V103

Biegung elastischer Stäbe

Christopher Krause
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.2017 Abgabe: 28.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Biegung elastischer Stäbe untersucht und der materialabhängige Elastizitätsmodul für verschiedene Legierungen ermittelt.

2 Theorie

2.1 Spannung und Elastizitätsmodul

Kräfte, welche an Oberflächen von elastischen Körpern angreifen, rufen Verformungen hervor. Wird diese Kraft auf die Flächeneinheit bezogen, folgt daraus die Spannung als physikalische Größe. Der senkrecht zur Oberfläche stehende Anteil der Spannung heißt Normalspannung σ. Der Tangentialanteil heißt Schubspannung.

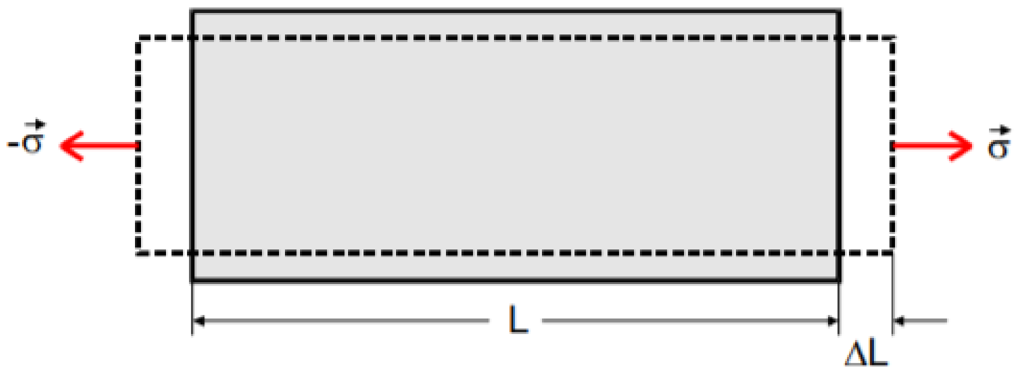

Abbildung 1: Verformung eines Stabes durch eine Normalspannung. [3]

Ist bei einer Verformung die relative Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ hinreichend klein, so ist bei den meisten Körpern ein linearer Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ und $\frac{\Delta L}{L}$ Längenänderung der zu sehen:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

Dies wird als Hook'sches bezeichnet. Der Proportionalfaktor E ist der Elastizitätsmodul und ist materialabhängig.

2.2 Durchbiegung eines einseitig eingespannten Stabes

Greift eine Kraft auf einen einseitig eingespannten Stab an, verformt er sich. Die Längenänderungen eines Qerschnittes des Stabes ist nicht mehr konstant.

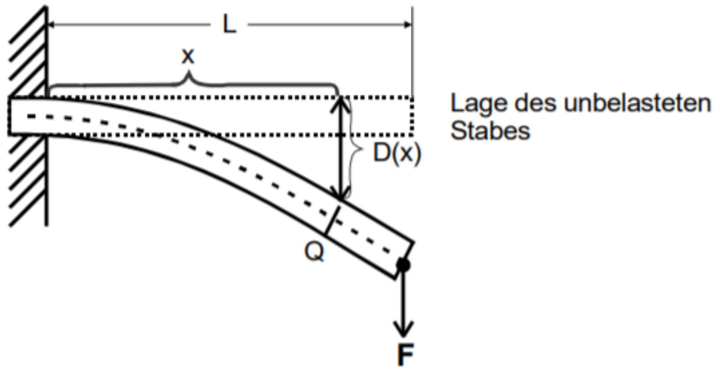

Abbildung 2: Verformung eines einseitig eingespannten Stabes. [3]

Die Durchbiegung $D(x)$ bezeichnet den Abstand eines Oberflächenpunktes des Stabes in Ruhe von dem Punkt nach einer Verformung, wie Abbildung 2 zeigt. Die gestrichelte Linie beschreibt die neutrale Faser, eine Fläche, welche sich durch die Verformung nicht ändert. Die oberen Schichten werden gestreckt und die unteren gestaucht. Die Kraft F übt im Abstand L_x ein Drehmoment M_F auf den Querschnitt Q aus. Verformt sich der Probenkörper, entstehen im Innern, Normalspannungen, welche der Verformung entgegen wirken. Im Gleichgewichtszustand stellt sich eine endliche Durchbiegung ein. Die Zug- und Druckspannung, die an dem Querschnitt angreifen bewirken ein Drehmoment M_σ. Dieses lässt sich durch Integration über Q berechnen.

