

V 406

Beugung am Spalt

Timo Gräßer
timo.graesser@udo.edu

Jasper Karl Lammering
jasper.lammering@udo.edu

Durchführung: 7.6.16

Abgabe: 14.6.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	3
1.1. Fehlerrechnung	3
1.2. Einleitung	3
1.3. Beugung am Einzelspalt	4
1.4. Beugung am Doppelspalt	6
1.5. Beugungsobjekt und Fouriertransformation	7
2. Durchführung	7
2.1. Aufbau	7
2.2. Messprogramm	8
2.2.1. Messungen mit dem Mikrometer	8
2.2.2. Dunkelstrommessung	8
2.2.3. Spaltmessungen	8
3. Auswertung	9
3.1. Ausmessung der Einfachspalte	9
3.1.1. Bestimmung der Breite mit Mikroskop	9
3.1.2. Bestimmung der Breite per Intensitätsmessung	9
3.2. Ausmessung der Doppelspalte	14
3.2.1. Bestimmung der Parameter mit Mikroskop	14
3.2.2. Bestimmung der Parameter per Intensitätsmessung	14
3.2.3. Vergleich der Verteilungsbilder	14
4. Diskussion	17
4.1. Einfachspalte	17
4.2. Doppelspalt	17
Literatur	17
A. Kopie der Originaldaten	17

1. Theorie

1.1. Fehlerrechnung

Für die Fehlerfortpflanzung bei Gleichungen mit N fehlerbehafteten Größen wird jeweils die Formel zur Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2}$$

mit der jeweiligen Funktion $f(x_i)$, den Messgrößen x_i und den zugehörigen Fehlern σ_i verwendet. Zur Berechnung des arithmetischen Mittels von N Messwerten wird jeweils die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

mit den Messwerten x_i benutzt. Die Standardabweichung des Mittelwerts wird jeweils mit der Gleichung

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

mit den N Messwerten x_i berechnet.

1.2. Einleitung

Lichtbeugung tritt im Allgemeinen auf, wenn der Strahldurchmesser eines einfallenden Lichtstrahls größer als die Abmessungen des Beugungsobjektes sind. Das Licht kann in diesem Fall als Welle genähert werden und es entstehen Interferenzen hinter dem Beugungsobjekt. Im folgenden Versuch soll die Abhängigkeit des Interferenzmusters von der Aperturfunktion, also der Gestalt des Beugungsobjektes, untersucht werden. Bei der allgemeinen Lichtbeugung wird zwischen der Fresnelschen und der Fraunhoferschen Beugung unterschieden. Diese Fälle sind in Abbildung 1 für die Beugung an einem Einzelspalt dargestellt.

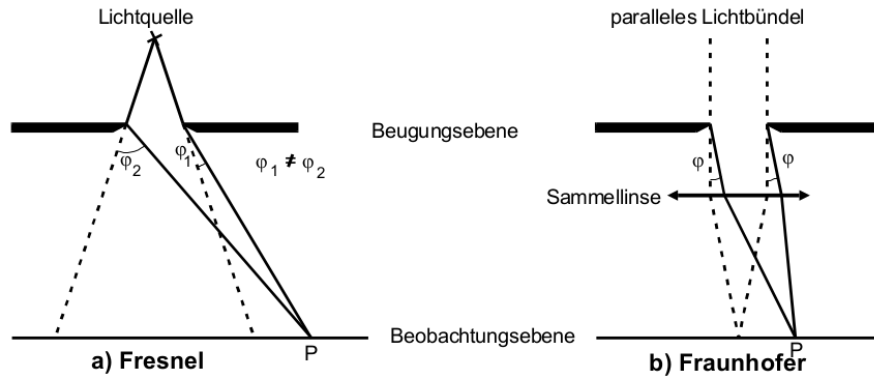


Abbildung 1: Fresnelsche und Fraunhofersche Lichtbeugung am Einzelspalt. Die gestrichelten Linien beschreiben den theoretischen Strahlenverlauf in der geometrischen Optik.[1]

Bei der Fresnelschen Beugung ist die Entfernung der Lichtquelle vom Spalt nicht deutlich größer als der Spalt. Dadurch interferieren hinter dem Spalt Lichtstrahlen, die mit unterschiedlichen Winkeln abgelenkt wurden. Bei der Fraunhoferschen Beugung ist der Abstand zwischen Lichtquelle und Spalt viel größer als die Spaltbreite, sodass die am Spalt eintreffenden Lichtstrahlen annähernd parallel sind. Hinter dem Spalt interferieren bei dieser Beugung nur Strahlen, die mit dem selben Winkel abgelenkt wurden. In diesem Versuch werden nur Beugungsmuster einer Fraunhoferschen Lichtbeugung betrachtet, da diese mathematisch einfacher zu behandeln sind.

