

V204

Wärmeleitung von Metallen

Jannis Speer

jannis.speer@tu-dortmund.de

Kevin Talits

kevin.talits@tu-dortmund.de

Durchführung: 16.01.18

Abgabe: 23.01.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	4
2.1	Statische Methode	4
2.2	Dynamische Methode	4
3	Auswertung	5
3.1	verwendete Software und Fehlerrechnung	5
3.2	Abmessungen und Stoffeigenschaften	5
3.3	Statische Methode	6
3.4	Dynamische Methode	8
4	Diskussion	11
	Literatur	12

1 Theorie

In einem Körper, welcher sich nicht im Temperaturgleichgewicht befindet, kommt es zu einem Wärmetransport entlang des Temperaturgefälles. Es wird sich hierbei auf die Wärmeleitung beschränkt. In festen Körpern geschieht der Wärmetransport durch Phononen und über frei bewegliche Elektronen. Der Gitterbeitrag ist in Metallen vernachlässigbar. Zu Grunde liegt ein Stab der Länge L , mit dem Querschnitt A , aus einem Material der Dichte ρ und mit spezifischer Wärme c . Durch die Querschnittsfläche A fließt in der Zeit dt die Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\delta T}{\delta x} dt \quad (1)$$

wenn das eine Ende wärmer ist als das andere. κ ist die Wärmeleitfähigkeit. Der Wärmestrom fließt nach immer in Richtung abnehmender Temperatur, dies wird durch das Minuszeichen in der Gleichung gezeigt. Für die Wärmestromdichte j_w gilt entsprechend

$$j_w = -\kappa \frac{\delta T}{\delta x} \quad (2)$$

Durch die Kontinuitätsgleichung wird hieraus die (eindimensionale) Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \quad (3)$$

abgeleitet, welche die räumliche und zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung beschreibt. Die Größe $\sigma T = \frac{\kappa}{\rho c}$ wird als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet. Durch sie wird die Schnelligkeit des Ausgleiches der Temperaturunterschiede angegeben.

Durch abwechselndes erwärmen und abkühlen eines sehr langen Stabes mit der Periode T , pflanzt sich eine räumliche und zeitliche Temperaturwelle der Form

$$T(x, t) = T_{\max} e^{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \quad (4)$$

durch den Stab fort. Die Phasengeschwindigkeit der Welle lautet:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \quad (5)$$

Aus dem Amplitudeverhältnis A_{nah} und A_{fern} der Welle an zwei Stellen x_{nah} und x_{fern} . Wird nun genutzt, dass $\omega = \frac{2\pi}{T^*}$ und $\Phi = \frac{2\pi \Delta t}{T^*}$ (mit der Phase Φ und Periodendauer T^*), dann ergibt sich für die Wärmeleitfähigkeit:

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln(A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}})} \quad (6)$$

Δx ist der Abstand der beiden Messstellen und Δt die Phasendifferenz der Temperaturwellen zwischen den beiden Messstellen.

