

V103

Biegung elastischer Stäbe

Christopher Breitfeld

christopher.breitfeld@tu-dortmund.de

Henry Krämerkämper

henry.kraemerkaemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 29.06.2021

Abgabe: 06.07.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Problemstellung	3
2.2	Berechnung der Durchbiegung bei einseitiger Aufhängung	3
2.3	Berechnung der Durchbiegung bei beidseitiger Aufhängung	6
3	Durchführung	7
3.1	Einseitige Einspannung des Stabes	8
3.2	Beidseitige Einspannung des Stabes	8
4	Auswertung	8
4.1	Messdaten	8
4.2	Einseitige Einspannung	9
4.3	Runder Stab bei zweiseitiger Einspannung	11
5	Diskussion	12
5.1	Abschätzung der Metalle	12
5.2	Vergleich der Elastizitätsmoduln mit Literaturwerten	13
5.3	Fehlerquellen	14
	Literatur	14

1 Einleitung

Im folgenden Versuch soll die Biegung eines elastischen homogenen Stabes untersucht und dabei das Elastizitätsmodul bestimmt werden. Hierfür werden runde sowie eckige Stäbe bei ein- und beidseitiger Einspannung gebogen.

2 Theorie

2.1 Problemstellung

Eine Kraft, die an eine Oberfläche angreift, erzeugt pro Flächeneinheit eine Spannung. Diese kann senkrecht oder aber tangential zu der Oberfläche wirken und wird dann Normalspannung oder Tangential- beziehungsweise Schubspannung genannt. Der Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ und der erzeugten Längenänderung $\Delta L/L$ eines Körpers wird beschrieben durch das Hookesche Gesetz. Es ergibt sich zu

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L}. \quad (1)$$

Hierbei meint E das Elastizitätsmodul, einen Proportionalitätsfaktor, der eine Materialkonstante des jeweiligen Körpers ist und der experimentell mithilfe der Biegung eines Körpers bestimmt werden kann. Hierfür beschreibt man die Biegung mit einer Funktion $D(x)$. Für diese gilt

$$D(x) = D_G(x) + D_0(x). \quad (2)$$

Hierbei bezeichnet $D_G(x)$ die Auslenkung bei einem angehängten Gewicht an den Körper und $D_0(x)$ die Auslenkung des Körpers in der Ruhelage ohne ein angehängtes Gewicht. Um die Funktion zu bestimmen, können zwei Verfahren verwendet werden. Auf diese wird im Folgenden näher eingegangen.

2.2 Berechnung der Durchbiegung bei einseitiger Aufhängung

Im folgenden Abschnitt wird die Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung nach in Abbildung 5 dargestelltem Aufbau untersucht, um die Funktion $D(x)$ sowie das Elastizitätsmodul zu erhalten.

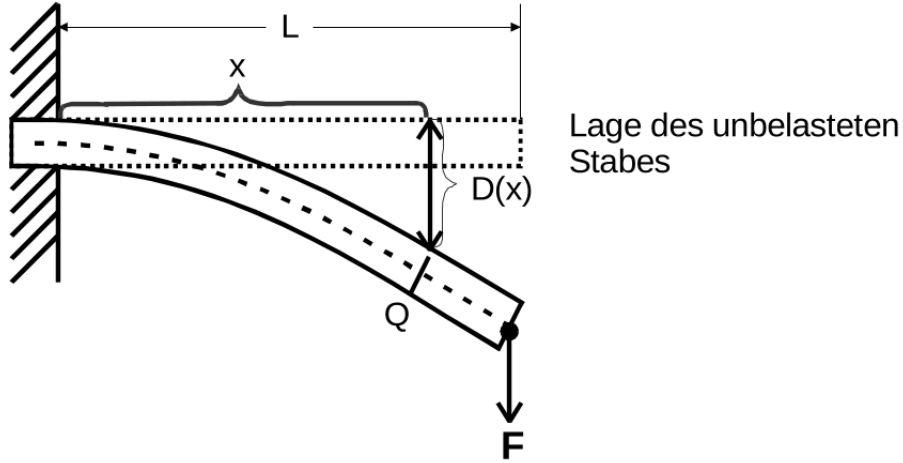


Abbildung 1: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung. [6]