1.3. Beugung am Einzelspalt

Beim Einzelspalt ist die Höhe des Spalts viel größer als die Breite b , sodass nur die Beugung in x -Richtung, also in Richtung Spaltbreite, betrachtet werden muss. Fällt eine ebene Welle, zum Beispiel ein Laser, mit der Feldstärke

$$A(z, t) = A_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda})} \quad (1)$$

ein, so wird diese am Spalt gebeugt. Das Huygenssche Prinzip besagt, dass an jedem Punkt im Spalt Kugelwellen ausgesendet werden, die dann hinter dem Spalt interferieren und eine neue Wellenfront bilden. Diese ist nicht nur, wie in der geometrischen Optik auf den Bereich hinter der Spaltöffnung begrenzt, sondern auf den gesamten Bereich hinter dem Beugungsobjekt. In Abbildung 2 ist eine Skizze zur Bestimmung des Phasenunterschiedes zwischen zwei mit gleichem Winkel abgelenkten Strahlen abgebildet.

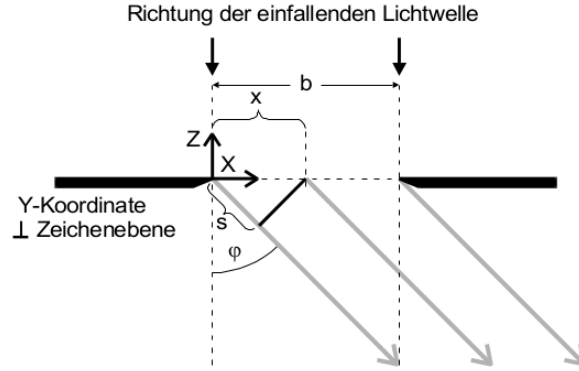


Abbildung 2: Skizze zur Bestimmung der Phasendifferenz zwischen zwei Strahlen, die an unterschiedlichen Stellen mit jeweils dem selben Winkel abgelenkt werden.[1]

Für die Phasendifferenz ergibt sich

$$\delta = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda}. \quad (2)$$

Nach Integration über die Spaltbreite und einigen Umformungsschritten folgt die Amplitude hinter dem Spalt

$$B(z, t, \varphi) = A_0 b e^{i(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda})} e^{\frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda}} \text{sinc}\left(\frac{\pi \sin \varphi}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Da die Exponentialfunktionen in (3) nur Phasenverschiebungen sind, lässt sich die Amplitude auch darstellen als

$$B(\varphi) = A_0 b \text{sinc}(\eta) \quad (4)$$

mit

$$\eta(\varphi) = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}. \quad (5)$$

Die Amplituden-Funktion ist in Abbildung 3 dargestellt.

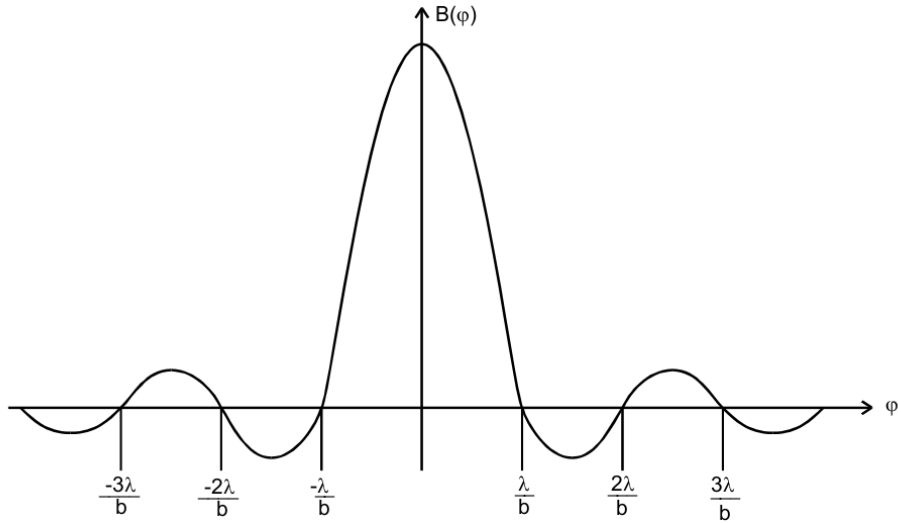


Abbildung 3: Skizze der Amplituden-Funktion (4).[1]

Die Nullstellen liegen bei

$$\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad (6)$$

mit natürlichem n . Die Amplituden-Funktion kann aufgrund hoher Frequenzen nicht gemessen werden, stattdessen misst man die Lichtintensität an einem Schirm. Die Intensitätsfunktion entspricht dem Betragsquadrat der Amplitudenfunktion und ist daher an jedem Ort positiv. Sie lautet mit (5)

$$I(\varphi) = A_0^2 b^2 \text{sinc}^2(\eta) \quad (7)$$

1.4. Beugung am Doppelspalt

Die Intensitätsverteilung bei der Beugung am Doppelspalt lässt sich ähnlich wie die am Einzelspalt berechnen. Eine Skizze hierzu ist in Abbildung 4 dargestellt.

