

V206 Wärmepumpe

Tobias Rücker
tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock
paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

Durchführung: 07.01.2020, Abgabe: 14.01.2020

Versuchsgruppe: **42**

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
3 Fehlerrechnung	5
4 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung	6
5 Auswertung	7
6 Diskussion	11
Literatur	12

1 Ziel

Der effiziente Wärmetransport von einem kälteren zu einem wärmeren Reservoir wird in der alltäglichen Welt immer wieder eingesetzt, zum Beispiel in Form eines Kühlschranks. Eine besonders günstige Variante des Wärmetransports stellt dabei die Wärmepumpe dar. Daher wird die Funktionsweise einer Wärmepumpe als Beispiel für einen Wärmetransport in diesem Experiment näher betrachtet.

2 Theorie

Im Normalfall wird Wärmeenergie in einem abgeschlossenen System vom wärmeren zum kälteren Reservoir transportiert. Um diesen Prozess umzukehren, muss von außen Energie zugeführt werden, hier als mechanischer Arbeit. Die Wärmepumpe stellt ein Experiment dar, welches diese Leistung erbringt.

Zur Beschreibung der Wärmepumpe wird eine neue Größe eingeführt, die Gütezahl ν . Sie beschreibt den Quotienten von transportierter Wärmemenge Q_1 und aufgewendeter Arbeit A . Unter der Forderung, dass die Wärmeübertragung reversibel sei, lässt sich die Gütezahl ν beschreiben als [4]

$$\nu_{ideal} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (1)$$

Diese Gütezahl beschreibt allerdings nur eine ideale Wärmepumpe. Die Gütezahl einer realen Wärmepumpe ist begrenzt durch [4]

$$\nu_{real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (2)$$

Aus diesen Formeln lässt sich erkennen, dass der Arbeitsaufwand mit geringer Temperaturdifferenz kleiner wird.

Bei einer realen Wärmepumpe wird ein reales Gas als Transportmedium verwendet, welches beim Verdampfen eine endotherme Reaktion und beim Kondensieren eine exotherme Reaktion ausführt. Das Gas, welches eine möglichst große Kondensationswärme haben soll, transportiert damit die Energie.

Ein schematischer Aufbau einer Wärmepumpe sieht dabei folgendermaßen aus:

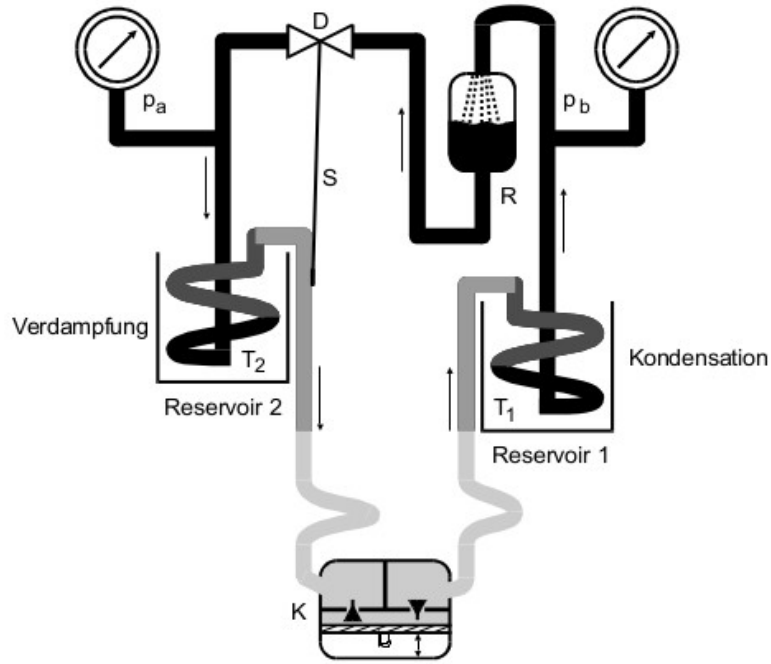


Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau der Wärmepumpe ($p_a > p_b$; $T_1 > T_2$) [4]

Durch den Kompressor K entsteht ein Mediumkreislauf, während das Gas durch das Drosselventil vom Reservoir 1 ins Reservoir 2 strömt. Bei der Temperatur T_1 und dem Druck p_b ist das Gas flüssig, während es bei T_2 und p_a gasförmig ist. Eine Kenngröße zur Beschreibung der realen Wärmepumpe bildet die reale Gütezahl. Um diese zu berechnen wird vorher die pro Zeiteinheit gewonnene Wärmemenge [4]

