

V302

## Brückenschaltungen

Tahir Kamcili  
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß  
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 24.11.2020

Abgabe: 08.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theoretische Grundlage</b>	<b>3</b>
2.1 Brückenschaltungen mit komplexen Widerständen . . . . .	5
2.2 Beschreibung spezieller Brückenschaltungen . . . . .	6
2.2.1 Wheatstonesche Brückenschaltung . . . . .	6
2.2.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	6
2.2.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	7
2.2.4 Induktivitätsmessung durch Maxwell-Brücke . . . . .	8
2.2.5 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	10
<b>3 Durchführung</b>	<b>12</b>
3.1 Aufgabe a) . . . . .	12
3.2 Aufgabe b) . . . . .	12
3.3 Aufgabe c) . . . . .	13
3.4 Aufgabe d) . . . . .	14
3.5 Aufgabe e) . . . . .	15
<b>4 Auswertung</b>	<b>17</b>
4.1 Wheatstonesche Brücke . . . . .	17
4.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	17
4.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	18
4.4 Induktivitätsmessung mittels Maxwell-Brücke . . . . .	19
4.5 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	20
<b>5 Diskussion</b>	<b>21</b>
<b>Literatur</b>	<b>21</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen durch verschiedene Brückenschaltungen unbekannte Widerstände gemessen, sowie eine Klirrfaktorbestimmung durchgeführt werden.

## 2 Theoretische Grundlage

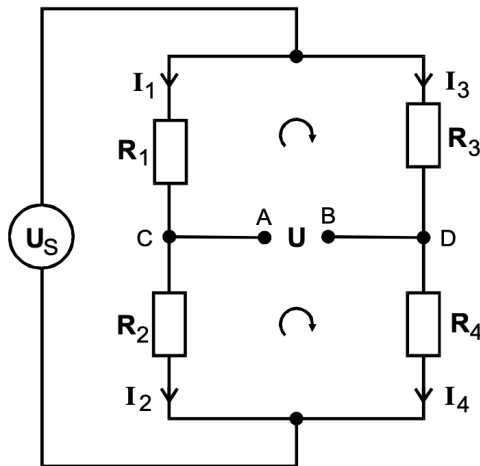


Abbildung 1: Prinzipielle Brückenschaltung.

In der Abbildung (1) ist der Aufbau einer prinzipiellen Brückenschaltung dargestellt. Hier wird die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B, die Brückenspannung genannt wird, in Abhängigkeit ihrer Widerstandsverhältnissen untersucht. Um die Brückenspannung zu berechnen wird sich auf die Kirchhoff'schen Gesetze berufen. Diese lauten wie folgt:

### 1. Knotenpunktsatz

In jedem Verzweigungspunkt (Knotenpunkt) eines Stromkreises ist die Summe der zufließenden Ströme ( $I > 0$ ) gleich der Summe der abfließenden Ströme ( $I < 0$ ).

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

### 2. Maschensatz

In einem unverzweigten Stromkreis bzw. in jeder Masche ist die Summe aller Spannungsabfälle  $U_k$  gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken  $I_k$  und den Widerständen  $R_k$ .

$$\sum_k U_k = \sum_k I_k R_k \quad (2)$$

Mithilfe des 1. Kirchhoff'schen Gesetzes (1) ergibt sich für Abbildung (1), dass über die Brücke A - B kein Strom fließt:

$$I_1 = I_2 \quad (3)$$

und

$$I_3 = I_4 \quad (4)$$

Das 2. Kirchhoff'sche Gesetz (2) liefert für die beiden Maschen in Abbildung (1)

$$U = -R_1 I_1 + R_3 I_3 \quad (5)$$

und

$$-U = -R_2 I_2 + R_4 I_4. \quad (6)$$

Wird für (6) genutzt, dass Gleichung (3) und (4) gilt, ergibt sich

$$-U = -R_2 I_1 + R_4 I_3. \quad (7)$$

Aus Gleichung (7) und (5) folgt nun

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_3 + R_4} I_1 \quad (8)$$

Außerdem lässt sich die Speisespannung  $U_S$  nach (2) ausdrücken

$$U_S = I_1 (R_1 + R_2) \quad (9)$$

und kann nach  $I_1$  umgestellt in (8) eingesetzt werden. Dann gilt:

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (10)$$

Dies ist ein Ausdruck für die Brückenspannung. Diese verschwindet, wenn

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad (11)$$

ist, was auch als abgegliche Brücke bezeichnet wird. Aus der Abgleichbedingung kann nun ein unbekannter Widerstand durch Variierung der bekannten drei anderen Widerständen gemessen werden, indem versucht wird, die Brückenspannung verschwinden zu lassen.