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)\mathrm{d}q \tag{2}$$

y bezeichnet den Abstand des Flächenelements dq von der neutralen Faser.

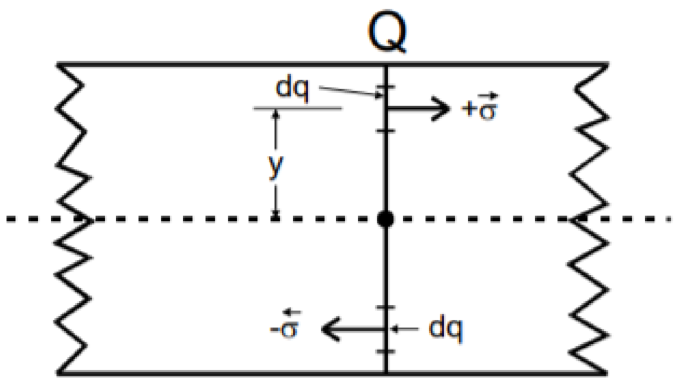

Abbildung 3: Flächenelement und Spannungen. [3]

An jeder Stelle x sind die Drehmomente gleich.

$$M_F = M_\sigma \tag{3}$$

Mit dem Hebelarm $L - X$ gilt:

$$M_F = F(L - x) \tag{4}$$

Mit Gleichung (2) und Gleichung (3) folgt:

$$\int_Q y\sigma(y)\mathrm{d}q = F(L - x) \tag{5}$$

Durch weitere geometrische Überlegungen folgt für kleine Krümmungen:

$$E\frac{y}{\sigma(y)} \approx \frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} \tag{6}$$

Für die Durchbiegung folgt daraus:

$$D(x) = \frac{F_g}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{7}$$

Für $0 \leq x \leq L$. F_G ist die Gewichtskraft. I ist das Flächenträgheitsmoment und ist definert durch:

$$I = \int_Q y^2 \mathrm{d}q(y) \tag{8}$$

Die Integrationskonstanten in Gleichung (11) verschwinden, da an der Einspannstelle die Auslenkung und die Durchbiegung Null ist.

2.3 Durchbiegung eines zweiseitig eingespannten Stabes

Die Verformung eines Stabes, der zweiseitig eingespannt ist, ist in Abbildung 5 dargestellt.

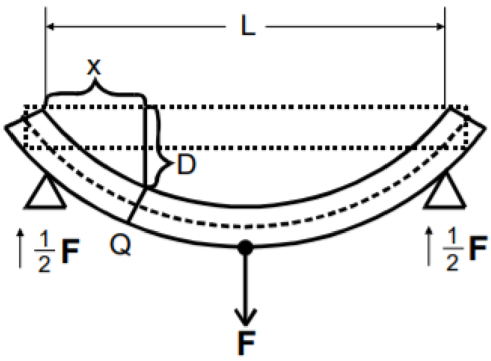

Abbildung 4: Verformung eines zweiseitig eingespannten Stabes. [3]

Die Kraft $\frac{F}{2}$ übt nun ein Drehmoment M_F auf die Querschnittsfläche Q aus. Im Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt für das Drehmoment:

$$M_f = -\frac{F}{2}x \tag{9}$$

Für den andren Bereich $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ folgt dementsprechend:

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x) \tag{10}$$

Mit diesen Drehmomenten folgt für Gleichung (10) in dem Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{2} \tag{11}$$

Und für den Bereich $\frac{L}{2} \leq x \leq L$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EI}(L - x) \tag{12}$$

Werden diese Gleichungen integriert lässt sich die Durchbiegung angeben. Es gilt:

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) \qquad \text{für} 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{13}$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \qquad \text{für} \frac{L}{2} \leq x \leq L \tag{14}$$

3 Durchführung

Zwei Stäbe aus unterschiedlichem Material werden nacheinander wie in Abbildung 6 einseitig eingespannt.

