

V01

Lebensdauer von Myonen

Pelle Ofenbach pelle.ofenbach@tu-dortmund.de

Julian Schröer julian.schroeer@tu-dortmund.de

Durchführung: 04.06.2018 Abgabe: 26.06.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	The	orie	1			
	1.1	Myonen und das Standardmodell	1			
	1.2	Lebensdauern von instabilen Teilchen	1			
	1.3	Myonendetektion				
	1.4	Theoretische Vorbereitung zur Auswertung	2			
2	Dur	chführung	3			
		Versuchsaufbau und Funktionsweise der Schaltung	3			
	2.2	Kalibrierung und Messverfahren				
3	Auswertung					
	3.1	Kalibrierung	6			
	3.2	Messung der Individuallebensdauern kosmischer Myonen	7			
4	Disk	kussion	10			
	4.1	Relativer Fehler	10			
	4.2	Mittlere Lebensdauer der Myonen	10			
	4.3	Untergrund				
Lit	eratı	ır	10			

1 Theorie

1.1 Myonen und das Standardmodell

Das Standardmodell der Teilchenphysik unterscheidet zwischen Teilchen mit ganzzahligem und halbzahligem Spin. Erstere werden als Bosonen bezeichnet und stellen unter anderem die Teilchen der elementaren Wechselwirkungen. Letztere stellen die Elementarteilchen, Quarks und Leptonen. Die Myonen sind fermionische Teilchen, die der schwachen und 'aufgrund der Ladung der elektromagnet,ischen Wechselwirkung unterliegen und daher zu den Leptonen gehören. Diese setzen sich aus 3 Generationen von je 2 Teilchen zusammen:

- 1. Elektronen e $^-$ und Elektron-neutrinos $\nu_{\rm e}$
- 2. Myonen μ^- und Myon-neutrinos ν_{μ}
- 3. Tauonen τ^- und Tau-neutrinos ν_{τ}

Kehrt man Ladung und Parität der Teilchen um erhält man die zu den jeweiligen Teilchen gehörenden Antiteilchen e^+ , μ^+ , τ^+ , $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ und $\bar{\nu}_\tau$. Die Leptonen der zweiten und dritten Generation haben im Vergleich zum Elektron eine endliche Lebensdauer und Zerfallen daher nach kurzer Zeit. Ausserdem unterscheiden sich die Massen der Teilchen stark, wobei das Elektron das leichteste und das Tauon das schwerste der Leptonen ist. Die Myonen entstehen in der höheren Atmosphäre aufgrund von Streuung von einfallenden Protonen mit Teilchen in der Atmospähre. Die einfallenden Protonen stammen dabei zum Beispiel aus Supernovae oder aktiven Galaktischen Kernen anderer Galaxien. Bei der Streuung der Protonen entstehen neben einer Vielzahl anderer Teilchen geladene Pionen, welche gemäß

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_{\mu}$$
 und $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_{\mu}$

in Myonen und deren Antiteilchen zerfallen. Aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit unterliegen die Myonen dem relativistischen Prinzip der Zeitdilatation und sind deshalb auch am Erdboden noch detektierbar.

Die entstandenen Myonen zerfallen in einem statistischen Prozess weiter zu Leptonen der ersten Generation.

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$
 und $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

1.2 Lebensdauern von instabilen Teilchen

Die Lebensdauer eines instabilen Teilchens ist eine charakteristische Größe, welche sich aus dem statistisch ablaufenden Zerfallsprozess des Teilchens ableiten lässt. Dabei ist zu beachten, dass der Zerfall von Teilchen unabhängig von anderen Teilchen stattfindet und die Zeit, nach der ein Teilchen zerfällt unabhängig von der bisherigen Lebenszeit des Teilchens ist.

