

Das Stefan-Boltzmann Gesetz

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 24.11.2015

Abgabe: 01.12.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlage	3
1.1	Fehlerrechnung	3
1.1.1	Mittelwert	3
1.1.2	Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	3
1.1.3	Lineare Regression	4
2	Durchführung und Aufbau	4
2.1	Funktionsweise der Thermosäule nach Moll	4
2.2	Strahlungsleistung als Funktion der Temperatur	4
2.3	Strahlungsleistung als Funktion des Abstandes	4
3	Auswertung	5
3.1	Bestimmung des Emissionsvermögens	5
3.2	Thermospannung im Verhältnis zum Abstand	8
4	Diskussion	9
	Literatur	10

1 Theoretische Grundlage

Das Stefan-Boltzmann Gesetz verknüpft die abgestrahlte Leistung eines schwarzen Körpers mit seiner Temperatur. Im Idealfall ist das Emissionsvermögen $\epsilon(\lambda, T)$ genauso groß wie dessen Absorptionsvermögen $A(\lambda, T)$. Dabei ist $R(\lambda, T)$ das Reflektionsvermögen der Körper.

$$\epsilon(\lambda, T) = A(\lambda, T) = 1 - R(\lambda, T) \quad (1)$$

Die Leistung die ein Körper abstrahlt, hängt von der Temperatur, der Wellenlänge und dem Raumwinkel Ω_0 ab und wird als

$$P(\lambda, T) = \frac{dP}{d\lambda} = \frac{2\pi c^2 h}{\Omega_0 \lambda^5} \left(\exp\left(\frac{ch}{k\lambda T}\right) - 1 \right)^{-1} \quad (2)$$

Planck'sches Strahlungsgesetz bezeichnet. Das Stefan-Boltzmann Gesetz beschreibt die Strahlungsdichte $P(T)$ bezogen auf die abgestrahlte Fläche und lautet

$$P(T) = \epsilon \sigma T^4, \quad (3)$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist und

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} [1] \quad (4)$$

beträgt.

1.1 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.1.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (5)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (6)$$

1.1.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn x_1, \dots, x_n fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (7)$$

1.1.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (8)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (9)$$

$$b = \frac{\overline{x^2y} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (10)$$

2 Durchführung und Aufbau

Im vorliegenden Versuch soll die Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers als Funktion der Temperatur bestimmt werden. Als ein schwarzer Körper wird ein Objekt bezeichnet, welches die gesamte einfallende Strahlung absorbiert ($\epsilon = 1$). Da der Körper sich im thermischen Gleichgewicht befindet, ändert er somit entweder seine Temperatur oder emittiert jegliche Strahlung wieder. Ein schwarzer Strahler ist jedoch nur ein idealisiertes Modell. Dem Modell am nächsten kommt ein Hohlkörper wie zum Beispiel ein Leslie-Würfel. Zur Eichung der Thermosäule nach Moll wird einmal am Anfang und am Ende der Messreihe die Offsetspannung gemessen um Temperaturdrifts in der Rechnung vernachlässigen zu können.

2.1 Funktionsweise der Thermosäule nach Moll

Die Thermosäule nach Moll dient zur Messung von Wärmestrahlung und besteht aus mehreren in Reihe geschalteten Thermoelementen. Bei Bestrahlung entsteht eine thermoelektrische Spannung, die mit einer spannungsempfindlichen Meßapparatur gemessen wird. Die Thermospannung des Körpers wird relativ zur Gehäusetemperatur der Thermosäule angegeben.

2.2 Strahlungsleistung als Funktion der Temperatur

Zuerst soll die Strahlungsleistung eines Leslie-Würfels welcher mit kochendem Wasser befüllt wird gemessen werden. Der Würfel hat 4 verschiedene Oberflächen von welchen das Absorptionsvermögen bestimmt werden soll. Dafür wird die Temperatur des Wassers innerhalb des Würfels mit einem Thermometer gemessen. Die Wärmestrahlung wird mittels einer Thermosäule nach Moll gemessen und in Abhängigkeit der Temperatur notiert. Es werden bei der Abkühlung des Wassers um 5°C jeweils ein Wertepaar für jede Seite des Würfels genommen bis sich das Wasser auf 35°C abgekühlt hat.

