

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Christopher Krause
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.12.2017 Abgabe: 16.01.2018
Korrektur

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Gedämpfte Schwingungen des RLC-Kreises	3
2.2 Erzwungene Schwingung im RLC-Kreis	5
3 Durchführung	6
4 Auswertung	9
4.1 Berechnung des Dämpfungswiderstandes	9
4.2 Bestimmung der Güte und der Breite der Schwingung	11
4.3 Bestimmung der Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung	14
5 Diskussion	16
Literatur	17

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Amplitude, sowie der Dämpfungswiderstand für den Schwingfall und den aperiodischen Grenzfall eines RLC-Kreises ermittelt. Zudem wird die Amplitude und die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz untersucht.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingungen des RLC-Kreises

Ein RLC-Kreis besteht aus einer Spule, einem Kondensator und einem Widerstand. Wird von außen dem System Energie zugeführt, pendelt diese zwischen dem Kondensator und der Spule hin und her. Wegen des Widerstandes wird die Energie mit fortlaufender Zeit in Wärme umgewandelt. Das System beschreibt somit eine gedämpfte Schwingung.

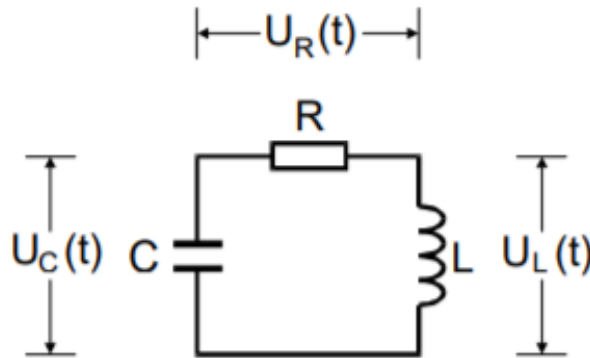


Abbildung 1: Darstellung eines RLC-Kreises. [2]

Nach dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz kann man die einzelnen Spannungen addieren und daraus eine Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung erhalten.

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0 \quad (2)$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$I(t) = e^{-2\pi\nu t} (A_1 e^{2i\pi\mu t} + A_2 e^{-2i\pi\mu t}) \quad (3)$$

$$\text{mit } \mu = \frac{R_{eff}}{4\pi L}, \quad (4)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Dabei ist i die imaginäre Zahl.

Zwei Fälle werden unterschieden. 1. Fall: Ist ν reell gilt für $I(t)$:

$$I(t) = A_0 e^{2\pi\mu t} \cos 2\pi\nu t + \eta. \quad (5)$$

Die Amplitude dieser gedämpften Schwingung geht für größer werdende t gegen 0 und die Abklingdauer der Schwingung beträgt:

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (6)$$

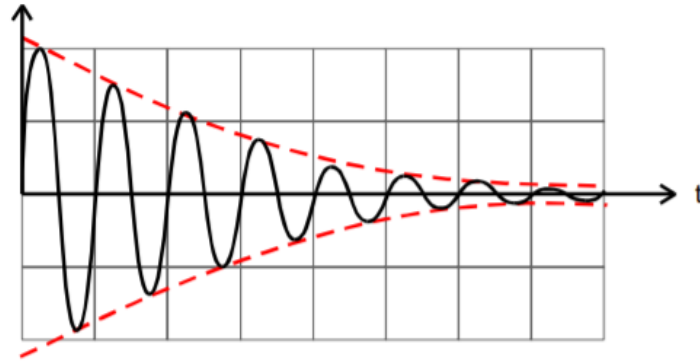


Abbildung 2: Darstellung des Schwingfalles einer gedämpften Schwingung mit Einhüllende $\pm e^{-2\pi\mu t}$. [2]

2. Fall: Ist ν imaginär enthält $I(t)$ keinen oszillatorischen Anteil mehr und es kommt zu Relaxationserscheinungen. Je nach Wahl von A_1 und A_2 kann es zu einem Extremwert kommen, bis $I(t)$ für große Zeiten gegen Null geht.

