

Versuch 351

Fourier-Analyse und Synthese

1. Januar 1970

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Fourier'sche Theorem	3
2.2	Fourier-Transformation	3
2.3	Fourieranalyse	3
2.4	Fouriersynthese	4
2.5	Gibbs'sches Phänomen	4
2.6	Abtasttheorem	4
3	Fehlerrechnung	4
4	Durchführung und Aufbau	5
5	Auswertung	5
5.1	Fourierkoeffizienten	5
5.1.1	Rechteckspannung	5
5.1.2	Dreieckspannung	6
5.1.3	Sägezahnspannung	7
5.2	Analyse	9
5.2.1	Rechteckspannung	9
5.2.2	Dreieckspannung	10
5.2.3	Sägezahnspannung	12
5.3	Synthese	13
6	Diskussion	16
	Literatur	16

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist die Fourier-Analyse verschiedener Spannungen, sowie die Fourier-Synthese derselben.

2 Theorie

2.1 Fourier'sche Theorem

Das Fouriersche Theorem besagt, falls die Reihe

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right) \quad (1)$$

gleichmäßig konvergiert, beschreibt sie eine periodische Funktion [1] $f(t)$. Die Koeffizienten a_n und b_n werden gemäß

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (3)$$

berechnet [1].

2.2 Fourier-Transformation

Bei der Fourier-Transformation kann man eine Funktion, ob periodisch oder nicht, in ihre Fourierkoeffizienten zerlegen. Die Fourier-Transformation berechnet man gemäß:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt \quad (4)$$

Ist die betrachtete Funktion $f(t)$ nicht periodisch, so ist $g(\nu)$ eine nicht weiter spezifizierbare Funktion. Wenn $f(t)$ periodisch ist, ist $g(\nu)$ eine Reihe von δ -Distributionen, die, wie die Fourierreihe, konvergiert. Bei diesem Versuch führt das Oszilloskop die Fourier-Transformation gemäß 4 durch und der Betrag von $g(\nu)$ berechnet sich gemäß:

$$|g| = \sqrt{\Re^2(g) + \Im^2(g)} \quad (5)$$

2.3 Fourieranalyse

Bei der Fourieranalyse zerlegt man Schwingungen in ihre Fourierkoeffizienten, welche somit die ursprüngliche Funktion approximieren. Da die Approximation im Experiment nur endlich genau ist, kommt es zu Abweichungen im Schwingungsmuster, welche als Gibbs'sches Phänomen bezeichnet werden, vgl 2.5. Für gerade Funktionen bei denen $f(t) = f(-t)$ gilt, sind die Amplituden $b_n = 0$. Für ungerade Funktionen, das heißt $f(t) =$

$-f(-t)$, werden alle $a_n = 0$. Da bei der Analyse die Resonanzspannung U_{res} proportional zu den Amplituden der Oberwellen $A_{\text{Oberwelle}}$ steht, können sämtliche Oberwellen gemäß

$$\frac{\nu_{\text{res}}}{n} \quad (6)$$

angeregt werden, wobei „ n “ die Anregung der n -ten Oberwelle beschreibt. Die Resonanzfrequenz ist gemäß

$$\nu_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7)$$

definiert. Dabei ist L die Induktivität und C die Kapazität, welche durch die Bauteileigenschaften festgelegt sind. Durch die Resonanzfrequenz können sehr kleine Fourierkomponenten bestimmt werden, da bei der Resonanzfrequenz, wie der Name schon andeutet, das System in Resonanz gebracht wird, und die größtmögliche Amplitude auftritt.

2.4 Fouriersynthese

Bei der Synthese kann eine Schwingung aus ihren errechneten Fourier-Koeffizienten zusammengesetzt werden. Dies geschieht mit einem Oberwellengenerator, welcher phasenfeste Schwingungen generiert, zum Beispiel sinusförmig. Die Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Eigenfrequenz.

2.5 Gibbs'sches Phänomen

Als Gibbs'sche Phänomen werden die Überschwingungen bezeichnet, welche durch Approximation an eine unstetige Stelle t_0 einer Funktion $f(t)$ auftreten. Da das Fourier'sche Theorem eine unendliche Reihe beschreibt, ist es unvermeidlich diese Abweichungen zu umgehen, wie in (7) deutlich zu sehen. Die Anzahl an angelegten Oberschwingungen kann die Abweichungen verringern.