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t} \quad (3)$$

berechnet. Dabei ist $m_1 c_w$ die Wärmekapazität des Wassers, $m_k c_k$ die Wärmekapazität der Kupferschlange und des Eimers in der Abbildung und $\Delta T_1 / \Delta t$ die zeitliche Änderung der Temperatur. Damit wird Die Gütezahl ν wie folgt berechnet [4]:

$$\nu_{real} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} \quad (4)$$

Dabei ist N die über dem Zeitintervall gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors. Eine weitere wichtige Größe bildet der Massendurchsatz [4]:

$$L \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} \quad (5)$$

mit

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \quad (6)$$

Die Verdampfungswärme L wird dabei mit der Formel [3]

$$\ln(p) = -\frac{L}{R} \frac{1}{T} + \text{const} \quad (7)$$

unter der Annahme bestimmt, dass die Temperaturen weit unter der kritischen Temperatur liegen, das Volumen der Flüssigkeit gegenüber dem Volumen des Gases vernachlässigbar ist und das Gasvolumen durch die ideale Gasgleichung [3]

$$V_D(p, T) = R \frac{T}{p} \quad (8)$$

beschrieben werden kann.

Die letzte relevante Größe ist die mechanische Kompressorleistung N_{mech} , welche die theoretische Größe der Leistung darstellt:[4]

$$N_{mech} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b} - p_a} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (9)$$

ρ bezeichnet die Dichte des Mediums und κ das Verhältnis der Molwärmen C_p und C_v .

3 Fehlerrechnung

Für die Berechnung von Messunsicherheiten werden in diesem Protokoll folgende Formeln verwendet:

Zur Bestimmung eines Mittelwertes wird folgende Formel benutzt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (10a)$$

Zur Bestimmung der Messunsicherheit bei Mittelwerten wird mit der Formel

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{1 - N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (10b)$$

gearbeitet und die Gaußsche Fehlerfortpflanzung wird mit

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\sigma_{x_i})^2} \quad (10c)$$

berechnet. Um Ausgleichsgeraden und ihre Parameter zu bestimmen, werden folgende Formeln verwendet:

$$y = m \cdot x + b \quad (10d)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (10e)$$

$$b = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \overline{xy} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (10f)$$

4 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Benötigt werden: *Zwei Manometer, zwei Thermometer, zwei Rührmotoren, zwei thermisch isolierte Wasserbehälter, ein Kompressor, ein Drosselventil, Dichlordifluormethan, ein Reiniger, ein Wattmeter, eine Stoppuhr, ein Messkolben, und 6 L Wasser.*

Das Experiment wird wie in Abbildung 2 aufgebaut:

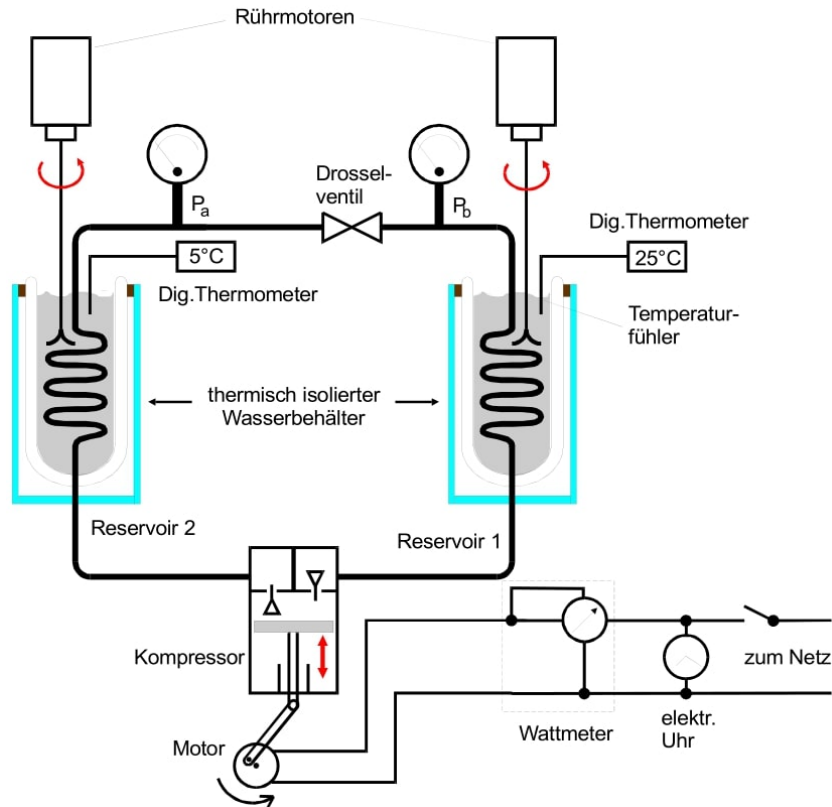


Abbildung 2: Versuchsaufbau der Wärmepumpe [4]