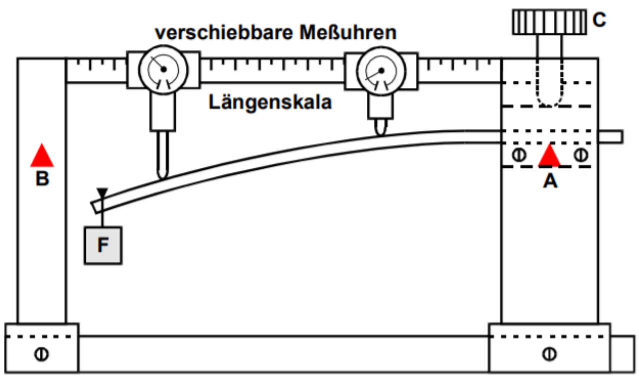

Abbildung 5: Messapparatur für einen einseitig eingespannten Stab. [3]

In 2cm Abständen wird die Durchbiegung, jeweils mit einem an dem Stab hängendem Gewicht und ohne einem gemessen. Diese Prozedur wird mit zwei Stäben durchgeführt.

Ein dritter Stab wird in dem Punkt A, wie in Abbildung 6 zusehen, eingespannt und in Punkt B aufgelegt. Es wird analog wie bei den anderen Stäben vorgegangen links und rechts des Gewichtes die Durchbiegung gemessen.

Zudem werden die Massen der Stäbe und Gewichte mit einer Waage ermittelt. Die Maße der Stäbe werden mit einem Maßband und einer Schieblehre gemessen.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Der Mittelwert eines Datensatzes mit N Werten ist definiert durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{15}$$

Die Standardabweichung eines Datensatzes von seinem Mittelwert durch:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})} \tag{16}$$

Pflanzen sich Unsicherheiten fort, wird der Fehler mit der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2} \tag{17}$$

Der Fehler der Steigung m und des Achsenabschnittes b einer linearen Regression wird wie folgt berechnet:

$$\sigma_m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \tag{18}$$

$$\sigma_b = \frac{\bar{x^2}\bar{y} - \overline{xy}\bar{x}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \tag{19}$$

4.2 Einseitig eingespannter, runder Stab

Die gemessenen Durchbiegungen D_R und deren Orte werden in Tabelle 1 dargestellt. Zudem wird das Polynom angegeben, welches für die lineare Regression benötigt wird.

Tabelle 1: Gemessene Kräfte und Auslenkungen

$x/\left(10^{-3}\text{m}\right)$	$D_R(x)/\left(10^{-3}\text{m}\right)$	$\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)/\left(10^{-3}\text{m}^3\right)$
40	0.1	0.8
60	0.2	1.7
80	0.4	3.0
100	0.7	4.7
120	0.8	6.6
140	0.9	8.9
160	1.0	11.4
180	1.0	14.3
200	1.4	17.3
220	1.5	20.7
240	1.6	24.2
260	1.7	27.9
280	2.0	31.9
300	2.1	36.0
320	2.4	40.3
340	2.9	44.7
360	3.0	49.2
380	3.2	53.9
400	3.8	58.7
420	3.9	63.5
440	4.3	68.4
460	4.8	73.4
480	4.8	78.3

Die Länge des eingespannten Stabes beträgt $L = 0.5\text{m}$. Die Masse des Gewichtes beträgt $m = 533.8\text{g}$. Die Durchbiegung wird gegen das Polynom $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ aufgetragen. Eine lineare Regression wird durchgeführt.