## 2.1 Brückenschaltungen mit komplexen Widerständen

Sobald sich in einer Schaltung Kapazitäten und Induktivitäten befinden, ist es nötig, mit komplexen Widerständen zu rechnen. Ein komplexer Widerstand lässt sich allgemein in folgender Form darstellen:

$$\mathfrak{R} = X + jY. \quad (12)$$

Dabei ist  $X$  der Wirkwiderstand,  $Y$  der Blindwiderstand und  $j$  die imaginäre Einheit. Die Widerstände einer Induktivität  $L$ , einer Kapazität  $C$  und eines ohmschen Widerstandes  $R$  lassen sich auch in dieser Weise mit  $\omega$  als Kreisfrequenz darstellen.

$$\mathfrak{R}_C = -\frac{j}{\omega C} \quad (13)$$

$$\mathfrak{R}_L = j\omega L \quad (14)$$

$$\mathfrak{R}_R = R \quad (15)$$

Nach Gleichung (11) ist die Abgleichbedingung für eine Brücke mit komplexen Widerständen

$$\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_4. \quad (16)$$

Damit die komplexe Abgleichbedingung (16) erfüllt ist, müssen Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten gleich sein. Daraus ergeben sich zwei Bedingungen, die bei einer abgeglichenen Wechselstrombrücke gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$X_1X_4 - Y_1Y_4 = X_2X_3 - Y_2Y_3 \quad (17)$$

und

$$X_1Y_4 + X_4Y_1 = X_2Y_3 + X_3Y_2. \quad (18)$$

## 2.2 Beschreibung spezieller Brückenschaltungen

### 2.2.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

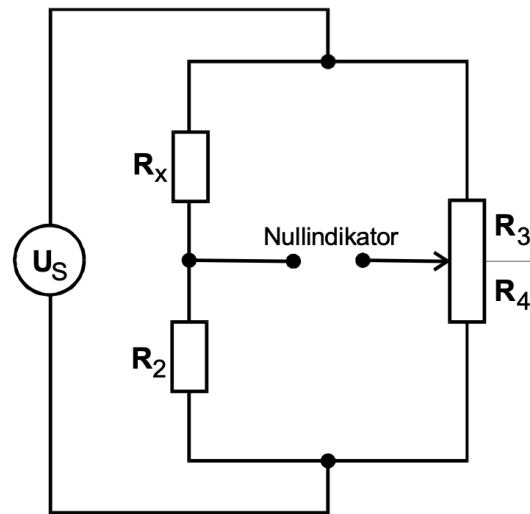


Abbildung 2: Wheatstonesche Brückenschaltung.

Da die Wheatstonesche Brückenschaltung nur ohmsche Widerstände enthält, kann sie sowohl mit Gleichstrom, als auch mit Wechselstrom betrieben werden. Sie ist wie in Abbildung (2) dargestellt aufgebaut und kann zur Bestimmung eines unbekannten Widerstandes  $R_X$  verwendet werden. Nach der Abgleichbedingung (11) kann  $R_X$  durch

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (19)$$

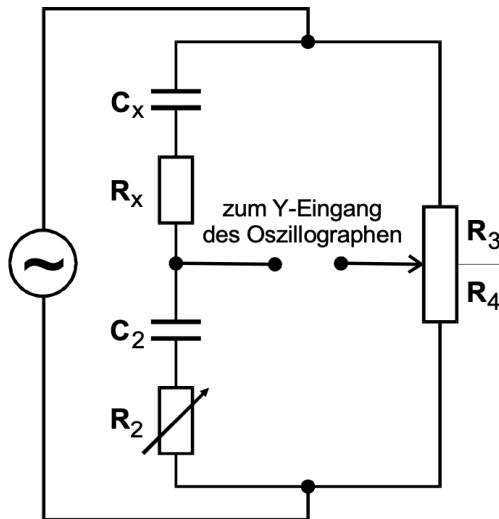
bestimmt werden, wobei das Verhältnis von  $R_3$  zu  $R_4$  durch ein Potentiometer realisiert wird.

### 2.2.2 Kapazitätsmessbrücke

Da bei einem realen Kondensator dielektrische Verluste auftreten, wird im Ersatzschaltbild ein ohmscher Widerstand in Reihe geschaltet, sodass gilt:

$$\Re_{\text{Creal}} = R - \frac{j}{\omega C} \quad (20)$$

Eine Kapazitätsmessbrücke, mit einer unbekannten Kapazität  $C_X$  gemessen werden kann, ist in Abbildung (3) dargestellt.



