

Fourier-Analyse und Synthese

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 12.01.2016

Abgabe: 19.01.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlage	3
1.1	Fehlerrechnung	4
1.1.1	Mittelwert	4
1.1.2	Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	4
1.1.3	Lineare Regression	4
2	Durchführung und Aufbau	5
2.1	Vorbereitung	5
2.1.1	Sägezahn	5
2.1.2	Rechteck	5
2.1.3	Dreieck	5
2.2	Fourier-Synthese	5
2.3	Fourier-Analyse	6
3	Auswertung	6
3.1	Fourier-Analyse	6
3.2	Fourier-Synthese	9
4	Diskussion	11
	Literatur	11

1 Theoretische Grundlage

Periodische Funktionen haben die Eigenschaft sich einerseits periodisch im Raum

$$f(x + D) = f(x) , \quad (1)$$

als auch periodisch in der Zeit

$$f(t + T) = f(t) \quad (2)$$

zu wiederholen. Dabei ist T die Periodendauer und D die Distanz nach dem sich ein Vorgang wiederholt. Solche Vorgänge lassen sich mittels der 2π periodischen Funktionen Sinus und Cosinus beschreiben, welche die Form

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) , \quad (3)$$

$$f(t) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (4)$$

haben. Mittels des Fourierschen Theorem lassen sich sämtliche periodische Vorgänge in der Natur, mit Hilfe der beiden Funktionen beschreiben.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \right) \quad (5)$$

Vorraussetzung ist jedoch, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten lassen sich nach

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T^0 f(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T^0 f(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (7)$$

berechnen. Dabei treten nur vielfache der ν_1 Grundfrequenz auf, welche als harmonische Oberschwingung bezeichnet wird. Beim Auftragen der Amplitude gegen die Oberwellen ergibt sich ein Linienspektrum, bei welchen die Amplituden für $n \rightarrow \infty$ gegen null gehen

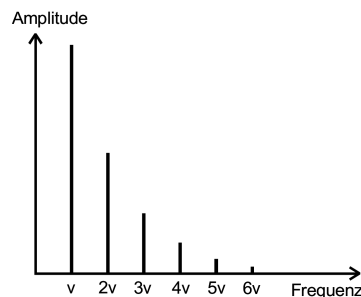


Abbildung 1: Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung [1].

sollte, wie man Abbildung 1 entnehmen kann. Falls es sich bei der fourieranalysierten Funktion nicht um eine Periodische Funktion handeln sollte, ergibt sich dort ein

kontinuierliches Spektrum. Mit Hilfe der Fourier-Transformation ist es möglich das Frequenzspektrum sowohl periodischer als auch nicht-periodischer Funktion zu bestimmen.

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t} dt \quad (8)$$

Da im Versuch nur über ein endlich langes Zeitintervall integriert werden kann, sind aufgrund der nicht periodizität Nebenmaxima zu erwarten, außerdem sind die Maxima keine Delta-Peaks sondern sind in die breite gefächert.

1.1 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.1.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (9)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (10)$$

1.1.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn x_1, \dots, x_n fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (11)$$

1.1.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (12)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (13)$$

$$b = \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\bar{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (14)$$

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung auf den Versuch sollen die Fourier-Koeffizienten von drei verschiedenen periodischen Schwingungen berechnet werden. Dabei wird bei der Parametrisierung darauf geachtet, dass die Funktionen entweder grade oder ungerade sind.

2.1.1 Sägezahn

$$a_n = 0 \quad (15)$$

$$b_n = -\frac{T}{n\pi}(-1)^n \quad (16)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{T}{n\pi}(-1)^n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \quad (17)$$

2.1.2 Rechteck

$$a_n = 0 \quad (18)$$

$$b_n = \frac{2T}{n\pi} - \frac{2T}{n\pi}(-1)^n \quad (19)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4T}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right) \quad (20)$$

2.1.3 Dreieck

$$a_n = \frac{4T}{n^2\pi^2} - (-1)^n \frac{4T}{n^2\pi^2} \quad (21)$$

$$b_n = 0 \quad (22)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8T}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right) \quad (23)$$

