

## **Geometrische Optik**

Christopher Krause  
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus  
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.07.2018                      Abgabe: 09.07.2018

Physik  
Korrektur

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Eigenschaften von Linsen . . . . .	3
2.2 Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Bessel . . . . .	4
2.3 Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Abbe . . . . .	5
<b>3 Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1 Bestimmung der Brennweite mit der Bildweite und der Gegenstandsweite	6
4.2 Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Bessel . . . . .	10
4.3 Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Abbe . . . . .	12
<b>5 Diskussion</b>	<b>15</b>
<b>Literatur</b>	<b>16</b>

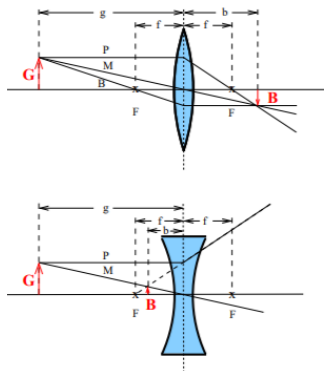
# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll die Linsengleichung und das Abbildungsgesetz verifiziert werden. Zusätzlich soll die Brennweite einer Sammellinse und eines Linsensystems mit unterschiedlichen Verfahren bestimmt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Eigenschaften von Linsen

Linsen bestehen meistens aus optisch dichteren Material als die Luft die sie umgeben. Es wird zwischen Sammellinse und Zerstreuungslinse unterschieden. Die Sammellinse bündelt paralleles Licht in einem Brennpunkt. Sowohl Bildweite  $b$  als auch Brennweite  $f$  sind positiv und das entstehende Bild kann auf einen Schirm sichtbar gemacht werden. Für eine Zerstreuungslinse ist die Bildweite und die Brennweite negativ. In Abbildung 1 sind diese beiden Linsen dargestellt.



**Abbildung 1:** Strahlengang einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse [1].

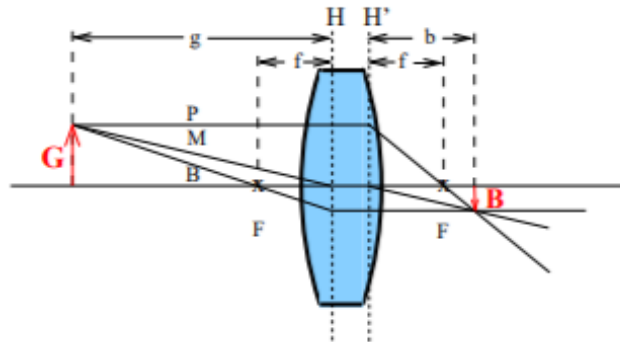
Aus der Bildkonstruktion und den Strahlensätzen lässt sich das Abbildungsgesetz herleiten.

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

Dabei ist  $V$  der Abbildungsmaßstab,  $B$  die Bildgröße,  $G$  die Gegenstandsgröße und  $g$  die Gegenstandsweite, welche auch in Abbildung 1 dargestellt sind. Für dünne Linsen, wie in der Abbildung, folgt daraus die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (2)$$

Für dicke Linsen, wie in Abbildung 2 dargestellt, wird die Mittelebene durch zwei Hauptebenen  $H$  und  $H'$  ersetzt an denen die Strahlen gebrochen werden.



**Abbildung 2:** Strahlengang einer dicken Sammellinse [1].

Die einzelnen Größen werden zur jeweiligen Hauptebene bestimmt, wodurch die Linsengleichung gültig bleibt.

Achsenfernere Strahlen werden stärker gebrochen, wodurch Abbildungsfehler entstehen und das Bild nicht mehr scharf abgebildet wird. Dies wird als sphärische Aberration bezeichnet. Werden diese Strahlen zum Beispiel mit einer Irisblende ausgeblendet entsteht wieder ein scharfes Bild. Die chromatische Aberration beschreibt eine weitere Art von Abbildungsfehler. Hierbei werden kurzwellige Strahlen stärker gebrochen als langwellige Strahlen.

## 2.2 Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Bessel

Der Abstand zwischen Gegenstand und Bild bleibt fest. Die Position der Linse wird variiert, sodass zwei Orte für die Linse gefunden werden, wo das Bild scharf ist. Für diese Stellungen können Bildweite und Gegenstandsweite vertauscht werden.

$$b_1 = g_2$$

$$b_2 = g_1$$

Daraus lässt sich für die Brennweite die Gleichung 3 herleiten.