Durch ein angehängtes Gewicht wird ein Drehmoment M_F auf den Querschnitt Q des Stabes ausgeübt. Aufgrund der Elastizität des Stabes wirken diesem Drehmoment im inneren des Stabes Normalspannungen entgegen. Diese erzeugen ein Drehmoment M_σ . Innerhalb des Stabes gibt es eine neutrale Faser, in der keinerlei Spannungen auftreten. Unter Vernachlässigung des durch das Eigengewicht des Stabes erzeugten Drehmoments ergibt sich eine Gleichgewichtslage, in der gilt

$$M_F = M_\sigma. \quad (3)$$

Hierbei lässt sich M_σ durch Integration über den Querschnitt Q des Stabes ermitteln:

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) dq. \quad (4)$$

y meint hier den Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser des Stabes x sowie $\sigma(y)$ die Normalspannung. M_F wirkt durch die Länge L des Stabes mit einem Hebel, weshalb sich der Betrag des Drehmoments M_F wie folgt bestimmen lässt:

$$M_F = F(L - x). \quad (5)$$

Daher ergibt sich die auch als Momentengleichung bezeichnete Gleichung (3) mit Gleichung (4) sowie Gleichung (5) zu

$$F(L - x) = \int_Q y \sigma(y) dq. \quad (6)$$

Die hier auftretende Normalspannung $\sigma(y)$ lässt sich nach dem Hookeschen Gesetz (1) bestimmen. Sie ergibt sich zu

$$\sigma(y) = E \frac{\delta x}{\Delta x}. \quad (7)$$

y gibt hier den Abstand zu der neutralen Faser des Stabes der Länge Δx an. Durch die Durchbiegung entsteht eine Längenänderung der neutralen Faser von Δx zu δx . Diese Längenänderung ergibt sich nach Abbildung 2 zu

$$\delta x = y \frac{\Delta x}{R}. \quad (8)$$

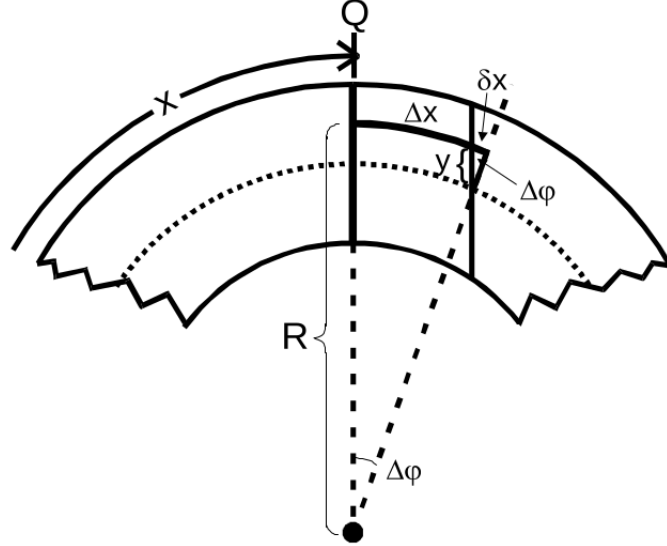


Abbildung 2: Schematische Abbildung des gebogenen Stabes zur Bestimmung der Normalspannung. [6]

Unter Verwendung von Gleichung (7), Gleichung (8) sowie der Näherung

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 D}{dx^2}$$

ergibt sich für die Normalspannung

$$\sigma(y) = Ey \frac{d^2 D}{dx^2}. \quad (9)$$

Setzt man nun in die Momentengleichung (6) den so erhaltenen Ausdruck (9) für die Normalspannung ein, erhält man

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 dq = F(L - x). \quad (10)$$

Hierbei wird der in (10) auftretende Term

$$I := \int_Q y^2 dq(y) \quad (11)$$

als Flächenträgheitsmoment bezeichnet. Aus Gleichung (10) kann nun durch Integration die Durchbiegung $D(x)$ bestimmt werden:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (12)$$