2.2 Fourier-Synthese

Mittels eines Oberwellengenerators sollen die vorher berechneten Spannungen möglichst genau approximiert werden. Dazu werden zunächst die harmonische Oberschwingung auf den ersten Channel des Oszilloskops und auf den zweiten ein vielfaches der Oberschwingung gelegt. Mittels des X-Y-Betriebs des Oszilloskops kann die Phase der n-ten Oberschwingung mit der, der harmonischen Abgestimmt werden. Dies geschieht durch die Lissajour Figuren. Das auf dem Oszilloskop zu sehende Bild muss einer Funktion mit zwei Endpunkten gleichen und darf keine geschlossene Kurve sein. Anschließend wird mittels eines AC-Millivoltmeters die in der Vorbereitung berechnete Amplitude für die einzelnen Oberwellen eingestellt. Nachdem die Amplituden auf das richtige Abfallverhalten eingestellt ist, wird das Oszilloskop in den X-T-Betrieb gestellt und die einzelnen Oberwellen addiert. Von dem Graphen der auf dem Oszilloskop erscheint wird ein Thermodruck gemacht.

2.3 Fourier-Analyse

Das Signal des Funktionsgenerators wird direkt an ein Oszilloskop angeschlossen. Dieses Fouriertransformiert das Signal, dafür wird im Untermenü die entsprechende Einstellung getroffen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Skalierung hinreichend klein ist um genügend Peaks des Linienspektrums zu sehen. Die Nebenmaxima, die durch die endliche Integration einer Zeit entstehen, sollen beim Ablesen vernachlässigt werden. Es sollen die Spannungswerte der Amplituden der Oberwelle entsprechend notiert werden, um in der Auswertung eine Aussage über deren Abfallverhalten treffen zu können. Wichtig dafür ist das Abtasttheorem, welches aussagt, dass die Abtastfrequenz größer als die höchste im Spektrum vorkommende Frequenz sein muss.

$$\nu_A > 2\nu_{\max}$$

Das Messprogramm wird für die 3 vorher berechneten Funktionen durchgeführt.

3 Auswertung

3.1 Fourier-Analyse

In der folgenden Messreihe werden drei periodische elektrische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten zerlegt und diese mit den Ergebnissen aus dem Fourierschen Theorem (siehe Gl. (5)) verglichen. Die jeweils verwendeten Schwingungen haben eine Frequenz von 100 kHz. $U_{\text{theo, n}}$ berechnet sich aus den Fourierkoeffizienten (siehe Gl. (7)) der jeweiligen Schwingung und $U_{\text{exp, n}}$ wird aus den Diagrammen 2 bis 4 abgelesen. In den Tabellen 1 bis 3 sind die Ergebnisse aufgelistet.

Die Fehler werden mit Gleichung (24) berechnet.

$$\sigma_n = \frac{U_{\text{exp, n}} - U_{\text{theo, n}}}{U_{\text{theo, n}}} \cdot 100 . \quad (24)$$

Oberwelle	$U_{\text{exp, n}} / \text{V}$	$U_{\text{theo, n}} / \text{V}$	$\frac{U_{\text{exp, n}}}{U_1}$	$\frac{U_{\text{theo, n}}}{U_1}$	$\sigma_n / \%$
1	4.00	4.00	1.00	1.00	0.00
2	1.50	2.00	0.50	0.50	25.00
3	1.25	1.33	0.32	0.33	6.02
4	1.10	1.00	0.23	0.25	10.00
5	0.80	0.80	0.16	0.20	0.00
6	0.55	0.67	0.14	0.17	17.91
7	0.50	0.57	0.11	0.14	12.28
8	0.55	0.50	0.12	0.13	10.00
9	0.45	0.44	0.11	0.11	2.27

Tabelle 1: Messwerte der Sägezahnspannung.

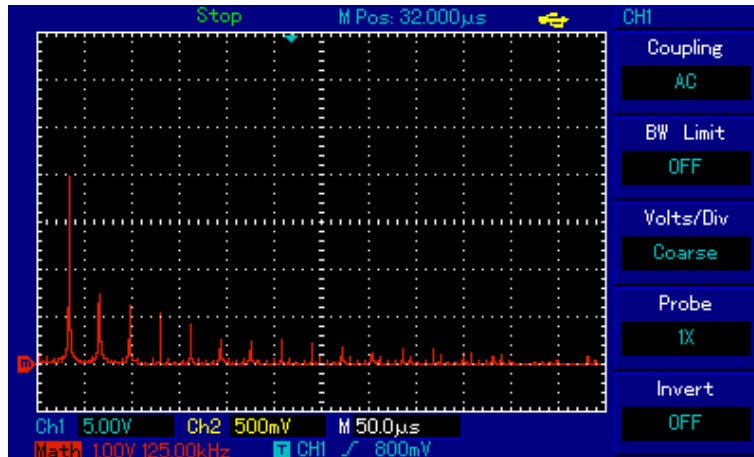


Abbildung 2: Messwerte für $U_{\text{exp}, n}$ der Sägezahnspannung.