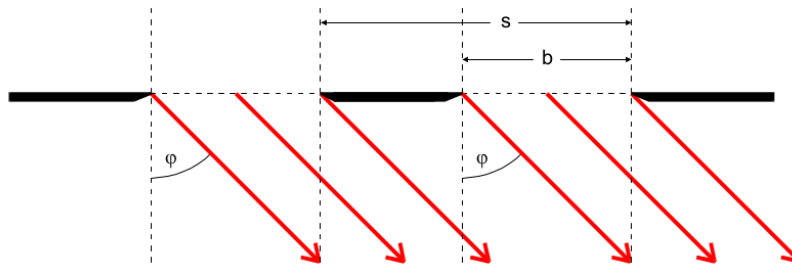


Abbildung 4: Beugung am Doppelspalt.[1]

Aus der Überlagerung zweier Einzelspalte folgt die Intensität am Doppelspalt

$$I(\varphi) = 4 \cos^2 \frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (8)$$

Durch den Cosinus-Faktor enthält die Funktion zusätzlich zu den Nullstellen (6) noch an den Stellen

$$\varphi_k = \lambda \arcsin \frac{2k+1}{2s} \quad (9)$$

mit natürlichem k weitere Nullstellen.

1.5. Beugungsobjekt und Fouriertransformation

Die Fraunhofer-Näherung besagt, dass die Amplitudenverteilung die Fouriertransformierte der Aperturfunktion ist. Das heißt, dass für die Intensitätsverteilung einer beliebigen Beugungsfunktion $f(x)$

$$I(p) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx \right|^2 \quad (10)$$

gilt. Die Intensitätsfunktion am Einzelspalt (7) folgt somit auch aus der Aperturfunktion

$$f(x) = \begin{cases} A_0, & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (11)$$

mit

$$p = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}. \quad (12)$$

2. Durchführung

2.1. Aufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 5 dargestellt. Ein He-Ne-Laser mit einer Wellenlänge von

$$\lambda = 633 \text{ nm} \quad (13)$$

trifft auf einen Einzel- oder Doppelparallelspekt und wird dort gebeugt. In

$$L = 1 \text{ m} \quad (14)$$

vom Spalt entfernt ist ein lichtempfindlicher Detektor positioniert, der mit einem Verschiebereiter in Spaltbreite-Richtung verschoben werden kann. Mit einem Amperemeter kann für jede Detektorposition die Stromstärke abgelesen werden.

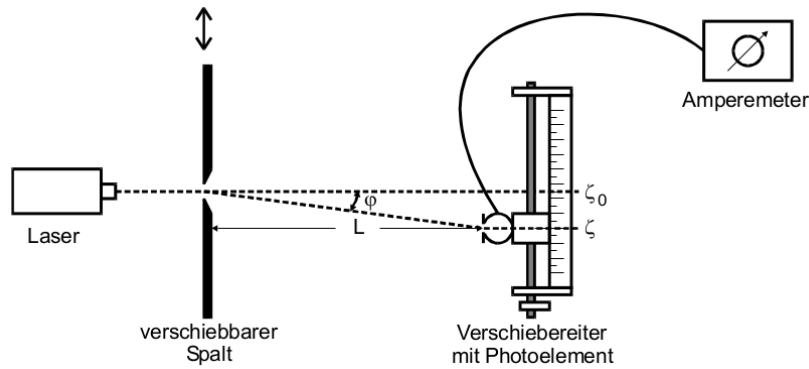


Abbildung 5: Versuchsaufbau.[1]

2.2. Messprogramm

2.2.1. Messungen mit dem Mikrometer

1. Zunächst wird das auf dem Mikrometer angezeigte Kästchen mit Hilfe des Objektmikrometers auf dem Objektisch auf einen Millimeter geeicht und die Vergrößerung notiert.
2. Die Spaltbreite kann gemessen werden, indem das auf dem Mikrometer angezeigte Kästchen durch Vergrößerung genau auf die Spaltbreite angepasst wird.
3. Für insgesamt drei verschiedene Einzelspalte und einen Doppelspalt wird die Vergrößerung gemessen und notiert. Mit einem Dreisatz kann daraus die Spaltbreite bestimmt werden.

2.2.2. Dunkelstrommessung

Da die Photodiode einen Offset hat, muss eine Dunkelstrommessung bei ausgeschaltetem Laser durch geführt werden. Der Wert wird dann von allen Stromstärke-Messwerten abgezogen.

2.2.3. Spaltemessungen

1. Zunächst wird die Detektorstellung ξ_0 , an der der ungebeugte Strahl auftrifft, bestimmt.
2. Für drei verschiedene Einzelspalte werden jeweils 51 Messwerte für Stromstärke und Position bei eingeschaltetem Laser aufgenommen.
3. Für einen Doppelspalt werden insgesamt 81 Messwerte für Stromstärke und Position aufgenommen.

4. Mit

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\xi - \xi_0}{L} \quad (15)$$

können aus den Positionen die Winkel bestimmt werden.