2.6 Abtasttheorem

Bei der Fourieranalyse kann die zu untersuchende Funktion nur durch diskrete Messpunkte, und nicht kontinuierlich, aufgezeichnet werden. Wenn die zeitliche Differenz des Wertaufzeichnens viel größer als die Periodendauer T ist, treten Fehler in der Darstellung der Spannungspicks auf. Das Abtasttheorem besagt nun, wenn die Abtastfrequenz ν_{Abtast} größer ist als das doppelte vorkommende Frequenzmaximum der Funktion $f(t)$, wird der Fehler vernachlässigbar klein.

$$\nu_{\text{Abtast}} > 2\nu_{\text{max}} \quad (8)$$

3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert eines Datensatzes, mit N Werten, berechnet sich nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i. \quad (9)$$

4 Durchführung und Aufbau

Für die Analyse wurde ein Funktionsgenerator und ein Oszilloskop, welches die Fourieranalyse durchführen kann, verwendet. Als Erstes wird eine Fourier-Analyse für drei verschiedene Spannungen, Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksspannung, durchgeführt. Dafür wird an dem Signalgenerator die jeweilige Spannung, mit beliebiger Frequenz eingestellt und die Fourier-Analyse der Schwingung am Oszilloskop ausgelesen. Analog wird dann für die anderen beiden Spannungen verfahren.

Für die Synthese wird der Funktionsgenerator ausgetauscht und ein Oberwellengenerator an seiner Stelle eingebaut. Hier werden zuerst die Phasen der verschiedenen Oberschwingungen anhand von Lissajous-Figuren abgestimmt. Die geraden Oberwellen werden so auf die Grundfrequenz angepasst, dass die Figur symmetrisch zur x-Achse ist. Die ungeraden werden auf eine durchgezogene Linie abgestimmt. Im nächsten Schritt werden die Amplituden nach (2) und (3) eingestellt. Dann werden die Schwingungen summiert ausgegeben und auf dem Oszilloskop betrachtet. Für die geraden Oberwellen muss die Phase eventuell um π gedreht werden, dies kann nicht durch die Lissajous-Figuren bestimmt werden.

5 Auswertung

5.1 Fourierkoeffizienten

5.1.1 Rechtecksspannung

Die Funktion der Rechtecksspannung (1) ist

$$f_r(t) = \begin{cases} -A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Sie ist ungerade, das heißt $a_n = 0$. Für b_n ergibt sich mit Gleichung (3)

$$b_{n,r} = \frac{2}{T} \left(-\int_{-\frac{T}{2}}^0 A \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \right) \quad (11)$$

$$= \frac{A}{\pi n} (1 - \cos(-\pi n) - \cos(\pi n) + 1) \quad (12)$$

$$= \frac{2A}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)) \quad (13)$$

$$= \frac{2A}{\pi n} (1 - (-1)^n). \quad (14)$$

Damit folgt

$$b_{n,r} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4A}{\pi n}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (15)$$

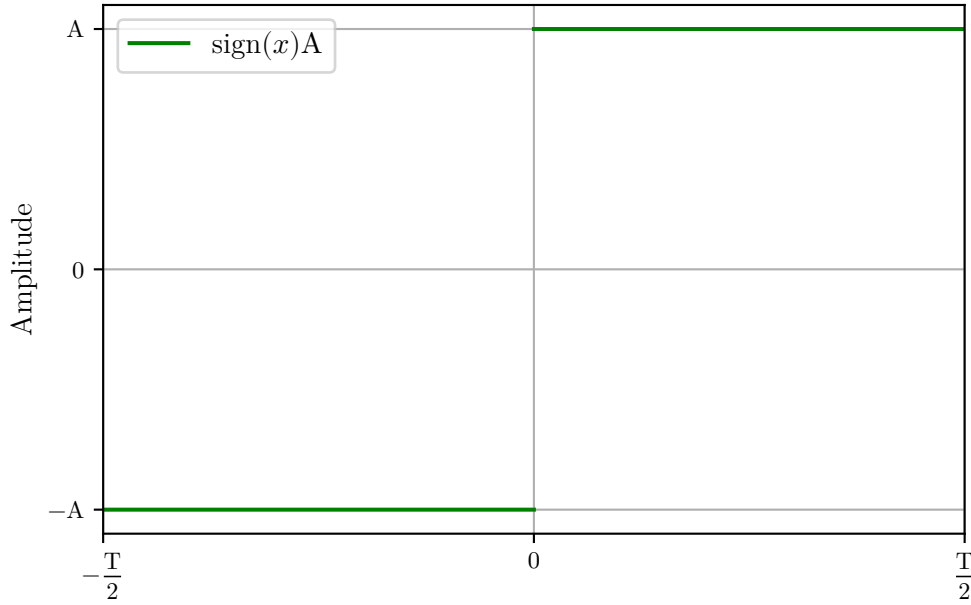


Abbildung 1: Skizze der Rechteckspannung.