Oberwelle	$U_{\text{exp}, n} / \text{V}$	$U_{\text{theo}, n} / \text{V}$	$\frac{U_{\text{exp}, n}}{U_1}$	$\frac{U_{\text{theo}, n}}{U_1}$	σ_n
1	8.00	8.00	1.00	1.00	0.00
3	2.20	2.67	0.28	0.33	17.60
5	1.60	1.60	0.20	0.20	0.00
7	1.00	1.14	0.13	0.14	12.28
9	1.00	0.89	0.13	0.11	12.36
11	0.60	0.73	0.08	0.09	17.81

Tabelle 2: Messwerte der Rechteckspannung.

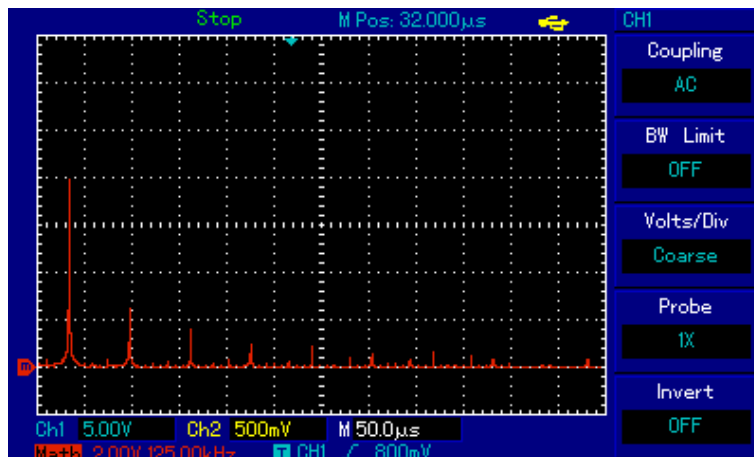


Abbildung 3: Messwerte für $U_{\text{exp}, n}$ der Rechteckspannung.

Oberwelle	$U_{\text{exp, n}} / \text{V}$	$U_{\text{theo, n}} / \text{V}$	$\frac{U_{\text{exp, n}}}{U_1}$	$\frac{U_{\text{theo, n}}}{U_1}$	σ_n
1	5.60	5.60	1.000	1.000	0.00
3	0.56	0.62	0.100	0.111	9.68
5	0.20	0.22	0.036	0.039	9.09
7	0.08	0.11	0.014	0.019	27.27
9	0.06	0.07	0.011	0.013	14.29
11	0.03	0.05	0.005	0.009	40.00

Tabelle 3: Messwerte der Dreiecksspannung.

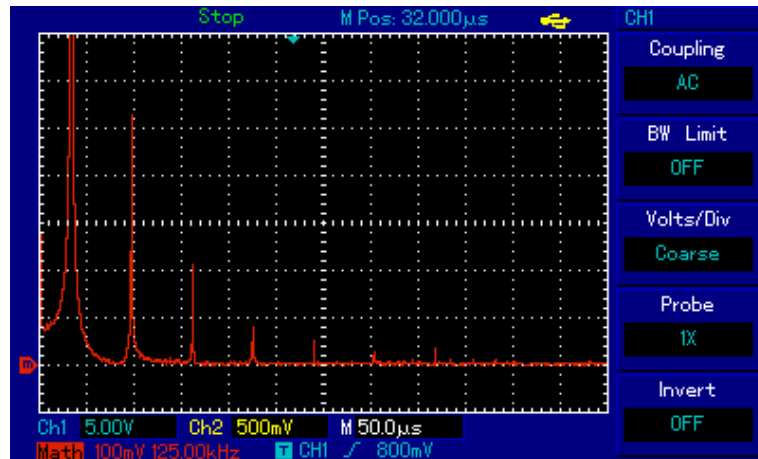


Abbildung 4: Messwerte für $U_{\text{exp, n}}$ der Dreiecksspannung.