2 Durchführung

2.1 Statische Methode

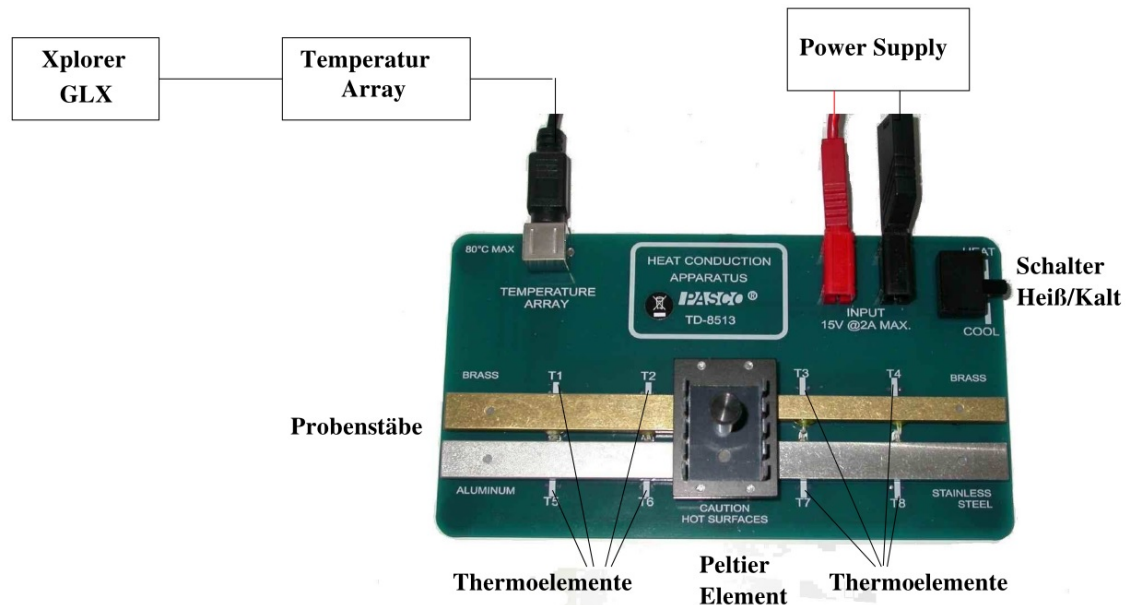


Abbildung 1: Aufbau. [1]

Es wird alles wie im Aufbau zu sehen verbunden. Die Abtastrate wird auf 5 s gesetzt. Am Netzgerät wird die Spannung auf 5 V geregelt, bei maximaler Stromstärke. Auf die Metalle wird die Isolierung gelegt und der Schalter auf "HEAT" gestellt. Nach 30 Minuten wird der Schalter wieder in die neutrale Stellung gebracht und die Aufgezeichneten Werte werden exportiert. Dann wird die Isolierung abgenommen und zur Kühlung der Metalle der Schalter auf "COOL" gestellt, bis die Stäbe wieder eine Temperatur von unter 3 °C besitzen.

2.2 Dynamische Methode

Es wird die Abtastrate auf 2 s gesetzt. Die Spannung am Netzgerät wird auf 8 V, bei maximaler Stromstärke eingestellt. Die Isolierungen werden angebracht und die Messung wird gestartet. Dazu werden die Stäbe periodisch mit einer Periode von 80 s geheizt. Erst werden sie 40 s lang geheizt, dann 40 s lang gekühlt. Diesen Vorgang wiederholt man für 10 Perioden. Danach werden die Daten exportiert und die Stäbe wieder auf unter 3 °C gekühlt. Dieser Vorgang wird nun mit einer Periode von 200 s wiederholt, erneut für 10 Perioden. Anschließend werden die Werte wieder exportiert.

3 Auswertung

3.1 verwendete Software und Fehlerrechnung

Für die Auswertung werden neben NumPy[5] mehrere Python Pakete benutzt. Plots werden mit Matplotlib[2] erstellt und Ausgleichsgeraden mit SciPy[3]. Fehlerbehaftete Größen werden mit Uncertainties[4] berechnet, das die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

Alle Mittelwerte werden mit folgender Formel berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Der zugehörige Fehler berechnet sich mit:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

3.2 Abmessungen und Stoffeigenschaften

Um die Messergebnisse auswerten und vergleichen zu können, sind die Abmessungen und Stoffeigenschaften der Metalle notwendig. Deshalb sind Tabelle 1 zusammengefasst, wie Dichte ρ , spezifische Wärmekapazität c und Wärmeleitfähigkeit κ . In Tabelle 2 die Länge L , Querschnitt A und zusätzlich der gemessene Abstand zwischen den Thermoelementen Δx .

Tabelle 1: Stoffeigenschaften aus [1] und [6].

Material	$\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$	$c \left(\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right)$	$\kappa_{\text{Literatur}} \left(\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right)$
Messing	8520	385	120
Aluminium	2800	830	237
Edelstahl	8000	400	15

Tabelle 2: Abmessungen aus [1].

