R_a$  umgesetzte Leistung  $P$  in Abhängigkeit vom Belastungswiderstand untersucht werden. Der Belastungswiderstand ist dabei

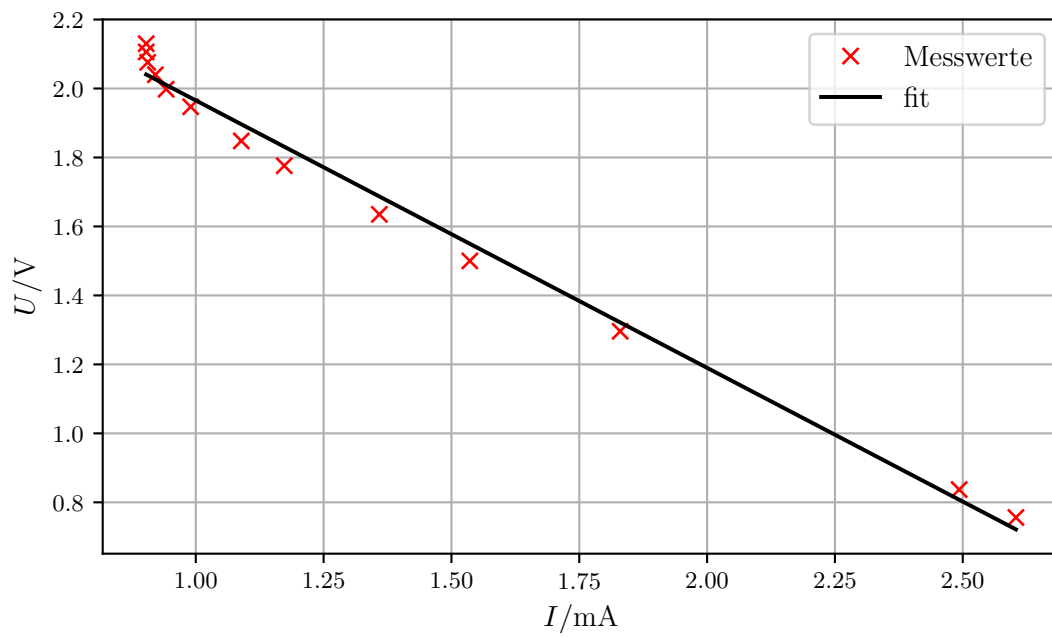
$$R_a = \frac{U_K}{I}. \quad (6)$$

Die Leistung beträgt

$$P = U_K I. \quad (7)$$



**Abbildung 6:** Auftragung der Klemmenspannung  $U_K$  gegen die Stromstärke  $I$  bei einer rechteckförmigen Spannung und Graph der linearen Ausgleichsfunktion



**Abbildung 7:** Auftragung der Klemmenspannung  $U_K$  gegen die Stromstärke  $I$  bei einer sinusförmigen Spannung und Graph der linearen Ausgleichsfunktion

Die aus den Messdaten errechneten Daten sind in Tabelle 4 zu finden und werden in Abbildung 8 dargestellt. Zusätzlich ist in 8 eine Theoriekurve eingezeichnet, die gemäß Gleichung (3) dem Zusammenhang

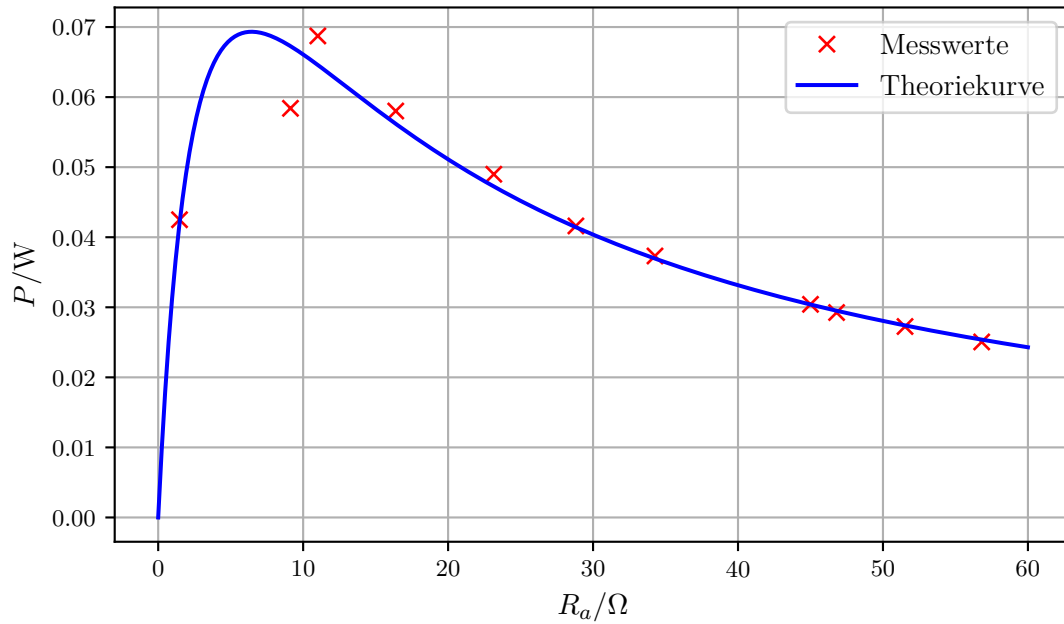
$$P = I^2 R_a = \frac{U_0^2 R_a}{(R_a + R_i)^2} \quad (8)$$

folgt.