**Abbildung 3:** Kapazitätsmessbrücke für realen Kondensator.

Um  $C_X$  und  $R_X$  zu bestimmen müssen die Abgleichbedingungen (17) und (18) mit

$$Y_1 = -\frac{1}{\omega C_X}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{\omega C_2}$$

$$Y_3 = Y_4 = 0$$

berücksichtigt werden. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (21)$$

und

$$C_X = C_2 \frac{C_3}{C_4}. \quad (22)$$

### 2.2.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivitätsmessbrücke ist analog zur Kapazitätsmessbrücke aufgebaut. Auch hier wird zu jeder Induktivität ein ohmscher Widerstand aufgrund von Wärmeverlusten in Reihe geschaltet, mit

$$\mathfrak{R}_{L_{\text{real}}} = R + j\omega L \quad (23)$$

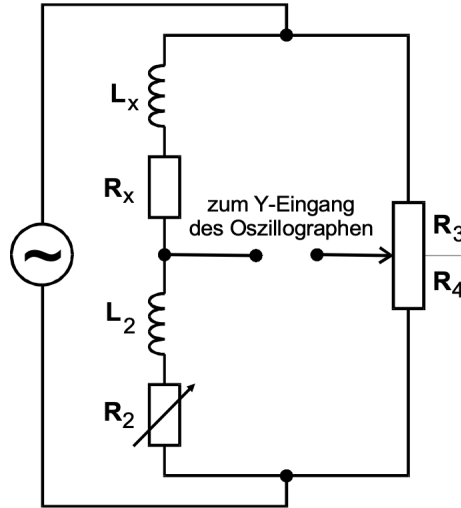
$$Y_1 = \omega L_X$$

$$Y_2 = \omega L_2$$

und

$$Y_3 = Y_4 = 0.$$

Der Aufbau hat die in Abbildung (4) gezeigte Gestalt.



**Abbildung 4:** Induktivitätsmessbrücke für reale Spule.

Die Abgleichbedingung lauten nach (17) und (18)

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (24)$$

und

$$L_X = L_2 \frac{L_3}{L_4}. \quad (25)$$

Dabei sollte der Wirkanteil in dem Brückenweig mit  $L_2$  allein durch den Regelwiderstand  $R_2$  realisiert werden. Da dies insbesondere für kleine Frequenzen schwer umzusetzen ist, wird weiter noch die Maxwell-Brücke betrachtet, bei der anstelle von  $L_2$  eine Normalkapazität verwendet wird.

#### 2.2.4 Induktivitätsmessung durch Maxwell-Brücke

Bei einer Maxwell-Brücke sind die Abgleichelemente die Regelwiderstände  $R_3$  und  $R_4$ .  $R_2$  ist ein bekannter Widerstand mit einer möglichst engen Toleranz und  $C_4$  eine möglichst verlustarme Kapazität.

Mithilfe von Abbildung (5) lassen sich die Widerstandsoperatoren bestimmen:

$$\Re_1 = R_X + j\omega L_X \quad (26)$$

und



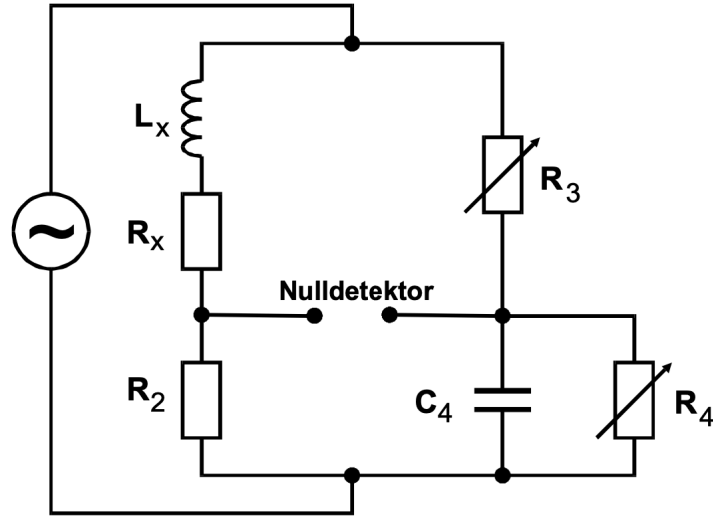


Abbildung 5: Maxwell-Brücke für realen Kondensator mit RC Netzwerk.

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_4} = \frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \quad (27)$$

bzw.

$$\mathfrak{R}_4 = \frac{R_4 - j\omega C_4 R_4^2}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2} \quad (28)$$

Damit lassen sich wieder die Abgleichbedingungen nach (17) und (18) bestimmen.

$$R_X R_4 + \omega^2 C_4 R_4^2 L_X = R_2 R_3 (1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2) \quad (29)$$

$$-\omega R_X R_4^2 C_4 + \omega R_4 L_X = 0 \quad (30)$$

Wird (30) nach  $L_X$  umgestellt und in (29) eingesetzt, ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (31)$$

und mit (30)

$$L_X = R_2 R_3 C_4. \quad (32)$$

Es fällt auf, dass keine bisher aufgeführte Brücke in den Abgleichbedingungen von  $\omega$  abhängt. In der Praxis gibt es aber tatsächlich einen bestimmten Frequenzbereich, in dem der Abgleich mit optimalen Vorraussetzungen durchführbar ist. So gibt es Brückenschaltungen, die den Abgleich nur bei einer Frequenz zulassen, wie zum Beispiel die Wien-Robinson-Brücke.