3.2 Fourier-Synthese

Die eingestellten Amplituden der Rechteck- und der Sägezahnspannung sind in Tabelle 4 aufgelistet.

Oberwelle		A / V
Sägezahn	Rechteck	
1.	1.	0.640
2.	—	0.320
3.	3.	0.213
4.	—	0.160
5.	5.	0.128
6.	—	0.106
7.	7.	0.091
8.	—	0.080
9.	9.	0.071
10.	—	0.064

Tabelle 4: Die eingestellten Größen für die Rechteck- und die Sägezahnspannung.

Sägezahn-Schwingung:

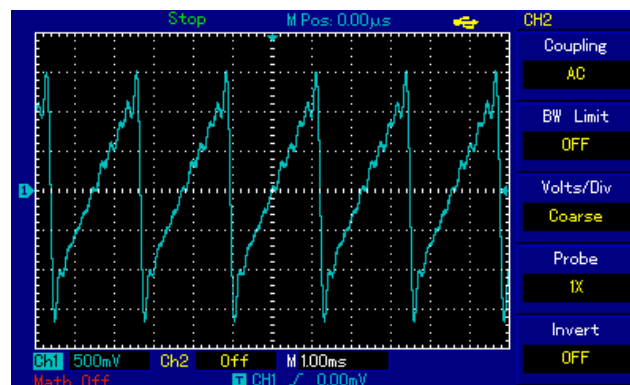


Abbildung 5: Sägezahn-Schwingung.

Rechteck-Schwingung:

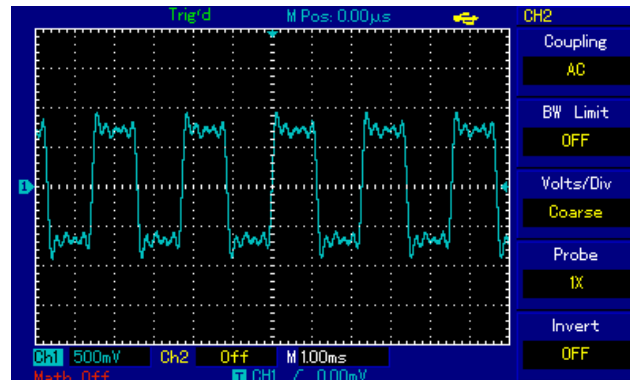


Abbildung 6: Rechteck-Schwingung.

Die eingestellten Amplituden der Dreiecksspannung sind in Tabelle 5 aufgelistet.

Oberwelle Dreieck	A / V
1.	0.640
3.	0.071
5.	0.026
7.	0.013
9.	0.007

Tabelle 5: Die eingestellten größen für die Dreiecksspannung.

Dreieck-Schwingung:

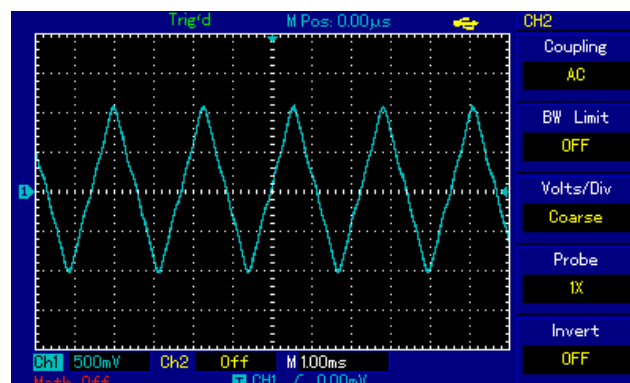


Abbildung 7: Dreieck-Schwingung.

4 Diskussion

In den Tabellen 1 bis 3 wird deutlich, dass zwischen den experimentell ermittelten Werten und den theoretischen Werten große Unterschiede vorliegen. Mögliche Erklärungen sind Schwankungen im Stromnetz, vernachlässigte Innenwiderstände und das nicht geeichte Voltmeter. Außerdem konnten die Amplituden und die Phasen mit den vorhandenen Apparaturen nicht genau genug bestimmt werden.

Auffällig ist bei der Fourier-Synthese (Kapitel 3.2), dass die Graphen periodische Abweichungen aufweisen, diese bezeichnen das Gibbsche Phänomen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 351: Fourier-Analyse und -Synthese*. 2014.