Außerdem soll zwischen dem Manometer P_b und dem Drosselventil ein Reiniger geschaltet werden.

Zu Beginn werden beide Wasserbehälter mit je drei Liter Wasser gefüllt. Diese werden um die zwei Spulen und Rührmotoren platziert. Anschließend werden das Wattmeter und der Kompressor eingeschaltet. Mithilfe der Stoppuhr werden nun im Minutentakt die Temperaturen der beiden Reservoirs 1 und 2, die Drücke p_a und p_b , und die erbrachte Leistung P des Kompressors abgelesen. Es werden solange Messwerte aufgenommen, bis die Temperatur in Reservoir 1 auf 50 °C gestiegen ist. Abschließend werden Wattmeter und Kompressor abgeschaltet und beide Reservoirs geleert.

5 Auswertung

Zeit t / s	Druck p_a / bar	Temperatur $T_2 / ^\circ\text{C}$	Druck p_b / bar	Temperatur $T_1 / ^\circ\text{C}$	Leistung P / W
1	3.4	21.3	5.5	22.6	120.00
2	3.6	19.7	6.0	23.8	125.00
3	3.6	18.3	6.0	25.6	125.00
4	3.6	17.4	6.5	26.6	125.00
5	3.4	16.5	7.0	28.1	125.00
6	3.2	15.5	7.5	29.5	125.00
7	3.1	14.5	8.0	31.0	125.00
8	3.0	13.6	8.0	32.3	125.00
9	2.9	12.7	8.5	32.5	125.00
10	2.8	11.5	9.0	34.9	125.00
11	2.6	10.9	9.0	35.9	125.00
12	2.6	10.0	9.0	37.0	125.00
13	2.4	9.2	9.5	37.9	125.00
14	2.4	8.4	10.0	39.0	125.00
15	2.3	7.8	10.0	39.9	115.00
16	2.2	6.9	10.2	40.8	115.00
17	2.2	6.1	10.5	41.6	115.00
18	2.1	5.4	11.0	42.6	115.00
19	2.1	4.7	11.0	43.3	115.00
20	2.0	4.1	11.2	43.9	115.00
21	1.9	3.6	11.5	44.6	115.00
22	1.9	2.9	12.0	45.5	115.00
23	1.9	2.4	12.0	46.1	115.00
24	1.8	1.9	12.0	46.7	115.00
25	1.8	1.4	12.0	47.4	115.00
26	1.8	0.8	12.7	48.0	115.00
27	1.7	0.3	13.0	48.6	115.00
28	1.7	-0.2	13.0	49.0	115.00
29	1.7	-0.4	13.9	49.6	115.00
30	1.7	-0.3	14.0	50.0	115.00

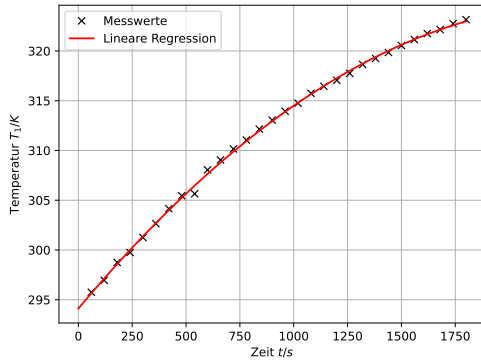
Tabelle 1: Messwerte der Wärmepumpe

Der Temperaturverlauf der einzelnen Reservoirs werden mithilfe der Messwerte aus Tabelle 1 erstellt. Die für die Graphen 3a und 3b relevanten Parameter a , b und c wurden mit dem Python Befehl `np.polyfit()` [5] berechnet und lauten wie folgt:

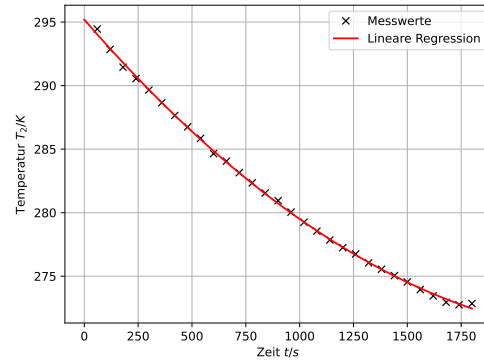
$$a_{T_1} = (-5,40 \pm 0,21) \cdot 10^{-6} \quad a_{T_2} = (3,80 \pm 0,11) \cdot 10^{-6} \quad (11a)$$

$$b_{T_1} = (25,80 \pm 0,31) \cdot 10^{-3} \quad b_{T_2} = -0,0195 \pm 0,0002 \quad (11b)$$

$$c_{T_1} = 294,1 \pm 0,1 \quad c_{T_2} = 295,2 \pm 0,1 \quad (11c)$$



(a) Nichtlineare Regression der Temperatur T_1



(b) Nichtlineare Regression der Temperatur T_2

Abbildung 3: Nichtlineare Regressionen der Temperaturen

Um die zwei Differentialquotienten $\Delta T_1/\Delta t$ und $\Delta T_2/\Delta t$ zu berechnen, wird die Formel

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = 2At + B \quad (12)$$

benötigt. Mit der gaußschen Fehlerfortpflanzung (10c) folgt:

$$\sigma_{T_i} = \sqrt{4t^2 \cdot \sigma_{A_i}^2 + t^2 \cdot \sigma_{B_i}^2} \quad \text{mit } i = 1, 2 \quad (13)$$

Um mit der Fehlerfortpflanzung (13) auf die Differentialquotienten $\Delta T_1/\Delta t$ und $\Delta T_2/\Delta t$ zu schließen werden die Temperaturen $t = 26,6^\circ\text{C}$, $39,9^\circ\text{C}$, $47,4^\circ\text{C}$ und $49,6^\circ\text{C}$ für T_1 verwendet. Für T_2 werden die Temperaturen $t = 17,4^\circ\text{C}$, $7,8^\circ\text{C}$, $1,4^\circ\text{C}$ und $-0,4^\circ\text{C}$ benutzt. Die daraus folgenden Differentialquotienten lauten:

Temperatur pro Zeit $\frac{\Delta T_1}{\Delta t} \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C s}^{-1}$	Temperatur pro Zeit $\frac{\Delta T_2}{\Delta t} \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C s}^{-1}$
6.9 ± 0.7	-6.2 ± 0.5
9.5 ± 0.6	-8.0 ± 0.4
16.0 ± 0.5	-12.6 ± 0.3
23.2 ± 0.4	-17.7 ± 0.2

Tabelle 2: Zeitliche Veränderung der Temperatur

Für die Gütezahl wird die gemittelte Leistung N des Kompressors benötigt. Diese wird mit den Messwerten aus Tabelle 1 und der Mittelwertsformel (10a) bestimmt. Die gemittelte Leistung lautet wie folgt:

$$N = (119,5 \pm 0,9) \text{ W} \quad (14)$$

Mithilfe der Formel (4), der gemittelten Leistung N (14) und der Fehlerfortpflanzung (10c)

$$\sigma_{\nu_{real}} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \cdot \sigma_{\frac{\Delta Q_i}{\Delta t}}^2 + \left(\frac{-\Delta Q_i}{\Delta t N^2}\right)^2 \cdot \sigma_N^2} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

ergeben sich die in der Tabelle 3 aufgeführten Werte für ν_{real} .

Temperatur $T_1 / ^\circ\text{C}$	Wärmemenge $\frac{dQ_1}{dt} / \text{J s}^{-1}$	Gütezahl ν_{real}	Gütezahl ν_{ideal}
49.6	110.3±11.3	0.9±0.1	6.5
47.4	151.8±10.1	1.3±0.1	7.0
39.9	255.6±7.5	2.1±0.1	9.8
26.6	369.8±5.6	3.1±0.1	32.6
Temperatur $T_2 / ^\circ\text{C}$	Wärmemenge $\frac{dQ_2}{dt} / \text{J s}^{-1}$	Massendurchsatz $\frac{dm}{dt} \cdot 10^{-4} / \text{kg s}^{-1}$	
-0.4	-98.8±7.9	-6.5±0.5	
1.4	-128.1±7.1	-8.4±0.5	
7.8	-201.3±5.2	-13.2±0.5	
17.4	-281.7±3.9	-18.5±0.6	

Tabelle 3: Tabelle der Rechnungsergebnisse

Die Werte für die Wärmemengen werden dabei mit den Formeln (3) und (6) sowie den Werten aus Tabelle 2 berechnet. Die spezifische Wärmekapazität für Wasser beträgt $c_W = 4,182 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ [2] und die Wärmekapazität für die Kupferschlange und den Eimer betragen jeweils $C_k = 750 \text{ J K}^{-1}$. Der Massendurchsatz wird mit Formel (5), der Verdampfungswärme L (17c), sowie den vier Werten für $\Delta Q_2/\Delta t$ aus Tabelle 3 bestimmt.