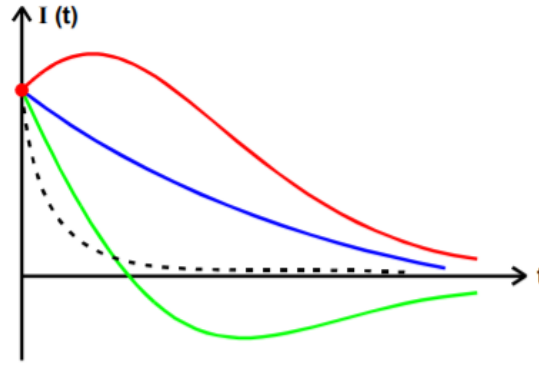


Abbildung 3: Zeitverläufe des Stromes bei einer aperiodischen Dämpfung (Imaginäres ν). [2]

Die gestrichelte Linie in Abbildung 3 zeigt den aperiodischen Grenzfall und beschreibt den Verlauf in dem $I(t)$ am schnellsten gegen Null geht. Er tritt ein wenn $\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}$ gilt, also $\nu = 0$ ist.

2.2 Erzwungene Schwingung im RLC-Kreis

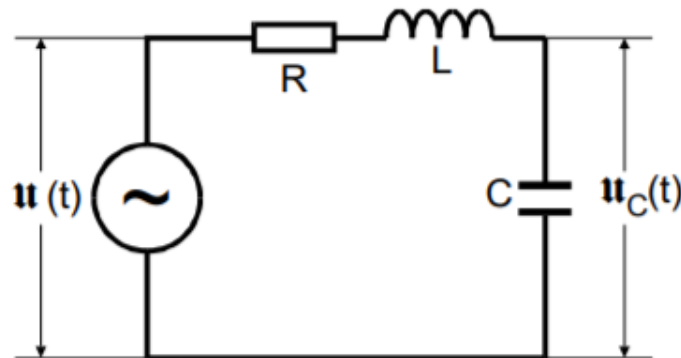


Abbildung 4: RLC-Kreis mit sinusförmiger Wechselspannung. [2]

Liegt an einem RLC-Kreis eine periodische Spannung $U(t) = U_0 e^{j\omega t}$ an, dann wird die Schwingung durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{j\omega t}. \quad (7)$$

Aus der Differentialgleichung folgt für U_C

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

Gleichung (8) beschreibt die Spannungsamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz. Für große Frequenzen geht U_C gegen Null und für kleine Frequenzen gegen U_0 .

Aus der Differentialgleichung folgt ebenfalls die Phasenverschiebung zur Erregerspannung:

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (9)$$

Für größer werdende Frequenzen wächst die Phasenverschiebung bis $\frac{\pi}{2}$ an.

Die Kondensatorspannung hat ein Maximum bei der Resonanzfrequenz ω_{res} :

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (10)$$

Für den Fall der schwachen Dämpfung $\left(\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}\right)$ beträgt das Spannungsmaximum:

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot U_0 = qU_0. \quad (11)$$

Dabei beschreibt q die Güte des Schwingkreises. Die Breite der Resonanz ist ein Maß ihrer Schärfe und kann durch die beiden Frequenzen ω_+ und ω_- beschrieben werden. Dies sind die Frequenzen bei der U_C auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Maximalwertes gesunken ist. Zwischen der Güte und der Breite gilt folgende Beziehung:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (12)$$

3 Durchführung

An den RLC-Schwingkreis wird mit einem Funktionsgenerator entsprechend Abbildung 5 eine Nadelimpulsspannung gegeben. Dabei wird der Strom über den Kreis mit dem kleinsten Widerstand laufen gelassen. Mit einem Tastkopf wird die Spannung am Kondensator abgegriffen und auf dem Bildschirm eines Oszilloskops ausgegeben. Bei hinreichend kleiner Frequenz der Eingangsspannung lässt sich die Schwingung und das stetige Abfallen der Amplitude der Kondensatorspannung beobachten. Mithilfe der Cursor-Funktion des Oszilloskops werden daraus die Beträge der Amplitude zu unterschiedlichen Zeiten gemessen.

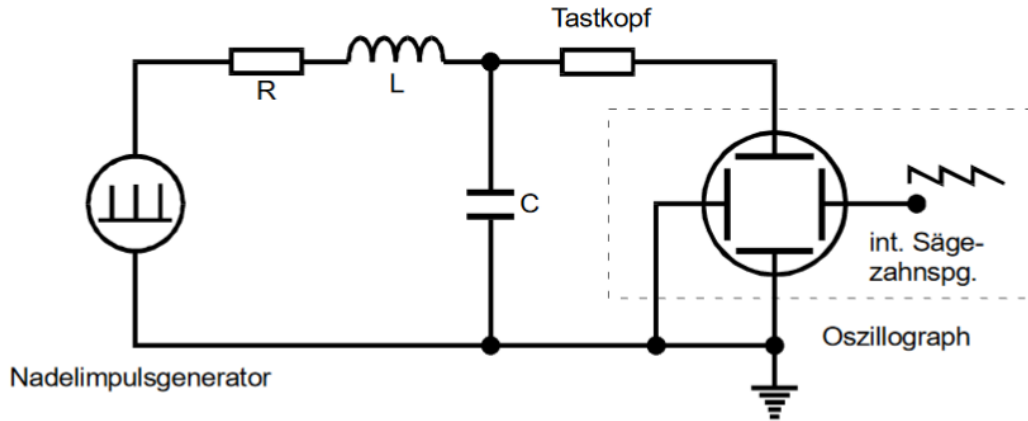


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Kondensatorsspannung. [2]