### 2.2.5 Wien-Robinson-Brücke

Die Besonderheit der Wien-Robinson-Brücke im Vergleich zu den davor aufgeführten Brücken ist, dass sie keine Abgleichelemente enthält. Die Schaltung einer solchen Brücke ist in Abbildung (6) dargestellt.

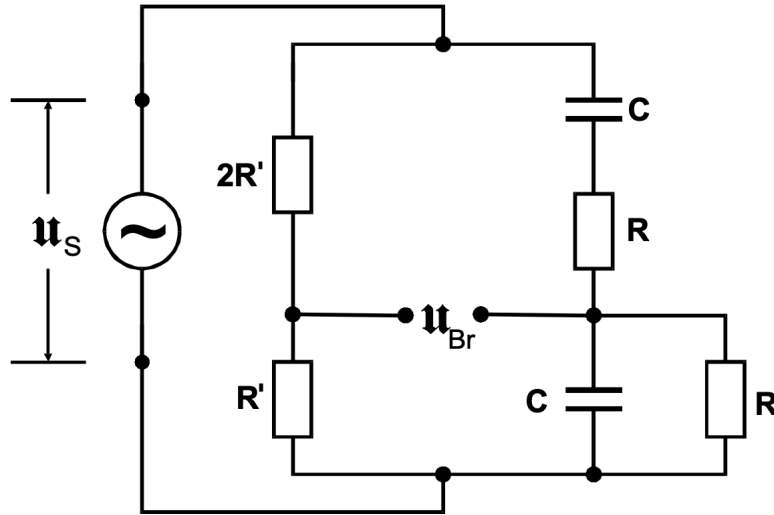


Abbildung 6: Schaltung einer Wien-Robinson-Brücke.

Das Ziel ist es zunächst, einen Ausdruck für die Brückenspannung  $u_{Br}$  in Abhängigkeit von der Frequenz zu finden. Dazu werden die Widerstandsoperatoren aufgeführt.

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= 2R' \\ \mathfrak{R}_2 &= R' \\ \mathfrak{R}_3 &= R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega CR + 1}{j\omega C} \\ \mathfrak{R}_4 &= \frac{R}{j\omega CR + 1}\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke können in (10) eingesetzt werden und weiter ergibt sich

$$u_{Br} = \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_4}{(\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4)(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)} u_S. \quad (33)$$

Durch einsetzen und weiteren Umformungen folgt dann

$$u_{Br} = \frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC} u_S \quad (34)$$

bzw.

$$\frac{\mathfrak{U}_S}{\mathfrak{U}_{Br}} = \frac{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC}{\omega^2 R^2 C^2 - 1}. \quad (35)$$

Weitere umformungen liefern

$$f(\omega) = \left| \frac{\mathfrak{U}_{Br}}{\mathfrak{U}_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9\{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2\}} \quad (36)$$

woraus abzulesen ist, dass die Brückenspannung genau dann verschwindet, wenn gilt:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (37)$$

Nun wird das Frequenzverhältnis

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (38)$$

in (36) eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$\left| \frac{\mathfrak{U}_{Br}}{\mathfrak{U}_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}. \quad (39)$$

Aus der Gleichung (39) kann nun abgelesen werden, dass für  $\omega = \omega_0$  die Brückenspannung verschwindet und schwächt Schwingungen in der Nähe ab. Daran ist zu erkennen, dass die Wien-Robinson-Brücke Eigenschaften eines Filters hat.

Mithilfe der Wien-Robinson-Brücke kann zudem eine Klirrfaktor-Messung durchgeführt werden, mit der eine Aussage über die Qualität eines Sinusgenerators getroffen werden kann. Dabei gibt der Klirrfaktor (der im idealfall möglichst klein sein sollte) den Oberwellengehalt im Vergleich zur Grundwelle an.

Es gilt

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1}. \quad (40)$$

Hier ist  $U_1$  die Amplitude der Grundwelle mit der Frequenz  $\omega_0$  und  $U_n$  die Amplitude der n-ten Oberwelle mit der Frequenz  $n\omega_0$ . Zur Vereinfachung kann angenommen werden, dass die Summe der Oberwellen nur aus der zweiten Oberwelle besteht, für die

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{f(\Omega)} \quad (41)$$

gilt.

### 3 Durchführung

Es wurden ein Oszilloskop und eine Spannungsquelle sowie verschiedene Kondensatoren, Spulen, und Widerstände zur Verfügung gestellt. Da Aufgabenteile b) c) und d) aufgrund technischer Fehler nicht selbst durchgeführt werden konnten, wurden die Daten aus (1), (2), (3), (4), (5) und (6) zur Verfügung gestellt.