3. Auswertung

3.1. Ausmessung der Einfachspalte

Die Breite der drei Einfachspalte wird auf zwei verschiedene Arten bestimmt. Die Herstellerangaben betragen:

$$b_{\text{Spalt 1}} = 0.075 \text{ mm} \quad b_{\text{Spalt 2}} = 0.15 \text{ mm} \quad b_{\text{Spalt 3}} = 0.4 \text{ mm.}$$

3.1.1. Bestimmung der Breite mit Mikroskop

Zunächst werden die Einfach-Spalte per Mikroskop ausgemessen. Das in der Mikroskop-anzeige eingebettete Kästchen wird bei 3.2-facher Vergrößerung mit Hilfe einer geeichten Skala auf $3.2 \cdot \text{Square} = 0.5 \text{ mm}$ bestimmt. Demnach beträgt die Größe des Kästchens:

$$\text{Square} = 0.156 \text{ mm.}$$

Per Dreisatz kann nun die Breite der Spalte durch vier-fache Vergrößerung bestimmt werden. Messwerte und Ergebnisse sowie der Vergleich mit den Herstellerangaben Δb finden sich in Tabelle 1.

Spalt Nr.	$b_{\text{mess}} / 4 \cdot \text{Square}$	$b_{\text{mess}} / \text{mm}$	$\Delta b / \%$
1	1 / 7	0.089	19
2	1 / 3	0.208	39
3	1	0.625	56

Tabelle 1: Messwerte und Ergebnisse bei Bestimmung der Breite der Einfachspalte per Mikroskopmessung.

3.1.2. Bestimmung der Breite per Intensitätsmessung

Nun werden die Spalte mit einem Laser bestrahlt und das Beugungsmuster aufgenommen. Die Wellenlänge des Lasers und der Abstand von Spalt zur Beobachtungsebene betragen:

$$\lambda = 633 \text{ nm} \quad L = 1 \text{ m.}$$

Die Messwerte der Intensitätsmessung sind in den Tabellen 2 und 3 zu sehen. In den Graphen 6, 7 und 8 sind die Messwerte und die nach Gleichung (7) durchgeführte Ausgleichsrechnung aufgetragen.

Die bestimmten Breiten und die Abweichung von der Herstellerangabe, die die Ausgleichsrechnung ergibt, sind in Tabelle 4 abzulesen.

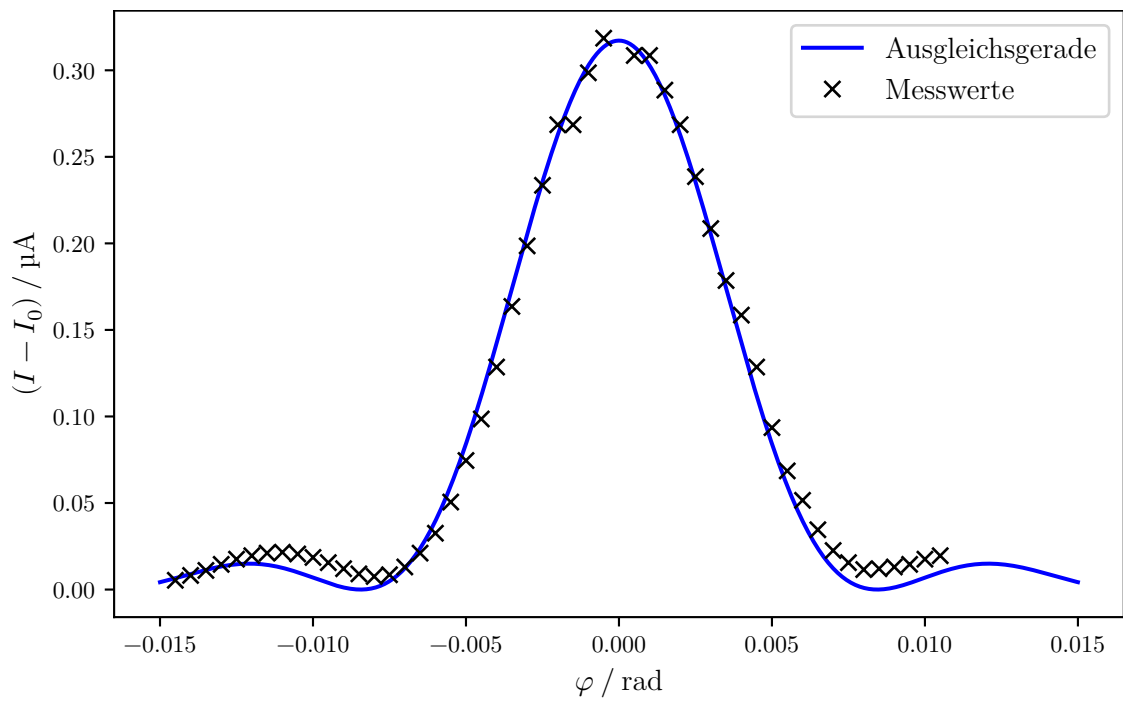


Abbildung 6: Messwerte und Ausgleichsrechnung zu Spalt 1.