2.3 Strahlungsleistung als Funktion des Abstandes

Bei einer Temperatur zwischen $(40 - 45)^\circ \text{C}$ wird eine Strahlungsmessung in abhängigkeit des Abstandes durchgeführt. Dafür werden 10 hinreichend kleine Abstände gewählt und

die Wärmestrahlung in Abhängigkeit des Abstandes gemessen. Dabei ist zu beachten, dass der Abstand zum Objekt nicht zu groß wird und so Störstrahlung in die Moll-Säule gelangen kann, wodurch die Messergebnisse verfälschet werden.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des Emissionsvermögens

Das Emissionsvermögen der einzelnen Oberflächen wird bestimmt, in dem die Thermospannung als Funktion von $T^4 - T_0^4$ aufgetragen wird. Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden lässt sich dann ϵ bestimmen.

Die gemessene Raumtemperatur beträgt

$$T_0 = 294.26 \text{ K} .$$

Die Thermospannungen bei den Temperaturen sind in Tabelle 1 aufgeführt.

	weiß	messingfarben	schwarz	glänzend
T / K	U_1 / mV	U_2 / mV	U_3 / mV	U_4 / mV
368.15	1.09	0.20	1.13	0.084
363.15	1.04	0.17	1.05	0.068
358.15	0.93	0.16	0.94	0.061
353.15	0.84	0.14	0.85	0.047
348.15	0.73	0.12	0.75	0.050
343.15	0.65	0.11	0.66	0.041
338.15	0.56	0.092	0.57	0.033
333.15	0.48	0.086	0.49	0.037
328.15	0.40	0.072	0.41	0.026
323.15	0.33	0.057	0.34	0.023
318.15	0.26	0.047	0.26	0.021
313.15	0.19	0.032	0.19	0.022
308.15	0.13	0.024	0.13	0.015

Tabelle 1: Die Thermospannung bei verschiedenen Temperaturen

Die Offsetspannung vor und nach dem Versuch ist in Tabelle 2 aufgeführt und wird zu U_0 gemittelt.

	U_{vor}	U_{nach}
U / mV	0.013	0.006
U_0	0.007	

Tabelle 2: Die gemittelte Offsetspannung

Mit den Tabellen 1 und 2, sowie T_0 ergeben sich die Abbildungen 1 bis 4.