Hierbei gilt $0 \leq x \leq L$. Das Flächenträgheitsmoment (11) ergibt sich speziell für einen eckigen Stab zu

$$I = \frac{1}{12} a^3 b \quad (13)$$

wobei a und b die Kantenlängen des Stabes bezeichnen. Für einen runden Stab mit Radius R ergibt sich das Integral (11) zu

$$I = \frac{\pi}{4} R^4. \quad (14)$$

2.3 Berechnung der Durchbiegung bei beidseitiger Aufhängung

Im folgenden Abschnitt wird nun die Durchbiegung eines homogenen Stabes bei beidseitiger Aufhängung untersucht. Hierfür wird der in Abbildung 3 schematisch dargestellte Aufbau verwendet.

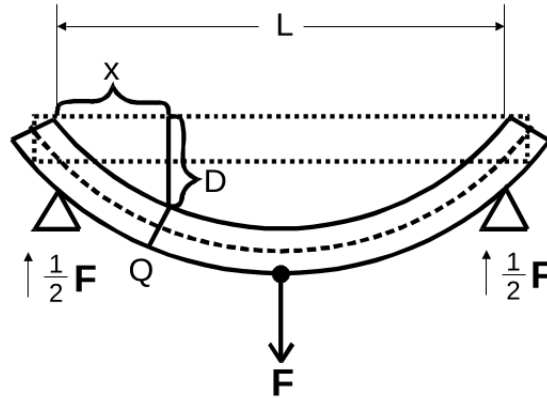


Abbildung 3: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei beidseitiger Aufhängung. [6]

Hier ergibt sich durch die Kraft F , ganz analog zu 2.2, ein Drehmoment. Durch die beidseitige Aufhängung hat dies nun für $0 \leq x \leq L/2$ die Form

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad (15)$$

und für $L/2 \leq x \leq L$ die Form

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x). \quad (16)$$

Unter Verwendung dieses Drehmoments ergibt sich eine Momentengleichung:

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F}{EI} x \quad (17)$$

für $0 \leq x \leq L$ sowie

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{1}{2} \frac{F}{EI} (L - x) \quad (18)$$

für $L/2 \leq x \leq L$. Integriert man Gleichung (17) und Gleichung (18), erhält man unter Verwendung der Tangentialbedingung

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2 x - 4x^3) \quad (19)$$

für $0 \leq x \leq L$ und

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2 x - L^3) \quad (20)$$

für $L/2 \leq x \leq L$.

Aus den Gleichungen (12), (19) sowie (20) lässt sich nun durch Umformen das Elastizitätsmodul bestimmen.

3 Durchführung

Zu Beginn werden die verwendeten Stäbe ausgemessen. Hierbei wird die Länge, der Durchmesser sowie das Gewicht notiert. In folgender Abbildung 4 ist der Aufbau des Versuches schematisch dargestellt.

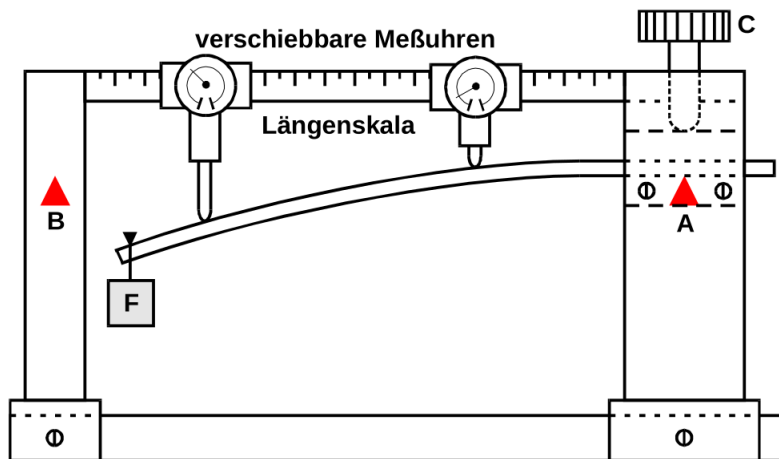


Abbildung 4: Schematischer Aufbau der verwendeten Apparatur. [6]