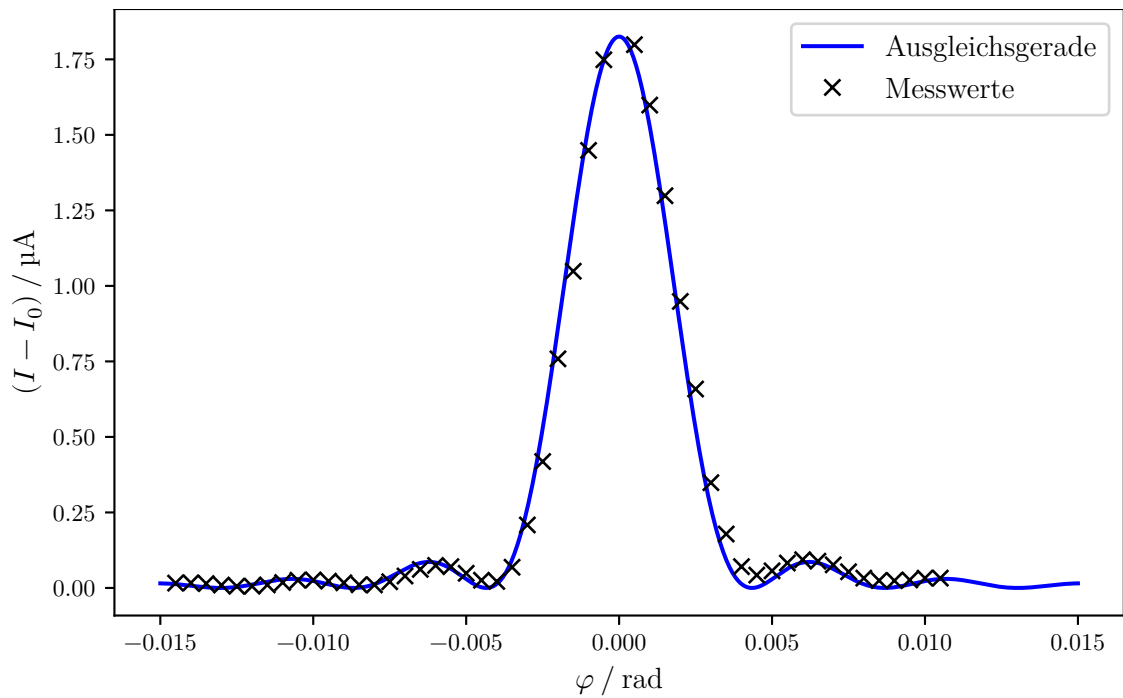


Abbildung 7: Messwerte und Ausgleichsrechnung zu Spalt 2.

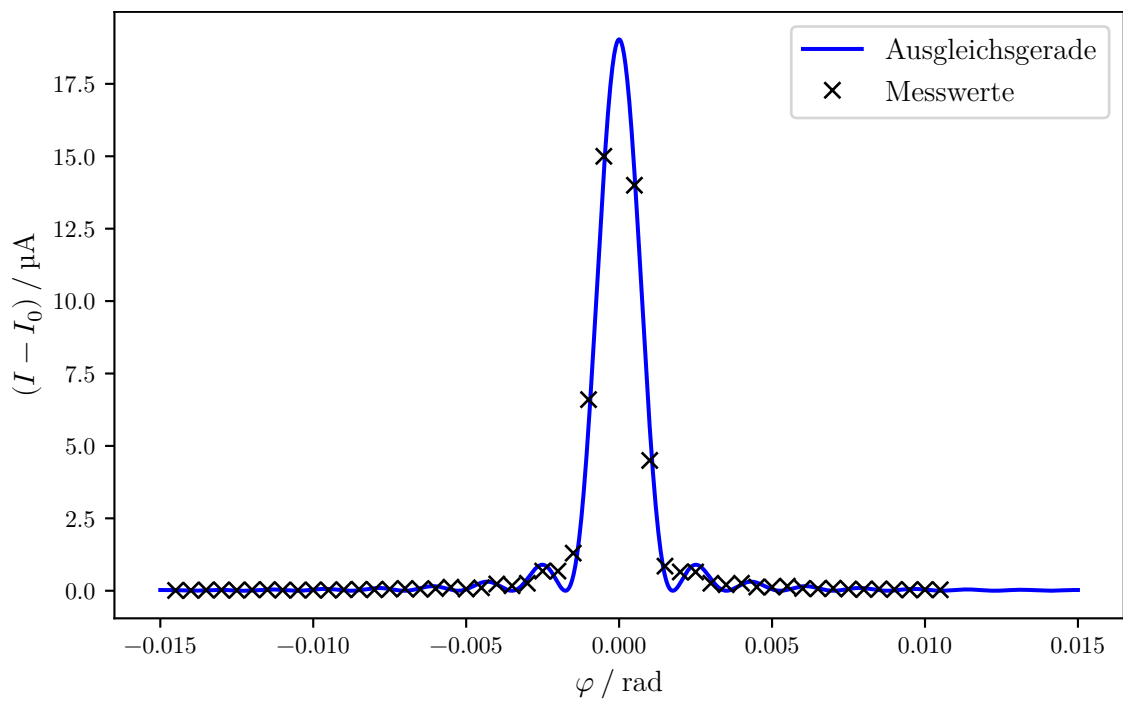


Abbildung 8: Messwerte und Ausgleichsrechnung zu Spalt 3.