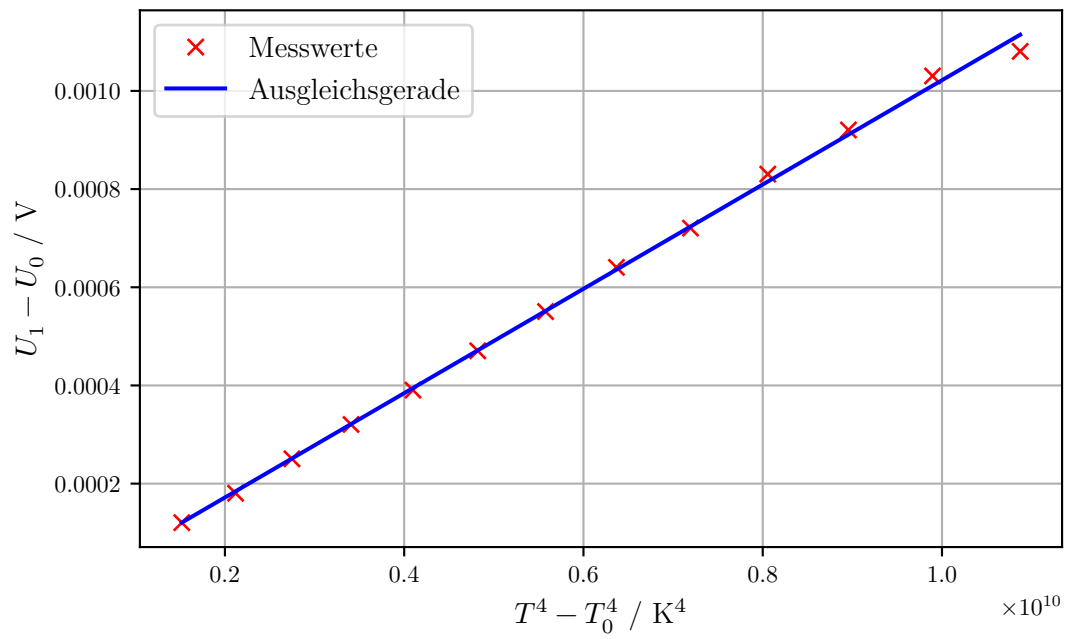


Abbildung 1: Ausgleichsgerade der Messwerte für die weiße Oberfläche

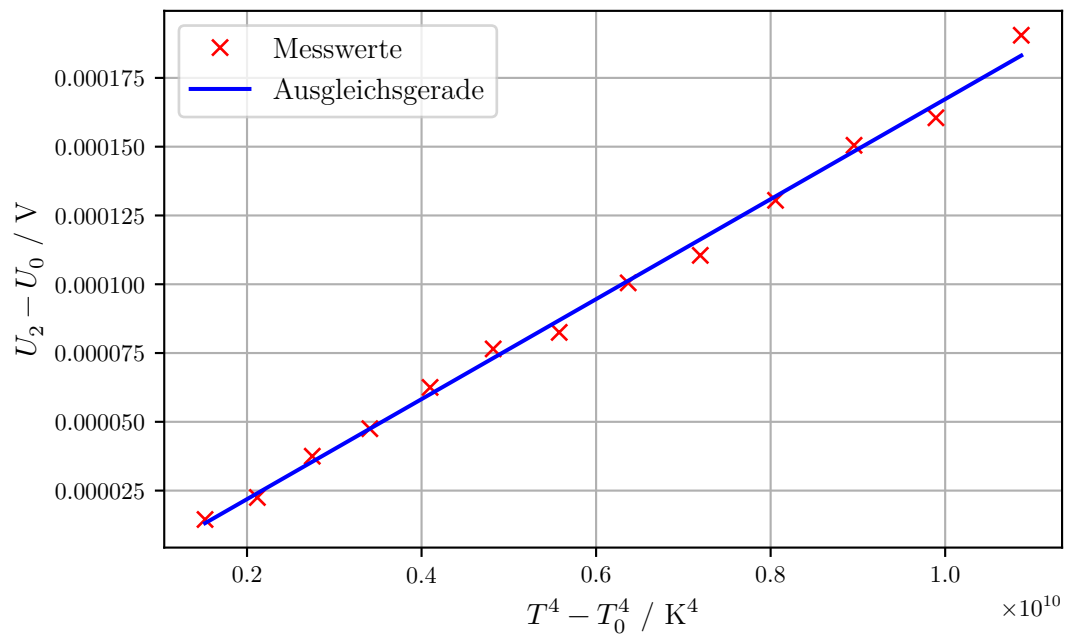


Abbildung 2: Ausgleichsgerade der Messwerte für die messingfarbene Oberfläche

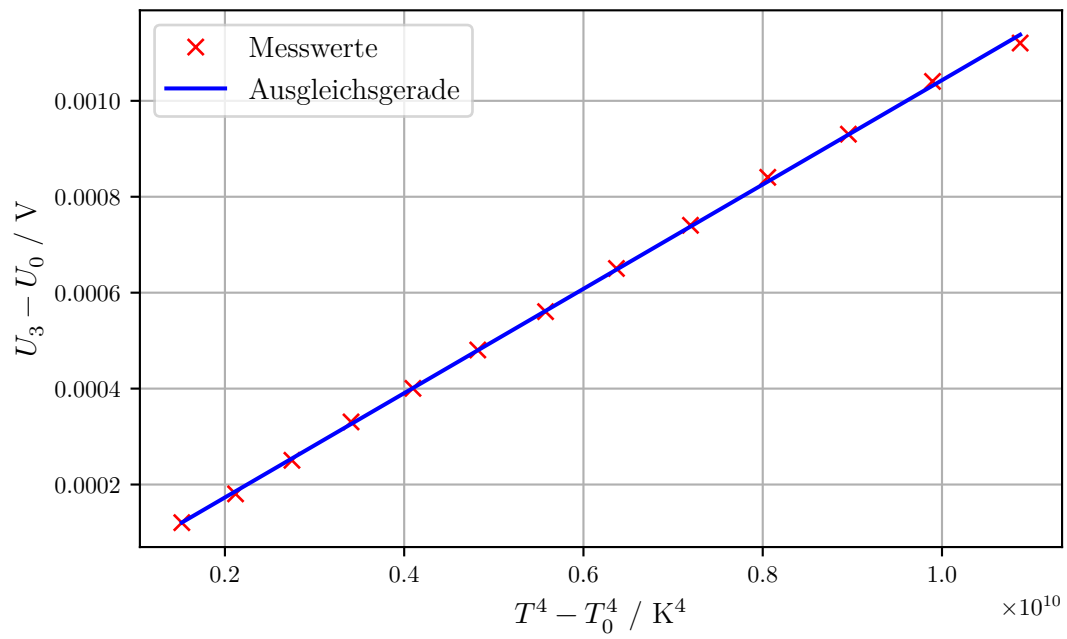


Abbildung 3: Ausgleichsgerade der Messwerte für die schwarze Oberfläche

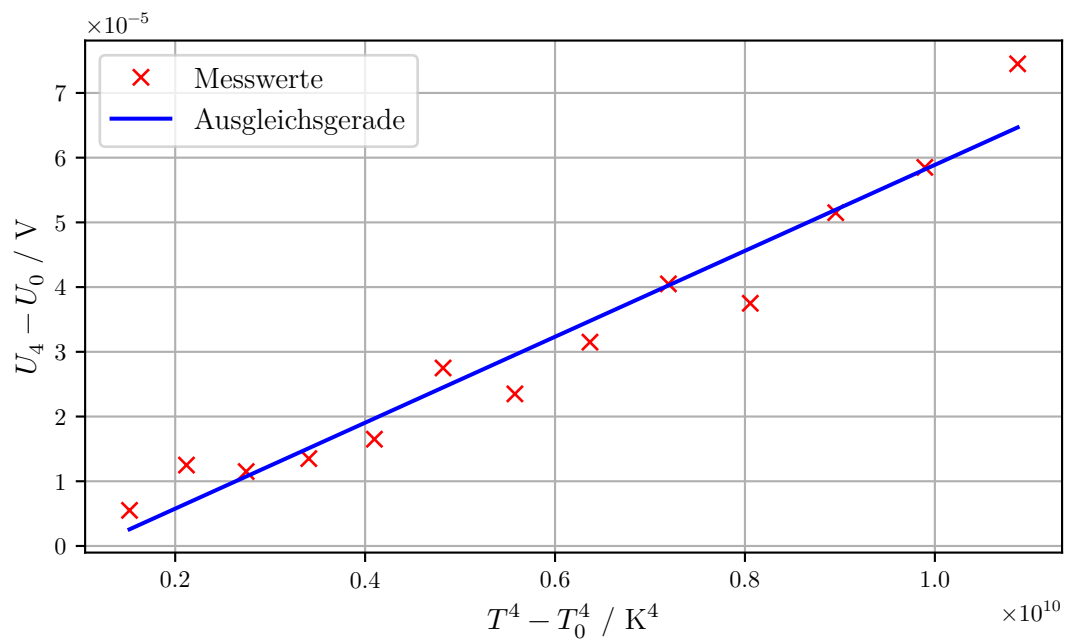


Abbildung 4: Ausgleichsgerade der Messwerte für die glänzende Oberfläche

Die Steigung und der Fehler der Ausgleichsgeraden werden mit der linearen Regression durch Python 3.4.3 ermittelt und sind im folgenden aufgelistet.

$$\begin{aligned} m_{\text{weiß}} &= (10.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-14} \text{ V/K}^4 \\ m_{\text{messing}} &= (1.82 \pm 0.04) \cdot 10^{-14} \text{ V/K}^4 \\ m_{\text{schwarz}} &= (10.87 \pm 0.07) \cdot 10^{-14} \text{ V/K}^4 \\ m_{\text{glänzend}} &= (0.66 \pm 0.05) \cdot 10^{-14} \text{ V/K}^4 \end{aligned}$$

