

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Samuel Haefs

samuel.haefs@tu-dortmund.de

Max Koch

max.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019

Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Gedämpfte Schwingungen	3
2.1.1 Schaltkreis	3
2.1.2 Differentialgleichung	3
2.1.3 Fallunterscheidung: Lösungsgleichungen	4
2.2 Erzwungene Schwingungen	6
2.2.1 Schaltkreis	6
2.2.2 Differential- und Lösungsgleichungen	7
3 Durchführung	8
3.1 Effektiver Dämpfungswiderstand	8
3.2 Dämpfungswiderstand bei dem aperiodischen Grenzfall	9
3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	9
3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase	9
4 Auswertung	10
4.1 gedämpfte Schwingung	10
4.2 Aperiodischer Grenzfall	10
4.3 Spannung und Phase am Kondensator	13
5 Diskussion	16
6 Anhang	17
Literatur	19

1 Zielsetzung

Der gedämpfte Schwingkreis (RLC-Kreis) und dessen Eigenschaften sollen genauer untersucht werden. Dabei soll der Dämpfungswiderstand für den Schwingfall und den aperiodischen Grenzfall bestimmt werden. Ein weiteres Ziel ist die Ermittlung der frequenzabhängigen Amplitude und Phase bei einer erzwungenen Schwingung.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingungen

2.1.1 Schaltkreis

Der LC-Kreis enthält eine Spule mit Induktivität L und einen Kondensator mit Kapazität C (siehe Abb. 1a). Die Energie pendelt zwischen den beiden Energiespeichern Spule und Kondensator hin und her. Hier handelt es sich um einen ungedämpften Oszillator, da die Gesamtenergie im System vollständig erhalten bleibt.

In Abbildung 1b ist der LRC-Kreis abgebildet. Das System enthält einen Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C . Die Energie schwingt (wie im LC-Kreis) zwischen Kondensator und Spule hin und her. Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung, da Energie am Widerstand R in Wärmeenergie umgewandelt wird und die Gesamtenergie im System mit der Zeit abnimmt.

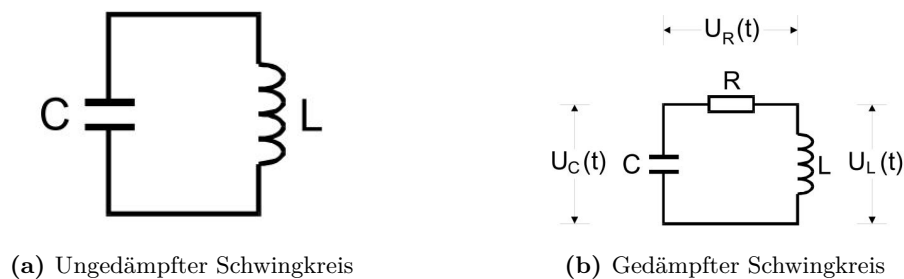


Abbildung 1: Schwingkreise mit den Bauelementen: Kondensator mit Kapazität C , Spule mit Induktivität L , ohmscher Widerstand R . [2, S.284]

2.1.2 Differentialgleichung

Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz, Induktionsgesetz und weiteren Beziehungen für die Spannung U , folgt für den LRC-Kreis die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (1)$$

Der Ansatz

$$I(t) = \tilde{I} e^{i\tilde{\omega}t} \quad \text{mit } \tilde{\omega}, \tilde{I} \in \mathbb{C}$$

löst die Differentialgleichung (1). Nach einsetzen in die DGL ergibt sich

$$\tilde{\omega}_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung

$$I(t) = \tilde{I}_1 e^{i\tilde{\omega}_1 t} + \tilde{I}_2 e^{i\tilde{\omega}_2 t}$$

ergibt sich durch Linearkombination der einzelnen Lösungen. Nach einsetzen von $\tilde{\omega}_{1,2}$ (2), folgt

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} \left(\tilde{I}_1 e^{i2\pi\tilde{\nu}t} + \tilde{I}_2 e^{-i2\pi\tilde{\nu}t} \right) \quad (3)$$

mit den Abkürzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \quad (4)$$

$$2\pi\tilde{\nu} := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

2.1.3 Fallunterscheidung: Lösungsgleichungen

Die Art der gedämpften Schwingung hängt nun von der Form von $\tilde{\nu}$ ab. Im folgenden werden drei Fälle für $2\pi\tilde{\nu}$ genauer untersucht.