Hierbei können die Probenstäbe entweder einseitig oder beidseitig eingespannt werden. Es gibt zwei Auflagepunkte, von denen der Auflagepunkt A eine Spannvorrichtung

besitzt, um den Stab einseitig einspannen zu können. Die Gewichte werden bei einseitiger Einspannung an das nicht eingespannte Ende gehängt, bei beidseitiger Einspannung wird das Gewicht bei $x = L/2$ befestigt. Die Durchbiegung des Stabes kann mithilfe der beiden beweglichen Messuhren ermittelt werden. Die Messuhren besitzen eine Mikrometer-Skala und werden auf einer Millimeter-Skala positioniert. Die Gewichte werden so gewählt, dass die maximale Durchbiegung zwischen 3 mm bis 7 mm liegt.

3.1 Einseitige Einspannung des Stabes

Die im Folgenden beschriebene Messung wird einmal für einen runden und einmal für einen eckigen Stab durchgeführt. Der Stab wird einseitig in die in Abbildung 4 gezeigte Apparatur eingespannt. Die eine Messuhr wird auf den Anfang der Messskala geschoben, die andere wird hier nicht verwendet. Das Gewicht wird nach Messung der Durchbiegung in der Ruhelage angehängt. Nun wird die Messuhr in regelmässigen Abständen an der Skala entlang bewegt und die Messwerte werden aufgenommen.

3.2 Beidseitige Einspannung des Stabes

Die im Folgenden beschriebene Messung wird mit einem runden Stab durchgeführt. In der in Abbildung 4 beschriebenen Apparatur wird der Stab an den Punkten **A** und **B** eingespannt. Die eine Messuhr wird erneut auf den Anfang der Skala geschoben, die andere auf das Ende der Skala. Die Messuhren werden in regelmässigen Abständen auf die Mitte des Stabes zubewegt.

4 Auswertung

4.1 Messdaten

In den folgenden Tabellen 1, 2 und 3 sind die nach Kapitel 3 aufgenommenen Messdaten aufgelistet.

Tabelle 1: Abmessungen und Gewicht der Proben, wobei d bei Stab 1 und 2 die Dicke und bei Stab 3 den Durchmesser beschreibt.

Probe	d / cm	L / cm	m / g
Stab 1	1,04	59,3	163,1
Stab 2	1,06	59,3	454,6
Stab 3	1,00	60,2	394,1

Tabelle 2: Messdaten bei einseitiger Einspannung.

$x / \text{ cm}$	$m_1 = 800 \text{ g}$ $D_1 / \text{ mm}$	$m_2 = 1250 \text{ g}$ $D_2 / \text{ mm}$	$m_3 = 550 \text{ g}$ $D_3 / \text{ mm}$
5	0,099	0,050	0,085
10	0,360	0,180	0,317
15	0,781	0,400	0,730
20	1,321	0,799	1,210
25	2,152	1,100	1,900
30	2,860	1,525	2,600
35	3,350	1,900	3,280
40	4,155	2,333	4,145
45	5,030	2,805	4,875
50	5,820	3,300	5,530

Tabelle 3: Messdaten bei zweiseitiger Einspannung.

$x / \text{ cm}$	$m_3 = 1550 \text{ g}$ $D_3 / \text{ mm}$
5	0,045
10	0,150
15	0,295
20	0,420
25	0,510
30	0,570
35	0,515
40	0,455
45	0,330
50	0,175
55	0,000

4.2 Einseitige Einspannung

Um die Elastizitätsmoduln E der Proben zu berechnen, wird der Zusammenhang (12) zwischen x und $D(x)$ betrachtet. Durch die Ersetzung

$$\xi = Lx^2 - \frac{x^3}{3} \quad (21)$$

wird $D(x)$ zu der linearen Funktion

$$D(\xi) = \frac{mg}{2EI}\xi =: a\xi + b. \quad (22)$$

In Abbildung 5 sind die Messdaten aus Tabelle 2 nach der Ersetzung (21) aufgetragen.

