

## **Drehschwingungen**

Ann-Sophie Schubert  
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke  
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 05.01.2016

Abgabe: 12.01.2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Normal- und Schubspannung . . . . .	4
2.2	Elastische Konstanten . . . . .	4
2.3	Experimentelle Bestimmung des Schubmoduls $G$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>7</b>
3.1	Bestimmung der Schwingungsdauer ohne B-Feld . . . . .	7
3.2	Schwingungsdauer im regulierten Magnetfeld . . . . .	10
3.3	Bestimmung des Schubmoduls . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>10</b>
4.1	Messung ohne B-Feld . . . . .	10
4.2	Bestimmung des Schubmoduls . . . . .	12
4.3	Bestimmung der Querkontraktionszahl . . . . .	12
4.4	Bestimmung des Kompressionsmoduls . . . . .	12
4.5	Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds . . . . .	12
4.6	Messung mit B-Feld . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Ziel

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung des Schubmoduls, der Querkontraktionszahl und des Kompressionsmoduls eines Metalldrahts sowie des magnetischen Moments eines Magneten und der Stärke Erdmagnetfelds.

## 2 Theorie

### 2.1 Normal- und Schubspannung

Bei der Betrachtung der auf einen Körper wirkenden Kräfte ist der Begriff der Spannung  $S$  zentral, dieser beschreibt die pro Fläche  $A$  wirkende Kraft  $\vec{F}$ . Der normal zur Fläche stehende Anteil dieser Kraft wird Normalspannung  $\sigma$  oder Druck  $p$  genannt, der parallel zur Fläche Schubspannung  $\tau$ . Eine Verformung, die sich nach Verschwinden der externen Kräfte wieder aufhebt nennt sich *elastische Deformation*. Wenn die Spannung klein ist, ist die Verformung proportional zur Spannung, dies nennt sich *Hookesches Gesetz*. Dabei gilt dann

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

$$\tau = Q \frac{\Delta V}{V}. \quad (2)$$

Die Atome in einem Feststoff sind in einem Gitter angeordnet, das einen Gleichgewichtszustand darstellt, bei dem die Atome einen Abstand  $r_0$  haben. Wirkt nun eine Kraft, gibt es einen neuen Abstand  $r'_0$ , wie in Abb. 1 zu erkennen ist.

### 2.2 Elastische Konstanten

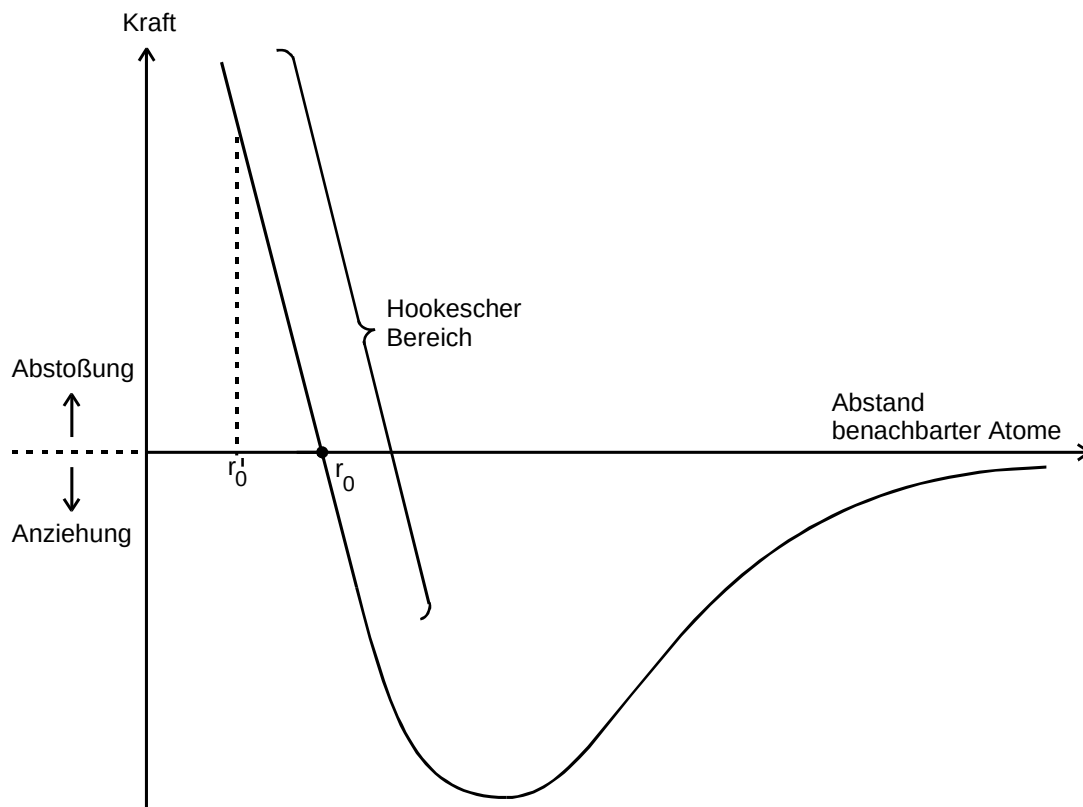
Um die elastischen Eigenschaften eines Festkörpers zu beschreiben ist eine  $6 \times 6$ -Matrix vonnöten, welche jedoch symmetrisch ist und weiterhin bei isotropen Stoffen auf zwei Konstanten reduziert werden kann. Dies sind das Torsionsmodul  $G$ , das die Gestaltselastizität beschreibt und das Kompressionsmodul  $Q$  für die Volumenelastizität. Zur Vereinfachung der Rechnung werden noch das Elastizitätsmodul  $E$  (siehe (1)) und die Querkontraktionszahl