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (3)$$

Hierbei ist  $e$  der Abstand zwischen Gegenstand und Bild und  $d$  der Abstand zwischen den beiden Linsenpositionen. Diese sind in Abbildung 3 dargestellt.

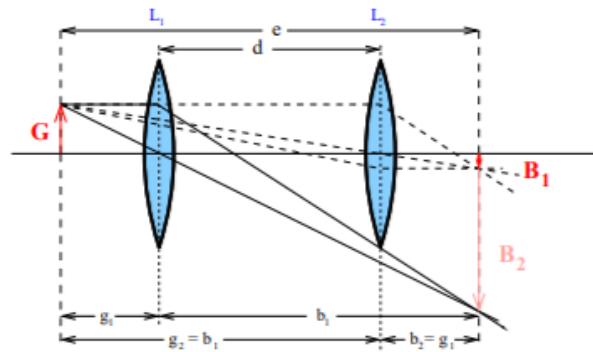


Abbildung 3: Geometrische Beziehungen für die Methode von Bessel [1].

## 2.3 Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Abbe

Mit der Methode von Abbe wird die Brennweite eines Linsensystems mithilfe des Abbildungsmaßstabes bestimmt. Aus Abbildung 4 lässt sich eine Formel für die Brennweite herleiten, hierfür müssen die Lagen der Hauptebenen bekannt sein.

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (4)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (5)$$

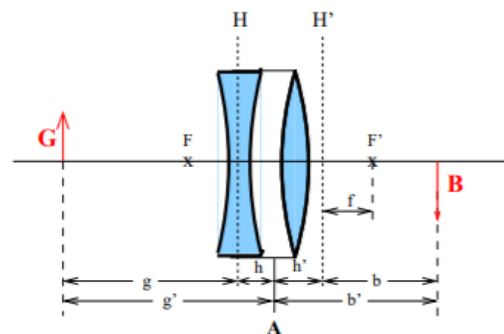


Abbildung 4: Geometrische Beziehungen eines Linsensystems [1].

## 3 Durchführung

Der Aufbau besteht aus einer optischen Bank, auf der verschieden optische Elemente wie Linsen und Lichtquellen mithilfe von Reitern verschoben werden können.

Zu Beginn sollen die Brennweiten zweier Linsen überprüft werden. Dazu ist eine Halogenlampe als Lichtquelle auf der Bank platziert. Als Gegenstand wird ein sogenanntes "Perl L" (mehrere Glaskugeln, angeordnet zu einem "L") verwendet. Dieses wird direkt vor der Lampe platziert. Dahinter wird dann eine Linse (Brennweite  $f = 100\text{ mm}$ ) und ein Schirm aufgebaut. Bei fester Gegenstandsweite wird der Schirm solange verschoben, bis auf ihm eine möglichst scharfe Abbildung des Gegenstands zu erkennen ist. Dann werden jeweils die Gegenstandsweite und die Bildweite in dieser Konfiguration gemessen. Dies geschieht über die an der optischen Bank befindlichen Meterangaben. Diese Messung wird für insgesamt 10 unterschiedliche Gegenstandsweiten und zusätzlich für eine weitere Linse durchgeführt. Als zweite Linse wird dabei eine mit Wasser befüllbare Linse gewählt.

Anschließend wird dann eine Messung nach der Methode von Bessel durchgeführt. Dafür bleibt die Versuchsanordnung im Prinzip gleich. Es werden nun lediglich die Gegenstandsweite und die Bildweite für die beiden möglichen Konfigurationen scharfer Abbildungen bei einem konstanten Abstand zwischen Gegenstand und Schirm gemessen. Dies wird für insgesamt 10 unterschiedliche Abstände gemacht und auch noch einmal mit einem roten bzw. blauen Filter vor dem Gegenstand wiederholt (dabei jedoch nur für 5 unterschiedliche Abstände).