Für den folgenden Graphen 4 der Verdampfungswärme von Dichlordifluormethan werden die Parameter m und b verwendet, wobei m mit der Formel (10e) berechnet wird. Die Werte des Druckes und der Temperatur werden der Tabelle 1 entnommen.

$$m_L = -2209 \pm 58 \quad (16a)$$

$$b_L = 20,6 \pm 0,2 \quad (16b)$$

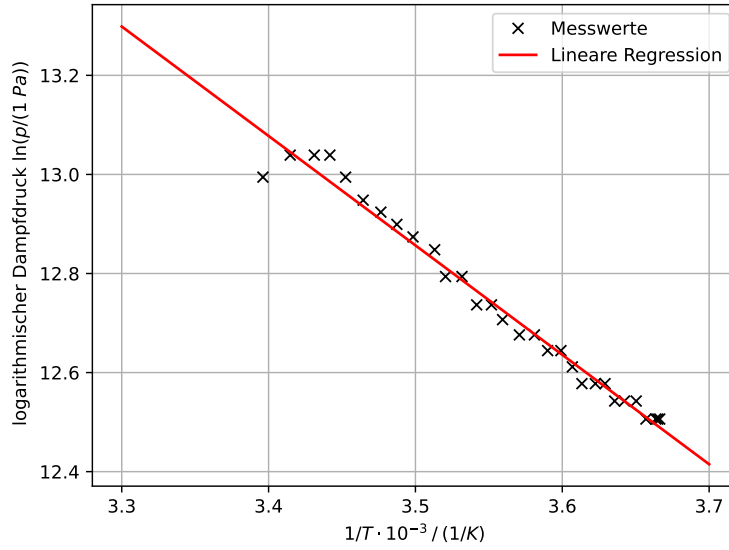


Abbildung 4: Lineare Regression der Verdampfungswärme L

Die Verdampfungswärme von Dichlordifluormethan lässt sich somit mit der Ausgleichsgeraden des Graphen 4, der Gleichung (7) und der molaren Masse von Dichlordifluormethan $0,12091 \text{ kg mol}^{-1}$ [1] bestimmen:

$$m = -\frac{L}{R} \quad (17a)$$

$$L = -R \cdot m \quad (17b)$$

$$L = (152 \pm 4) \text{ kJ kg}^{-1} \quad (17c)$$

Für die mechanische Leistung N_{mech} des Kompressors wird die Formel (5) und die für Dichlordifluormethan spezifischen Werte [4] $\rho_0 = 5,51 \text{ g L}^{-1}$ bei $T = 0^\circ\text{C}$ und $p = 1 \text{ bar}$, $\kappa = 1.14$ zusammen mit den Drücken für die vorherig verwendeten vier Zeiten in Formel (9) eingesetzt.

Die daraus folgenden mechanischen Leistungen betragen:

$$N_{mech1} = (-53 \pm 4) \text{ W} \quad \text{mit} \quad t = 29 \text{ min} \quad (18a)$$

$$N_{mech2} = (-63 \pm 4) \text{ W} \quad \text{mit} \quad t = 25 \text{ min} \quad (18b)$$

$$N_{mech3} = (-90 \pm 3) \text{ W} \quad \text{mit} \quad t = 15 \text{ min} \quad (18c)$$

$$N_{mech4} = (-68 \pm 2) \text{ W} \quad \text{mit} \quad t = 4 \text{ min} \quad (18d)$$