5.1.2 Dreieckspannung

Die Dreieckspannung (??) wird mit einer geraden Funktion dargestellt;

$$f_d(t) = \begin{cases} -\frac{4A}{T}t - A & , -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{4A}{T}t - A & , 0 \leq t \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (16)$$

Für b_n ergibt sich damit 0. a_n wird nach (2) bestimmt, dafür wird das Integral aufgeteilt.

$$a_{n,d} = -\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(\frac{4A}{T}t + A \right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{4A}{T}t - A \right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (17)$$

Es wird jeweils mit partieller Integration gelöst.

$$= -\frac{2}{T} \left[\left(\frac{4At}{T} + A \right) \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{2A}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 \quad (18)$$

$$+ \frac{2}{T} \left[\left(\frac{4At}{T} - A \right) \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{2A}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \quad (19)$$

$$= -\frac{A}{\pi n} \sin(-\pi n) - \frac{2A}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(-\pi n)) + \frac{A}{\pi n} \sin(\pi n) + \frac{2A}{\pi^2 n^2} (\cos(-\pi n) - 1) \quad (20)$$

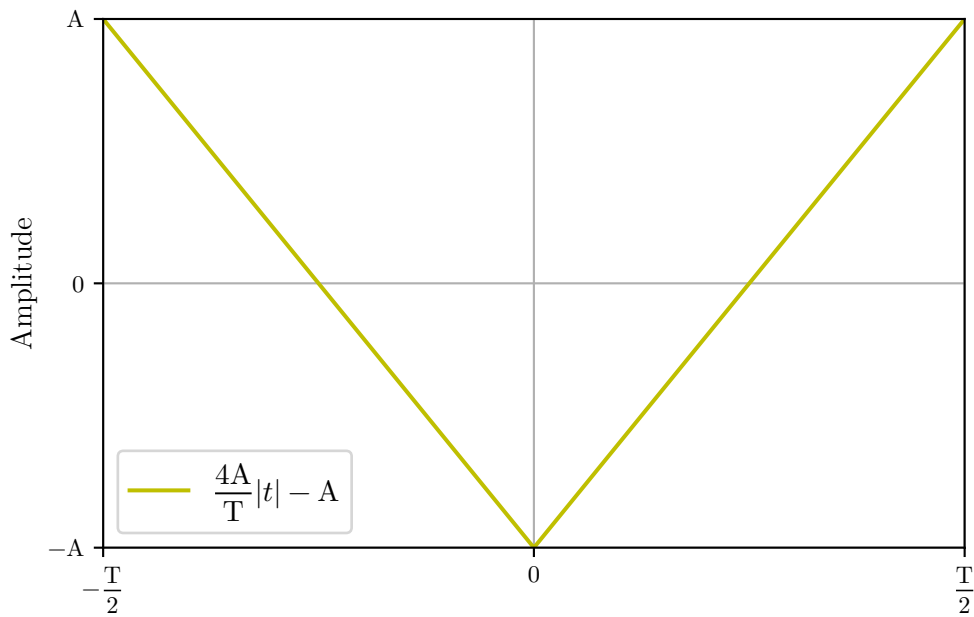


Abbildung 2: Skizze der Dreiecksspannung.

Mit $\sin(\pi n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\cos(\pi n) = \cos(-\pi n)$:

$$= \frac{4A}{\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - 1) \quad (21)$$

$$= \frac{4A}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1). \quad (22)$$

Es ergibt sich

$$a_{n,d} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{8A}{\pi^2 n^2}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (23)$$

5.1.3 Sägezahnspannung

Die Sägezahnspannung (3) wird, als ungerade Funktion, mit

$$f_s = \frac{2A}{T}t, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (24)$$

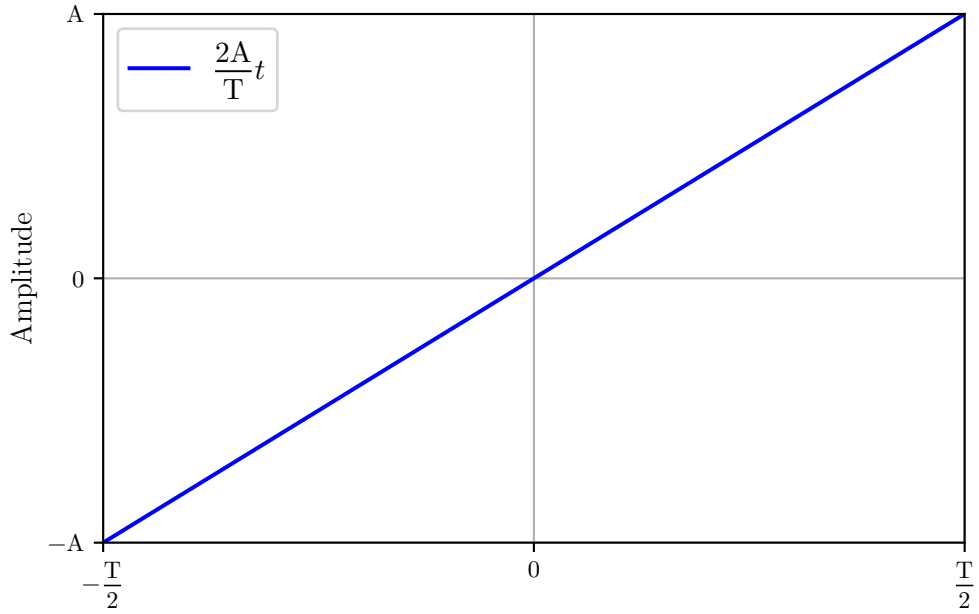


Abbildung 3: Skizze der Sägezahnspannung.