$x - x_0 / \text{mm}$	$I_{\text{Spalt 1}} / \mu\text{A}$	$I_{\text{Spalt 2}} / \mu\text{A}$	$I_{\text{Spalt 3}} / \mu\text{A}$
-14.5	$6.8 \cdot 10^{-3}$	0.0175	0.012
-14	$9.6 \cdot 10^{-3}$	0.0185	0.015
-13.5	0.0125	0.016	0.028
-13	0.016	0.011	0.028
-12.5	0.019	0.007	0.018
-12	0.021	0.0072	0.033
-11.5	0.0225	0.0115	0.041
-11	0.023	0.0195	0.023
-10.5	0.022	0.027	0.022
-10	0.02	0.028	0.028
-9.5	0.017	0.024	0.022
-9	0.0135	0.0185	0.038
-8.5	0.0105	0.012	0.051
-8	0.009	0.0115	0.036
-7.5	0.01	0.022	0.056
-7	0.0145	0.041	0.081
-6.5	0.0225	0.063	0.052
-6	0.034	0.076	0.075
-5.5	0.052	0.072	0.125
-5	0.076	0.05	0.06
-4.5	0.1	0.027	0.105
-4	0.13	0.023	0.235
-3.5	0.165	0.07	0.175
-3	0.2	0.21	0.26
-2.5	0.235	0.42	0.68
-2	0.27	0.76	0.68
-1.5	0.27	1.05	1.3
-1	0.3	1.45	6.6
-0.5	0.32	1.75	15

Tabelle 2: Intensitätsamplitude der drei Einzelspalte(links von x_0).

$x - x_0 / \text{mm}$	$I_{\text{Spalt 1}} / \mu\text{A}$	$I_{\text{Spalt 2}} / \mu\text{A}$	$I_{\text{Spalt 3}} / \mu\text{A}$
0	0.33	1.8	20
0.5	0.31	1.8	14
1	0.31	1.6	4.5
1.5	0.29	1.3	0.85
2	0.27	0.95	0.65
2.5	0.24	0.66	0.65
3	0.21	0.35	0.26
3.5	0.18	0.18	0.21
4	0.16	0.072	0.26
4.5	0.13	0.044	0.13
5	0.095	0.058	0.13
5.5	0.07	0.084	0.16
6	0.053	0.095	0.08
6.5	0.036	0.09	0.07
7	0.024	0.078	0.09
7.5	0.017	0.055	0.06
8	0.013	0.034	0.045
8.5	0.0135	0.026	0.065
9	0.0145	0.0255	0.045
9.5	0.016	0.028	0.03
10	0.019	0.034	0.04
10.5	0.021	0.034	0.035

Tabelle 3: Intensitätsamplitude der drei Einzelspalte(rechts von x_0).

Spalt Nr.	$b_{\text{mess}} / \text{mm}$	$A_{0,\text{mess}} / \text{A m}^{-1}$	$\Delta b / \%$
1	0.0750 ± 0.0008	7.51 ± 7	0.05
2	0.146 ± 0.002	9.3 ± 0.1	2.9
3	0.361 ± 0.005	12.1 ± 0.1	9.8

Tabelle 4: Die, sich aus der Ausgleichsrechnung ergebenden, Fitparameter.

3.2. Ausmessung der Doppelspalte

Die Herstellerangaben des Doppelspalts betragen:

$$b = 0.1 \text{ mm} \qquad a = 0.4 \text{ mm.}$$

Wobei b die Spaltbreite ist und a den Abstand beider Spalte angibt. Somit beträgt:

$$s = b + a = 0.5 \text{ mm.}$$

3.2.1. Bestimmung der Parameter mit Mikroskop

Die Mikroskopmessung verläuft genauso wie in Kapitel 3.1.1. Die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} b_{\text{mess}} &= 4 \cdot 0.23 \text{ Square} & a_{\text{mess}} &= 4 \cdot 12/13 \text{ Square} \\ b_{\text{mess}} &= 0.144 \text{ mm} & a_{\text{mess}} &= 0.577 \text{ mm} \\ \Delta b &= 43.8 \% & \Delta a &= 44.2 \%. \end{aligned}$$

Demnach ist s :

$$s = 0.721 \text{ mm} \qquad \Delta s = 44.1 \%.$$

3.2.2. Bestimmung der Parameter per Intensitätsmessung

In Tabelle 5 sind die Messwerte der Intensitätsmessung am Doppelspalt eingetragen. Mit Formel (8) wird dann eine Ausgleichsrechnung durchgeführt. Allerdings wurde anstelle des Faktors "4" ein weiterer Fitparameter " A_0 " eingeführt, um die Ausgangsamplitude zu berücksichtigen. Die Messwerte und die Ausgleichsrechnung sind in Abbildung 9 abgebildet.