1. Fall: Gedämpfte Schwingung

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

$\tilde{\nu}$ ist reell. Das bedeutet, die Konstanten müssen $\tilde{I}_1 = \bar{\tilde{I}}_1$ erfüllen. Nach einigen Umformungen folgt für $I(t)$

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (5)$$

mit $A_0, \eta \in \mathbb{R}$. Physikalisch beschreibt ν die Frequenz einer harmonischen Schwingung. Die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (6)$$

ist konstant. Anders als die Amplitude die mit der Zeit abnimmt. In einem ungedämpften Schwingkreis ist $R = 0$. Für $R \rightarrow 0$ ergibt sich die Schwingungsdauer (siehe Gleichung 6)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (7)$$

Die Abkinkdauer T_{ex} beschreibt den Zeitpunkt, indem die Amplitude um den e-ten Teil ihres Anfangswertes abgenommen hat. Sie wird nach

$$T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R} \quad (8)$$

berechnet. In Abb. 2 ist der Verlauf der Stromstärke $I(t)$ zu sehen. Die abfallende Amplitude der Stromstärke wird durch die Funktion

$$f(t) = \pm e^{-2\pi\mu t} \quad (9)$$

eingehüllt.

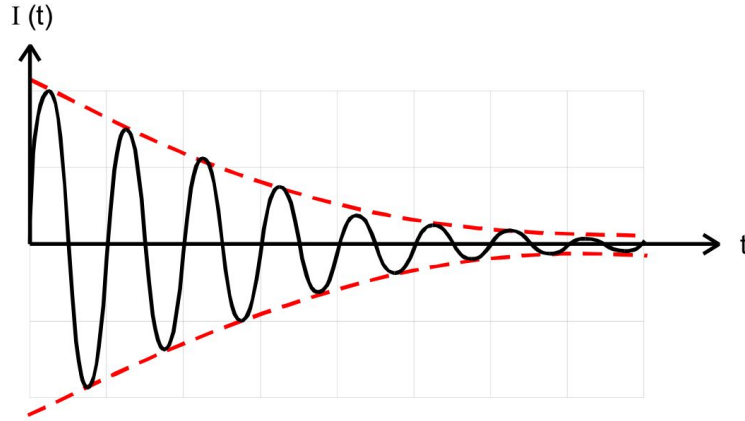


Abbildung 2: Schwingfall: Die abfallende Amplitude des Stroms $I(t)$ wird durch Gleichung 9 beschrieben. [2, S.287]

Fall 2: Kriechfall

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

Hier ist $\tilde{\nu}$ imaginär und daher $I(t)$ (siehe Gleichung 3) reell. Der Stromverlauf beschreibt keine Schwingung mehr, sondern ein einfaches Relaxationsverhalten. In Abb. 3 zeigen die durchgezogenen Linien verschiedene Lösungen des Kriechfalls. Nach hinreichender Zeit gilt für die Stromstärke $I(t)$

$$I(t) \propto e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t\right)}. \quad (10)$$

3. Fall: aperiodischer Grenzfall

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \quad (11)$$

Hier ist $\nu = 0$ und für die Stromstärke $I(t)$ folgt

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{1}{\sqrt{LC}}t}. \quad (12)$$

Es ist kein Nulldurchgang bzw. Überschwingung möglich. $I(t)$ verläuft am schnellsten aller Lösungen gegen 0. Die gestrichelte Linie in Abb. 3 zeigt den Verlauf des aperiodischen Grenzfall.

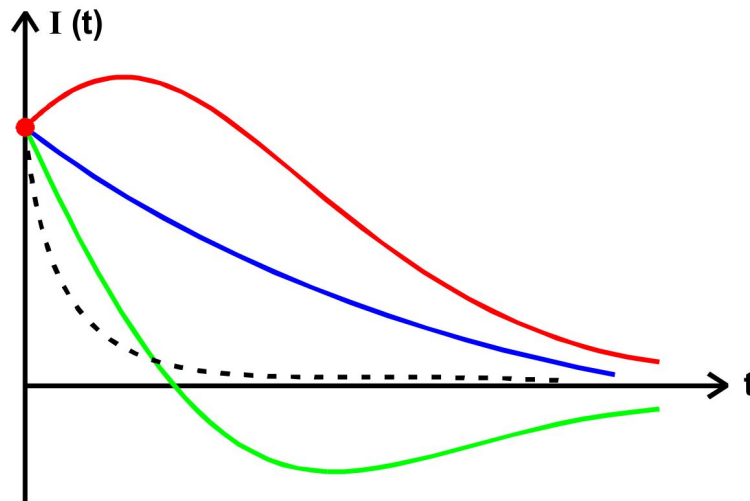


Abbildung 3: Verschiedene Verläufe des Kriechfalls und der aperiodische Grenzfall (gestrichelte Kurve) dargestellt. [2, S.288]

2.2 Erzwungene Schwingungen

2.2.1 Schaltkreis

In den gedämpften Schwingkreis wird zusätzlich eine Spannungsquelle verbaut und eine Sinusspannung eingeschaltet. In Abb. 4 ist der Schaltplan für eine erzwungene Schwingung dargestellt. Die Wechselspannung hat die Form