bestimmt. Wie bei der Rechteckspannung ist $a_n = 0$ und b_n wird nach (3) berechnet.

$$b_{n,s} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2A}{T} t \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \quad (25)$$

$$= -\frac{2A}{T\pi n} \left[t \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{A}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \quad (26)$$

$$= -\frac{2A}{\pi n} \cos(\pi n) \quad (27)$$

$$= -\frac{2A}{\pi n} (-1)^n \quad (28)$$

$$b_{n,s} = \frac{2A}{\pi n} (-1)^{n+1}. \quad (29)$$

5.2 Analyse

Die Frequenzen sind nur als Abstand gegeben, da so die Genauigkeit beim Ablesen verbessert werden kann. Interessant ist hier zudem auch die Konstanz der Abstände, da die Oberwellen immer ein Vielfaches der Grundschwingung sein sollen. Die angegebenen Fehler der Messwerte stammen aus der Skalierung des Oszilloskops. Die Abweichung der Messwerte von den Theoriewerten wurde mit

$$\Delta U = 100 - 100 \frac{U_M}{U_T} \quad (30)$$

bestimmt.

5.2.1 Rechteckspannung

Tabelle 1: Messdaten und Theoriewerte der Rechteckspannung

Oberwelle	Frequenzabstand			Messwerte	Theoriewerte	Abweichung
n	$\Delta f_r / 1/s$			$U_{M,r} / V$	$U_{T,r} / V$	$\Delta U_r / \%$
1	0	\pm	0,62	$12,000 \pm 0,080$	11,496	-4,381
3	24,68	\pm	0,62	$3,560 \pm 0,020$	3,832	7,101
5	23,75	\pm	0,62	$2,460 \pm 0,020$	2,299	-6,990
7	23,70	\pm	0,62	$1,600 \pm 0,020$	1,642	2,578
9	24,37	\pm	0,62	$1,290 \pm 0,010$	1,277	-0,988
11	23,75	\pm	0,62	$1,100 \pm 0,010$	1,045	-5,250
13	23,75	\pm	0,62	$0,770 \pm 0,008$	0,884	12,929
15	24,37	\pm	0,62	$0,808 \pm 0,008$	0,766	-5,424
17	23,75	\pm	0,62	$0,688 \pm 0,008$	0,676	-1,736
19	24,37	\pm	0,62	$0,592 \pm 0,008$	0,605	2,161

Die Unsicherheiten der Messwerte wurden aus der Skalierung am Oszilloskop bestimmt, wobei eine Schrittweite des Cursors genau die Unsicherheit ist. Der Mittelwert der Frequenzabstände ergibt sich nach (9) zu

$$\Delta f_r = 12,0585 \frac{1}{s}. \quad (31)$$

Für die Theoretischen Werte wird die Amplitude, mit umstellen von (15), als

$$A_{0,r} = (9,029 \pm 0,180) V \quad (32)$$

bestimmt. Auffallend bei den Werten ist, dass die Abweichungen nicht sehr unterschiedlich sind, das liegt an der großen Skalierung für die hohen Amplituden und dem „Rauschen“ für die kleinen Amplituden. Das „Rauschen“ äußerte sich in einer Schwingung der Peaks. Die Amplitude der 13ten Oberschwingung lag schon auf dem Oszilloskopbild unter der für die 15., ist also kein Tipp- oder Schreibfehler.