Die Ergebnisse aus der Ausgleichsrechnung sind:

$$\begin{aligned} A_0 &= 3.681 \mu\text{A} \\ s &= (0.483 \pm 0.006) \text{ mm} & \Delta s &= 3.5 \% \\ b &= (0.101 \pm 0.006) \text{ mm} & \Delta b &= 1.1 \%. \end{aligned}$$

3.2.3. Vergleich der Verteilungsbilder

In Abbildung 10 wurden alle vier in diesem Versuch bestimmten Intensitätsprofile zum Vergleich übereinander gelegt.

Einfachspalt Nr. 3 ist nicht ganz abgebildet, da die anderen Profile dann schwerer erkennbar wären.

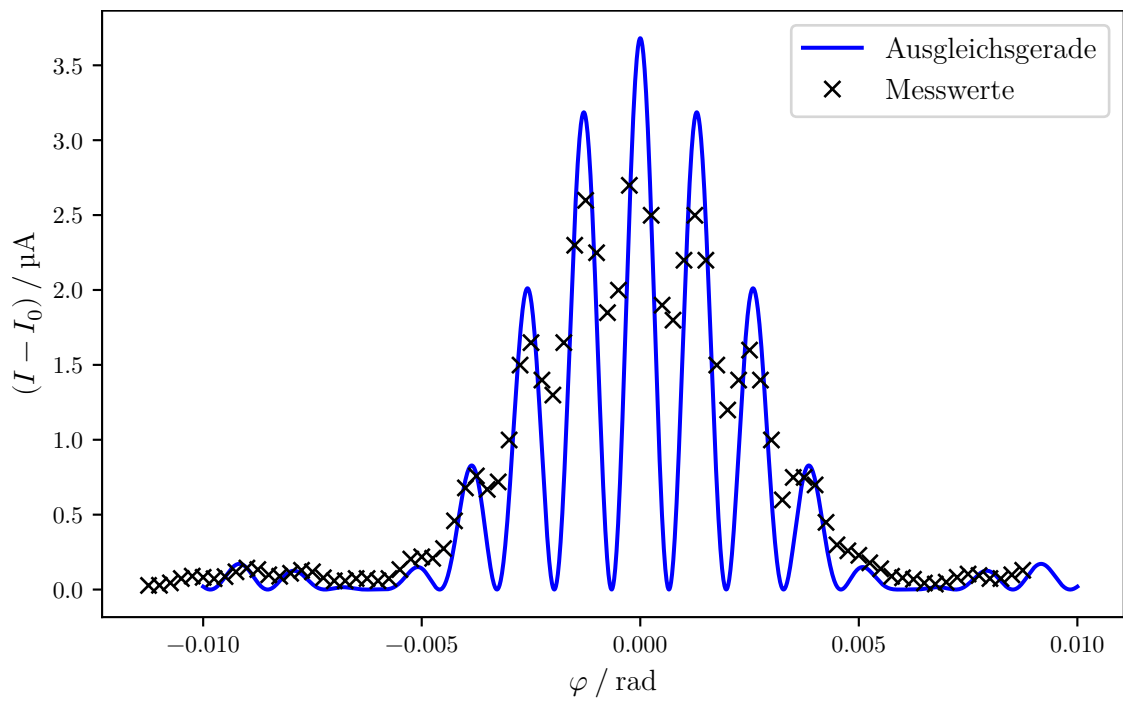


Abbildung 9: Messwerte und Ausgleichsrechnung zum Doppelspalt.