Zur Bestimmung des Widerstands des aperiodischen Grenzfalls wird der Stromkreis mit dem regelbaren Widerstand verwendet (Abbildung 6). Dieser wird solange variiert, bis die Überschwungung der Kondensatorspannung gerade eben nicht mehr erkennbar ist. Der zu diesem Zeitpunkt eingestellte Widerstand wird abgelesen.

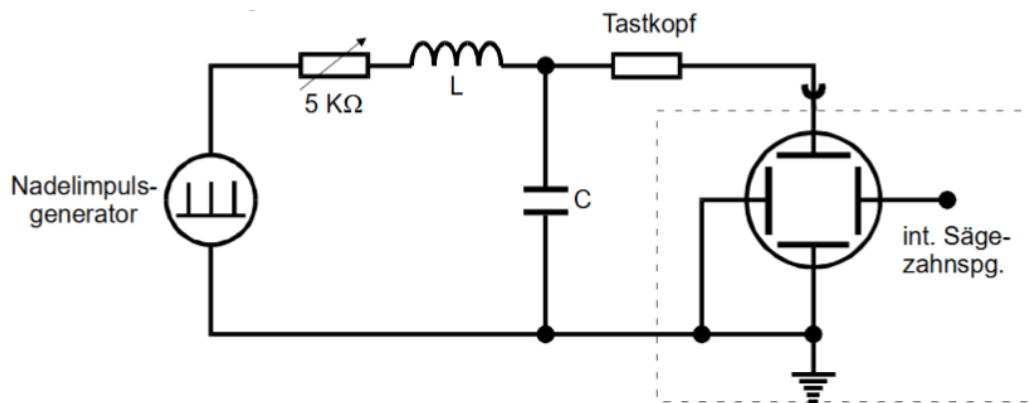


Abbildung 6: Schaltung zur Messung des Widerstands des aperiodischen Grenzfalls. [2]

Anschließend wird die Eingangsspannung auf eine Sinusspannung umgeschaltet und der Stromkreis mit dem größeren Widerstand verwendet (Schaltung wieder wie in Abbildung 5). Die Frequenz des Sinusgenerators wird stückweise erhöht und die Kondensatorspannung in Abhängigkeit der unterschiedlichen Frequenzen am Oszilloskop gemessen. Für die gleichen Frequenzwerte wird im Anschluss die Amplitude der Eingangsspannung mit dem Tastkopf gemessen da er einen eigenen Frequenzgang besitzt und seine Ausgangsspannung somit nicht unabhängig von der Frequenz ist.

Um die Phasenverschiebung der Eingangs- und Kondensatorspannung zu messen, lässt

man beide Spannungen gegen die Zeit auf dem Bildschirm des Oszilloskops ausgeben (siehe Abbildung 7). Die Frequenz der Eingangsspannung wird wieder stückweise erhöht. Dabei wird die zeitliche Differenz der Maxima der angezeigten Spannungen (a) sowie die Periodendauer der Eingangsspannung (b) gemessen (siehe Abbildung 8). Auch hier wird die Frequenz über drei Zehnerpotenzen hinweg erhöht.

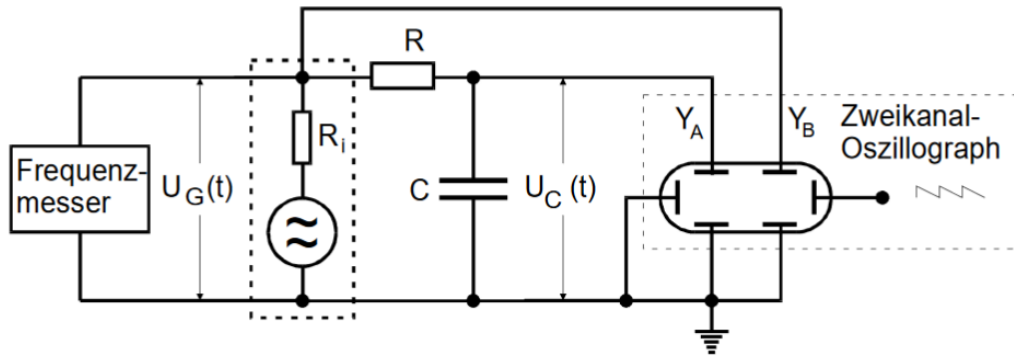


Abbildung 7: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung der Spannungen. [2]