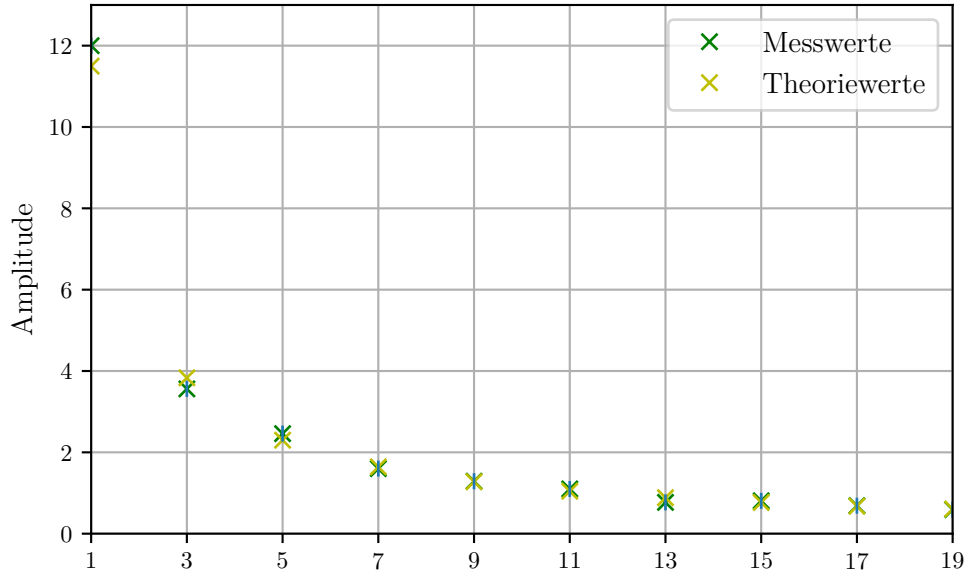


Abbildung 4: Mess- und Theoretischewerte der Analyse der Rechteckspannung

5.2.2 Dreieckspannung

Der Mittelwert der Frequenzabstände ergibt sich nach (9) zu

$$\Delta f_d = 96,235 \frac{1}{s}. \quad (33)$$

Für die Theoretischen Werte wird die Amplitude, mit umstellen von (23), als

$$A_{0,d} = (299 \pm 18) V \quad (34)$$

bestimmt. Die hohe Abweichung bei den Oberwellen größerer Ordnung liegt an der Proportionalität der Amplitude zu $1/n^2$. Dadurch sind die Amplituden der Oberschwingungen höherer Ordnung, ähnlich zur Rechteckspannung, schwer, hier teilweise garnicht mehr vom „Rauschen“ zu unterscheiden.

Tabelle 2: Messdaten und Theoriewerte der Dreiecksspannung

Oberwelle	Frequenzabstand		Messwerte	Theoriewerte	Abweichung
n	$\Delta f_d / 1/s$		$U_{M,d} / V$	$U_{T,d} / V$	$\Delta U_d / \%$
1	193,7 \pm	0,63	258,000 \pm 2,000	242,022	−6,602
3	187,5 \pm	0,63	30,000 \pm 0,200	26,891	−11,560
5	193,7 \pm	0,63	11,600 \pm 0,100	9,681	−19,824
7	193,7 \pm	0,63	5,960 \pm 0,040	4,939	−20,667
9	187,5 \pm	0,63	3,360 \pm 0,020	2,988	−12,453
11	200,0 \pm	0,63	2,200 \pm 0,020	2,000	−9,990
13	181,2 \pm	0,63	1,320 \pm 0,020	1,432	−7,826
15	193,7 \pm	0,63	0,880 \pm 0,020	1,076	18,189
17	193,7 \pm	0,63	0,664 \pm 0,008	0,837	20,711
19	200,0 \pm	0,63	0,440 \pm 0,008	0,670	34,369