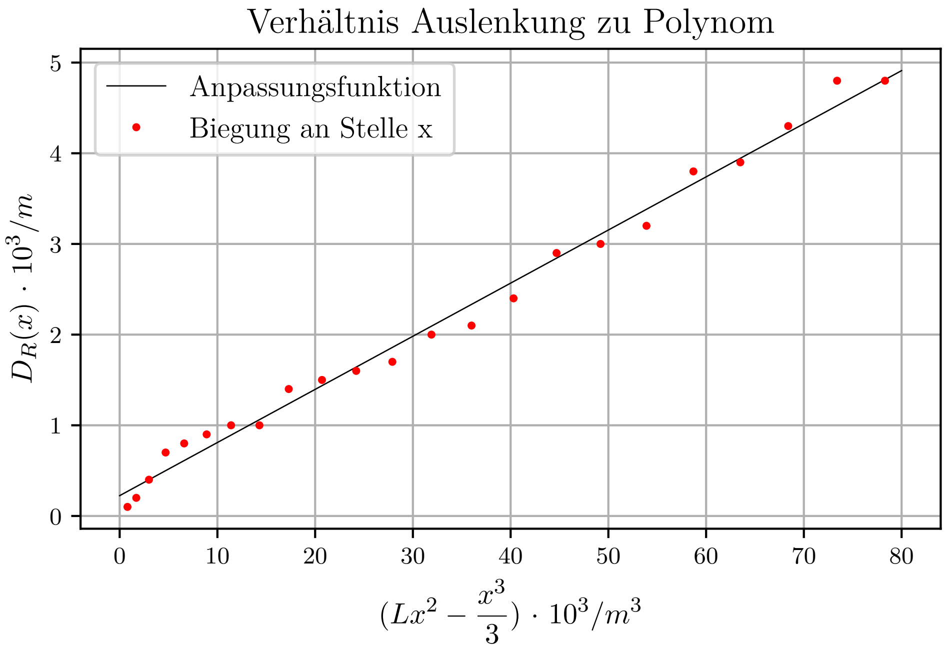

Abbildung 6: Ausgleichsgerade zur Bestimmung des Elastizitätsmodul

Die Gerade wird durch die Gleichung $y = ax$ beschrieben. Der Parameter a beträgt:

$$a = (0.059 \pm 0.001)\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$

Mit der Steigung a und Gleichung (10) folgt für den Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{mg}{2I \cdot a} \tag{20}$$

Das Flächenträgheitsmoment eines zylinderförmigen Stabes mit dem Radius $r = 0.5$cm beträgt:

$$I_{Kreis} = \frac{\pi r^4}{4} = 4.909 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}^4. \tag{21}$$

Für den Elastizitätsmodul folgt:

$$E = (9{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}}$$

Der Fehler von E wird mit Gleichung (20) berechnet.

Die Länge des Stabes beträgt $L = 0.55$m und die Masse des Stabes beträgt $m = 0.3604$kg. Daraus folgt für die Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} = 8343 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{22}$$

Dieser Wert stimmt mit dem Literaturwert von Messing, $\rho = 8100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bis $8700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ [1], über ein. Der Literaturwert des Elastizitätsmodul von Messing beträgt [1]:

$$E = 7{,}8 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{ bis } 12{,}3 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Der aus dem Versuch berechnete Elastizitätsmodul liegt in dem erwarteten Bereich des Theoriewertes.

4.3 Einseitig eingespannter, quadratischer Stab

Die gemessenen Durchbiegungen D_Q und deren Orte werden in Tabelle 2 dargestellt. Zudem wird das Polynom angegeben, welches für die lineare Regression benötigt wird.

Tabelle 2: Gemessene Kräfte und Auslenkungen des quadratischen Stabes

$x/\left(10^{-3}\mathrm{m}\right)$	$D_Q(x)/\left(10^{-3}\mathrm{m}\right)$	$\left(Lx^2-\frac{x^3}{3}\right)/\left(10^{-3}\mathrm{m}^3\right)$
40	0.1	0.8
60	0.3	1.7
80	0.4	3.0
100	0.4	4.7
120	0.5	6.6
140	0.7	8.9
160	0.8	11.4
180	0.8	14.3
200	0.9	17.3
220	1.0	20.7
240	1.2	24.2
260	1.4	27.9
280	1.7	31.9
300	1.9	36.0
320	2.0	40.3
340	2.1	44.7
360	2.5	49.2
380	2.8	53.9
400	2.9	58.7
420	3.0	63.5
440	3.2	68.4
460	3.6	73.4
480	3.8	78.3

Die Länge des eingespannten Stabes beträgt $L = 0.5\mathrm{m}$. Die Masse des Gewichtes beträgt $m = 533.8\mathrm{g}$. Die Durchbiegung wird gegen das Polynom $\left(Lx^2-\frac{x^3}{3}\right)$ aufgetragen. Eine lineare Regression wird durchgeführt.