Die Anzahl von Teilchen, die innerhalb eines Zeitraums dt zerfallen ist dann durch

$$dN = -\lambda N dt$$

gegeben. Durch Integration lässt sich daraus das exponentielle Zerfallsgesetz ableiten.

$$\frac{N(t)}{N_0} = \exp\left(-\lambda t\right) \tag{1}$$

Dabei ist λ die teilchenspezifische Zerfallskonstante, t die Zeit und N_0 die Teilchenzahl zum Zeitpunkt t=0. Für ein Intervall $[t,t+\mathrm{d}t]$ kann daraus die Verteilung der Lebensdauer der Teilchen berechnet werden.

$$dN(t) = N_0 \lambda \exp(-\lambda t) dt$$

Der Erwartungswert der Zeit t liefert dabei die mittlere Lebensdauer des Teilchens und lautet

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty \lambda t \exp(-\lambda t) dt = \tau = \frac{1}{\lambda}$$
 (2)

Da in einem realen Experiment immer nur Stichproben von Individuallebensdauern messen kann, treten in der Kalkulation der Verteilung einige statistische Probleme auf. Um dies Auszugleichen wird der Erwartungswert in der Auswertung über nicht lineare Ausgleichsrechnung bestimmt mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden. Die Abschätzung der Lebensdauer folgt dann durch eine Abschätzung der Messwerte der Verteilungsfunktion.

1.3 Myonendetektion

In dem vorliegenen Versuch werden die Myonen mithilfe eines Szintillationsdetetektors nachgewiesen. Das Szintillatiormaterial ist hierbei organisch, da für die Messung eine genaue Zeitauflösung wichtiger als gute Energieaufösung ist. Beim Eintritt in den Detektor deponieren die Teilchen eine Energie von ca. 2 MeV cm⁻¹ in den Szintillatormolekülen. Diese werden dabei angeregt und emittieren bei anschließender Rückkehr in den Ausgangszustand Photonen im Bereich des sichtbaren und des nahen UV Spektrums. Wenn die Myonen während des Aufenthalts im Detektor vollständig abgebremst werden, zerfallen sie gemäß dem in Abschnitt 1.1 benannten Prozess. Dabei werden Elektronen frei, deren Energie sehr hoch ist, da die Masse eines Myons um den Faktor 207 größer ist als die des Elektrons. Diese Elektronen regen wiederum Szintillatormoleküle an welche dann einen Lichtblitz emittieren. Negativ geladene Myonen können nach der Abbremsung allerdings durch Szintillatoratome eingefangen werden und ein hochangeregtes myonisches Atom bilden. Das eingefangene Myon zerfällt allerdings nach einer modifizierten Lebensdauer, weshalb der Zerfall detektierbar bleibt. Die Lebensdauer von einem im Szintillatoratom gebundenen Myon ist dabei kleiner als die eines freien Myons.

1.4 Theoretische Vorbereitung zur Auswertung

Um die im Vielkanalanalysator (siehe Abb. 1) ankommenden Signale auszuwerten werden die bei der Kalibrierung aufgenommenen Messwerte aus benachbarten Kanälen gemittelt. Dies geschieht mit der Formel

$$C = \frac{(C_1 N_1) + (C_2 N_2)}{N_1 + N_2} \tag{3}$$

 C_1 und C_2 sind dabei zwei benachbarte Kanäle und N_1 und N_2 die zugehörigen Zählraten. Diese Behandlung soll das "Verschmieren" der Kalibrierungsbalken minimieren.

Um die Untergrundrate der Messung zu bestimmen muss zunächst die Anzahl der den Tank durchquerenden Myonen berechnet werden.

$$\bar{N} = \frac{N_{\text{Start}}}{T_{\text{gesamt}}} \tag{4}$$

Während der Suchzeit T_S durchqueren dann $n=\bar{N}\cdot T_S$ Myonen den Tank. Die Wahrscheinlichkeit für genau n Teilchen während dieser Zeit ist dabei poissonverteilt. Die Anzahl der Fehlmessungen $N_{\rm fehl}$ ergibt sich aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Anzahl der Startimpulse. Dies entspricht genau dem Fall, dass während der Suchzeit zwei Myonen direkt aufeinander folgend in den Detektor eintreten.

$$N_{\rm fehl} = \bar{N} \cdot T_S \cdot \exp\left(-\bar{N} \cdot T_S\right) \cdot N_{\rm Start} \tag{5}$$

[1].