**Tabelle 4:** Messdaten zur an der Monozelle gemessenen Klemmenspannung  $U_K$  in Abhängigkeit von der Stromstärke  $I$  und die daraus errechneten Werte für die Leistung  $P$  und den Belastungswiderstand  $R_a$

$U_K/\text{V}$	$I/\text{mA}$	$P/\text{mW}$	$R_a/\Omega$
0,25	170	42,50	1,5
0,73	80	58,40	9,1
0,87	79	68,73	11,0
0,975	59,5	58,01	16,4
1,065	46,0	48,90	23,2
1,095	38,0	41,61	28,8
1,131	33,0	37,32	34,3
1,170	26,0	30,42	45,0
1,170	25,0	29,25	46,8
1,185	23,0	27,25	51,5
1,193	21,0	25,05	56,8

Es ist erkennbar, dass die Messdaten dem Verlauf der Theoriekurve folgen. Nur ein einziger Wert weicht stark von der Theoriekurve ab. Dies ist genau der Wert, bei dem bereits bei den Messwerten zur Monozelle eine Sprungstelle zu verzeichnen ist, obwohl dort kein Skalenwechsel stattfindet. Auffällig ist zudem, dass die anderen Messwerte nahe des Maximums etwas über der Theoriekurve liegen. Da die Werte jedoch insgesamt gut dem Verlauf der Theoriekurve folgen, lässt sich darauf schließen, dass keine signifikanten systematischen Fehler bei der Messung vorliegen.



**Abbildung 8:** Auftragung der Leistung  $P$  am Belastungswiderstand gegen den Belastungswiderstand  $R_a$

## 5 Diskussion

Im Allgemeinen sind die Messergebnisse als konsistent zu bewerten, da sie insgesamt in guter Näherung auf Geraden liegen und sie auch für die Leistung in guter Näherung dem Verlauf der Theoriekurve folgen.

Bei den Messwerten für die Monozelle ist eine starke Sprungstelle zu verzeichnen. Diese kann auch durch die Skalenwechsel nicht erklärt werden. Da der Wert, der hier an der Sprungstelle liegt auch bei der Leistung deutlich von der Theoriekurve abweicht, liegt nahe, dass hier ein Messfehler vorliegt. Der errechnete Wert für die Leerlaufspannung der Monozelle liegt mit  $U_{0,\text{mono}} = (1,337 \pm 0,018) \text{ V}$  sehr nah an dem gemessenen Wert  $U_{0,\text{exp}} = 1,335 \text{ V}$ . Der systematische Fehler der direkten Messung der Leerlaufspannung wurde bereits in der Auswertung diskutiert.

Bei der Messung des Innenwiderstandes  $R_i$  und der Leerlaufspannung  $U_0$  bei angelegter Gegenspannung, liegt ein systematischer Fehler durch den Skalenwechsel vor. Die beiden Graphen der linearen Ausgleichsrechnung haben mit  $a_{1,\text{gegen}} = (6,138 \pm 0,213) \Omega$  und  $a_{2,\text{gegen}} = (5,852 \pm 0,239) \Omega$  zwar annähernd die gleiche Steigung, jedoch liegen die y-Achsenabschnitte mit  $b_{\text{gegen}} = (1,600 \pm 0,036) \text{ V}$  und  $b_{2,\text{gegen}} = (1,281 \pm 0,014) \text{ V}$  relativ weit auseinander. Es kann jedoch keine Aussage darüber getroffen werden, bei welcher Skala der systematische Fehler entsteht. Ein möglicher Grund für den entstandenen Fehler

ist der Wechsel des Innenwiderstandes des Messgerätes beim Umschalten der Skalen. Die Skalen scheinen nicht gut geeicht zu sein.

Die Messwerte für die Rechteckspannung liegen hingegen in guter Näherung auf einer Geraden, sodass die durch die lineare Regression bestimmten Werte  $R_{i,\text{rechteck}} = (67,73 \pm 2,33) \Omega$  und  $U_{0,\text{rechteck}} = (0,987 \pm 0,011) \text{ V}$  als genau zu bewerten sind.

Die Messwerte für die gemessene Klemmenspannung  $U_K$  bei angelegter Sinusspannung in Abhängigkeit von der Stromstärke  $I$  liegen ebenfalls in guter Näherung auf einer Geraden. Lediglich für hohe Klemmenspannungen weichen die Messwerte leicht vom linearen Zusammenhang ab. Dies liegt daran, dass der Zusammenhang auch im Allgemeinen nicht linear ist und der Gleichung (4) folgt.

Die aus den Messwerten berechneten Werte für die Leistung am Belastungswiderstand  $R_a$  in Abhängigkeit desselben folgen im Allgemeinen sehr gut dem Verlauf der Theoriekurve. Neben dem bereits diskutierten stark abweichenden Wert ist noch auffällig, dass die Messwerte nahe dem Maximum der Funktion leicht über dem theoretischen Wert liegen. Ein möglicher Grund hierfür ist, dass sich die Theoriekurve selbst nur aus den selbst ermittelten, fehlerbehafteten Werten für die Leerlaufspannung  $U_0$  und den Innenwiderstand  $R_i$  der Monozelle berechnen lässt, sodass die Kurve selbst ungenau ist.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr.301: Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. [Online; aufgerufen am 14.12.2017]. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf>.