Mit der Annahme, dass die schwarze Oberfläche ein Schwarzer Körper ist ($\epsilon_{\text{schwarz}} = 1$), folgt mit der Gleichung 11, für die anderen Oberflächen ein Emissionsvermögen von:

$$\epsilon_i = \frac{m_i}{m_{\text{schwarz}}} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{schwarz}} &= (1.0 \pm 0.0) \\ \epsilon_{\text{weiß}} &= (0.98 \pm 0.01) \\ \epsilon_{\text{messing}} &= (0.167 \pm 0.004) \\ \epsilon_{\text{glänzend}} &= (0.061 \pm 0.004) \end{aligned}$$

Die Fehlerformel von ϵ_i folgt mit Formel 7 zu:

$$\Delta\epsilon_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\epsilon_i}{\partial m_i}\right)^2 \cdot (\Delta m_i)^2 + \left(\frac{\partial\epsilon_i}{\partial m_{\text{schwarz}}}\right)^2 \cdot (\Delta m_{\text{schwarz}})^2} . \quad (12)$$

3.2 Thermospannung im Verhältnis zum Abstand

Die Thermospannung der weißen Oberfläche gegen $\frac{1}{A^2}$ aufgetragen ergibt Abbildung 5. Die dazu gehörigen Messwerte sind in Tabelle 3 aufgelistet.