Material	Länge L (m)	Querschnitt A (m ²)	Abstand Δx (m)
Messing (breit)	0,09	$4,8 \cdot 10^{-5}$	0,03
Messing (schmal)	0,09	$2,8 \cdot 10^{-5}$	0,03
Aluminium	0,09	$4,8 \cdot 10^{-5}$	0,03
Edelstahl	0,09	$4,8 \cdot 10^{-5}$	0,03

3.3 Statische Methode

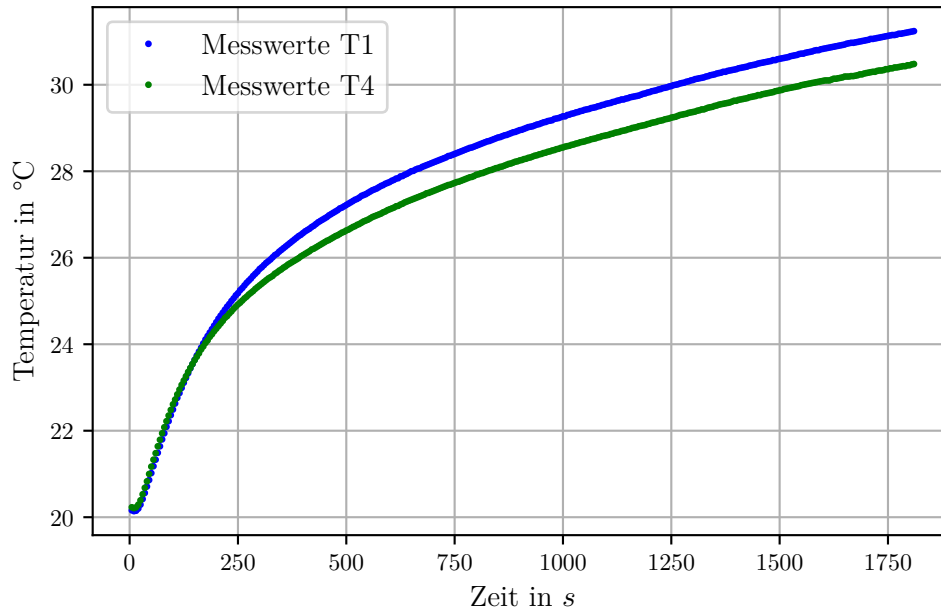


Abbildung 2: Temperatur Messing breit T_1 und Messing schmal T_4 .

In Plot 2 sind die Temperaturverläufe der Thermoelemente T_1 und T_4 dargestellt und in Plot 3 von T_5 und T_8 . Der zunächst steile Anstieg der Temperaturkurven, ausgenommen Edelstahl, nimmt nach relativ kurzer Zeit im Vergleich zur Messdauer von über 1800 Sekunden ab. Nach ungefähr 500 Sekunden entspricht die Temperaturänderung nahezu einer flachen linearen Steigung. Die Temperatur des Aluminiums steigt am stärksten und nimmt auch den höchsten Wert an, gefolgt vom breiten Messingstab. Der Temperaturanstieg des schmalen Messingstabes ist zu Beginn der Messung fast identisch zum breiten Stab, jedoch fällt die Steigung beim schmalen Stab früher ab. Edelstahl zeigt die geringste Temperaturänderungen und erreicht auch die niedrigsten Temperaturen. Um eine bessere Aussage über die Wärmeleitfähigkeit der Metalle machen zu können, werden die Temperaturen nach 700 Sekunden in Tabelle 3 verglichen. Aus diesen Werten kann

Tabelle 3: Temperaturen nach 700 Sekunden.

t (s)	T_1 (°C)	T_4 (°C)	T_5 (°C)	T_8 (°C)
700	28,2	27,54	29,26	25,32

gefolgert werden, dass je größer der Querschnitt des Metalls ist die Wärmeleitfähigkeit zunimmt und dass Aluminium am besten die Wärme leitet gefolgt von Messing und dann Edelstahl.