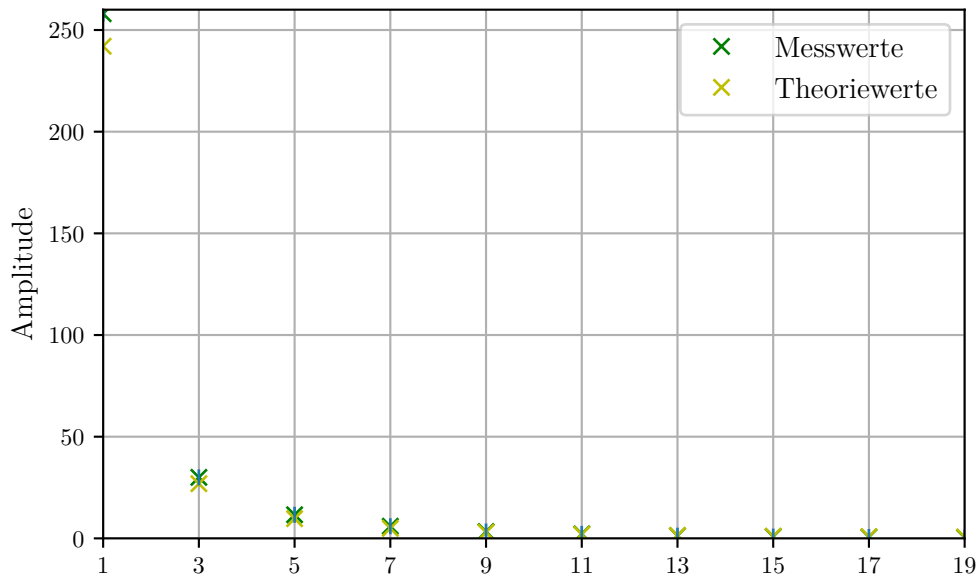


Abbildung 5: Mess- und Theoretischewerte der Analyse der Dreiecksspannung

5.2.3 Sägezahnspannung

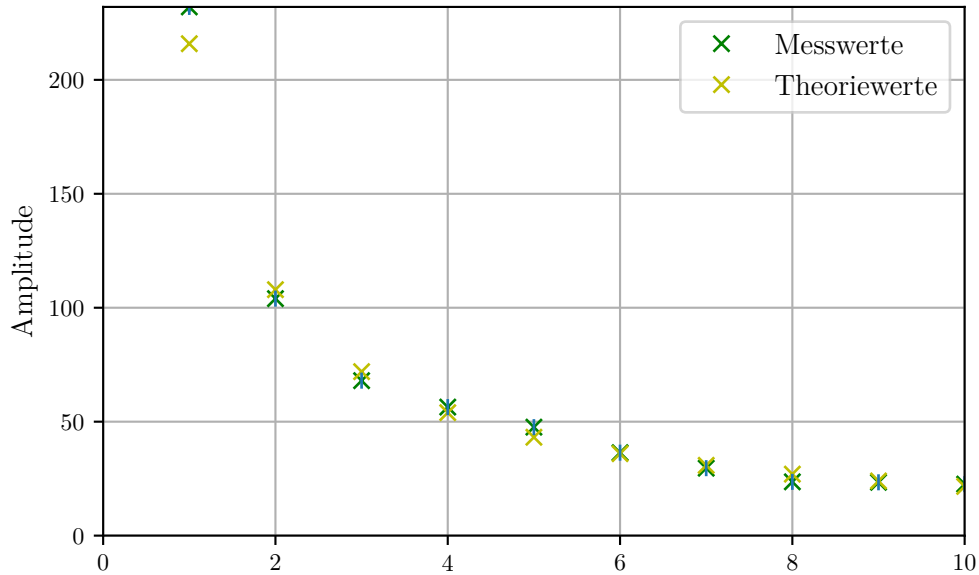


Abbildung 6: Mess- und Theoretischewerte der Analyse der Sägezahnspannung

Der Mittelwert der Frequenzabstände ergibt sich nach (9) zu

$$\Delta f_s = 12,078 \frac{1}{s}. \quad (35)$$

Für die Theoretischen Werte wird die Amplitude, mit umstellen von (29), als

$$A_{0,s} = (339 \pm 7) V \quad (36)$$

bestimmt. Die verschiedenen Vorzeichen des Unterschiedes der Amplituden stammen aus der Bewegung der Peaks der Fourier-Analyse, sodass keine genauere Messung möglich war.

Tabelle 3: Messdaten und Theoriewerte der Sägezahnspannung

Oberwelle	Frequenzabstand		Messwerte	Theoriewerte	Abweichung
n	$\Delta f_s / 1/s$		$U_{M,s} / V$	$U_{T,s} / V$	$\Delta U_s / \%$
1	0	$\pm 0,31$	$232,0 \pm 2,0$	215,860	-7,477
2	12,18	$\pm 0,31$	$104,0 \pm 1,0$	107,930	3,641
3	12,50	$\pm 0,31$	$68,0 \pm 0,4$	71,953	5,494
4	11,87	$\pm 0,31$	$56,4 \pm 0,4$	53,965	-4,512
5	11,56	$\pm 0,31$	$47,6 \pm 0,4$	43,172	-10,257
6	12,18	$\pm 0,31$	$36,4 \pm 0,2$	35,977	-1,177
7	12,18	$\pm 0,31$	$29,6 \pm 0,2$	30,837	4,012
8	12,18	$\pm 0,31$	$23,6 \pm 0,2$	26,982	12,536
9	12,18	$\pm 0,31$	$23,4 \pm 0,2$	23,984	2,437
10	11,87	$\pm 0,31$	$22,6 \pm 0,2$	21,586	-4,697

5.3 Synthese

Für jede Spannungsform sind die Amplituden nach den Formeln aus 5.1 so bestimmt worden, dass eine maximale Amplitude für die erste Oberwelle erreicht wird.

Tabelle 4: Synthesewerte der Rechteckspannung.

Oberwelle	Amplitude
n	U_r / V
1	179,50
2	89,50
3	59,80
4	44,75
5	35,84
6	29,90
7	25,54
8	22,37
9	19,80
10	18,02