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}. \quad (13)$$

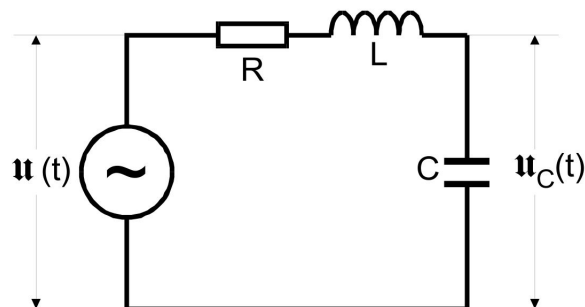


Abbildung 4: Schaltplan einer erzwungenen Schwingung mit Erregerfrequenz $U(t)$. [2, S.289]

2.2.2 Differential- und Lösungsgleichungen

Die Differentialgleichung

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

lässt sich mit dem Ansatz

$$U_c(\omega, t) = U(\omega) e^{i\omega t}$$

lösen. Nach Einsetzen in die DGL (14) und auflösen nach U ergibt sich

$$U = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + i\omega RC} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (15)$$

für die Spannung. Die Phase

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (16)$$

folgt aus $\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)}$. Die Spannung am Kondensator kann mit

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (17)$$

ermittelt werden. Für U_c gilt $U_c(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ und $U_c(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} U_0$. Die Spannung besitzt ein Maximalwert bei der Frequenz

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (18)$$

Die Frequenz wird als Resonanzfrequenz bezeichnet.

Wenn

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

gilt, wird von schwacher Dämpfung gesprochen und ω_{res} nähert sich ω_0 der ungedämpften Schwingung an. Also folgt für U_c

$$U_{c,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0. \quad (19)$$

Wenn nun $R \rightarrow 0$ geht, so folgt die Resonanzkatastrophe $U_{c,\text{max}} \rightarrow \infty$. Die Resonanz kann durch die Breite der Kurve (17) quantifiziert werden. Die Frequenzen ω_+ und ω_- geben an, wo U_c um den Faktor $1/\sqrt{2}$ vom Maximalwert gesunken ist. Sie können nach

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (20)$$

ermittelt werden. Als Maß des Resonanz kann

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (21)$$

verwendet werden. Es gibt den Faktor, um den die maximale Kondensatorspannung $U_{c,\max}$ gegenüber der Erregerspannung erhöht ist an.

Eine starke Dämpfung liegt vor, wenn

$$\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$$

gilt. Hier existiert keine Resonanzhöhung, sondern U_c geht vom Anfangswert U_0 gegen 0. Ist die Phase gerade $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3}{4}\pi$, so gilt

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (22)$$

und es ergibt sich

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}, \quad (23)$$

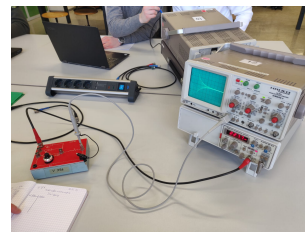
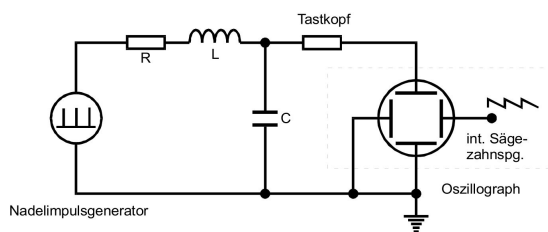
genauso wie bei der schwachen Dämpfung (20).

3 Durchführung

3.1 Effektiver Dämpfungswiderstand

In diesem Versuch wird die Schaltung, wie in Abb. 5a aufgebaut. Sie enthält einen Widerstand R , Induktivität L , Kapazität C , ein Oszilloskop zum Messen der Amplitude und ein Generator (hier Rechteckspannung). Es soll der kleinere der beiden festen Widerstände gewählt werden. Nun wird auf dem Oszilloskop die Zeit eingestellt, so dass die Schwingung eines Impulses zu sehen ist. (siehe Abb. 5b)

Jetzt sollte eine Schwingung mit abnehmender Amplitude zu sehen sein. Nun wird mit dem Oszilloskop die Amplitude der Spannung U zum Zeitpunkt t gemessen.



(a) Schaltplan eines RLC-Kreises zum Messen der Spannungsamplitude. [2, S.294]

(b) Aufbau des RLC Kreises mit Oszilloskop.

Abbildung 5: Schwingkreis mit den Bauelementen: Kondensator mit Kapazität C , Spule mit Induktivität L , ohmscher Widerstand R .

3.2 Dämpfungswiderstand bei dem aperiodischen Grenzfall

Die Schaltung ist, wie in Abb. 5a aufgebaut. Der in Unterabschnitt 3.1 feste Widerstand ist hier ein variabler Widerstand. Dieser wird zunächst auf seinen Maximalwert von $10\text{ M}\Omega$ eingestellt. Anschließend wird der Widerstand verringert bis ein Nulldurchgang (bzw. Überschwingen) eintritt. Dann ist der Widerstand unter R_{ap} gefallen und er muss wieder erhöht werden, bis der Nulldurchgang gerade verschwindet. Dieser Wert ist dann der gesuchte R_{ap} .