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L} \quad (3)$$

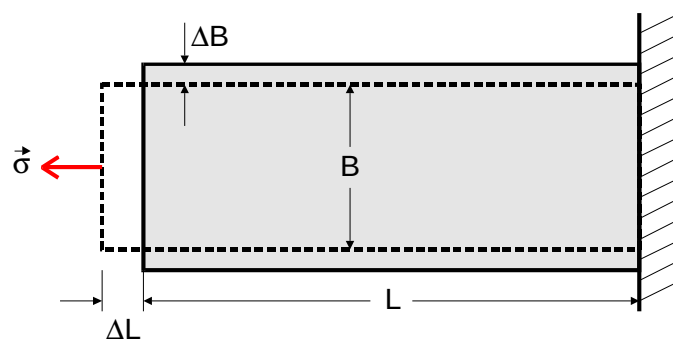
definiert (siehe Abb. 2). Zwischen den Größen bestehen die Beziehungen

$$E = 2G(\mu + 1), \quad (4)$$

$$E = 3(1 - 2\mu)Q. \quad (5)$$



**Abbildung 1:** Schematischer Kraftverlauf zwischen benachbarten Atomen in einem Kristall in einer Dimension;  $r_0$  = Gleichgewichtsabstand im unbelasteten Fall,  $r'_0$  = Gleichgewichtsabstand bei Einwirkung einer äußeren Spannung, aus [1].



**Abbildung 2:** Erklärung der Querkontraktionszahl  $\mu$  an einem gedehnten Stab, aus [1].

### 2.3 Experimentelle Bestimmung des Schubmoduls $G$

Da bei einem statischen Verfahren die sog. elastischen Nachwirkungen, also eine verzögerte Einstellung der endgültigen Eigenschaften, die Messung verfälschen, wird ein dynamisches Messverfahren durchgeführt, das dies verhindert. Zur Bestimmung von  $G$  wird ein zylindrischer Stab bzw. Draht an einem Ende eingespannt und am anderen Ende Tangentialkräfte aufgewandt, siehe Abb. 3.

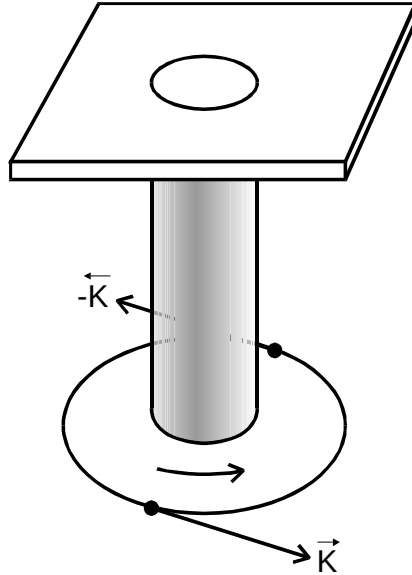


Abbildung 3: Torsion eines zylindrischen Stabes, aus [1]

Um auf  $G$  zu schließen wird der Zusammenhang zwischen dem Torsionswinkel der Stirnfläche  $\phi$  und dem aufgewandten Drehmoment  $M$  gesucht. Dieser lautet schließlich

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \phi, \quad (6)$$

mit dem Radius  $R$  des Drahtes. Der Faktor

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L} \quad (7)$$

wird *Richtgröße* des Körpers genannt.