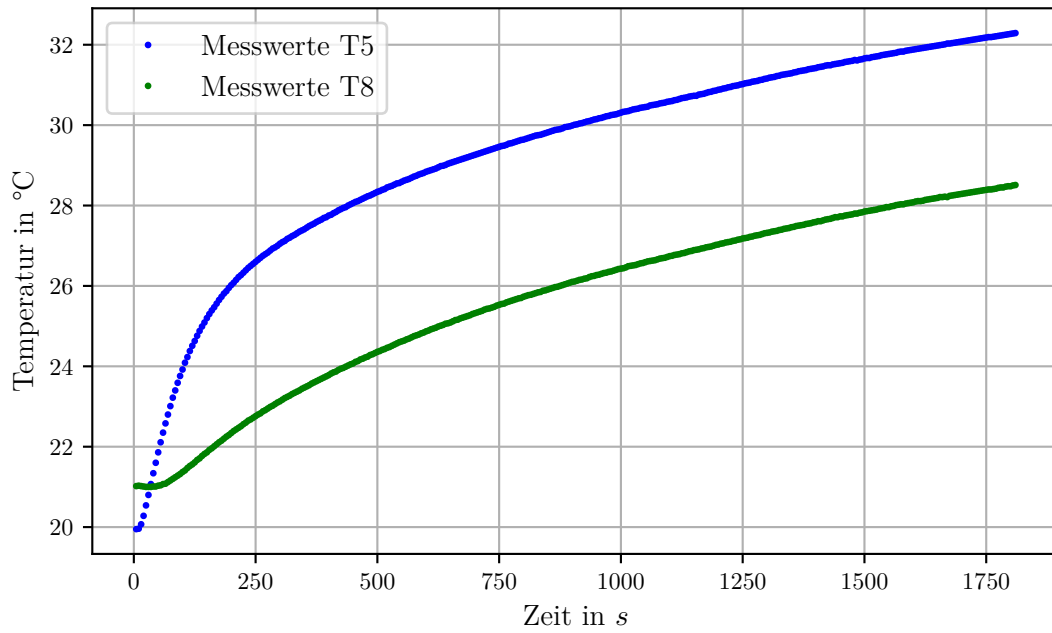


Abbildung 3: Temperatur Aluminium T_5 und Edelstahl T_8 .

Zur Bestimmung der Wärmeströme von Edelstahl und Messing (breit) wird Gleichung (1) verwendet. Der Differentialquotient von $\delta T / \delta x$ wird dabei durch einen Differenzenquotienten ersetzt. Die Querschnittsfläche A die Wärmeleitfähigkeit κ und der Abstand der Thermoelement Δx wird den Tabellen aus Kapitel 3.2 entnommen. Für fünf verschiedene Zeiten werden die Temperaturdifferenz des nahen (T_2 bzw. T_7) und fernen (T_1 bzw. T_8) Thermoelements genommen. Die Temperaturdifferenzen über den gesamten Messzeitraum sind in Plot 4 dargestellt und werden später noch genauer beschrieben. In folgender Tabelle 4 sind die berechneten Wärmeströme angegeben.

Tabelle 4: Wärmeströme zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

t (s)	$(T_2 - T_1)$ (K)	dQ/dt (W)	$(T_7 - T_8)$ (K)	dQ/dt (W)
200	1,03	-0,20	3,07	$-7,37 \cdot 10^{-2}$
400	0,71	-0,14	3,03	$-7,27 \cdot 10^{-2}$
600	0,65	-0,12	3,00	$-7,20 \cdot 10^{-2}$
800	0,64	-0,12	2,97	$-7,13 \cdot 10^{-2}$
1000	0,64	-0,12	2,97	$-7,13 \cdot 10^{-2}$