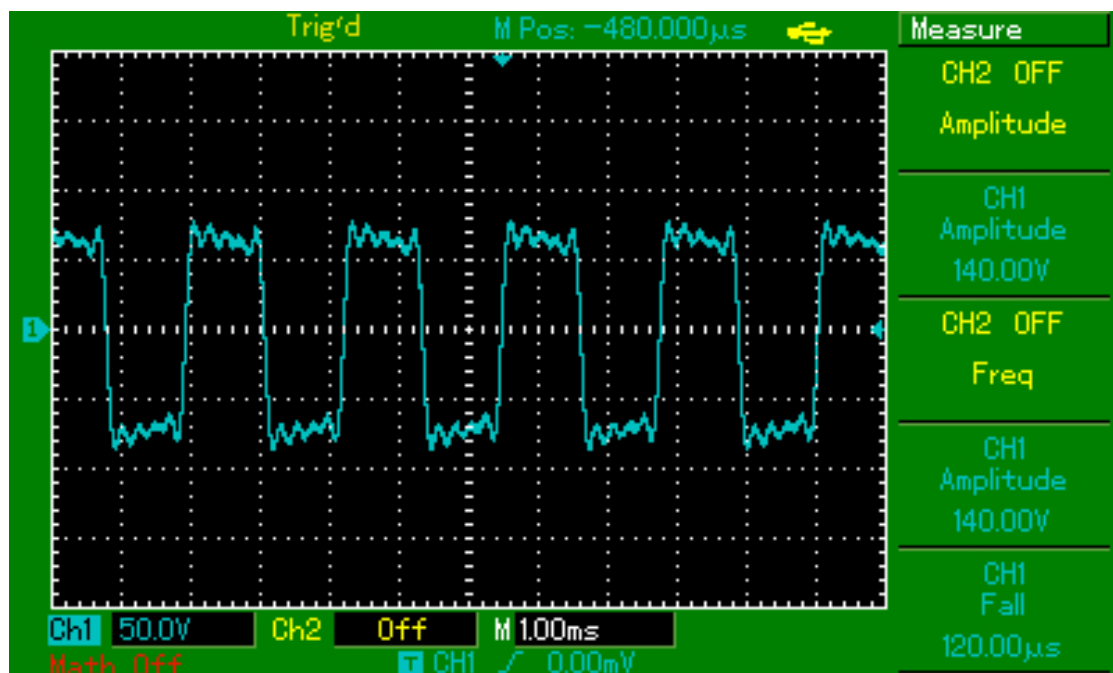


Abbildung 7: Fourier-Synthese der Rechteckspannung.

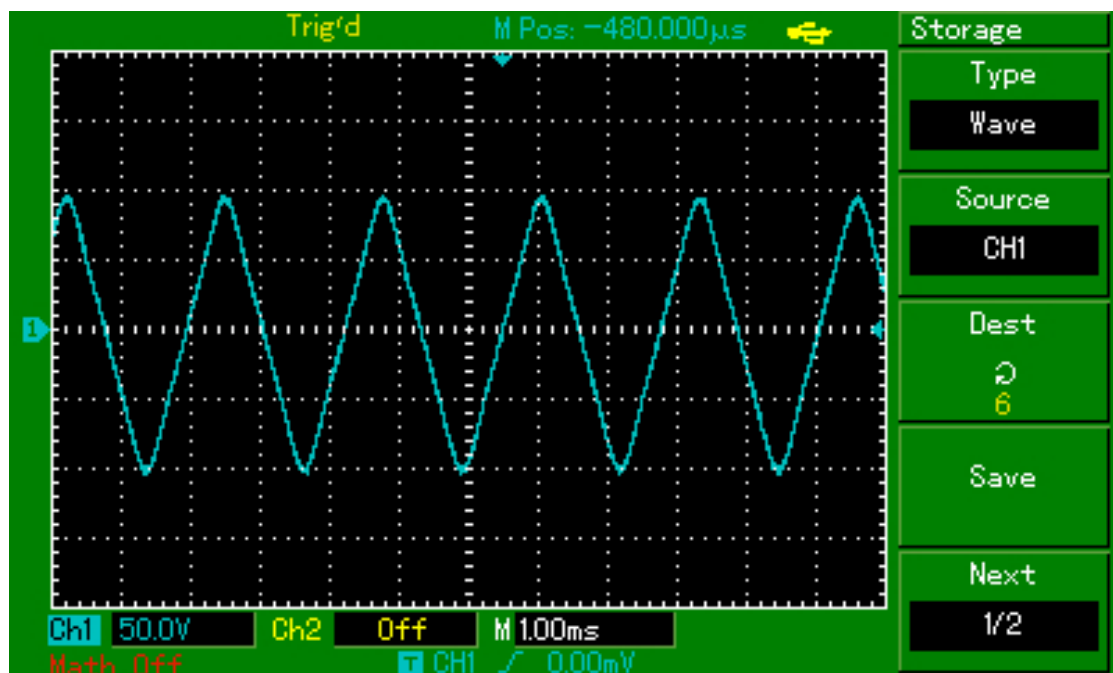


Abbildung 8: Fourier-Synthese der Dreieckspannung.

Tabelle 5: Synthesewerte der Dreiecksspannung.