Anhand dieses Zusammenhangs ließe sich eine statische Messung durchführen, welche jedoch wie bereits erwähnt nicht ausreichend genau wäre. Daher wird eine dynamische Messung durchgeführt, bei der eine Masse am unteren Ende des Drahtes befestigt wird und ausgelenkt wird, woraufhin das System zu schwingen beginnt. Das System kann durch die Bewegungsgleichung

$$D\phi + \theta \frac{d^2\phi}{dt^2} = 0 \quad (8)$$

mit dem Trägheitsmoment  $\theta$  des Körpers beschrieben werden. Sie besitzt die Lösung

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (9)$$

mit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}}. \quad (10)$$

Wenn man nun das Trägheitsmoment einer Kugel

$$\theta_k = \frac{2}{5}m_k R_k^2 \quad (11)$$

einsetzt, kann man daraus auf die Formel

$$G = \frac{16\pi}{5} \frac{m_k R_k^2 L}{T^2 R^4} \quad (12)$$

für das Schubmodul schließen.

### 3 Aufbau und Durchführung

#### 3.1 Bestimmung der Schwingungsdauer ohne B-Feld

Um die Schwingungsdauer zu bestimmen, wird die Messapparatur aus Abbildung 4 verwendet.

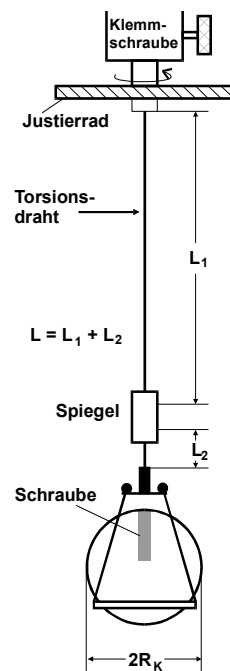
Das von der Lampe abgestrahlte Licht wird durch einen Spalt gebündelt und auf einen Spiegel geworfen, welcher das Licht auf einen Lichtdetektor reflektiert. Dieser sendet ein elektrisches Signal, sodass die Messung der Periodendauer beginnt. Trifft erneut ein Lichtstrahl auf den Lichtdetektor, wird die Zeit gestoppt. Abbildung 5 zeigt den entsprechenden Aufbau.

Da die Dauer einer Periode die Differenz der Zeit vom ersten und dritten elektrischen Signal ist, muss eine Schaltung entworfen werden, welche die Zeitmessung nicht bereits nach dem Zweiten beendet. Abbildung 6 zeigt die Schaltung aus TTL-Bausteinen, welche dies gewährleistet.

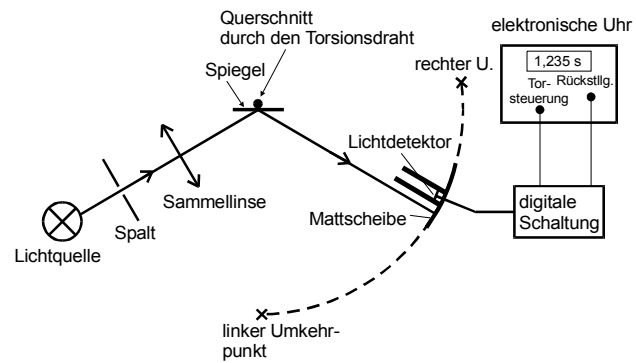
Das zweite elektrische Signal wird durch eine bistabile Kippstufe unterdrückt. Somit wird beim dritten Signal die Zweitmessung gestoppt. Mithilfe einer weiteren bistabilen Kippstufe und einer monostabilen Kippstufe wird das vierte Signal für den Reset der Uhr genutzt.

Für die erste Messung zeigt die sich in der Kugel befindende Schraube in Richtung des Drahtes. Es ist zu beachten, dass die Kugel wegen der Kleinwinkelnäherung nur um kleine Winkel ausgelenkt werden darf. Mit Hilfe des Justierrades wird das System zum Schwingen angeregt. Mit Hilfe der vorher beschriebenen Schaltung wird die Periodendauer  $T$  gemessen.