Zunächst ist ein starker Anstieg für die Temperaturdifferenz sowohl von Edelstahl ($T_7 - T_8$), als auch von Messing ($T_2 - T_1$), zu beobachten. Nach etwa 300 Sekunden ist jedoch die Temperaturdifferenz für beide Metalle nahezu konstant. Die steile Temperaturän-

derung kann mit den Temperaturverläufen der einzelnen Thermoelemente aus 2 und 3 erklärt werden. Am Anfang der Messung steigt die Temperatur am nahen Thermoelement schnell an und da die Wärme erst verzögert das ferne Thermoelement erreicht, nimmt die Temperaturdifferenz auch schnell zu. Wie aber festgestellt wurde flacht die Temperaturzunahme deutlich ab und so stellt sich eine fast konstante Temperaturdifferenz ein. Für die Differenzkurve des Messings ist noch auffällig, dass diese einen Hochpunkt besitzt, die Temperaturdifferenz schwinkt einmal über bevor sie fast konstant wird. Das liegt an der verzögerten Abnahme des Temperaturanstiegs des fernen Thermoelement. Während die Temperatur von T_2 im Vergleich zu T_1 kaum noch steigt, nimmt T_1 noch deutlich mehr zu und die Temperaturdifferenz wird kleiner.

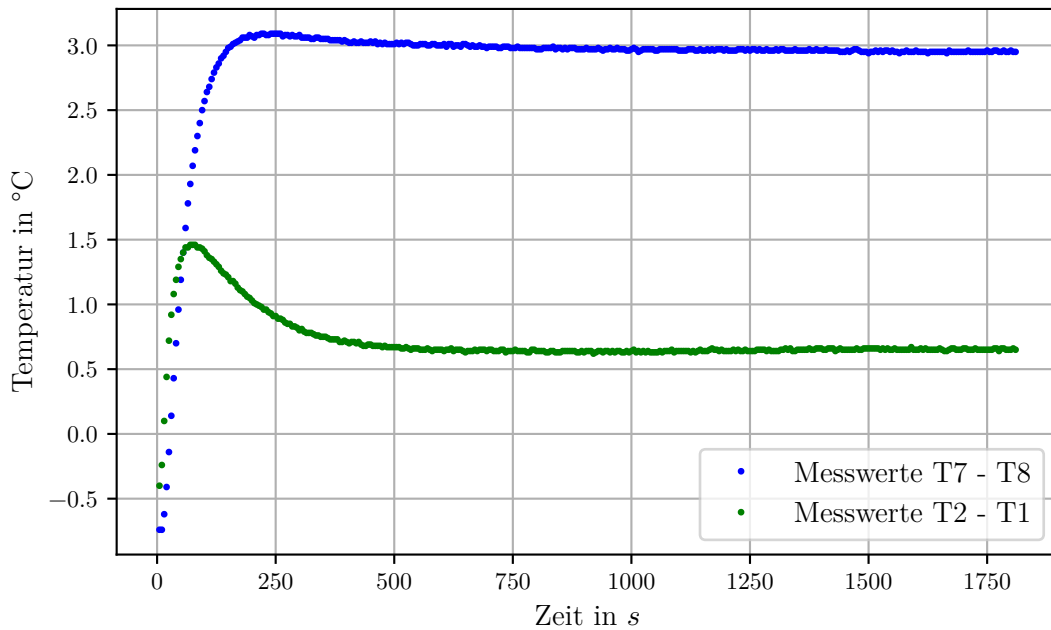


Abbildung 4: Temperaturdifferenz Messing ($T_2 - T_1$) und Edelstahl ($T_7 - T_8$).