 N_{Start} ist dabei ebenfalls mit einem Poissonfehler behaftet. Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit ergibt sich für die Untergrundrate schließlich der Zusammenhang:

$$U = \frac{N_{\text{fehl}}}{\text{Anzahl Kan\"{a}le}} \tag{6}$$

2 Durchführung

2.1 Versuchsaufbau und Funktionsweise der Schaltung

Um die Individuallebensdauern von Myonen mithilfe eines Szinzillationsdetektors zu messen, wird die Schaltung aus Abbildung 1 verwendet.

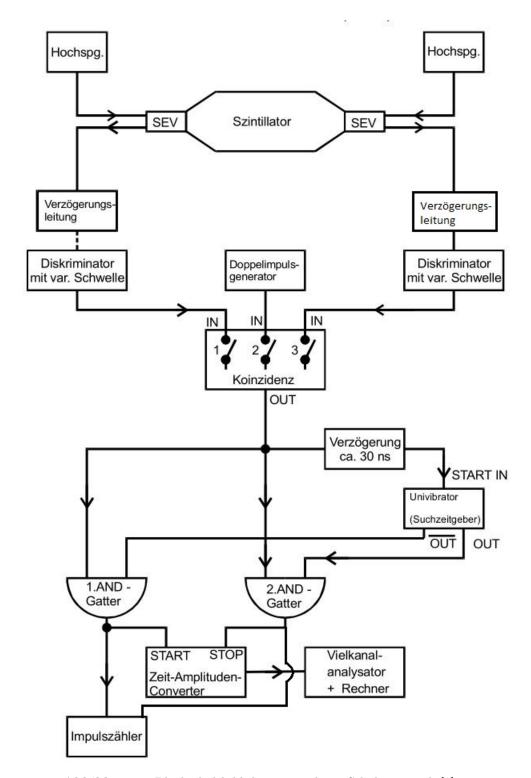


Abbildung 1: Blockschaltbild der verwendeten Schaltung nach [3]

Als Szintillationsdetetektor wird ein Edelstahlzylinder mit aufgeschweisten Kegelstümpfen verwendet, der mit einem in Toluol gelösten, organischen Szintillator gefüllt ist. Auf den Seitenflächen werden je ein an eine Hochspannung angeschlossener Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) angeschlossen. Der SEV wird optisch an den Szintillator gekoppelt und besteht aus einer Photokathode und Dynoden zur Signalverstärkung.

Die SEVs können das selbe Ereigniss u.U. zu unterschiedlichen Zeitpunkten detektieren, da sie

einerseits, bauart- oder altersbedingt, unterschiedliche elektrische Eigenschaften haben können, andererseits das gemessene Ereignis nicht notwendiger weise mittig zwischen ihnen auftritt und somit eine geringe Zeitdifferenz durch die unterschiedlichen zurückgelegten Wegstrecken entsteht. Weiterhin werden an beide SEV eine Verzögerungsschaltung und ein Diskriminator angeschlossen. Die Verzögerungsschaltung dienen dazu die Signale der SEV, möglichst gleichzeitig in die Koinzidenzschaltung weiterzugeben. Der Diskriminator hat zwei für den weiteren Verlauf nötige Funktionen.

- 1. Das durch z.B. thermische Elektronenemissionen in einem der SEV entstehende Rauschen wird durch Einstellen einer Signalschwelle minimiert. Die Signalschwelle ist zwischen 10 und 40 einstellbar und wird hier möglichst hoch gewählt, damit möglichst viele Myonen registriert werden können.
- 2. Das einlaufende Signal wird in ein H/L-Signal der NIM-Logik übersetzt, damit die anschließend verwendeten Logikbausteine das Signal verarbeiten können.