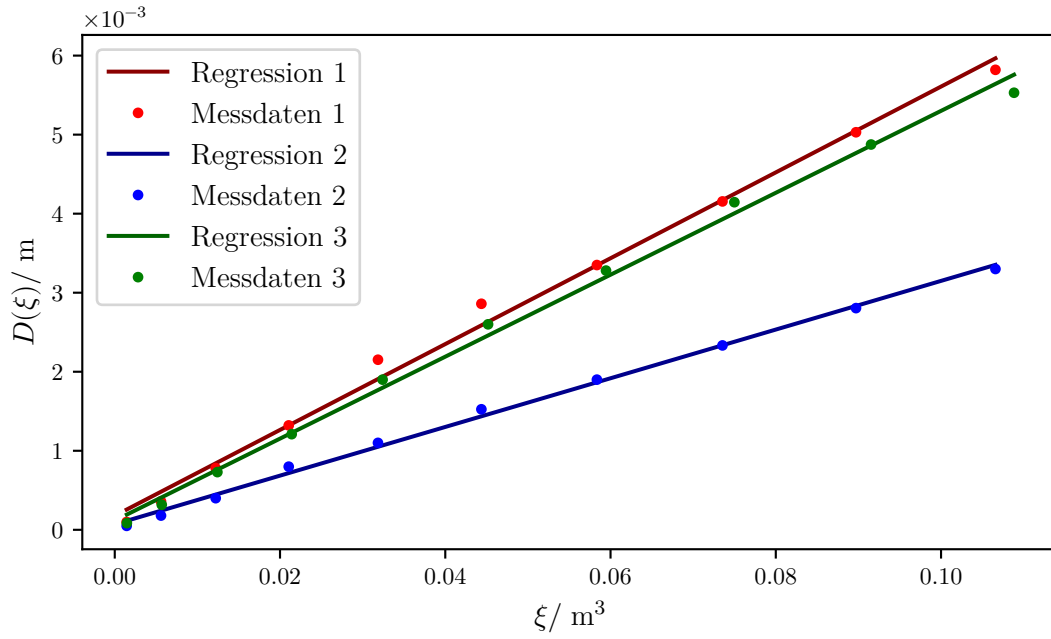


Abbildung 5: $(\xi$ - D)-Diagramm mit linearer Regression für alle drei Proben.

Mit *numpy* [5] ist eine lineare Regression berechnet worden, welche die Form von Gleichung (22) besitzt. Die berechneten Parameter der Geraden lauten

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,0543 \pm 0,0014) \text{ m}^{-2} & b_1 &= (0,18 \pm 0,08) \text{ mm} \\ a_2 &= (0,0308 \pm 0,0006) \text{ m}^{-2} & b_2 &= (0,07 \pm 0,03) \text{ mm} \\ a_3 &= (0,0518 \pm 0,0011) \text{ m}^{-2} & b_3 &= (0,12 \pm 0,07) \text{ mm} . \end{aligned}$$

Die Unsicherheiten sind dabei von *uncertainties* [3] berechnet worden. Nach Gleichung (22) kann aus der Steigung a der Geraden das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{mg}{2aI} \quad (23)$$

berechnet werden. Das Flächenträgheitsmoment ist dabei durch Gleichung (13) für die eckigen Stäbe 1 und 2 und durch (14) für den runden Stab 3 gegeben. Durch Einsetzen ergeben sich für die Elastizitätsmoduln

$$\begin{aligned} E_1 &= (74,13 \pm 1,20) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \\ E_2 &= (189,20 \pm 3,35) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \\ E_3 &= (106,02 \pm 2,34) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} . \end{aligned}$$

4.3 Runder Stab bei zweiseitiger Einspannung

Analog zu Abschnitt 4.2 werden neue Argumente η definiert, welche zu einem linearen Zusammenhang zwischen η und $D(\eta)$ führen. Nach den Gleichungen (19) und (20) wird

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 3L^2x - 4x^3 \\ \eta_2 &= 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\end{aligned}$$

gewählt, sodass sich

$$D(\eta) = \frac{mg}{48EI} =: c\eta + d \quad (24)$$

ergibt. η_1 beschreibt dabei nach Gleichung (19) das Intervall $[0, L/2]$ und η_2 ist für $(L/2, L]$ gültig. In den Abbildungen 6 und 7 sind die Messdaten für beide Bereiche in ein $(\eta-D)$ -Diagramm aufgetragen.