3.4 Dynamische Methode

Bei der Angström-Methode wird die Wärmeleitfähigkeit der Metalle über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle berechnet, die durch periodisches Aufwärmen und Abkühlen erzeugt wird. Dazu müssen die Amplituden der Temperaturwelle des nahen und fernen Thermoelements bekannt sein, sowie die Phasendifferenz Δt zwischen den beiden Thermoelementen. Die Amplituden werden bestimmt, indem der Abstand zwischen einem Hoch- und einem Tiefpunkt berechnet und anschließend halbiert wird. Außerdem muss der kontinuierliche Temperaturanstieg berücksichtigt werden und aus der Amplitude heraus gerechnet werden. Dieser Anstieg kann innerhalb einer Periode als linear genähert werden. Deshalb ist es ausreichend, die Temperaturdifferenz zwischen

dem Tiefpunkt, der zuvor für die Berechnung der Peak-to-peak Distanz benutzt wurde, und dem nächsten Tiefpunkt zu bestimmen. Diese Temperaturdifferenz wird nun halbiert und von der Amplitude subtrahiert. Die Phasendifferenz Δt wird über die zeitliche Differenz zwischen zwei Tiefpunkten bestimmt. Nach Gleichung (6) kann nun mit Hilfe der Tabellen aus Kapitel 3.2 die Wärmeleitfähigkeit κ berechnet werden. In Abbildung 5 sind die Temperaturwellen von Messing zu sehen und in Tabelle 5 die dazugehörigen Parameter. Die Wärmeleitfähigkeit κ beträgt $(94 \pm 20) \text{ W/(m K)}$. Für die Bestimmung

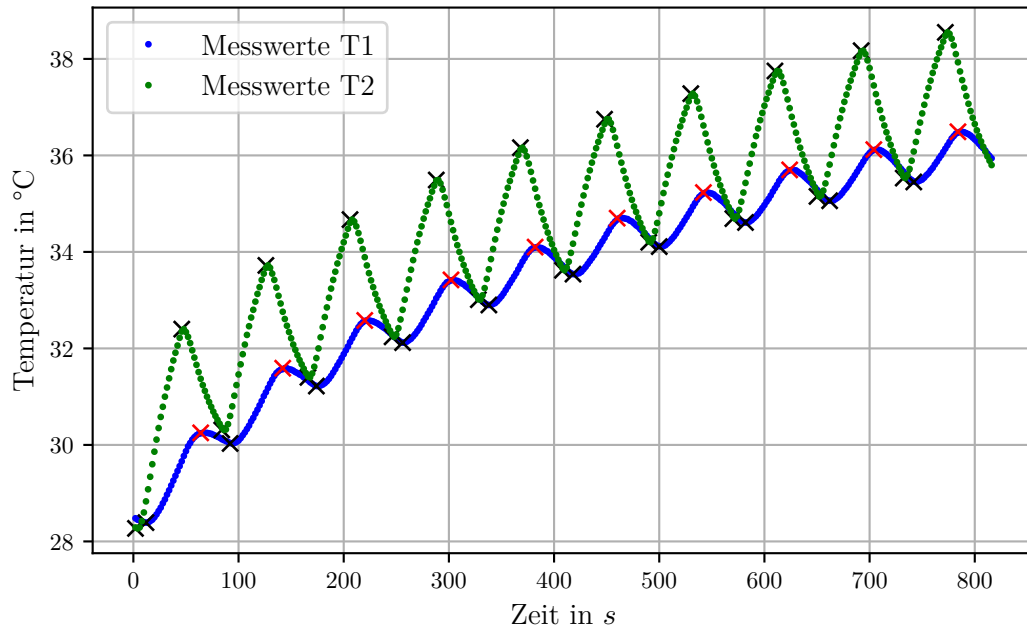


Abbildung 5: Temperaturwellen von Messing.

Tabelle 5: Amplitude und Phasendifferenz für Messing.

A_1 (K)	0,11	0,185	0,23	0,26	0,28	0,295	0,31	0,32	0,335
A_2 (K)	1,045	1,16	1,215	1,24	1,27	1,275	1,295	1,3	1,32
$\frac{\text{Phasendifferenz}}{\Delta t(\text{s})}$	10	8	8	10	10	10	10	12	12

der Wärmeleitfähigkeit des Aluminiums werden die gleichen Schritte durchgeführt wie für Messing. Die Temperaturwellen von Aluminium sind in 6 abgebildet und Parameter in Tabelle 6. Daraus ergibt sich folgende Wärmeleitfähigkeit $\kappa = (200 \pm 60) \text{ W/(m K)}$.