Das Übersetzen der Signale in NIM-Logik ist hierbei die Hauptaufgabe des Diskriminators, da die Selektion der Signale durch effizienter durch die im Folgenden erklärte Koinzidenzschaltung vorgenommen wird. Die aus den Diskriminatoren auslaufenden Signale werden nun auf eine Koinzidenzschaltung gegeben. Diese dient dazu diejenigen Signale auszusortieren, welche durch durch thermische Emissionen in einem der SEV entstehen. Wird ein Myon nah an einem der beiden SEV gemessen, ist es möglich, dass die nachfolgende Schaltung die Messung irrtümlich als fehlgeschlagen interpretiert, da die Lichtimpulse zu unterschiedlichen Zeiten von den SEV registriert werden. Dieses Problem wird ebenfalls durch die Koinzidenzschaltung minimiert.

Aus der Koinzidenschaltung wird das Signal nun dreigeteilt und auf zwei AND-Gatter sowie durch eine weitere Verzögerung in eine monostabile Kippstufe geleitet. Die Kippstufe wird ebenfalls an die beiden AND-Gatter angeschlossen. Wird nun ein Myon detektiert, liegt am Eingang des ersten AND-Gatters ein H an. Da die Kippstufe noch nicht gekippt ist gibt das Gatter ein H Signal weiter, bis nach 30 ns die Stufe kippt und das H Signal am OUT anliegt. Falls im Detektor nun ein zweiter Puls aufgenommen wird, wird dieser durch das zweite AND-Gatter als H Signal weitergeleitet. Das erste Gatter registriert also den Eintritt und das zweite den Zerfall des Myons. Die Signale der Gatter werden nun von je einem Impulszähler registriert und in einen Zeit-Amplitude-Konverter (TAC) geleitet. Dieser wandelt die zwischen den Pulsen vergehende Zeit in ein Signal mit Höhe proportional zur vergangen Zeit um. Diese Signale werden dann mithilfe eines Analog-Digital Konverters in einem Vielkanalanalysator geleteitet. Die am TAC entstehenden Signale sind also repräsentativ für die Individuallebensdauern der Myonen.

2.2 Kalibrierung und Messverfahren

Bevor die eigentliche Messung durchgeführt werden kann wird die Schaltung der Reihe nach aufgebaut und das Signal mithilfe eines Oszilloskops visualisiert um die idealen Kenngrößen einzustellen. Zu erst werden die Verzögerer richtig eingestellt und die Breite der Spannungspulse wird vermessen. Dann werden die Diskriminatoren angeschlossen und die Diskriminatorschwelle so eingestellt, dass beide Messkanäle ungefähr gleiche Zählraten liefern. Auch hier wird die Breite der nun rechteckigen Pulse ausgelesen.

Als nächstes wird die Koinzidenzschaltung justiert. Dafür wird die Verzögerungszeit systematisch variiert und die unterschiedlichen Zählraten werden aufgenommen. Das Maximum der entstehenden Kurve wird als ideale Verzögerungszeit eingestellt. Des weiteren wird die Zählrate vor und nach der Koinzidenzschaltung verglichen um sich von der Wirksamkeit der Schaltung zu überzeugen.

Anschließed werden die Kippstufe, die AND-Gatter und der TAC angeschlossen. Am Ausgang des TAC kann nun die Suchzeit gemessen werden, in der die Stufe sich im gekippten Zustand befindet. Die

Suchzeit sollte dabei nur wenig größer sein als die Messzeit des TAC. Die Suchzeit beträgt $T_s \approx 20\,\mathrm{s}$. Mithilfe eines ebenfalls an die Koinzidenzschaltung angeschlossenen Doppelimpulsgenerators wird die Funktionsweise der Schaltung zur Registrierung des Stoppimpulses getestet. Dies ist notwendig, da im späteren Experiment nur wenige der eintretenden Myonen auch im Detektor zerfallen. Am TAC wird nun außerdem überprüft ob die ausgehenden Signale proportional zum am Doppelimpulsgenerator eingestellten Impulsabstand sind.

Zuletzt wird die Kalibration des Vielkanalysators vorgenommen. Dafür wird überprüft welcher Kanal welcher Messzeit entspricht.