Die Messung wird mit Ausrichtung der Schraube senkrecht zum Draht in Nord-Süd Richtung wiederholt.



**Abbildung 4:** Messapparatur zur Bestimmung der Schwingungsdauer ohne Magnetfeld [1].



**Abbildung 5:** Schematische Darstellung der Periodendauermessung [1].





### 3.2 Schwingungsdauer im regulierten Magnetfeld

Der Aufbau zur vorherigen Messung unterscheidet sich lediglich durch eine eingebaute Helmholtz-Spule, welches ein homogenes Magnetfeld erzeugt. Die Schraube wird nun senkrecht zum Draht ausgerichtet, um Fehler durch den Einfluss des Erdmagnetfeldes zu verhindern. Im Bereich der Stromstärke von 0,5 - 5 A werden fünf verschiedene Stromstärken eingestellt und jeweils acht Messwerte zur Schwingungsdauer aufgenommen.

### 3.3 Bestimmung des Schubmoduls

Um das Schubmodul bestimmen zu können, wird der Drahtdurchmesser mit einer Mikrometerschraube an drei verschiedenen Stellen gemessen. Außerdem wird die Länge des Drahtes vom Justierrad bis zum Spiegel und vom Spiegel bis zur Halterung drei mal gemessen.

## 4 Auswertung

$$m_k = (588,30 \pm 0,24) \text{ g} \quad (13)$$

$$2R_k = (51,03 \pm 0,02) \text{ mm} \quad (14)$$

$$\theta_k = 2,25 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (15)$$

$$N = 80 \quad (16)$$

$$R_{\text{Spule}} = 72 \text{ mm} \quad (17)$$

Das Trägheitsmoment der Kugel beträgt  $\theta_{\text{Kugel}} = \frac{2m_k R_k^2}{5} = (1,5320 \pm 0,0013) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ . Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich durch die Addition des Trägheitsmoments der Halterung  $\theta_k$  und  $\theta_{\text{Kugel}}$ .

$$\theta_{\text{ges}} = (1,545 \pm 0,0013) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad (18)$$

### 4.1 Messung ohne B-Feld

Die Messwerte zur Periodendauer bei parallel zum Draht ausgerichteten Magneten befinden sich in Tabelle 1 und die zu senkrecht zum Draht ausgerichteten Magneten in Tabelle 2. Es ergeben sich folgende Mittelwerte für die Periodendauer:

$$T_{\text{parallel}} = (19,810 \pm 0,003) \text{ s} \quad (19)$$

$$T_{\text{senkrecht}} = (19,4047 \pm 0,0090) \text{ s} \quad (20)$$

$$(21)$$

Es fällt auf, dass die Periodendauer bei Nord-Süd-Ausrichtung kürzer ist.

**Tabelle 1:** Periodendauer mit Schraube parallel zum Draht.

$T/s$
19,798
19,795
19,811
19,821
19,803
19,806
19,817
19,820
19,805
19,808
19,816
19,819

**Tabelle 2:** Periodendauer mit Schraube senkrecht zum Draht in Nord-Süd Richtung.

$T/s$
19,395
19,395
19,403
19,408
19,391
19,425
19,409
19,409
19,403
19,409

**Tabelle 3:** Messwerte zur Bestimmung der Maße des Drahtes.

$L_1/m$	$L_2/m$	$2R/mm$
0,617	0,0045	0,203
0,615	0,0045	0,204
0,616	0,0046	0,204
/	/	0,202
/	/	0,203
/	/	0,200

## 4.2 Bestimmung des Schubmoduls

In Tabelle 3 sind die Messwerte zur Länge und zum Durchmesser des Drahtes dargestellt.  $L_1$  ist dabei die Länge des Drahtes von der vom Justierad zum Spiegel und  $L_2$  die vom Spiegel bis zur Kugel. Die Gesamtlänge  $L$  ist die Summe von  $L_1$  und  $L_2$ . Die Mittelwerte lauten:

$$2R = (0,2027 \pm 0,0006)\text{mm} \quad (22)$$

$$L_1 = (0,616 \pm 0,0006)\text{m} \quad (23)$$

$$L_2 = (0,0453 \pm 0,0003)\text{m}. \quad (24)$$

Das Schubmodul lässt sich mit Hilfe folgender Formel berechnen:

$$G = \frac{16\pi m_k R_k^2 L}{5T^2 R^4}. \quad (25)$$

Somit ist  $G = (6,41 \pm 0,08) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Dieser weicht vom Literaturwert  $G_{\text{lit}} = 8,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  um  $(21,8 \pm 0,009)\%$  ab.