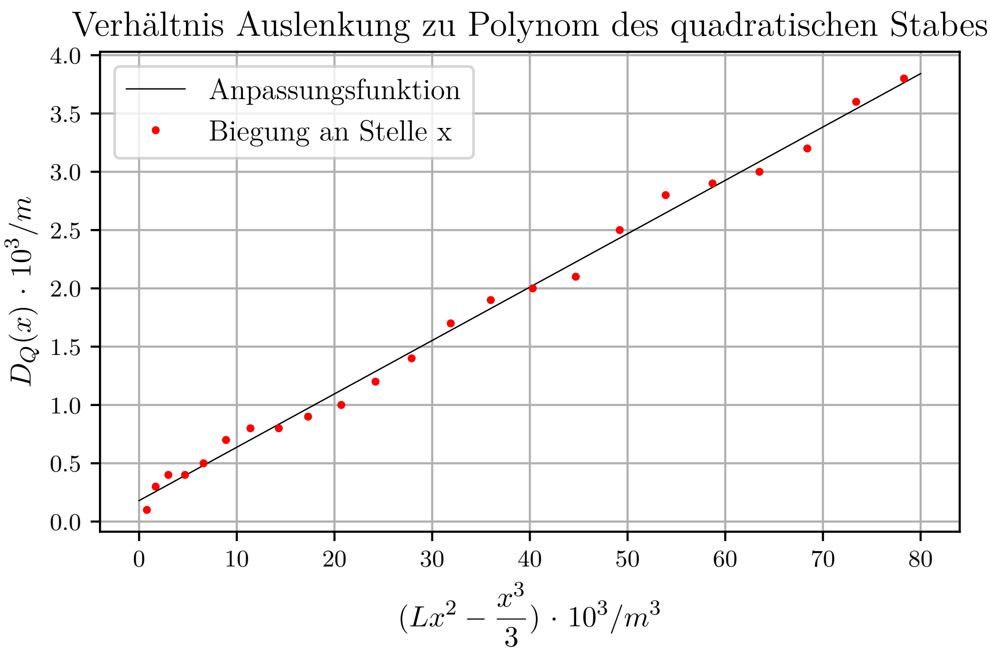

Abbildung 7: Ausgleichsgerade zur Bestimmung des Elastizitätsmodul des quadratischen Stabes

Die Gerade wird durch die Gleichung $y = cx$ beschrieben. Der Parameter c beträgt:

$$c = (0.0458 \pm 0.0007)\frac{1}{\mathrm{m}}$$

Mit der Steigung c und Gleichung (10) folgt für den Elastizitätsmodul:

$$E = (6{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}} \tag{23}$$

Der Fehler von E wird mit Gleichung (20) berechnet.

Das Flächenträgheitsmoment I_Q eines quaderförmigen Stabes mit der Kantenlänge $k = 1\mathrm{cm}$ beträgt:

$$I_Q = \frac{k^4}{12} = 8.333 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}^4 \tag{24}$$

Die Länge des Stabes beträgt $L = 0.59\mathrm{m}$ und die Masse des Stabes beträgt $m = 0.1641\mathrm{kg}$. Daraus folgt für die Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} = 2781\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \tag{25}$$

Der Literaturwert der Dichte von Aluminium mit $\rho = 2700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ [2], stimmt mit dem berechneten Wert am besten überein. Der Literaturwert des Elastizitätsmodul von Aluminium ist $E = 7.0 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\mathrm{m}}$ [4] und stimmt mit dem berechnetem Wert überein. Die relative Abweichung beträgt 1.4%.

4.4 Beidseitig gelagerter Stab

Die gemessenen Durchbiegungen D_B und deren Orte werden in in Tabelle 3 dargestellt. Zudem wird das Polynom angegeben, welches für die lineare Regression benötigt wird.

Tabelle 3: Gemessene Durchbiegungen und Auslenkungen des beidseitig eingespannten Stabes

$x/\left(10^{-3}\mathrm{m}\right)$	$D_B(x)/\left(10^{-3}\mathrm{m}\right)$	$\left(3L^2x - 4x^3\right)/\left(10^{-3}\mathrm{m}^3\right)$
40	0.4	36.6
60	0.6	54.4
80	0.9	71.6
100	1.1	88.1
120	1.4	103.6
140	1.8	117.9
160	2.1	130.9
180	2.2	142.4
200	2.3	152.1
220	2.4	160.0
240	2.4	165.8
260	2.8	169.1
280	2.8	170.0

Die Länge des eingespannten Stabes beträgt $L = 0.554\mathrm{m}$. Die Masse des Gewichtes beträgt $m = 4.6995\mathrm{kg}$. Die Durchbiegung wird gegen das Polynom $\left(3L^2x - 4x^3\right)/\left(10^{-3}\mathrm{m}^3\right)$ aufgetragen. Eine lineare Regression wird durchgeführt.