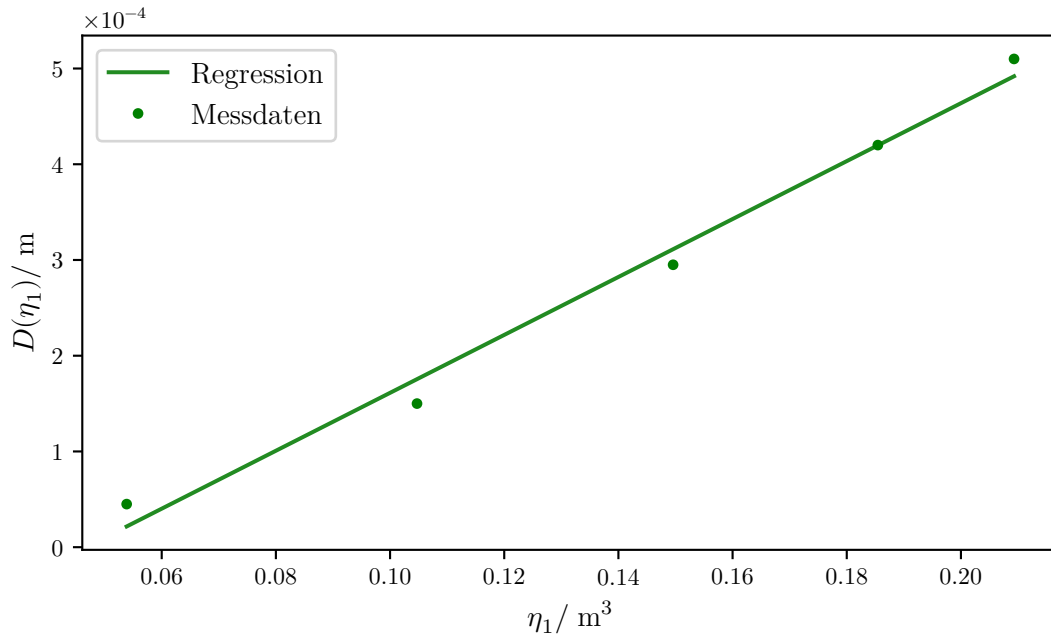


Abbildung 6: (η_1-D) -Diagramm mit linearer Regression für Stab 3.