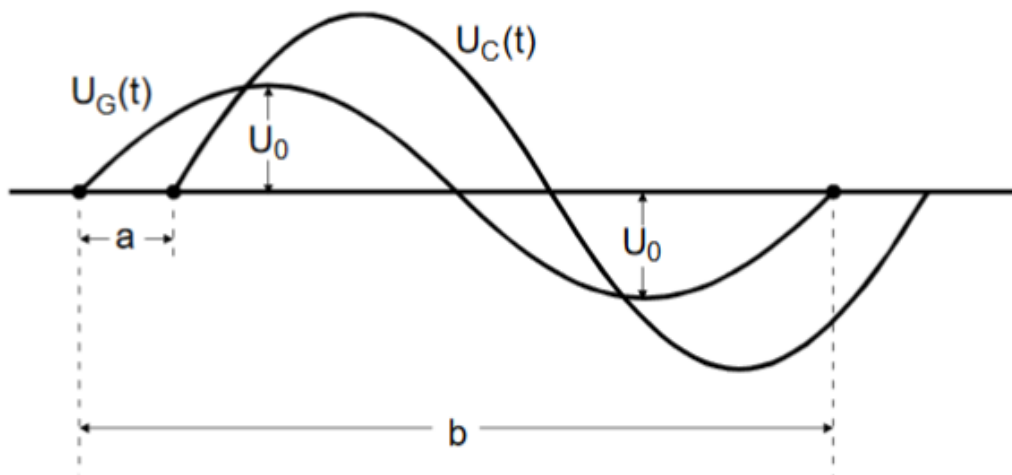


Abbildung 8: Berechnung der Phasenverschiebung. [1]

4 Auswertung

4.1 Berechnung des Dämpfungswiderstandes

Die Bauteile des RLC-Kreises haben folgende Werte:

$$L = (10,11 \pm 0,03) \text{ mH}$$

$$C = (2,098 \pm 0,006) \text{ nF}$$

$$R_1 = (48,1 \pm 0,1) \Omega$$

$$R_2 = (509,5 \pm 0,5) \Omega$$

Die gemessenen Spannungsamplituden U_C in Abhängigkeit von der Zeit t wird in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Gemessene Spannungen in Abhängigkeit von der Zeit

t/s	U_C/V
29,00	0,69
58,00	0,58
88,00	0,50
117,0	0,42
147,0	0,34
176,0	0,28
205,0	0,24
235,0	0,20
264,0	0,17
294,0	0,14
323,0	0,12
353,0	0,10

Die Messwerte und die Regression werden in Abbildung 5 dargestellt. Die Ausgleichsfunktion ist $Ae^{-2\pi\mu t}$.