#### 3.1 Aufgabe a)

Um die unbekannten Widerstände Wert 13 und Wert 14 zu messen, wird die Wheatstone'sche Brückenschaltung nach Abbildung (2) aufgebaut. Die Frequenz bleibt dabei die ganze Zeit bei 1500 Hz. Zur Bestimmung eines unbekannten Widerstandes kann nun so lange am Potentiometer gedreht werden, bis die Brückenspannung  $U_{Br}$  minimal wird.

##### 1. Wert 13

Für  $R_2 = 664\Omega$  ergibt sich  $R_3 = 317,5\Omega$  und  $R_4 = 682,5\Omega$ .

Das Vorgehen wird mit einem anderen Widerstand  $R_2$  wiederholt.

Für  $R_2 = 1k\Omega$  ergibt sich  $R_3 = 241\Omega$  und  $R_4 = 759\Omega$ .

##### 2. Wert 14

Dies wurde analog für den zweiten unbekannten Widerstand Wert 14 durchgeführt.

Für  $R_2 = 664\Omega$  ergibt sich  $R_3 = 573,5\Omega$  und für  $R_4 = 426,5\Omega$ .

Für  $R_2 = 1k\Omega$  ergibt sich  $R_3 = 471\Omega$  und für  $R_4 = 529\Omega$ .

#### 3.2 Aufgabe b)

Durch eine Kapazitätsmessbrücke nach (3) werden die zwei unbekannten Kapazitäten Wert 8 und Wert 9 gemessen.

##### 1. Wert 8

Messung	$C_2 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
1	450	371	606	394
2	399	418	578	422
3	597	278	673	327

**Tabelle 1:** Daten für Wert 8.

## 2. Wert 9

Messung	$C_2 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
1	450	466	511	489
2	399	524	481	519
3	597	352	581	419

**Tabelle 2:** Daten für Wert 9.

### 3.3 Aufgabe c)

Hier sollen mit einer Induktivitätsbrücke nach (4) die zwei unbekannten Induktivitäten Wert 10 und Wert 18 gemessen werden.

#### 1. Wert 10

Messung	$L_2 / \text{mH}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
1	14,6	45	907	83
2	20,1	57	875	125
3	27,5	85	837	163

**Tabelle 3:** Daten für Wert 10.

#### 2. Wert 18

Messung	$L_2 / \text{mH}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
1	14,6	108	775	225
2	20,1	143	715	285
3	27,5	197	648	352

**Tabelle 4:** Daten für Wert 18.

### 3.4 Aufgabe d)

Nun soll die Vermessung der unbekannten Induktivitäten nochmal auf eine andere Art gemessen werden. Diesmal durch die Maxwell Brücke nach (5).

#### 1. Wert 10

Messung	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
1	100	347	829
2	664	523	829
3	332	1036	829

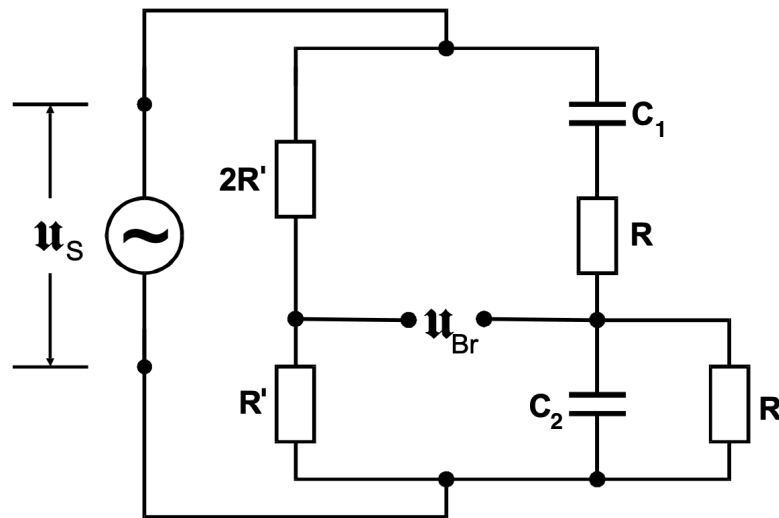
**Tabelle 5:** Daten für Wert 10.

#### 2. Wert 18

Messung	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$
1	100	128	347
2	664	193	349
3	332	382	348

**Tabelle 6:** Daten für Wert 18.

### 3.5 Aufgabe e)



**Abbildung 7:** Schaltung einer Wien-Robinson-Brücke mit 2 verschiedenen Kapazitäten.

Danach sollte die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke untersucht und mit der Theorie verglichen werden. Hierzu wird die Brücke nach (7) aufgebaut, mit

$$R' = 500\Omega$$

$$R = 1k\Omega$$

$$C_1 = 399nF$$

$$C_2 = 450nF.$$

Da keine zwei gleichen Kapazitäten zur Verfügung standen, wurden möglichst gleichgroße verwendet. Nun wird die Frequenz variiert und die dazugehörigen doppelten Amplituden gemessen. Diese konnten auf dem Oszilloskop beobachtet und mit dem Cursor vermessen werden. Folgende Werte wurden dabei ermittelt:

$f / \text{Hz}$	$2U_{\text{Br}} / \text{V}$	$2U_{\text{S}} / \text{V}$
20	6.44	20
36	6.32	20
45	6.20	20
60	6.00	20
75	5.68	20
90	5.40	20
105	5.00	20
120	4.68	20
135	4.24	20
150	3.92	20
200	2.80	20
300	1.07	20
340	0.520	20
375	0.282	20
370	0.308	20
380	0.308	20
400	0.412	20
420	0.580	20
440	0.784	20
480	1.14	20
500	1.32	20
650	2.38	20
750	2.94	20
900	3.60	20
1400	4.58	20
1700	5.32	20
8000	6.40	20
14000	6.12	20
20000	5.92	20
24000	5.72	20
28000	5.56	20
30000	5.40	20

**Tabelle 7:** Daten für doppelte Amplituden von  $U_{\text{Br}}$  und  $U_{\text{S}}$  bei variierten Frequenzen.



## 4 Auswertung

### 4.1 Wheatstonesche Brücke

Mithilfe der Wheatstonesche Brücke wurden die Widerstände „Wert 13“ und „Wert 14“ ermittelt. Zu berechnung dieser wurde die Formel (24) genutzt. Wie bereits in der Durchführung erwähnt wurden zwei Messreihen mit unterschiedlichen Widerständen zum selben unbekannten Widerstand durchgeführt. Der ermittelte Wert wurde dann gemittelt. In der folgenden Tabelle sind diese nochmal aufgelistet:

$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_X / \Omega$
664	317.5	682.5	$308.89 \pm 1.54$
1000	239	761	$314.06 \pm 1.57$

**Tabelle 8:** Daten für Wert 13

$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_X / \Omega$
664	573.5	426.5	$892.86 \pm 4.46$
1000	471	529	$890.36 \pm 4.45$

**Tabelle 9:** Daten für Wert 14

Gemittelt ergibt dies für die Widerstände, dass:

$$R_{X,13} = 311.475 \pm 1.56 \Omega,$$

$$R_{X,14} = 891.61 \pm 4.56 \Omega$$

ist.

### 4.2 Kapazitätsmessbrücke

Bei der Kapazitätsmessbrücke wird der Ohmsche Widerstand und die Kapazität eines Kondensators durch die Formeln (24) und (22) berechnet. Auch hier wurden die Widerstände variiert und mehrere Messungen durchgeführt um eine höhere Genauigkeit zu haben. In den Tabellen (1) und (2) sind die Messwerte aufgeführt.

Mit diesen Werten lassen sich die Kapazitäten und Widerstände von Wert 8 bestimmen zu:

Messung1 : $R_X = 570.62 \pm 17.35 \Omega$ ;	$C_X = 2.926 \cdot 10^{-7} \pm 1.46 \cdot 10^{-9} \text{ F}$
Messung2 : $R_X = 572.52 \pm 17.41 \Omega$ ;	$C_X = 2.913 \cdot 10^{-7} \pm 1.45 \cdot 10^{-9} \text{ F}$
Messung3 : $R_X = 572.15 \pm 17.40 \Omega$ ;	$C_X = 2.901 \cdot 10^{-7} \pm 1.45 \cdot 10^{-9} \text{ F}$
Gemittelt : $R_X = 571.763 \pm 1.56 \Omega$ ;	$C_X = 2.913 \cdot 10^{-7} \pm 1.45 \cdot 10^{-9} \text{ F}$

und Wert 9 bestimmen zu:

Messung1 : $R_X = 486.97 \pm 14.81 \Omega$ ;	$C_X = 4.306 \cdot 10^{-7} \pm 2.15 \cdot 10^{-9} \text{ F}$
Messung2 : $R_X = 485.63 \pm 14.76 \Omega$ ;	$C_X = 4.305 \cdot 10^{-7} \pm 2.15 \cdot 10^{-9} \text{ F}$
Messung3 : $R_X = 488.10 \pm 14.84 \Omega$ ;	$C_X = 4.305 \cdot 10^{-7} \pm 2.15 \cdot 10^{-9} \text{ F}$
Gemittelt : $R_X = 486.90 \pm 17.35 \Omega$ ;	$C_X = 4.306 \cdot 10^{-7} \pm 2.15 \cdot 10^{-9} \text{ F}$

Jedoch sind die Widerstände mit einem Fehler von  $\pm 3\%$  behaftet.

### 4.3 Induktivitätsmessbrücke

Bei der Induktivitätsmessbrücke wird der Verlustwiderstand, sowie die Induktivität einer Spule durch mehrmalige Messungen berechnet. Dazu wird die Formeln ie Formeln (24) und (25) genutzt. Die Tabellen aus denen die Messwerte entnommen werden sind (3) und (4).