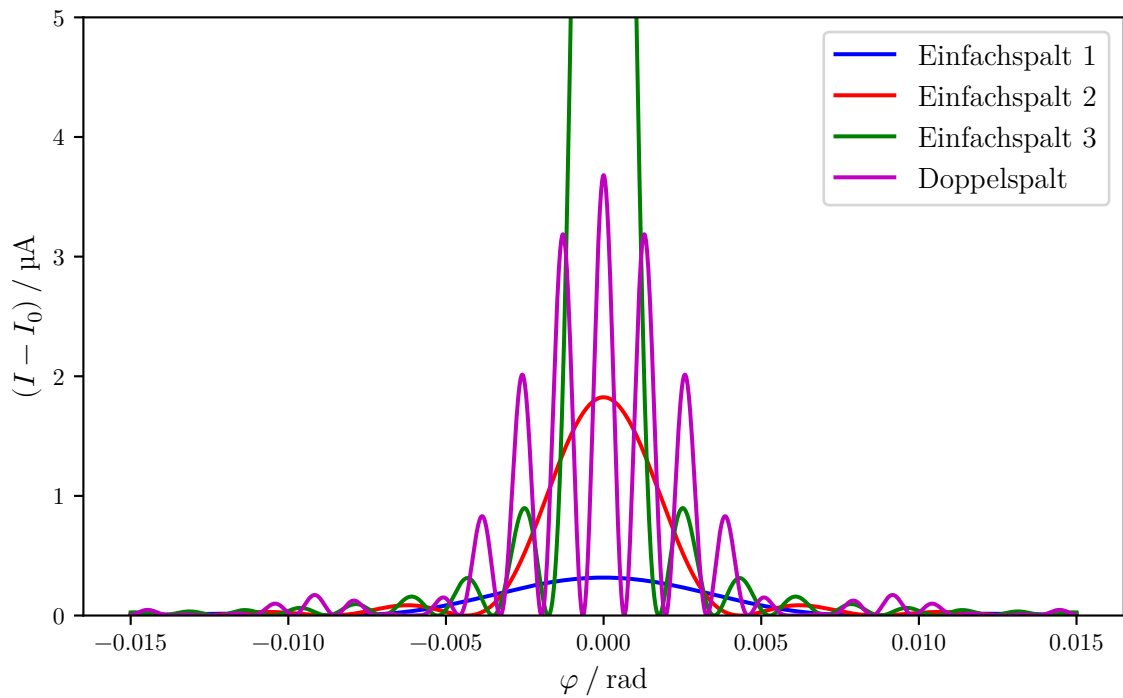


Abbildung 10: Vergleich der vier Intensitätsprofile.

$x - x_0 / \text{mm}$	$I_{\text{Doppelspalt}} / \mu\text{A}$	$x - x_0 / \text{mm}$	$I_{\text{Doppelspalt}} / \mu\text{A}$
-11.25	0.029	-1	2.25
-11	0.03	-0.75	1.85
-10.75	0.046	-0.5	2
-10.5	0.075	-0.25	2.7
-10.25	0.091	0	2.8
-10	0.083	0.25	2.5
-9.75	0.074	0.5	1.9
-9.5	0.088	0.75	1.8
-9.25	0.12	1	2.2
-9	0.145	1.25	2.5
-8.75	0.135	1.5	2.2
-8.5	0.1	1.75	1.5
-8.25	0.09	2	1.2
-8	0.11	2.25	1.4
-7.75	0.13	2.5	1.6
-7.5	0.12	2.75	1.4
-7.25	0.08	3	1
-7	0.06	3.25	0.6
-6.75	0.06	3.5	0.75
-6.5	0.075	3.75	0.75
-6.25	0.075	4	0.7
-6	0.06	4.25	0.45
-5.75	0.075	4.5	0.3
-5.5	0.135	4.75	0.26
-5.25	0.205	5	0.23
-5	0.22	5.25	0.18
-4.75	0.21	5.5	0.14
-4.5	0.275	5.75	0.09
-4.25	0.46	6	0.08
-4	0.68	6.25	0.07
-3.75	0.76	6.5	0.045
-3.5	0.67	6.75	0.038
-3.25	0.72	7	0.051
-3	1	7.25	0.083
-2.75	1.5	7.5	0.105
-2.5	1.65	7.75	0.095
-2.25	1.4	8	0.075
-2	1.3	8.25	0.075
-1.75	1.65	8.5	0.1
-1.5	2.3	8.75	0.13
-1.25	2.6		

Tabelle 5: Messwerte bei der Intensitätsmessung am Doppelspalt.

4. Diskussion

4.1. Einfachspalte

Der relative Fehler bei der Bestimmung der Spaltbreite mit Hilfe des Mikroskops ist bei allen drei Spalten verhältnismäßig groß und wird bei den größeren Spalten größer. Dies liegt daran, dass die Eichung des Kästchens nicht genau erfolgen kann. Die Vergrößerung des Mikroskops erfolgt in groben Schritten und stoppt bei vier.

Die Ausgleichsrechnungen der Intensitätsmessungen ergeben Kurven, die die Lage der Messpunkte gut beschreiben. Auch die, sich aus dem Fit ergebenden, Parameter haben einen sehr kleinen Fehler. Zu beobachten ist, dass der Fehler bei größerem Spalt größer wird. Das kann so erklärt werden, dass kleinere Spalte das Licht mehr beugen und deshalb mehr Werte die von der Theorie beschriebene Beugungsstruktur aufweisen. Wie beispielsweise in Abbildung 8 zu sehen liegen viele Werte nahe null.

4.2. Doppelspalt

Die Messung mit dem Mikroskop ist wieder sehr ungenau. Die Bestimmung per Intensitätsmessung liefert wieder sehr genaue Werte.

Der Vergleich der Intensitätsprofile zeigt, dass die Einhüllende der Doppelspaltfunktion dem Profil eines Einzelspalts gleicht. Außerdem kann aus Abbildung 10 erkannt werden, dass Spalte mit größerer Breite ein schmaleres und höheres Profil aufweisen, da das Licht weniger gebeugt wird und mehr Licht durchgelassen wird.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Beugung am Spalt*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V406.pdf>.

A. Kopie der Originaldaten