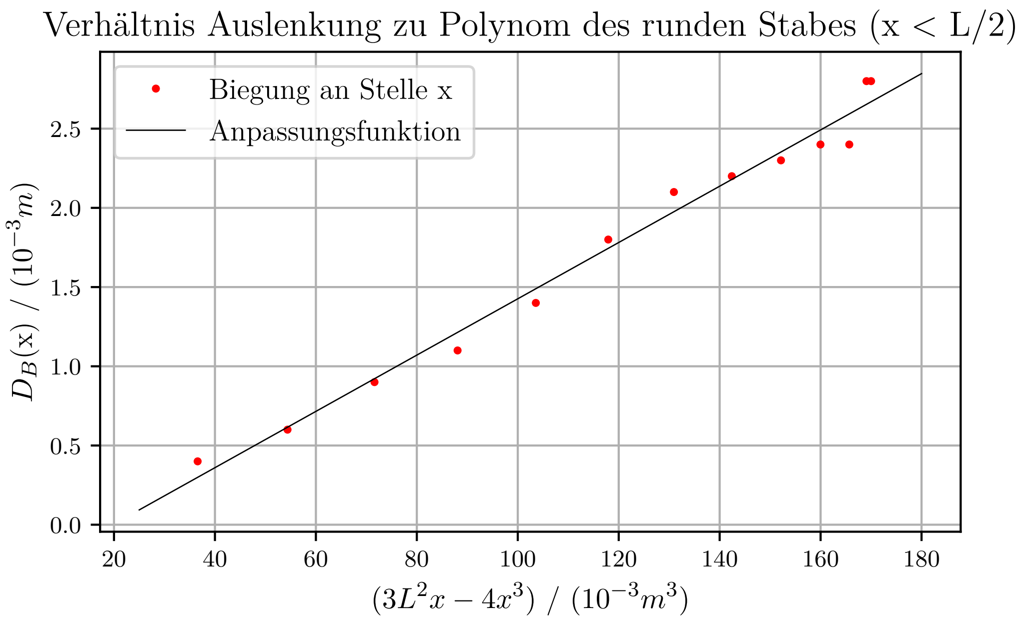

Abbildung 8: Ausgleichsgerade zur Bestimmung des Elastizitätsmodul des runden Stabes (x < L/2)

Die Gerade wird durch die Gleichung $y = ex + f$ beschrieben. Die Parameter betragen:

$$e = (0.0178 \pm 0.0007)\,\frac{1}{m^2}$$
$$f = (0.18 \pm 0.0001)\,m$$

Mit der Steigung e und Gleichung (16) folgt für den Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{mg}{48I \cdot e} \tag{26}$$

Dabei entspricht das Flächenträgheitsmoment I aufgrund des gleichen Radius der Stäbe dem aus Gleichung (24).

Mit Gleichung (28) folgt für den Elastizitätsmodul:

$$E = (1{,}10 \pm 0{,}04) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2\,m}} \tag{27}$$

Der Fehler von E wird mit Gleichung (20) berechnet.

Die Länge des Stabes beträgt $L = 0.60\text{m}$ und die Masse des Stabes beträgt $m = 0.3943\text{kg}$. Daraus folgt für die Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} = 8367\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \tag{28}$$

Dies entspricht der Dichte von Messing. Das errechnete Elastizitätsmodul liegt in dem erwarteten Bereich des Theoriewertes für Messing.

Die Messwerte für die andere Seite des Stabes werden in Tabelle 4 angegeben.

Tabelle 4: Gemessene Durchbiegung und Auslenkungen des beidseitig eingespannten Stabes

$x/\left(10^{-3}\text{m}\right)$	$D_{B2}(x)/\left(10^{-3}\text{m}\right)$	$\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right)/(10^{-3}\text{m}^3)$
320	3.0	164.2
340	2.9	157.8
360	2.6	149.4
380	2.3	139.1
400	2.5	127.2
420	2.2	113.8
440	1.9	99.0
460	1.6	83.2
480	1.0	66.5
500	0.9	49.1
520	0.6	31.1
540	0.4	12.9

Eine lineare Regression wird für $x > L/2$ durchgeführt.