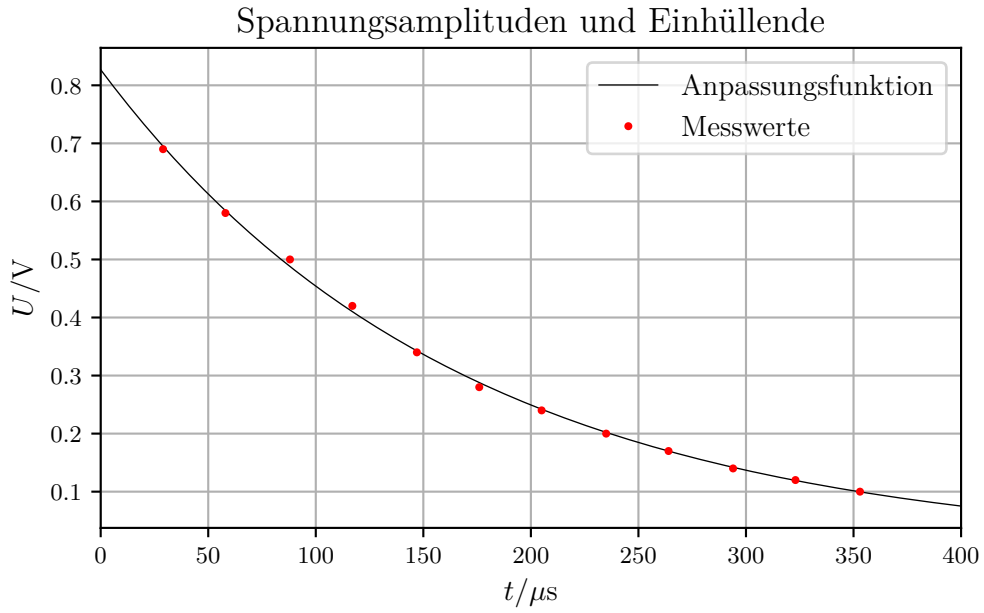


Abbildung 9: Spannungsamplituden und Einhüllende

Die Parameter betragen:

$$A = (0,827 \pm 0,007)\text{V}$$

$$\mu = (954 \pm 10) \frac{1}{\text{s}}$$

Die Parameter und deren Fehler werden mit Python berechnet. Die Abklingzeit T_{ex} wird mit Gleichung (6) berechnet und der effektive Dämpfungswiderstand R_{eff} mit der Gleichung (4).

$$T_{ex} = (1,67 \pm 0,02) \cdot 10^4 \text{ s}$$

$$R_{eff} = (121 \pm 1) \Omega$$

Der in der Schaltung eingebaute Widerstand beträgt $R = (48,1 \pm 0,1) \Omega$. Zusätzlich wird der Generatorinnenwiderstand $R_G = 50 \Omega$ dazu gerechnet. Der theoretische Widerstand beträgt $R_t = (98,1 \pm 0,1) \Omega$. Die relative Abweichung des berechneten Wertes zu dem Theoriewert beträgt 18.9%.

Der theoretische Wert des Widerstandes für den aperiodischen Grenzfall wird mit der Bedingung $R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}}$ bestimmt. Der Theoriewert beträgt:

$$R_{ap,t} = (4390 \pm 9) \Omega$$

Der aus dem Versuch berechnete Wert beträgt:

$$R_{ap,e} = 3100\Omega$$

Die absolute Abweichung der beiden Werte beträgt $(1290 \pm 9)\Omega$.

4.2 Bestimmung der Güte und der Breite der Schwingung

In Tabelle 2 werden die gemessenen Spannungen sowie der Abstand der Nulldurchgänge a zu den jeweiligen Frequenzen dargestellt. Zudem wird die Phasenverschiebung φ angegeben, welche in späteren Rechnungen benötigt wird.

Tabelle 2: Gemessene Spannungen, Frequenzen, Abstände und Phasenwinkel

f/Hz	U_0/V	U_C/V	$a/\mu\text{s}$	$\frac{U_C}{U_0}$	φ/rad
5000	3,28	3,36	2,00	1,02	0,06
10000	3,28	3,60	2,00	1,10	0,13
15000	3,28	4,00	2,00	1,22	0,19
20000	3,28	4,80	2,00	1,46	0,25
25000	3,28	6,48	2,40	1,98	0,38
27000	3,20	7,80	2,60	2,44	0,44
28000	3,28	8,40	3,20	2,56	0,56
29000	3,28	9,20	3,40	2,80	0,62
30000	3,28	10,2	3,60	3,11	0,68
31000	3,28	11,0	4,60	3,35	0,90
32000	3,28	11,8	6,20	3,60	1,25
33000	3,28	12,2	6,60	3,72	1,37
34000	3,28	12,2	7,60	3,72	1,62
35000	3,28	11,4	8,40	3,48	1,85
36000	3,28	10,4	9,40	3,17	2,13
37000	3,28	9,40	9,80	2,87	2,28
38000	3,28	8,20	9,80	2,50	2,34
39000	3,28	7,20	9,80	2,20	2,40
40000	3,28	6,40	10,20	1,95	2,56
45000	3,28	4,00	10,40	1,22	2,94
50000	3,28	2,56	9,80	0,78	3,08
55000	3,28	1,84	9,60	0,56	3,32
60000	3,24	1,44	8,00	0,44	3,02

Die Phasenverschiebung φ wird dabei mit $\varphi = 2\pi a \cdot f$ berechnet.

Der Quotient $\frac{U_C}{U_0}$ wird gegen die Frequenz in einem halblogarithmisch skaliertem Diagramm dargestellt.