6 Diskussion

Die Graphen 3a und 3b geben einen physikalisch sinnvollen Temperaturverlauf der einzelnen Reservoirs wieder. Dies lässt sich anhand der in Tabelle 3 angegebenen Wärmemengen für beide Reservoirs erkennen. Werden die Differenzen der Wärmemengen betrachtet, ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$|(110 \pm 11) \text{ J s}^{-1}| \quad -|(-99 \pm 8) \text{ J s}^{-1}| \quad = (11 \pm 14) \text{ J s}^{-1} \quad (19a)$$

$$|(152 \pm 10) \text{ J s}^{-1}| \quad -|(-128 \pm 7) \text{ J s}^{-1}| \quad = (24 \pm 12) \text{ J s}^{-1} \quad (19b)$$

$$|(256 \pm 7) \text{ J s}^{-1}| \quad -|(-201 \pm 5) \text{ J s}^{-1}| \quad = (54 \pm 9) \text{ J s}^{-1} \quad (19c)$$

$$|(370 \pm 6) \text{ J s}^{-1}| \quad -|(-282 \pm 4) \text{ J s}^{-1}| \quad = (88 \pm 7) \text{ J s}^{-1} \quad (19d)$$

Die Differenzen (19) vergrößern sich, was den physikalischen Erwartungen gleicht. Da es sich hier um eine reale Wärmepumpe handelt, ist ein Energieverlust zu erwarten, da der Kompressor Wärmeenergie absondert. Demnach sind die Graphen 3 nicht deckungsgleich. Der neunte Wert im Graphen 3a weicht ein wenig von der nicht-linearen Regressionslinie ab. Dies ließe sich dadurch erklären, dass beim notieren der Messwerte nicht rechtzeitig der Wert abgelesen wurde.

Der Graph der Verdampfungswärme 4 erscheint ebenso physikalisch sinnvoll, da die Verdampfungswärme von Dichlordifluormethan mit steigender Temperatur sinkt. Die Messwerte aus Graph 4 befinden sich, abgesehen von dem ersten Wert, nahe der Ausgleichsgeraden. Dieser könnte sich durch eine Messungenauigkeit beim Ablesen während des Versuchs erklären lassen.

Bei der mechanischen Leistung N_{mech} (18) wird deutlich, dass die Arbeit bei voranschreitender Zeit abnimmt. Dies lässt sich mit dem Energieniveau des Gases zum jeweiligen Zeitpunkt erklären. Das Gas befindet sich bei $t = 0 \text{ min}$ auf Raumtemperatur (ca. 22°C). Da das Drosselventil ab einer vorab eingestellten Temperatur die Zufuhr reduziert, erreicht weniger Gas den Kompressor. Demnach wird vom Kompressor weniger Arbeit verrichtet, um das Gas zu komprimieren, also sinkt die mechanische Arbeit. Dennoch sticht der Wert (18c) heraus, da dieser deutlich höher liegt als die anderen Werte. Erwartet wird ein stetiger Verlauf der Leistung, weshalb der Wert (18c) zwischen den Werten (18b) und (18d) liegen sollte.

Die Größenordnung der realen Güteziffern ν_{real} aus Tabelle 3 ist deutlich kleiner als die der idealen. Dies hat mehrere Gründe. Zum einen handelt es sich bei der realen Wärmepumpe nicht um ein geschlossenes System, da Wärme über mehrere Wege verloren gehen kann. Die Reservoirs sind keine perfekten Isolatoren und strahlen Wärme ab. Wie oben schon erwähnt, wandelt der Kompressor einen Teil der erhaltenen Leistung in Wärmeenergie um. Neben dem Energieverlust spielen die Näherungen, welche für die Eigenschaften der Leitung und des Gases relevant sind, eine Rolle. Da die Güteziffern auf Werten aufbauen, welche mithilfe von Näherungen berechnet wurden, wie zum Beispiel $\Delta Q_1/\Delta t$ und $1/N$, verliert das Endergebnis an Genauigkeit.

Literatur

- [1] Institut für Arbeitsschutz der Deutschen Gesetzlichen Unfallversicherung. Dichlordifluormethan. [http://gestis.itrust.de/nxt/gateway.dll/gestis_de/026210.xml?f=templates\\$fn=default.htm\\$3.0](http://gestis.itrust.de/nxt/gateway.dll/gestis_de/026210.xml?f=templates$fn=default.htm$3.0). [Online; besucht am 12. Januar 2020]. 2019.
- [2] Wolfgang Demtröder. „Wärmelehre“. In: Experimentalphysik 1. Springer, 2018, S. 265–334.
- [3] TU Dortmund. Versuchsanleitung zu Versuch Nr.203 Verdampfungswärme. 2019.
- [4] TU Dortmund. Versuchsanleitung zu Versuch Nr.206 Wärmepumpe. 2019.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.