Mit diesen Werten lassen sich die Induktivitäten und Widerstände von Wert 10 bestimmen zu:

Messung1 : $R_X = 491.74 \pm 14.95 \Omega$ ;	$L_X = 0.1595 \pm 0.0007 \text{ H}$
Messung2 : $R_X = 399.00 \pm 12.13 \Omega$ ;	$L_X = 0.1407 \pm 0.0007 \text{ H}$
Messung3 : $R_X = 436.47 \pm 13.27 \Omega$ ;	$L_X = 0.1412 \pm 0.0007 \text{ H}$
Gemittelt : $R_X = 442.40 \pm 13.45 \Omega$ ;	$L_X = 0.1471 \pm 0.0007 \text{ H}$

und Wert 18 bestimmen zu:

Messung1 : $R_X = 372.00 \pm 11.31 \Omega$ ;	$L_X = 0.0502 \pm 0.0002 \text{ H}$
Messung2 : $R_X = 358.75 \pm 10.91 \Omega$ ;	$L_X = 0.0504 \pm 0.0002 \text{ H}$
Messung3 : $R_X = 362.66 \pm 11.02 \Omega$ ;	$L_X = 0.0506 \pm 0.0002 \text{ H}$
Gemittelt : $R_X = 364.47 \pm 11.08 \Omega$ ;	$L_X = 0.0504 \pm 0.0002 \text{ H}$

Jedoch sind die Widerstände mit einem Fehler von  $\pm 3\%$  behaftet.

#### 4.4 Induktivitätsmessung mittels Maxwell-Brücke

Hier werden die Spulen nochmal mittels der Maxwell-Brücke nochmal berechnet. Hierfür werden die Formeln (24) und (32) verwendet. Jedoch sind die Größen  $R_3$  und  $R_4$  mit einem Fehler  $\pm 3\%$  behaftet. Aus den Tabellen (5) und (6) folgt (mit  $C_4 = 399\text{nF}$ ) für Wert 10:

Messung1 : $R_X = 41.86 \pm 2.51 \Omega$ ;	$L_X = 0.0138 \pm 0.0004 \text{ H}$
Messung2 : $R_X = 418.90 \pm 25.13 \Omega$ ;	$L_X = 0.1386 \pm 0.0041 \text{ H}$
Messung3 : $R_X = 414.90 \pm 24.89 \Omega$ ;	$L_X = 0.1372 \pm 0.0041 \text{ H}$
Gemittelt : $R_X = 416.90 \pm 25.01 \Omega$ ;	$L_X = 0.1379 \pm 0.0041 \text{ H}$

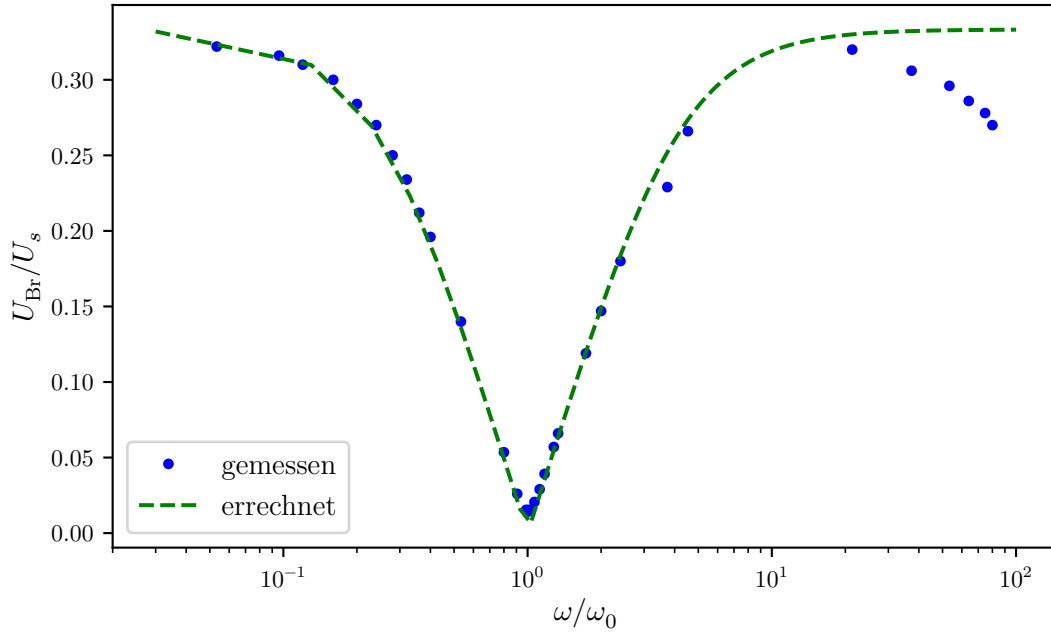
und Wert 18:

Messung1 : $R_X = 36.88 \pm 2.21 \Omega$ ;	$L_X = 0.0051 \pm 0.0001 \text{ H}$
Messung2 : $R_X = 367.20 \pm 22.03 \Omega$ ;	$L_X = 0.0511 \pm 0.0015 \text{ H}$
Messung3 : $R_X = 364.44 \pm 21.86 \Omega$ ;	$L_X = 0.0506 \pm 0.0015 \text{ H}$
Gemittelt : $R_X = 365.82 \pm 21.95 \Omega$ ;	$L_X = 0.0509 \pm 0.0015 \text{ H}$

Da die Werte der ersten Messung erheblich von den beiden anderen Messungen abweichen wurden diese in die Mittelwertbildung nicht mit einbezogen.