Nun kann mit der eigentlichen Messung der Individuallebensdauern begonnen werden. Dafür werden Zählwerk und Vielkanalanalysator zeitgleich gestartet. Die Messung läuft über ca. 25 Stunden und wird wiederum durch gleichzeitiges Stoppen der Zählwerks und des Vielkanalanalysators beendet. Die Ergebnisse des Vielkanalanalysators, sowie die Anzahl der detektierten Start- und Stoppimpulse werden aufgezeichnet und die exakte Messzeit werden aufgezeichnet.

3 Auswertung

3.1 Kalibrierung

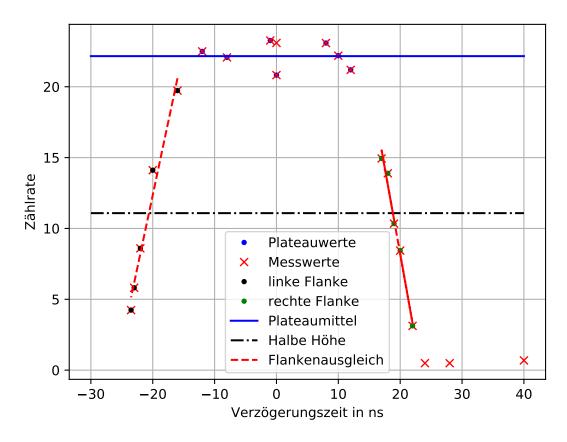


Abbildung 2: Ereignisraten nach Hinzuschalten der Koinzidenzschaltung in Abhängigkeit der eingestellten relativen Verzögerung der Signale zueinander.

Tabelle 1: Länge der vom linken, bzw. rechten, Detektor ausgegebenen Impulse ohne Hinzuschalten eines Diskriminators

t_{links}/ns	t_{rechts}/ns
6,6	10,2
8,6	7,8
8,2	10,4
10,0	7,6
14,0	9,4
9,0	11,8
10,6	8,4
8,6	12,0
10,4	7,6
11,0	10,0

Nach Hinzuschalten der Diskriminatoren beträgt $t_{links} = 19.6\,\mathrm{ns}$ und $t_{rechts} = 19.0\,\mathrm{ns}$. Die Diskriminatoren sind hierbei so aufeinander abgestimmt, dass sich ihre Ereignisfrequenzen nur um $\Delta_f = 0.05\,\mathrm{s}^{-1}$ unterscheiden. Ihre Ereignisfrequenzen liegen bei $f_{links} = 38.27\,\mathrm{s}^{-1}$, bzw. $f_{rechts} = 38.22\,\mathrm{s}^{-1}$.

Für die relative Verzögerungszeit $t_{VZ}=0.0$ ns wurden zwei Messwerte aufgenommen, da sie sich sehr nah am gemessenen Maximum von $t_{VZ}=1.0$ ns befindet und die erste Messung einen recht stark abweichenden Wert zeigt, obwohl ein ausgeprägtes Platau erwartet wird. Die in Tab. 2 gelisteten Messwerte sind in Abb. 2 graphisch dargestellt. Die Plateaurate f_p wurde über die markierten Werte mittels NumPy [6] gemittelt und ergibt sich zu $f_p=22.16\,\mathrm{s}^{-1}$. Durch Anlegen einer Geraden der Form f=ax+b an die ebenfalls markierten Werte der Flanken der Verteilung durch lineare Regression mittels Python [matploitlib] kann durch die Schnittpunkte $f_{h,l}$ und f_h,r dieser Geraden mit der Hälfte des Plateaus $\Delta t_k=40\,\mathrm{ns}-\left(f_{h,r}-f_{h,l}\right)=(0.57\pm0.30)$ ns berechnen.