Oberwelle	Amplitude
n	U_d / V
1	179,30
3	20,00
5	7,00

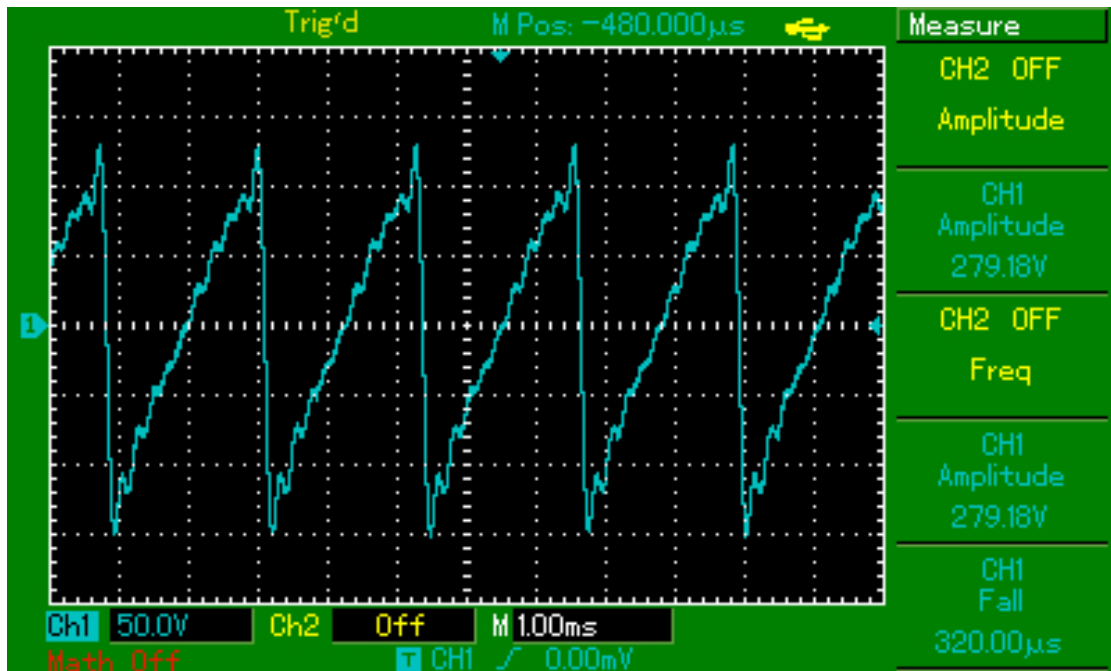


Abbildung 9: Fourier-Synthese der Sägezahnspannung.

Tabelle 6: Synthesewerte der Sägezahnspannung.

Oberwelle	Amplitude
n	U_s / V
1	179,50
2	89,50
3	60,00
4	45,00
5	35,80
6	30,10
7	25,50
8	22,30
9	20,00
10	18,00

6 Diskussion

Bei der Fourieranalyse konnte während des Versuches am Oszilloskop beobachtet werden, dass die jeweils wegfallenden a_n oder b_n der Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung nicht genau Null sind. Außerdem konnten die genauen Spannungen nicht präzise genug abgelesen werden, was zu Ungenauigkeiten führt.

Die gemessenen Werte der Rechteckspannung sind, wie in Tabelle (1) zu sehen, sehr gut, bezogen auf die Theoriewerte. Die Abweichungen kommen wahrscheinlich daher, dass die Abtastfrequenz des Oszilloskops zu groß ist um den Fehler vernachlässigbar klein zu machen. Dieser Fehler macht sich auch bei der Dreieckspannung und bei der Sägezahnspannung bemerkbar. Weil die Amplituden der Dreieckspannung mit $1/n^2$ fallen, ist es nur schwer realisierbar, Messwerte mit geringem Fehler zu erhalten. Dies liegt, wie auch bei der Sägezahnspannung, an der auf dem Oszilloskop zu beobachtenden Schwingung der Amplituden.

Die Fouriersynthese für die Koeffizienten der Rechteckspannung liefert den Plot 7, welcher aufgrund der in der Auswertung aufgeführten Werte nahe an der Theoriekurve liegt. Dieser weißt aber, durch zum einen Messungenauigkeiten und Einstellungenauigkeiten an den Geräten, zum anderen die Uneindeutigkeit der Phase bei den Lissajousfiguren, vor allem aber aufgrund der geringen Anzahl an Oberwellen keine Achsenparallelen Amplituden auf.

Die zusammengesetzte Funktion aus den Koeffizienten für die Dreieckspannung 8 ist am besten gelungen, da es nur wenige Oberwellen gab, welche einen Messfehler beisteuern konnten. Trotz der wenigen Oberwellen kann hier dennoch sehr deutlich ein dreieckiger Spannungsverlauf erkannt werden.

Bei der Sägezahnspannung 9 ist anzumerken, dass die abfallende Flanke fast parallel zur y-Achse verläuft und die ansteigende Flanke nahezu gerade ist.

Literatur

- [1] *Anleitung zu v351 Fourier-Analyse und Synthese*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (besucht am 19.11.2017).