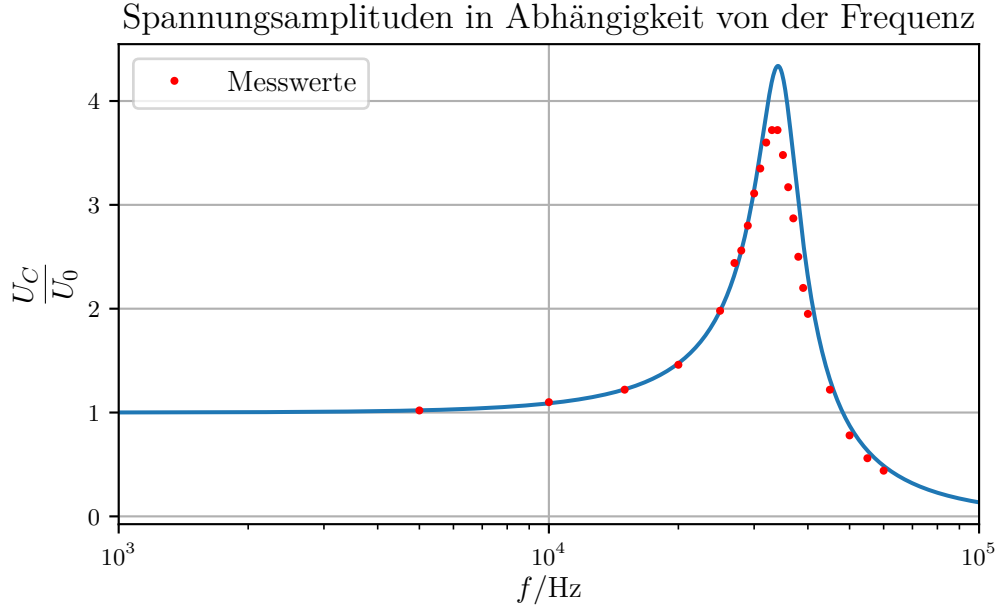


Abbildung 10: Spannungsamplituden in Abhängigkeit von der Frequenz

Aus den Messwerten wird die Resonanzüberhöhung $q_{exp} = 3,72$ bei $\omega_0 = 213 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ abgelesen. Der theoretische Wert der Güte q_{theo} wird mit Gleichung (11) berechnet.

$$q_{theo} = 3,99 \pm 0,01$$

Der Fehler von q_{theo} wird der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.:

$$\begin{aligned} \sigma_q &= \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\omega_0 R_2 C} \right)}{\partial R_2} \sigma_{R_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\omega_0 R_2 C} \right)}{\partial C} \sigma_C \right)^2} \\ \Rightarrow \sigma_q &= \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_0 R_2^2 C} \sigma_{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 R_2 C^2} \sigma_C \right)^2} \end{aligned}$$

Die relative Abweichung des experimentell ermittelten Wertes zu dem Theoriewert beträgt 6,8%.

Um die Breite der Resonanzkurve zu ermitteln, wird der Frequenzbereich um das Maximum herum linear dargestellt.

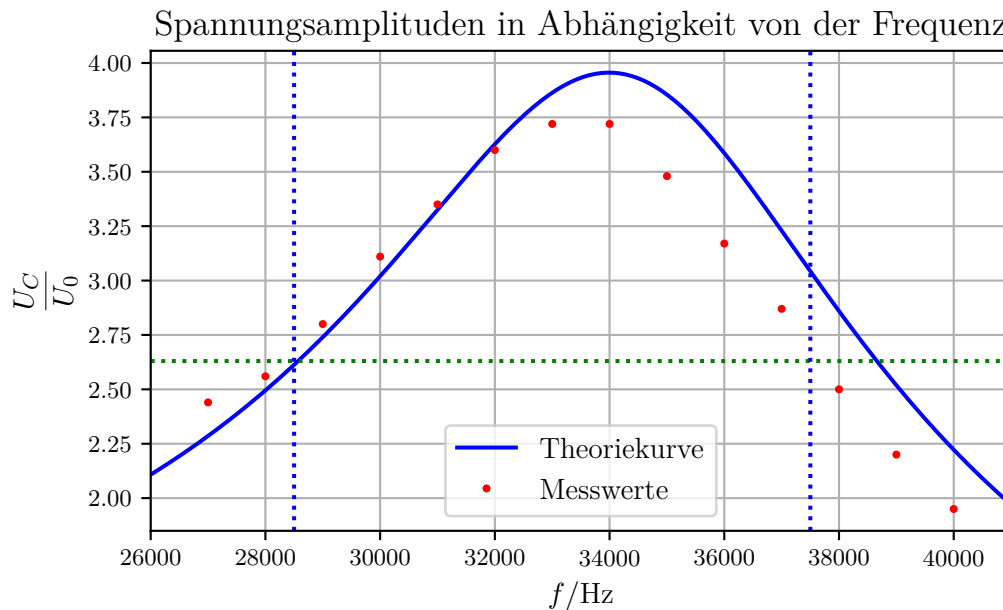


Abbildung 11: Lineare Darstellung des Frequenzbereiches in der Umgebung des Maximums