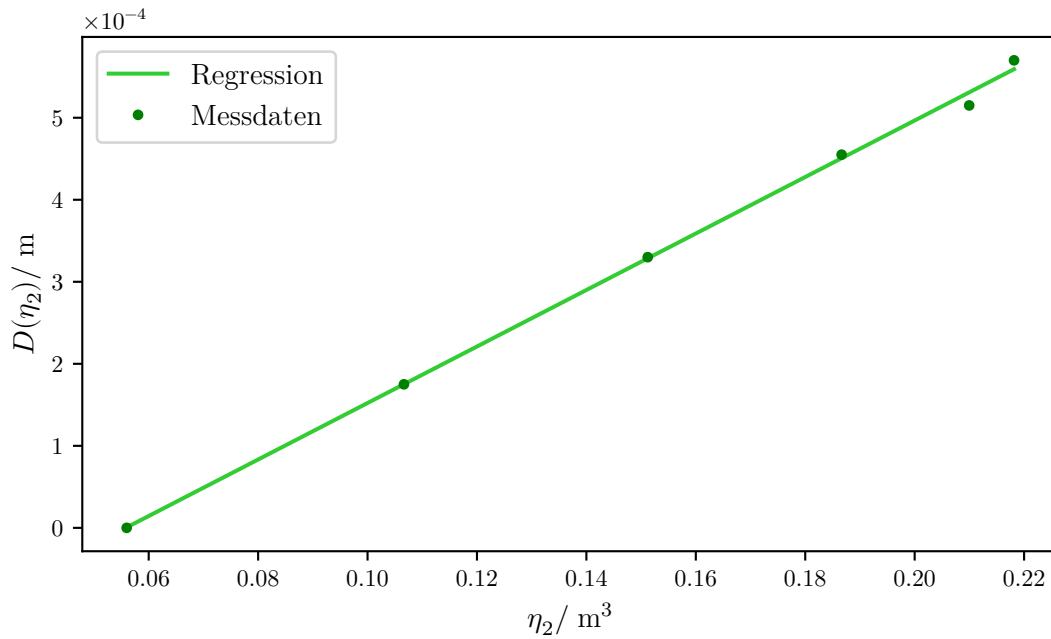


Abbildung 7: $(\eta_2$ - D)-Diagramm mit linearer Regression für Stab 3.

Die Parameter der von *numpy* [5] berechneten Regression mit den von *uncertainties* [3] berechneten Unsicherheiten lauten

$$\begin{aligned} c_1 &= (0,003\,03 \pm 0,000\,20) \text{ m}^{-2} & d_1 &= (-0,141 \pm 0,030) \text{ mm} \\ c_2 &= (0,003\,44 \pm 0,000\,07) \text{ m}^{-2} & d_2 &= (-0,192 \pm 0,012) \text{ mm} . \end{aligned}$$

Durch die Steigung c der Geraden kann nun wieder das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{mg}{48cI}$$

berechnet werden. Es ergibt sich für die jeweilige Regression

$$\begin{aligned} E_1 &= (213,32 \pm 13,77) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \\ E_2 &= (187,34 \pm 3,80) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} . \end{aligned}$$

5 Diskussion

5.1 Abschätzung der Metalle

Um die Ergebnisse aus Kapitel 4 mit Litreaturwerten vergleichen zu können, wird nun eine Abschätzung vorgenommen, um welche Metalle es sich bei den Proben handeln

könnte. Dafür wird aus den Abmessungen das Volumen V und dann mit der Masse der Stäbe die Dichte

$$\rho = \frac{m}{V}$$

berechnet. Die berechneten Werte sind in Tabelle 4 aufgelistet. Die prozentuale Abweichung p eines Wertes β bezüglich des Wertes α wird dabei mit

$$p(\alpha, \beta) = 100 \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$$

berechnet.

Aufgrund der Dichte und dem äußeren Erscheinungsbild, wie die Farbe des Metalls oder Verfärbungen die wahrscheinlich durch Oxidation herrühren, wird vermutet, dass es sich bei Stab 1 um Aluminium, bei Stab 2 um Eisen und bei Stab 3 um Messing handelt. Es könnte sich jedoch auch um andere Metallegierungen handeln, was die weitere Diskussion erschwert. Zudem besteht das Problem, dass bei Messing als Legierung die Eigenschaften von der genauen Zusammensetzung abhängen.

Tabelle 4: Vergleich der berechneten Dichten mit Literaturwerten [4] zu den vermuteten Metallen.

Probe	$\rho_{mess}/ \text{ g/cm}^3$	$\rho_{lit}/ \text{ g/cm}^3$	$p/ \%$
Stab 1 / Aluminum	2,54	2,7	5,82
Stab 2 / Eisen	6,82	7,9	13,64
Stab 3 / Messing	8,34	8,4	0,77

Die Abweichung von den Literaturwerten der vermuteten Metalle liegt im Rahmen der Messungenauigkeit, sodass im Weiteren davon ausgegangen wird, dass die Zuordnung der Metalle korrekt ist.

5.2 Vergleich der Elastizitätsmoduln mit Literaturwerten

Ein Vergleich der berechneten Elastizitätsmoduln mit Literaturwerten (Aluminium und Messing [2]; Eisen [1]) findet sich in Tabelle 5.