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Schaltung wird nach Abb. 6 aufgebaut. Anders als zuvor wird hier eine Sinusspannung angelegt und der Generator an dem Oszilloskop angeschlossen. Außerdem wird der größere der beiden festen Widerstände eingebaut. Der Dämpfungswiderstand ergibt sich aus dem festen Widerstand und dem Innenwiderstand des Generators. Nun wird die Kondensatorspannung U_c und Generatorspannung U_0 zur Frequenz f gemessen. Es sollen etwa 15 Messwerte im Intervall 1 kHz bis 100 kHz aufgenommen werden. Hier ist U_0 konstant und muss daher nur einmal gemessen werden. Bei einer bestimmten Frequenz wird ein Maximum erwartet. Um dieses genauer darstellen zu können wird in der Nähe des Minimums in kleineren Schritten gemessen.

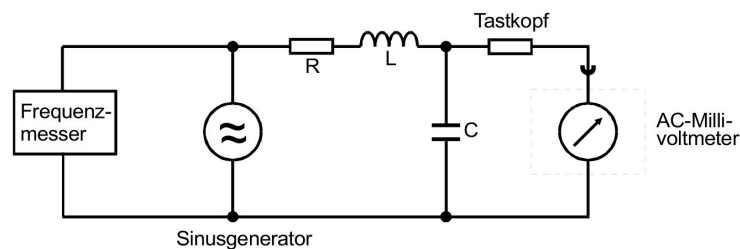
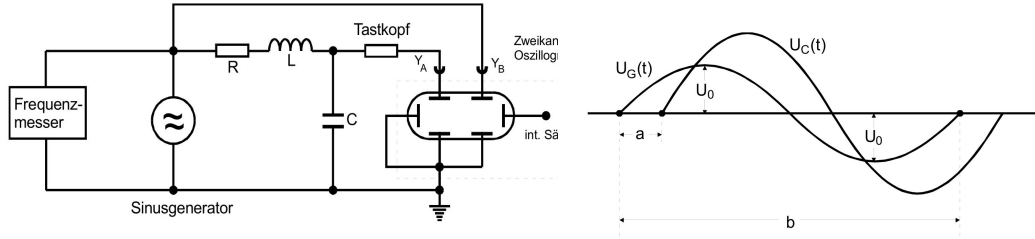


Abbildung 6: Schaltung um frequenzabhängige Amplitude zu messen. [2, S.295]

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Zunächst wird die Schaltung (Abb. 7a) aufgebaut. Am Oszilloskop ist jetzt zum einen die Kondensatorspannung $U_c(t)$ und zum anderen die Spannung des Sinusgenerators $U_G(t)$ zu sehen. Nun wird wie zuvor die Frequenz im selben Kilohertz-Bereich variiert und 15 Messwerte aufgenommen. Dann wird der Abstand a zwischen den Nulldurchgängen der sinusförmigen Spannungen gemessen und ebenfalls die Wellenlänge b notiert (siehe Abb. 7b). Die Phasenverschiebung in rad ergibt sich dann aus $\frac{a}{b}2\pi$.



(a) Schaltplan zur Messung der Phasenverschiebung zwischen Kondensatorspannung U_C und Generatorspannung U . [2, S.296]

(b) Definition der Längen a , b . [1, S.282]

Abbildung 7: Erzwungene Schwingung mit Erregerfrequenz ω des Sinusgenerators.

4 Auswertung

4.1 gedämpfte Schwingung

Die gemessenen Werte für die Spannung am Kondensator U_C bei der Frequenz $f = 227,8 \text{ Hz}$ sind in der Tabelle 1 aufgetragen. Die Schwingung ist in Abbildung 8 zu sehen. In der Abbildung 9 sind die Messwerte in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen. Außerdem wurde mit der Funktion

$$A = A_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (24)$$

eine Ausgleichsrechnung durchgeführt, dessen Graph ebenfalls in 9 zu finden ist. Die Ausgleichsrechnung hat folgende Werte ergeben

$$A_0 = 1,7004$$

$$\mu = 642,3597.$$

Aus den Werten der Ausgleichsrechnung folgt mit (4) und (8)

$$T_{\text{ex}} = 0,2477 \text{ ms.}$$

$$R_{\text{eff}} = (136,1768 \pm 0,4036) \Omega$$

4.2 Aperiodischer Grenzfall

Zu einer Spannung von $U_0 = 180 \text{ mV}$ wurde der Widerstand auf einen Wert von $R_{\text{ap}} = 5 \text{ k}\Omega$ eingestellt. Zu diesem Wert tritt der aperiodische Grenzfall auf. Der theoretische Wert der nach (11) berechnet wurde, beträgt $(5,72 \pm 0,04) \text{ k}\Omega$. Der Fehler wurde hierbei mit

$$\Delta y = \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \quad (25)$$

berechnet. Diese ergibt sieht angepasst auf die Funktion so aus

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial L} \right)^2 \cdot \Delta L^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial C} \right)^2 \cdot \Delta C^2}. \quad (26)$$

Tabelle 1: Die Spannungswerte zu verschiedenen Zeitpunkten während einer gedämpften Schwingung.

t / ms	U / mV	t / ms	U / mV
0.000	-125	0.225	-55
0.025	135	0.245	50
0.045	-110	0.260	-45
0.060	110	0.280	45
0.075	-95	0.300	-40
0.095	95	0.320	35
0.115	-90	0.335	-35
0.135	80	0.355	30
0.150	-75	0.370	-30
0.170	70	0.390	25
0.190	-65	0.410	-25
0.210	60		

Abbildung 8: Eine Periode einer gedämpften Schwingung mit einem Oszilloskop gemessen.