A / m	$\frac{1}{A^2} / \frac{1}{\text{m}^2}$	$U_{\text{weiß}} / \text{mV}$
0.100	100.0	0.247
0.125	64.0	0.238
0.150	44.4	0.228
0.175	32.7	0.217
0.200	25.0	0.202
0.225	19.8	0.189
0.250	16.0	0.177
0.275	13.2	0.162
0.300	11.1	0.149
0.325	9.5	0.137
0.350	8.2	0.128

Tabelle 3: Messergebnisse für das Verhältnis zwischen Thermospannung und $\frac{1}{A^2}$

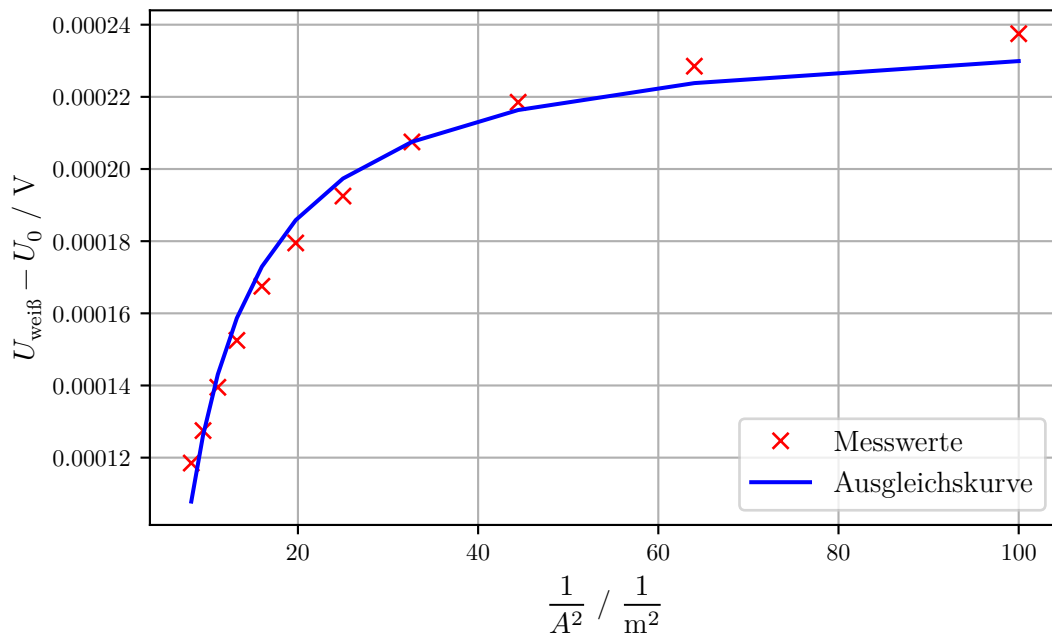


Abbildung 5: Graph für das Verhältnis zwischen Thermospannung und $\frac{1}{A^2}$

In Abbildung 3 wird deutlich, dass die Ausgleichskurve folgender Funktion entspricht:

$$y = \frac{a}{x^2} + b . \quad (13)$$

Die Parameter a und b der Funktion werden mit Python 3.4.3 berechnet.

$$a = (-1.09 \pm 0.05) \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \quad (14)$$

$$b = (2.41 \pm 0.04) \cdot 10^{-4} \text{V} \quad (15)$$

4 Diskussion

Die Standardabweichung der Steigung und der daraus resultierende Fehler für ϵ , lassen sich durch die Ansprechzeit der Thermosäule nach Moll und der ungenauen Temperaturmessung erklären. Außerdem sind große Schwankungen in der Thermospannung zu erkennen wenn Personen an dem Versuchsaufbau vorbei laufen.

Ein Vergleich mit Literaturwerten ist hier nicht Sinnvoll da wir von der idealisierten Annahme ausgehen, dass die schwarze Oberfläche ein Emissionsvermögen von $\epsilon = 1$ besitzt und alle anderen Werte von diesem abgeleitet werden.

Mit den Abbildungen 1 bis 4 lässt sich deutlich ein linearer Zusammenhang zwischen der Thermospannung und der Temperatur hoch 4 erkennen. Dadurch wird das Stefan-Boltzmann-Gesetz tendenziell bewiesen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 207: Das Stefan-Boltzmann-Gesetz*. 2014.