## 4.5 Wien-Robinson-Brücke

Hier wurde die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung der Wien-Robinson-Brücke im Bereich  $20 \text{ Hz} \leq \omega \leq 30\,000 \text{ Hz}$  untersucht. In der folgenden Grafik ist der Quotient aus  $U_{\text{Br}}$  und  $U_{\text{S}}$  gegen  $\omega/\omega_0$  nach (37) und (38) in blau aufgetragen. Zusätzlich wurde in grün gestrichelt die theoretisch erwartete Werte nach der Wurzel (39) auf der Kurve aufgetragen.



**Abbildung 8:**  $U_{\text{Br}}/U_{\text{S}}$  gegen  $\omega/\omega_0$  aufgetragen. Theoretisch und gemessen.

In der Grafik sieht man das links vom Scheitel die Theoretischen und gemessenen Werte relativ dicht beieinander liegen, jedoch die gemessenen Werte nicht am Scheitel 0 erreichen. Zusätzlich sieht man das die Werte auf der rechten Seite anfangen wieder stark zu fallen, nachdem die gemessene Kurve anfängt abzuflachen. Die Gerade ab 5 kann durch den Mangel an Messpunkten erklärt werden, da jeweils die Messpunkte durch eine direkte Verbindung verbunden wurden und keine Funktion durchgeplottet wurde. Aus der Grafik lässt sich der Tiefpunkt der gemessenen Tiefpunkt bei  $(1.0002|0.0141)$  ablesen. Daraus folgt dass das gemessene  $\omega_0 = 2356.19$ . Dieser liegt sehr nah am theoretisch ermittelten Wert,  $\omega_0 = 2355.71$ .

Nun ist es möglich den Klirrfaktor nach (40), (41) und (36) aus der Messung zu bestimmen. Jedoch wird angenommen, dass die Summe der Oberwellen nur aus der zweiten Oberwelle besteht.

$U_2$  lässt sich durchschnittlich zu  $U_2 = 12.299\text{V}$  bestimmen. Daraus folgt ,mit  $f(2) = 0.149$ , dass der Klirrfaktor durchschnittlich  $k = 1.22995$  betragen muss.

## 5 Diskussion

Während der Durchführung des Versuchs sind einige Fehlerquellen aufgefallen, die die Ergebnisse beeinflussen. Schon bei Aufgabe a) (3.1) fiel auf, dass die Brückenspannung  $U_{Br}$  nicht verschwindet, sondern immer  $U_{Br} > 0$  gilt. Daher ist das Verhältnis von  $R_3$  und  $R_4$  nicht exakt bestimmbar.

Auch beim ablesen der Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  vom Potentiometer gibt es eine Unsicherheit.

Dabei hat das Potentiometer selbst auch eine Toleranz von  $\pm 3\%$

Bei Aufgabe e) (3.5) waren bei der Wien-Robinson-Brücke (6) zwei gleiche Kapazitäten gefordert, jedoch waren keine zwei gleichen verfügbar. Dies fälscht die Ergebnisse zusätzlich ab.

Außerdem ist die Abmessung der doppelten Amplituden mit dem Cursor ungenau, da dieser manuell bedient wurde und es deswegen zu kleinen Abweichungen kommen kann. Da Aufgaben b)-d) nicht selbst durchgeführt werden konnten, können hier keine Aussagen zu Auffälligkeiten bei der Durchführung getroffen werden. Dennoch ist bekannt, dass die variablen Widerstände  $R_2$  aus Schaltung (3) bei Aufgabe b), sowie  $R_3$  und  $R_4$  aus Schaltung (5) bei Aufgabe d) eine Toleranz von  $\pm 3\%$  haben.

Möglich ist auch ein Fehler durch Schwankungen der an der Brücke anliegenden Spannung aufgrund von technischen Mängeln der Spannungsquelle.

Die große Abweichung bei der Auswertung der Maxwell-Brücke von genau einer Größenordnung ist wahrscheinlich auf einen Abschreibfehler von dem Widerstand  $R_2$  zurückzuführen, da es beim Versuchsaufbau keinen  $100\Omega$ , aber  $1000\Omega$  Widerstand gab.

## Literatur

- [1] *Elektrische Brückenschaltungen*. Fakultät Phyik, TU Dortmund. 2020.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.