Die Parameter der Ausgleichsgeraden lauten hierbei:

$$a_{links}$$
 = $(2.06 \pm 0.21) \text{ ns}^{-2}, a_{rechts}$ = $(-2.44 \pm 0.16) \text{ ns}^{-2}$
 b_{links} = $(54 \pm 4) \text{ s}^{-1}, b_{rechts}$ = $(57.0 \pm 3.1) \text{ s}^{-1}$

Aus den in Tab. 4 aufgeführten Werten (gemittelt aus Tab. 3 nach (3)) ergibt sich eine Umrechnung von $(22.11 \pm 0.08) \frac{\text{Kanäle}}{\text{µs}}$.

3.2 Messung der Individuallebensdauern kosmischer Myonen

Ein mittels matplotlib [4] über die Methode der kleinsten Quadrate durchgeführter ungewichteter Fit der Werte der Individuallebensdauern (dargestellt in Abb. 3) an eine Exponentialfunktion der Form $f(t) = A \exp(-\tau t) + U$ liefert folgende Werte:

$$τ = (2,03 \pm 0,09)$$
 μs $U = 1.9 \pm 1.2$ $A = 211 \pm 5$

Hierbei bezeichnet U einen konstanten Untergrund aus zufällig, gleichverteilt auftretenden Ereignissen und A als Ordinatenabschnitt. Hierbei wurden die leeren ersten beiden Kanäle, sowie die ebenfalls leeren Kanäle 401 bis 511, bei der Auswertung der Daten vernachlässigt. Die ersten beiden Kanäle decken eine Zeit von ca. $t_{tot}=0.09\,\mu s$ ab. Hierbei fällt auf, dass die Zahl der MCA gemessenen Ereignisse mit $C_{MCA}=10311.0$ geringer ist als die 10868 seperat gemessenen Stop Signale.

Tabelle 2: Nach der Koinzidenzschaltung registrierte Ereignisse in Abhängigkeit der relativen Verzögerung der Signale zueinander.

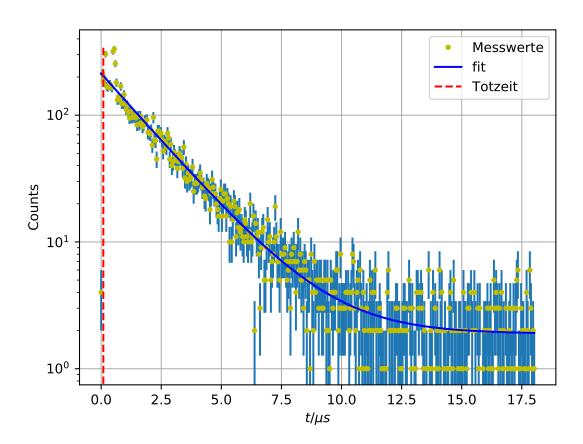
t_{VZ}/ns	Ereignisse/s ⁻¹	Messzeit/s
0,0	421 ± 21	20,22
16,0	422 ± 21	21,39
20,0	285 ± 17	20,20
22,0	174 ± 13	20,24
23,0	116 ± 11	19,96
23,5	85 ± 9	20,06
-8,0	470 ± 22	20,36
-40,0	14 ± 4	20,45
8,0	441 ± 21	19,98
12,0	451 ± 21	20,05
-24,0	10 ± 3	20,42
-28,0	10 ± 3	20,42
-20,0	169 ± 13	20,03
-22,0	63 ± 8	20,16
-18,0	282 ± 17	20,30
-17,0	301 ± 17	20,15
-19,0	211 ± 15	20,40
-10,0	449 ± 21	20,23
1,0	479 ± 22	20,59
-12,0	426 ± 21	20,10
0,0	463 ± 22	20,05

 ${\bf Tabelle~3:}~{\bf Unbearbeitete~Messwerte~zur~Kalibrierung~des~Vielkanalanalysators$

$t/\mu s$	Kanal	Counts
1	22	5055
1	23	999
2	44	196
2	45	4075
3	67	3815
4	89	4863
5	111	5904
6	133	5612
7	155	899
8	177	6509
9	199	7437

Tabelle 4: Kanäle mit vom Doppelimpulsgenerator vorgegebenen Zeitintervallen sowie ihr Abstände

Kanal	Abstand
22,17	22,17
44,95	22,79
67,00	22,05
89,00	22,00
111,00	22,00
133,00	22,00
155,00	22,00
177,00	22,00
199,00	22,00



 ${\bf Abbildung~3:}$ Gemessene Individuallebensdauern der detektierten Myonen

Mit 2096502 detektierten Startimpulsen werden bei einer Messzeit von 96 454 s wird nach Gl. (4) eine durchschnittliches Rauschen von $21,74\,\mathrm{s}^{-1}$ erwartet. Der Untergrund pro Kanal wird somit gemäß (6) mit $U=1.7793\pm0.0025$ erwartet.