## 4.3 Bestimmung der Querkontraktionszahl

Die Querkontraktionszahl ergibt sich aus

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (26)$$

E ist gegeben beträgt  $E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Somit folgt  $\mu = (0,638 \pm 0,02)$ .

## 4.4 Bestimmung des Kompressionsmoduls

Für das Kompressionsmodul gilt

$$Q = \frac{E}{3(1-2\mu)} = (-2,5 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{Pa}. \quad (27)$$

## 4.5 Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds

Unter Verwendung der Geradengleichung gilt für  $T$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_{\text{ges}}}{aB + D}}. \quad (28)$$

Mit Gleichung 7 folgt

$$B = \frac{4\pi^2 \theta_{\text{ges}}}{m - kT_{\text{senkrecht}}^2} - \frac{D}{m} \quad (29)$$

Die Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds beträgt  $B = (2,32 \pm 0,33) \cdot 10^{-7} \text{T}$ .

## 4.6 Messung mit B-Feld

Für das Magnetfeld im Innern einer Helholtz-Spule gilt

$$B = \frac{4}{5} \frac{\mu_0 N I}{R_{\text{Spule}}} \quad (30)$$

mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$  und  $I$  als Stromstärke.

**Tabelle 4:** Messwerte zur Periodendauer bei eingeschaltetem Magnetfeld.

$I/\text{A}$	$T/\text{s}$	$I/\text{A}$	$T/\text{s}$
0,5	13,409	2,0	8,340
0,5	13,417	2,0	8,321
0,5	12,337	2,0	8,359
0,5	13,433	2,0	8,338
0,5	13,439	2,0	8,325
0,5	13,439	2,0	8,338
0,5	13,420	2,0	8,320
0,5	13,467	2,0	8,348
1,0	10,846	2,5	7,588
1,0	10,868	2,5	7,544
1,0	10,843	2,5	7,553
1,0	10,857	2,5	7,592
1,0	10,847	2,5	7,556
1,0	10,855	2,5	7,551
1,0	10,856	2,5	7,581
1,0	10,851	2,5	7,594
1,5	9,357	3,5	6,548
1,5	9,346	3,5	6,558
1,5	9,328	3,5	6,540
1,5	9,318	3,5	6,557
1,5	9,369	3,5	6,523
1,5	9,338	3,5	6,571
1,5	9,324	3,5	6,502
1,5	9,350	3,5	6,579

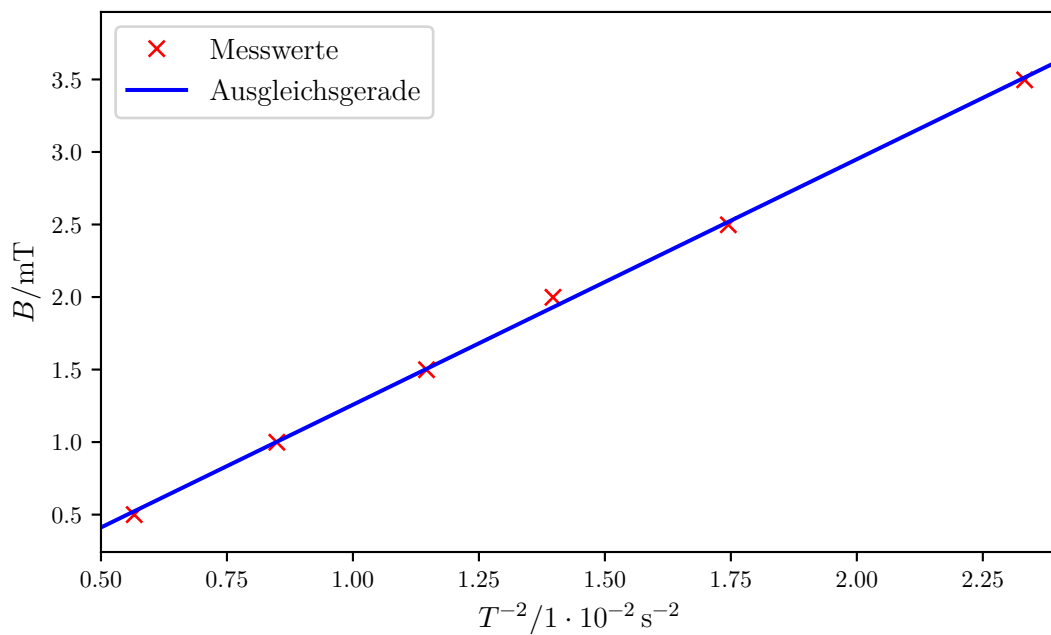
Die Messwerte zur Periodendauer mit eingeschaltetem B-Feld mit verschiedenen Stromstärken sind in Tabelle 4 zu finden. Die entsprechenden Mittelwerte zu  $T$  befinden sich in Tabelle 5. Zur Bestimmung des magnetischen Moments wird  $B$  gegen  $\frac{1}{T^2}$  aufgetragen. Die Werte hierzu befinden sich in Tabelle 6. Bei der angegebenen Periodendauer handelt es sich um den Mittelwert der in Tabelle 4 aufgeführten Werte.