Die Messung für Edelstahl unterscheidet sich nur durch eine längere Periodendauer, in der geheizt und gekühlt wird. Die Wärmeleitfähigkeit wird aber nach dem gleichen Schema wie zuvor berechnet. Für Edelstahl ergibt sich also auch eine Temperaturwelle (siehe Abb. 7) mit den Parametern aus Tabelle 7. Die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl

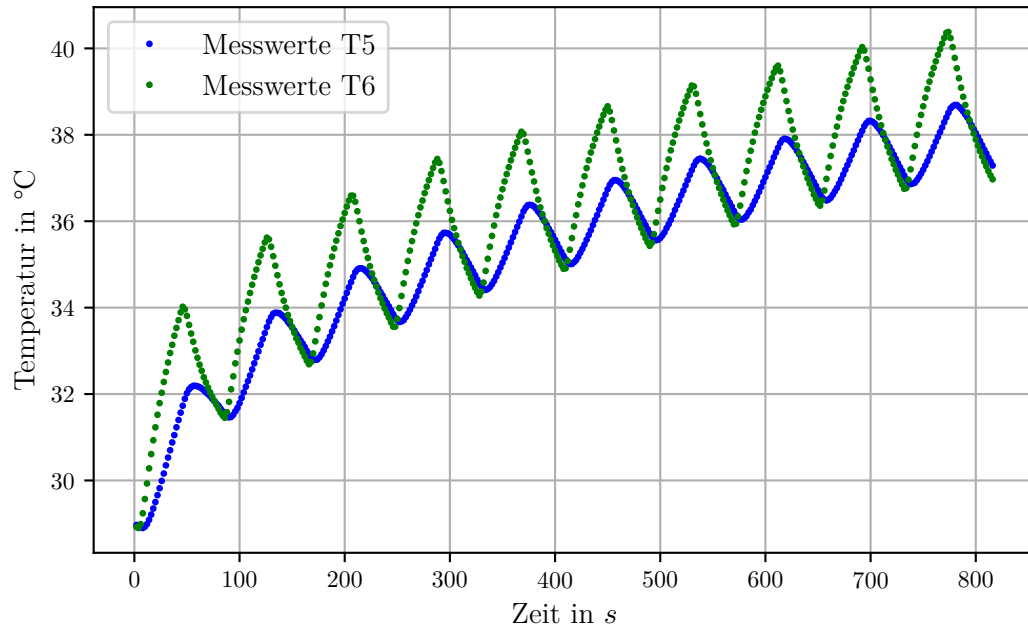


Abbildung 6: Temperaturwellen von Aluminium.

Tabelle 6: Amplitude und Phasendifferenz für Aluminium.

A_5 (K)	0,365	0,545	0,62	0,66	0,685	0,695	0,705	0,715	0,73
A_6 (K)	1,285	1,465	1,515	1,58	1,585	1,615	1,605	1,62	1,64
$\frac{\text{Phasendifferenz}}{\Delta t(s)}$	4	4	6	4	6	8	6	8	6

ist folglich $\kappa = (14.1 \pm 2.4) \text{ W/(m K)}$.