Tabelle 5: Vergleich der berechneten Elastizitätsmoduln für die einseitige Einspannung mit Literaturwerten [2] [1].

Probe	$E_{mess}/ \text{ kN/mm}^2$	$E_{lit}/ \text{ kN/mm}^2$	$p/ \%$
Aluminum	74,13 ± 1,96	70	5,9
Eisen	189,20 ± 3,51	196	3,5
Messing	106,02 ± 2,34	78-123	35,9-13,8

Die geringen Abweichungen der berechneten Elastizitätsmoduln von den Literaturwerten lässt für Aluminum und Eisen nicht auf einen systematischen Messfehler schließen. Bei Messing hängt die Abweichung von dem Literaturwert stark von eben diesem ab, da Messing wie bereits erwähnt eine Legierung ist. Der berechnete Wert liegt jedoch recht mittig in dem Bereich, welchen die Literatur angibt.

Die Abweichung zwischen der einseitigen und der zweiseitigen Methode ist deutlich signifikanter. Es ergeben sich

$$\begin{aligned} p(E_{me,\eta,1}, E_{me,\eta,2}) &= 12,12 \% \\ p(E_{me,\xi}, E_{me,\eta_1}) &= 101,20 \% \\ p(E_{me,\xi}, E_{me,\eta_2}) &= 76,73 \% , \end{aligned}$$

wobei das ξ nach Abschnitt 4.2 für die einseitige und das η nach Abschnitt 4.3 für die zweiseitige Methode steht. Da das berechnete Elastizitätsmodul für die einseitige Einspannung den Literaturwert in einem hohen Maße gleicht, ist davon auszugehen, dass bei der zweiseitigen Methode Fehler aufgetreten sind.

5.3 Fehlerquellen

Die Messuhren, mit welcher D ausgemessen wurde, schienen sehr störanfällig zu sein. So änderte sich der angezeigte Wert, wenn der Tisch, auf welchem die Apparatur stand berührt wurde. Bei dem Messvorgang viel zudem auf, dass sich die Messuhren nicht zuverlässig in ihre Ausgangsposition zurück begaben, wenn das Gewicht vorsichtig befestigt und wieder abgenommen wurde. Wie groß der Einfluss des Aufhängen des Gewichts ist, kann nur schwer abgeschätzt werden, da auch das Abnehmen den Fehler verursacht haben kann.

Bei den Proben fiel auf, dass die Stäbe teils ohne zusätzliche Gewichte schon verformt waren und Unebenheiten auf der Oberfläche besaßen. Dadurch, dass bei dem Messvorgang nur Differenzen der Anzeigen betrachtet wurden, ist der Einfluss dieses Umstandes bei den eckigen Stangen 1 und 2 wahrscheinlich nicht allzu groß. Bei der runden Stange 3 kommt jedoch das Problem hinzu, dass die Rollen der Messuhren nicht immer über den höchsten Punkt der Stange fuhren. Dies könnte die Messung negativ beeinflusst haben. Da bei der zweiseitigen Methode kaum eine Biegung zu erkennen war, wurde ein recht hohes Gewicht von $m = 1,55 \text{ kg}$ verwendet. Es ist möglich, dass die dadurch entstandene hohe Auslenkung die Näherungen aus Kapitel 2 verletzt werden. Dies könnte zu einer fehlerhaften Berechnung des Elastizitätsmodul führen und somit die hohen Abweichungen zwischen den beiden Methoden erklären.

Literatur

- [1] *E-Modul*. 2021. URL: <https://wiki.uni-due.de/tud/index.php/E-Modul> (besucht am 03.07.2021).

- [2] *Elastizitätsmodul*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html> (besucht am 03.07.2021).
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Metallglossar*. 2021. URL: <https://www.scheideanstalt.de/metallglossar/metallglossar/> (besucht am 03.07.2021).
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 103 Biegung elastischer Stäbe*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021. URL: https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1587045/mod_resource/content/1/V103.pdf.