**Tabelle 5:** Mittelwerte der Periodendauer bei eingeschaltetem Magnetfeld.

$I/\text{A}$	$\bar{T}/\text{s}$
0,5	$13,268 \pm 0,167$
1,0	$10,853 \pm 0,008$
1,5	$9,341 \pm 0,017$
2,0	$8,336 \pm 0,014$
2,5	$7,570 \pm 0,021$
3,5	$6,547 \pm 0,025$

**Tabelle 6:** Werte für  $B$  und  $T$  zur Bestimmung des magnetischen Moments.

$T^{-2}/10^{-2}\text{s}^{-2}$	$B/\text{mT}$
$0,568 \pm 0,014$	0,5
$0,849 \pm 0,001$	0,999
$1,146 \pm 0,004$	1,499
$1,439 \pm 0,005$	1,998
$1,745 \pm 0,010$	2,498
$2,333 \pm 0,018$	3,497



**Abbildung 8:** Ausgleichsgerade zur Bestimmung des magnetischen Moments.

Die Gerade hat die Form  $y = ax + b$ . Die Parameter  $a$  und  $b$  haben folgende Werte:

$$a = (1,692 \pm 0,027)10^{-1} \frac{\text{T}}{\text{second}^2} \quad (31)$$

$$b = (-0,0435 \pm 0,0040)\text{mT} \quad (32)$$

$$(33)$$

Mit den Gleichungen 7 und der Gleichung der Ausgleichsgeraden folgt

$$M = 4\pi^2\theta_{\text{ges}}a = (0,001308 \pm 0,000017)\text{A m}^2. \quad (34)$$

## 5 Diskussion

Die Abweichung des Schubmoduls um  $(21,8 \pm 0,009)\%$  liegt innerhalb des Toleranzbereiches, da es mehrere Messunsicherheiten gibt, die nicht weiter berücksichtigt werden. Zum Einen wird das Schwingen des Pendels durch Bewegung des Tisches, wie zum Beispiel leichtes Anstoßen beeinflusst. Außerdem kann der Magnet nicht exakt in Nord-Süd Richtung ausgerichtet werden, sodass das Erdmagnetfeld die Messung trotz dieser Einrichtung beeinflusst. Weiterhin ist zu beachten, dass die in der Theorie angenommene Kleinwinkelnäherung nicht immer angehalten wurde, was zu weiteren Fehlern führt. Bei der Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds ist lediglich ein kleiner Fehler von  $(11,6 \pm 1,7)\%$  verglichen mit dem Literaturwert  $B_{\text{horizontal}} = 20 \cdot 10^{-6}\text{T}$  [2] festzustellen. Alle Messwerte liegen auf der Ausgleichsgeraden, mit welcher das magnetische Moment bestimmt werden soll. Der berechnete Wert für das magnetische Moment liegt in einer realistischen Größenordnung.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 102: Drehschwingungen*.
- [2] Prof. Dr. Franz Bader und Prof. Friedrich Dorn. *Dorn/Bader Physik Sek. 2*. 1998.
- [3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.