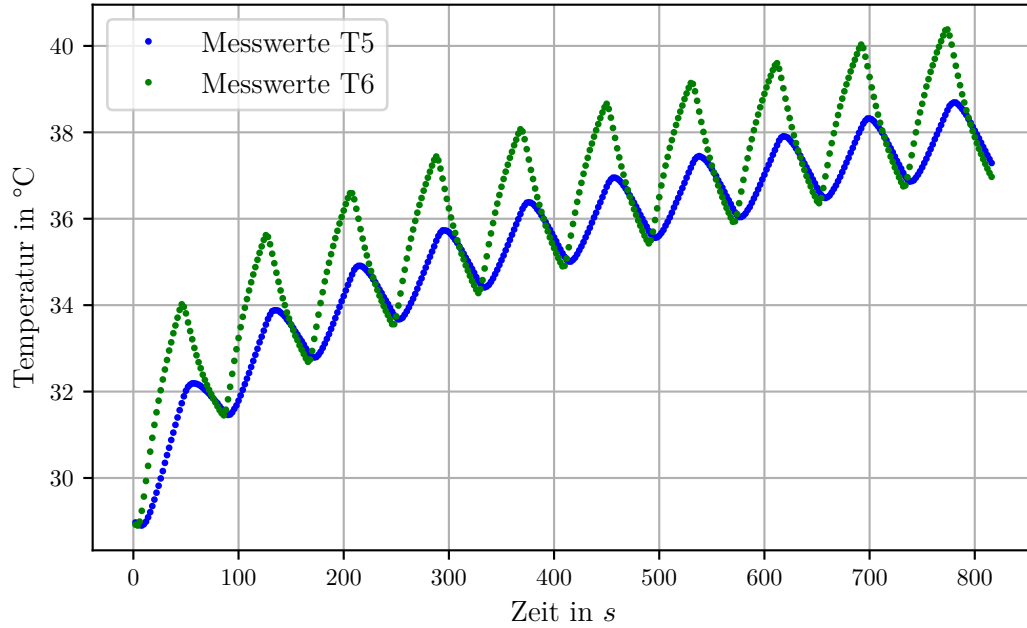


Abbildung 7: Temperaturwellen von Edelstahl.

Tabelle 7: Amplitude und Phasendifferenz für Edelstahl.

A_7 (K)	2,055	2,225	2,255	2,29	2,33	2,38	2,365	2,32	2,34
A_8 (K)	0,08	0,135	0,15	0,14	0,205	0,27	0,2	0,175	0,195
$\frac{\text{Phasendifferenz}}{\Delta t(s)}$	32	38	36	36	38	36	48	46	42

4 Diskussion

Die Abweichung der berechneten Wärmeleitfähigkeit und der theoretischen liegt innerhalb des ersten Fehlerintervalls für Edelstahl und für Aluminium und im zweiten für Messing.

$$\begin{aligned}
 \text{Messing: } \kappa_{\text{Literatur}} - \kappa &= 26 \frac{\text{W}}{\text{m K}} < 2\Delta\kappa = 40 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\
 \text{Aluminium: } \kappa_{\text{Literatur}} - \kappa &= 37 \frac{\text{W}}{\text{m K}} < \Delta\kappa = 60 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\
 \text{Edelstahl: } \kappa_{\text{Literatur}} - \kappa &= 0,9 \frac{\text{W}}{\text{m K}} < \Delta\kappa = 2,4 \frac{\text{W}}{\text{m K}}
 \end{aligned}$$

Jedoch fallen die Fehler relativ betrachtet auffällig groß auf. Messing hat einen relativen Fehler von $\pm 21,28\%$ und Aluminium von $\pm 30,00\%$. Nur der relative Fehler von Edelstahl mit $\pm 17,02\%$ ist geringfügig kleiner. Mögliche Ursachen könnten im Versuchsaufbau liegen. Die Metallproben können in der Praxis nicht optimal isoliert werden, es treten immer Wärmeverluste an die Umgebung auf. Der Generator, der das Peltierelement betreibt liefert keine perfekt konstante Spannung, es treten leichte Schwankungen auf. Außerdem sind die Thermoelemente nur begrenzt dazu in der Lage, die Temperatur exakt zu messen. Besonders auffällig ist dies bei der Temperaturmessung des Edelstahls. Da die Temperatur bei dieser Materialprobe nur langsam steigen im Vergleich zu den Messschwankungen, können keine eindeutigen Extrempunkte bestimmt werden. Systematische Fehler können auch nicht ausgeschlossen werden, wie zum Beispiel das manuelle Wechseln zwischen Aufwärmen und Abkühlen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Literaturverzeichnis*. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Waermeleitf.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] *Wärmeleitfähigkeit*. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit.html>.