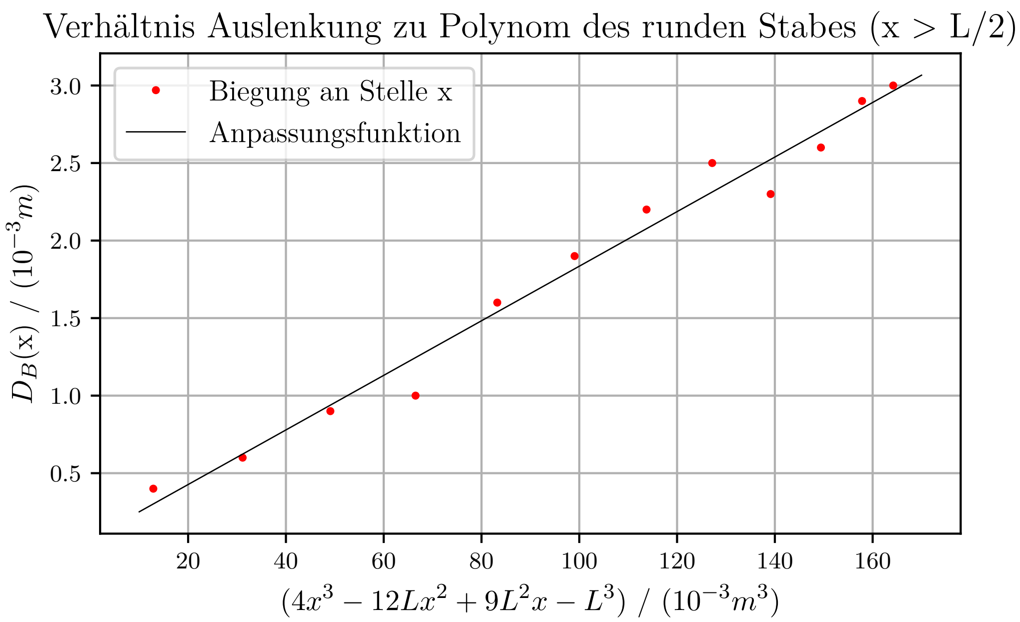

Abbildung 9: Ausgleichsgerade zur Bestimmung des Elastizitätsmodul des runden Stabes (x > L/2)

Die Gerade wird durch die Gleichung $y = hx + i$ beschrieben. Die Parameter betragen:

$$h = (0.0176 \pm 0.0008)\,\frac{1}{m^2}$$
$$i = (0.0001 \pm 0.0001)\,m$$

Mit der Steigung h und Gleichung (17) folgt für den Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{mg}{48I \cdot h} \tag{29}$$

Mit Gleichung (31) folgt für den Elastizitätsmodul:

$$E = (1{,}11 \pm 0{,}05) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}} \tag{30}$$

Der Fehler von E wird mit Gleichung (20) berechnet. Der berechnete Wert liegt in dem erwarteten Bereich des Theoriewertes von Messing.

5 Diskussion

Die berechneten Elastitzitätsmodule stimmen mit den Theoriewerten überein. Aus der Dichte der Stäbe und deren Elastizitätsmodule ist eine Bestimmung des Materials möglich. Das Elastizitätsmodul von Messing ist kein genauer Wert, sondern ein Intervall, in dem die berechneten Werte des einseitig und beidseitig eingespannten Messingstabes mittig liegen. Aluminium hat einen genauen Wert für den Elastizitätsmodul. Die Abweichung von 1.4% ist innerhalb der Standardabweichung. Die Messuhren zum Messen der Durchbiegung zeigen ungenaue Werte an, wodurch es zu systematischen Fehlern kommt. Die Längen der Stäbe werden mit einem Maßband gemessen, wodurch ebenfalls ungenaue Längen für das Berechnen der Dichte folgen. Auch ohne Einwirkung einer Gewichtskraft der Massenstücke weisen die Stäbe eine Krümmung auf. Dies verfälscht den Wert der Durchbiegung in der Ruhelage der Stäbe. Die Formel für das Berechnen der Durchbiegung wird für größere Krümmungen ungenauer, da zur Herleitung dieser Formel der Krümmungsradius als klein genähert wird. Es werden über 20 Messwerte pro Stab gemessen, wodurch statistische Fehler als primäre Fehlerquelle ausgeschlossen werden können. Trotz mehrerer Fehlerquellen ist der Versuch geeignet Elastizitätsmodule der Stäbe bestimmen und so auf das Material schließen zu können.

Literatur

[1] *Chemie.de*. Eingesehen am 23.11.2017. URL: `http://www.chemie.de/lexikon/Messing.html`.

[2] *Chemie.de*. Eingesehen am 23.11.2017. URL: `http://www.chemie.de/lexikon/Aluminium.html`.

[3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung des Versuchs V103, Biegung elastischer Stäbe*. 2017.

[4] *Wikipedia*. Eingesehen am 23.11.2017. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Aluminium`.