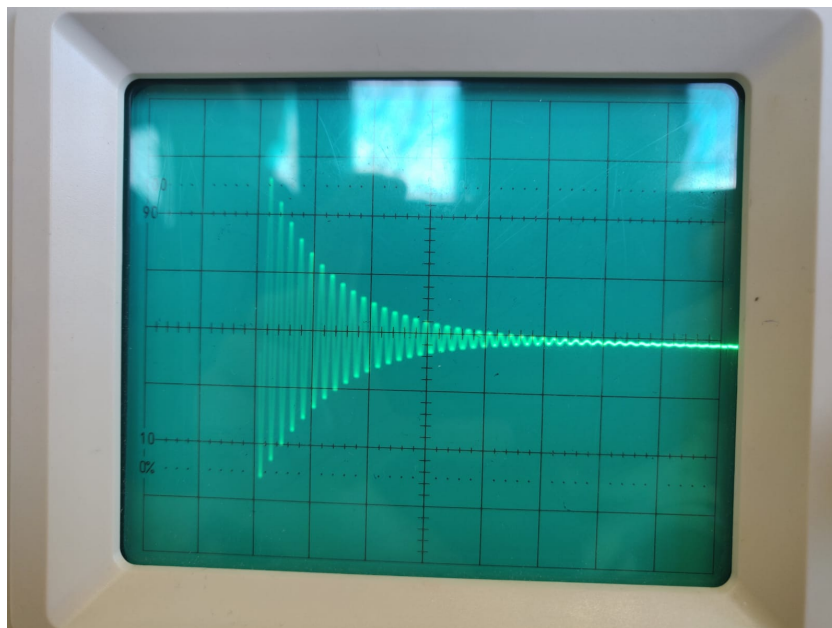
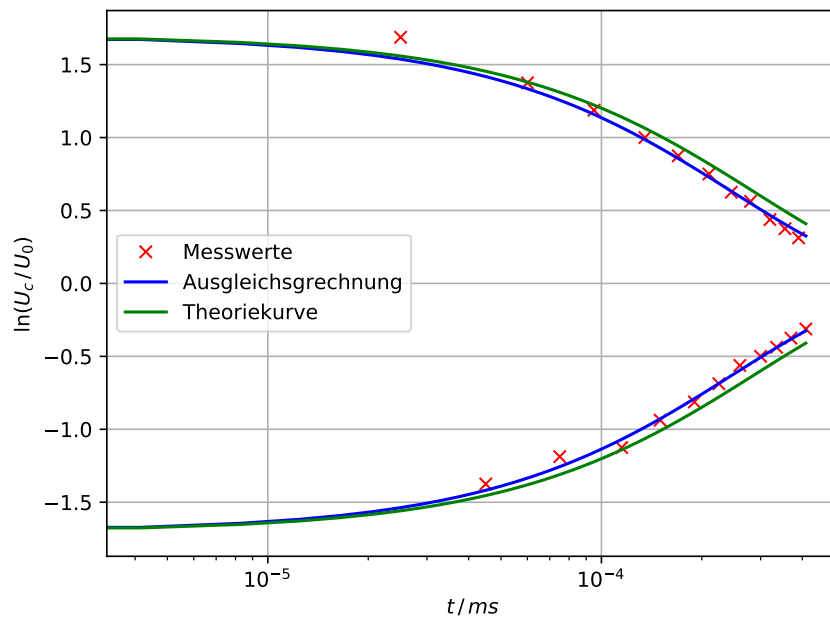


Abbildung 9: Die Messwerte mit Ausgleichsrechnung. Die Ausgleichsrechnung wurde mit [3] durchgeführt.



4.3 Spannung und Phase am Kondensator

In der Tabelle 2 sind in der links die Frequenzen abhängigen Spannungen des Kondensators zu finden. In der rechten Tabelle sind die aufgenommenen Werte a, b zu finden, aus denen anschließend der Phasenunterschied berechnet wurde. Die Grafik 10 und 11 zeigen die Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz am Kondensator. Aus den dafür aufgenommenen Werten wird die Güte q des RCL-Kreises bestimmt. Dies erfolgt mit der Gleichung (20). Die Rechnung hat folgende Werte ergeben