4 Diskussion

4.1 Relativer Fehler

Alle relativen Fehler wurden nach der Formel

$$\tilde{x} = \frac{|x_{lit} - x_{mess}|}{|x_{lit}|} \cdot 100\%$$

berechnet, dabei bezeichnet x_{lit} den Literaturwert der Messgröße x_{mess} .

4.2 Mittlere Lebensdauer der Myonen

Beim Vergleich der bestimmten mittleren Lebensdauer von $\tau=(2.03\pm0.09)$ µs mit dem Theoriewert von $(2.196\,981\,1\pm0.000\,002\,2)$ µs [2] ergibt sich ein relativer Fehler von $\delta_{\tau}=(8\pm4)\,\%$. Zu dieser Berechnung wurde das Python-Paket Uncetainties [5] verwendet. Diese Abweichung stellt zwar ein Ergebnis dar, welches den Einsatz der verwendeten Aparatur legitimiert, allerdings dürfte sich die Unsicherheit durch eine längere Messzeit weiter verringern lassen. Zu beachten ist hierbei, dass der Theoriewert freie Myonen beschreibt, allerdings werden in diesem Versuch Myonen im Szintillatormaterial gemessen. Hierbei kann es passieren, dass ein Myonen von einem Atom eingefangen wird, d.h. es bildet sich ein sogenanntes μ -Atom. Da die Lebensdauer gebundener Myonen höher ist als die freier, bietet dieser Effekt eine Erklärung der gemessenen längeren Lebensdauer. Die reale Messzeit betrug 96 454 s, was etwa 27 h entspricht. Zudem könnte eine Optimierung der Aparatur das Verhältnis aus Start- und Stopsignalen verbessern. So könnte z.B. die Wahl eines anderen Szintillatormaterials zu einer höheren zeitlichen Auflösung führen. Die zwar geringe Totzeit von $t_{tot}=0.09\,\mu s$ sorgt, da sie im Bereich der höchsten Ereignisrate liegt (vgl. Abb. 3), zu einem hohen vermuteten Ereignisverlust.

Die Totzeit könnte auch zum Stopsignalverlust beitragen, da der Impulszähler zum Zeit-Amplituden-Converter (ZAC) parallel geschaltet ist. Wenn der ZAC über eine eigene Totzeit verfügt, kann er zu einem Ereignisverlust führen. Da der Impulszähler nicht Start- und Stopsignale verarbeitet, sondern nur die weiter auseinander liegenden Stopsignale, würde hier eine Totzeit weniger ins Gewicht fallen.

4.3 Untergrund

Der durch Ausgleichsrechnung berechnete Untergrund beträgt $U_{mess}=1.9\pm1.2$. Dies entspricht zwar dem Erwartungswert $U_{Erwartung}\approx1.78$. Allerdings ist durch die hohe Unsicherheit von U_{mess} von ca. 63% keine weiter belastbare Untersuchung möglich.

Literatur

- [1] URL: https://matheguru.com/stochastik/poisson-verteilung.html.
- [2] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). Muon. URL: http://pdg.lbl.gov/2018/listings/ rpp2018-list-muon.pdf.
- [3] TU Dortmund. V01 Lebensdauer von Myonen. 2014.
- [4] John D. Hunter. "Matplotlib: A 2D Graphics Environment". Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.

- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/.
- [6] Travis E. Oliphant. "NumPy: Python for Scientific Computing". Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10-20. URL: http://www.numpy.org/.