Das Maximum hat den Wert $\frac{U_{C,max}}{U_0} = 3,72$. Fällt das Maximum auf den Bruchteil $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seines Maximalwertes: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_{C,max}}{U_0} = 2,63$, betragen die zugehörigen Frequenzen f_+ und f_- :

$$\begin{aligned} f_+ &= 37500 \text{ Hz} \\ f_- &= 28500 \text{ Hz} \\ f_+ - f_- &= 9000 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Der Theoriewert von $f_+ - f_-$ wird mit Gleichung (11) berechnet:

$$f_+ - f_- = (7811 \pm 18) \text{ kHz}$$

Der Fehler wird mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\sigma_f = f_0 \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{1}{q} \right)}{\partial q} \sigma_q \right)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_f = f_0 \sqrt{\left(\frac{1}{q^2} \sigma_q \right)^2}$$

Die relative Abweichung des experimentell bestimmten Wertes zu dem Theoriewert beträgt 13,2%.

4.3 Bestimmung der Resonanzfrequenz aus der Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung φ wird gegen die Frequenz f in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen.

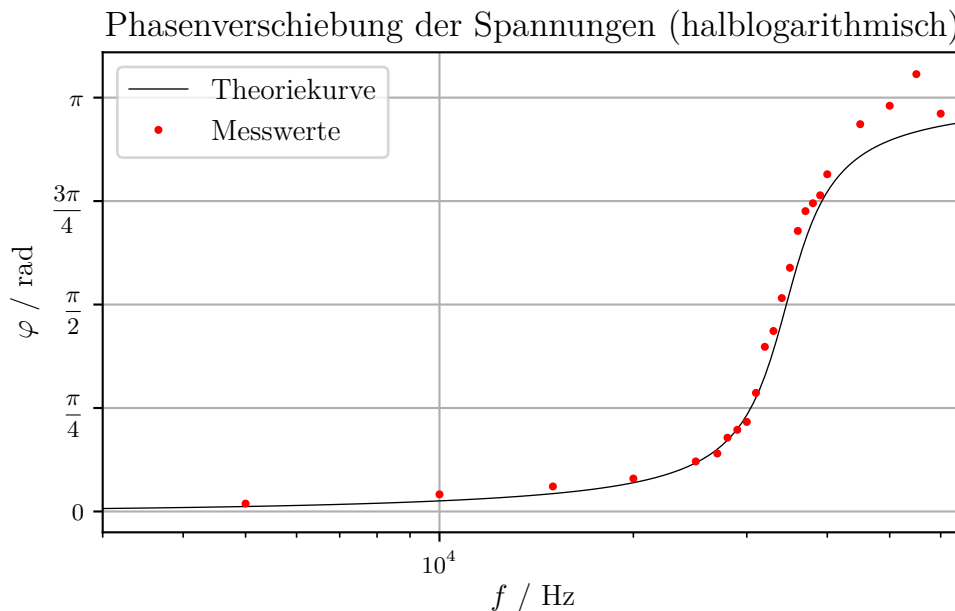


Abbildung 12: Phasenverschiebung von Eingangs- und Kondensatorspannung (halblogarithmisch).

Bei der Berechnung der Theoriekurve ist dabei zu beachten, dass die Kondensatorspannung bereits phasenverschoben ist. Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird noch einmal in einem linearen Diagramm aufgetragen.