$$q_{\text{exp}} = 3.657$$

$$q_{\text{theo}} = 3,909 \pm 0,029.$$

Für die Breite der Resonanzkurve wurde mit (23) der theoretische Wert

$$f_{\text{theo}+} - f_{\text{theo}-} = (6947 \pm 21) \text{ Hz}$$

berechnet. Experimentell wurde für die Breite der Resonanzkurve der Wert

$$f_{\text{exp}+} - f_{\text{exp}-} = 8 \text{ kHz.}$$

ermittelt. Die beiden Grafiken 12 und 13 zeigen die berechneten Phasenunterschiede in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Experimentell bestimmte Resonanzfrequenz liegt bei

$$f_{\text{exp,res}} = 26,3 \text{ kHz.}$$

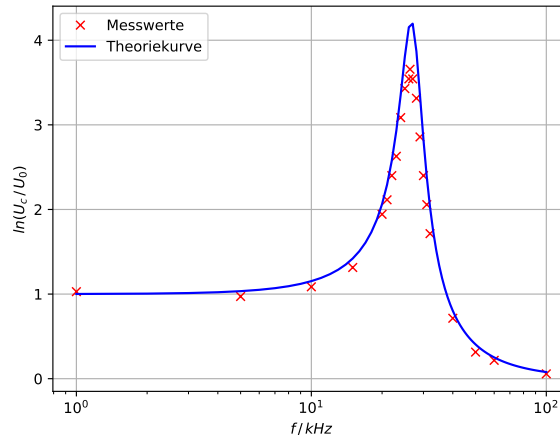


Abbildung 10: Spannung in Abhängigkeit zur Frequenz halblogarithmisch aufgetragen.

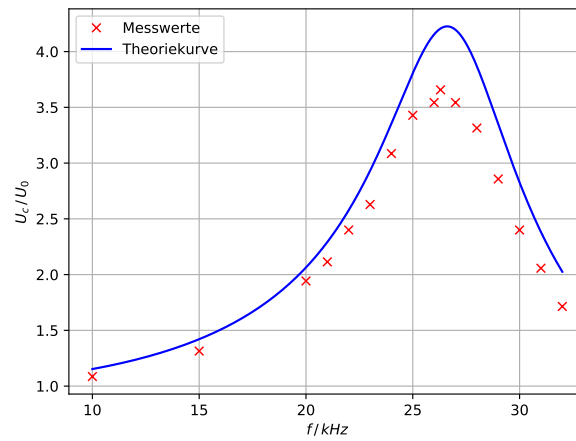


Abbildung 11: Spannung in Abhängigkeit der Frequenz linear aufgetragen.

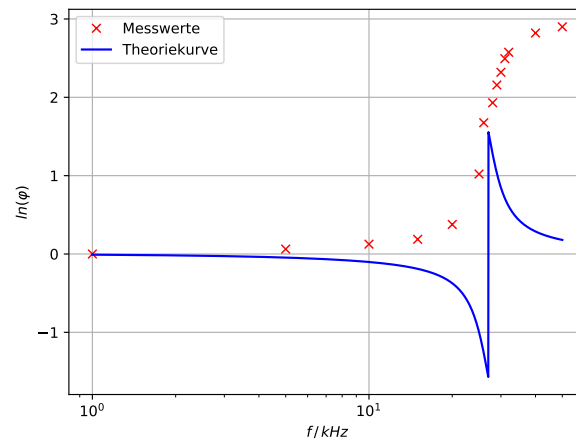


Abbildung 12: Phasenunterschied in Abhängigkeit zur Frequenz halblogarithmisch aufgetragen.

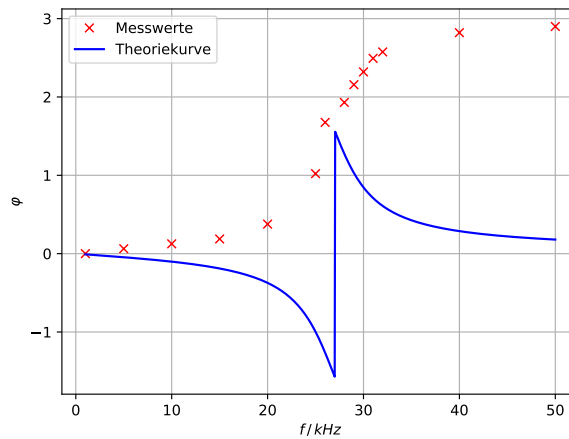


Abbildung 13: Phasenunterschied in Abhängigkeit zur Frequenz linear aufgetragen.

Tabelle 2: Der aus den Messwerten berechnete Phasenunterschied und die Kondensatorspannung zu verschiedenen Frequenzen.

f / Hz	U / V	f / kHz	a / ms	b / ms	ϕ
1.0	180	1	0.0000	1.0000	0.0000
5.0	170	5	0.0020	0.2000	0.0628
10.0	190	10	0.0020	0.1000	0.1256
15.0	230	15	0.0020	0.0670	0.1875
20.0	340	20	0.0030	0.0500	0.3769
21.0	370	25	0.0065	0.0400	1.0210
22.0	420	26	0.0096	0.0360	1.6755
23.0	460	28	0.0106	0.0345	1.9304
24.0	540	29	0.0115	0.0335	2.1569
25.0	600	30	0.0120	0.0325	2.3199
26.0	620	31	0.0125	0.0315	2.4933
26.3	640	32	0.0125	0.0305	2.5750
27.0	620	40	0.0110	0.0245	2.8210
28.0	580	50	0.0090	0.0195	2.8999
29.0	500	100	0.0000	0.0245	0.0000
30.0	420				
31.0	360				
32.0	300				
40.0	125				
50.0	55				
60.0	38				
100.0	10				

5 Diskussion

Die aufgenommenen Werte führen alle zu Diagrammen die den erwarteten Verläufen entsprechen. Der experimentell bestimmte effektive Widerstand weicht 102.64% vom Theoriewert ab (siehe Tab. 3). Wird der Innenwiderstand des Generators $R_i = 50 \Omega$ berücksichtigt, so ergibt sich eine Abweichung von 28.23%.

Der Widerstand bei dem aperiodischen Grenzfall R_{ap} hat eine Abweichung von 12.59% (siehe Tab. 3). Der Übergang vom Kriechfall zum aperiodischen Grenzfall ist nicht direkt ablesbar. Die Abweichung kommt zustande, da der aperiodische Grenzfall nicht genau vom Oszilloskop ablesbar ist.

Für die Berechnung der Güte und der Breite der Resonanzkurve wurde der Innenwiderstand beachtet. Der gemessene Wert der Güte q zeigt eine Abweichung von 6.45% und entspricht ungefähr der Theorie.

Die Abweichung der gemessenen Werte der Breite der Resonanzkurve $f_+ - f_-$ zum Theoriewert liegt bei 15.16% (siehe Tab. 3). Die auftretenden Abweichungen sind damit zu begründen, dass in der Theorie die Induktivitäten und Kapazitäten als ideal angenommen werden, also keine Widerstände besitzen. Außerdem werden Kabelwiderstände nicht beachten, diese tragen ebenso zu den Abweichungen bei.

Die Theoriekurven zur Phasenverschiebung passen nicht zu den Messwerten. Die Messwerte beschreiben den typischen Verlauf der Phasenverschiebung. Daher werden die Theoriewerte nicht zu den Praxiswerten passen (andere Kapazität, Induktivität, Widerstand).

Tabelle 3: Die relativen Abweichungen der Messwerte von den gegebenen Werten.

	Messwert	gegebener Wert	Abweichung / %
R_1	$(136,176 \pm 0,403) \Omega$	$(67,2 \pm 0,1) \Omega$	102.64
R_{ap}	5 k Ω	$(5,72 \pm 0,04) \text{ k}\Omega$	12.59
q	3.657	$3,909 \pm 0,029$	6.45
$f_+ - f_-$	8 kHz	$(6947 \pm 21) \text{ Hz}$	15.16