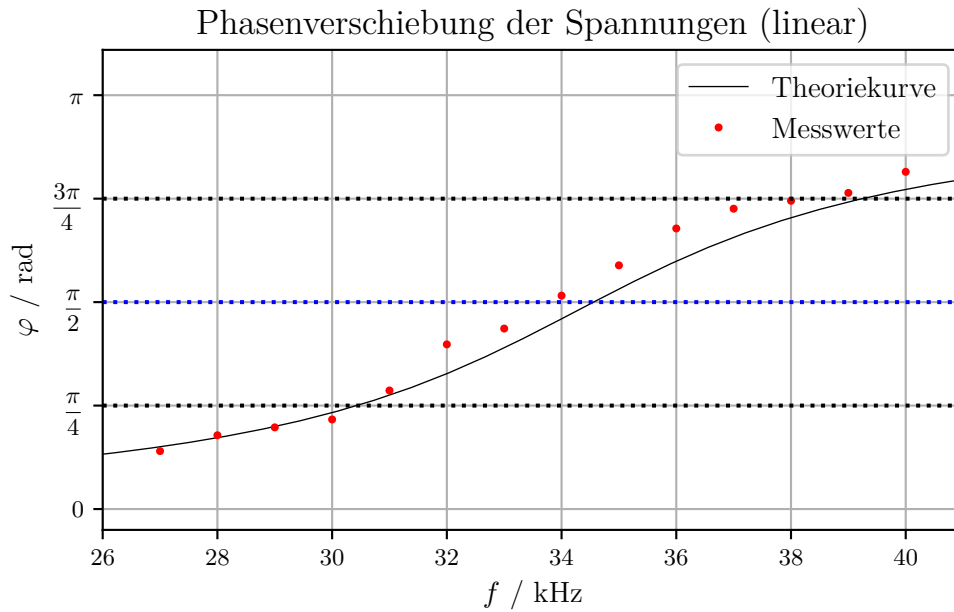


Abbildung 13: Phasenverschiebung von Eingangs- und Kondensatorsspannung (linear).

Aus diesen Graphen folgt für die Resonanzfrequenz:

$$f_{res} \approx 34 \text{ kHz}$$

Für die Frequenzen f_1 und f_2 , bei denen die Phasenverschiebung gerade $\frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{3\pi}{4}$ beträgt, folgt:

$$f_1 \approx 30,5 \text{ kHz}$$

$$f_2 \approx 38 \text{ kHz}$$

Der theoretische Wert für die Resonanzfrequenz ergibt sich aus Gleichung (10). Dabei wird auch der Generatorinnenwiderstand berücksichtigt.

$$f_{res} = (33,99 \pm 0,07) \text{ kHz}$$

Der Fehler von f_{res} wird mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_f = 2\pi \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{2L^2}}\right)}{\partial R_2} \sigma_{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{2L^2}}\right)}{\partial L} \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{2L^2}}\right)}{\partial C} \sigma_C\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_f = 2\pi \sqrt{\left(\frac{R_2}{2L^2 \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{2L^2}}} \sigma_{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{R_2^2}{L^3} - \frac{1}{CL^2}}{2 \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{2L^2}}} \sigma_L\right)^2 + \left(\frac{1}{2LC^2 \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_2^2}{2L^2}}} \sigma_C\right)^2}$$

Die relative Abweichung entspricht also circa 0,02%.

Aus dem zuvor bereits berechneten Wert der Breite ergibt sich zu dem experimentell ermittelten Wert von $f_1 - f_2 \approx 7500$ Hz eine relative Abweichung von 4,1%.

5 Diskussion

Die Widerstände R_{eff} und R weichen deutlich von einander ab. Dies ist durch ein unpräzises Messverfahren erklärbar, da der Fall des aperiodischen Grenzfalles nicht eindeutig an dem Oszilloskop abgelesen werden kann.

Die Messwerte der Spannungen weichen in dem Bereich um das Maximum herum sichtbar ab, wodurch sich größere Abweichungen in den experimentell ermittelten Breiten der Resonanzkurven ergeben. Ein ähnlicher Verlauf der Spannung anhand der Theoriekurve ist dennoch ersichtlich. Ein systematischer Fehler liegt bei dem Tastkopf vor, welcher bei nur kleinen Störungen die Kurve deutlich verändert und somit die Messwerte verfälscht. Außerdem werden die Widerstände von Kondensator und Spule vernachlässigt.

Die experimentell ermittelte Resonanzüberhöhung weicht nur gering von der theoretischen ab. Daraus wird geschlossen, dass die sich aus dem Graphen ergebende Resonanzfrequenz präzise dargestellt wird.

Mithilfe der Phasenverschiebung gelang eine sehr genaue Bestimmung der Resonanzfrequenz sowie der Frequenzen f_1 und f_2 , jedoch treten trotzdem kleine Abweichungen auf. Systematische Fehler können dabei schon das einfache Ablesen der Werte aus den erstellten Diagrammen sein. Ein weiterer Grund kann wiederum der oben bereits erwähnte Tastkopf sein, mit dem zudem z.B. die eigentlich erwartete Frequenzabhängigkeit bezüglich der Messung der Eingangsspannung erst gar nicht sichtlich festgestellt werden konnte.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V353, Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2017.