6 Anhang

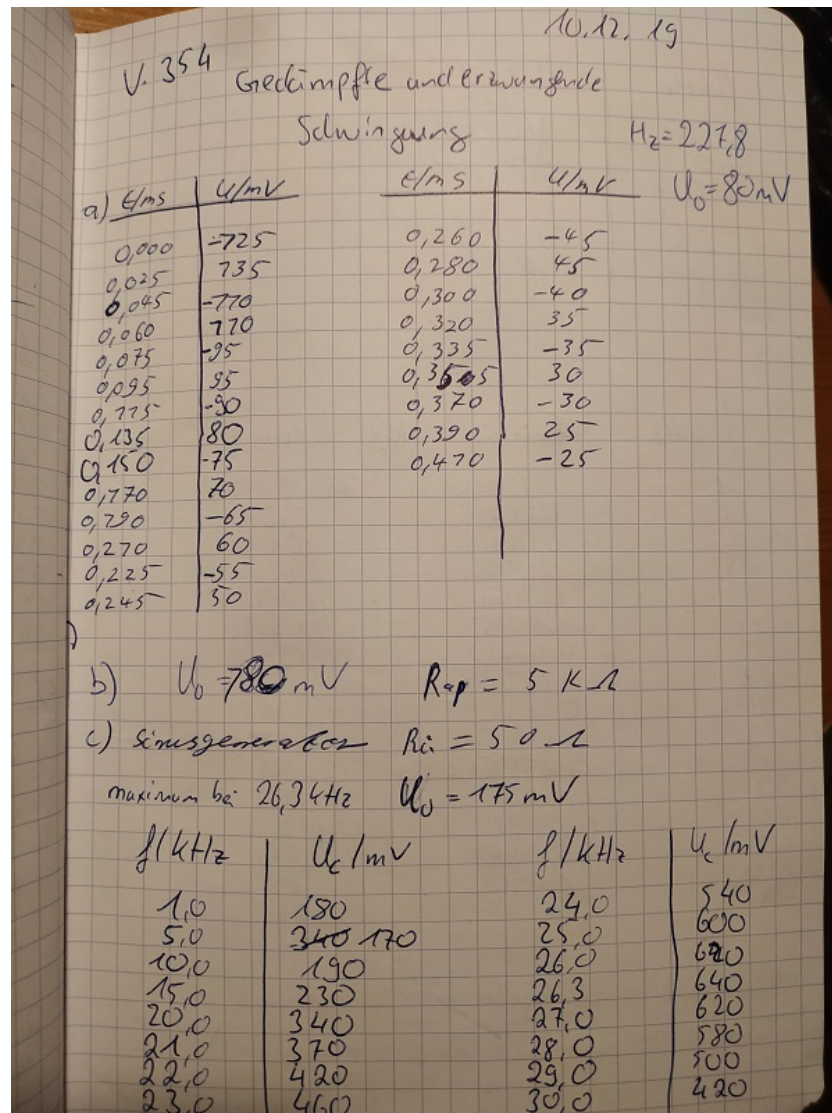


Abbildung 14: Originaldaten aus dem Laborheft (Seite 1).

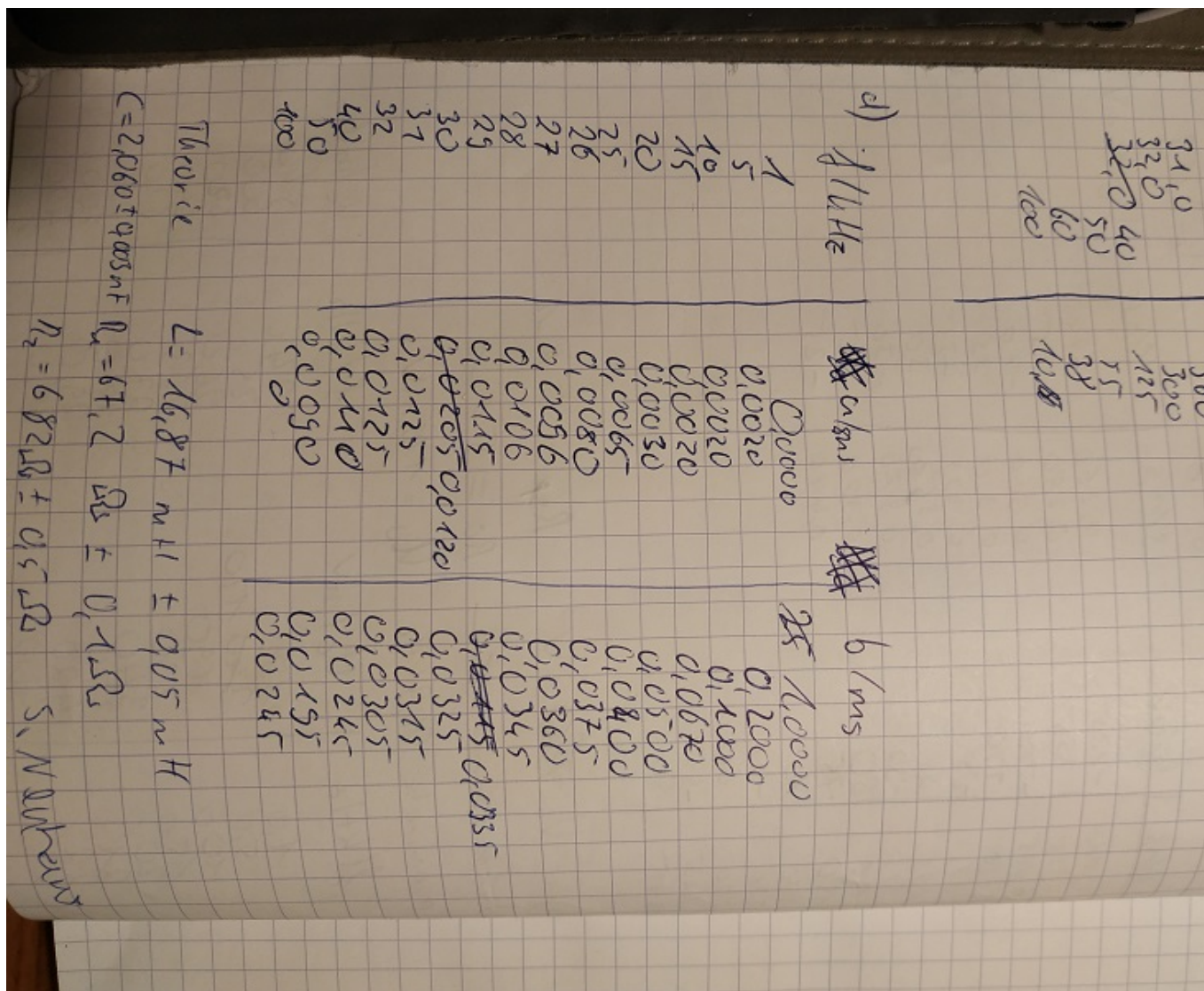


Abbildung 15: Originaldaten aus dem Laborheft (Seite 2).

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2014.
- [2] TU Dortmund. *Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2014.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.