Die Messung nach der Methode von Abbe erfolgt dann analog zur ersten Messung. Die einzelne Linse wird jedoch durch ein Linsensystem aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse ersetzt und die gemessenen Gegenstands- und Bildweiten zu einem vorher festgelegten Referenzpunkt A gemessen. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Sammellinse und bewegt sich folglich bei Änderung der Linsenposition mit.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung der Brennweite mit der Bildweite und der Gegenstandsweite

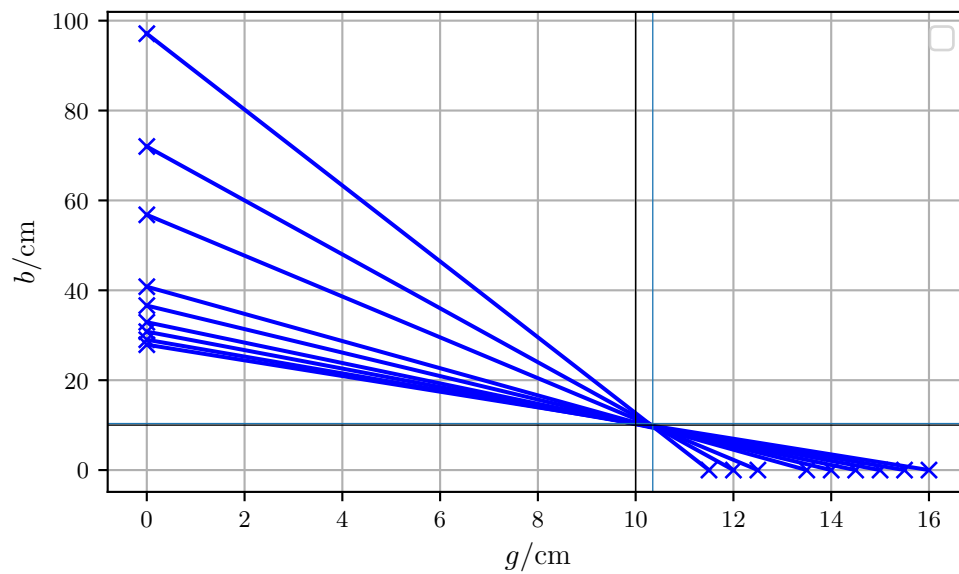
Die gemessenen Gegenstandsweiten  $g$ , Bildweiten  $b$  und Bildgrößen  $B$  einer Linse, mit einer Brennweite von 100, werden in Tabelle 1 dargestellt. Zusätzlich werden die daraus ermittelten Brennweite angegeben die mit der Linsengleichung berechnet werden, sowie die Abbildungsmaßstäbe  $V_1 = B/G$  und  $V_2 = b/g$  um das Abbildungsgesetz zu überprüfen.

**Tabelle 1:** Gemessene und berechnete Daten einer Linse

$g/\text{cm}$	$b/\text{cm}$	$B/\text{cm}$	$V_1$	$V_2$	$f/\text{cm}$
12,5	56,8	13,2	4,71	4,54	10,25
12,0	72,0	17,5	6,25	6,00	10,29
11,5	97,1	24,7	8,82	8,44	10,28
13,5	40,8	8,8	3,14	3,02	10,14
14,0	36,6	7,6	2,71	2,61	10,13
14,5	32,9	6,5	2,32	2,27	10,06
15,0	30,8	5,9	2,11	2,05	10,09
15,5	29,0	5,3	1,89	1,87	10,10
16,0	27,9	4,9	1,75	1,74	10,17
16,5	25,5	3,5	1,25	1,55	10,02

Für den Mittelwert von der Brennweite ergibt sich  $f = (10,15 \pm 0,03) \text{ cm}$ . Der Mittelwert von  $V_1 - V_2$  beträgt  $0,09 \pm 0,06$ .

Aus den Messwerten lässt sich nun grafisch einen Wert für die Brennweite ermitteln. Die Gegenstandsweiten werden auf die x-Achse und die Bildweiten auf die y-Achsen aufgetragen. Der erste Messwert von  $g$  wird dann mit dem letzten über eine Gerade verbunden, für die anderen Messwerte wird dies auch gemacht. Dies ist in Abbildung 5 dargestellt.



**Abbildung 5:** Aufgetragene Bildweiten und Gegenstandsweiten zur Bestimmung der Brennweite.

Die x- und y-Koordinate des Schnittpunktes der einzelnen Geraden stellt nun die Brennweite dar. Der Schnittpunkt der schwarzen Linien beschreibt den Literaturwert der Brennweite. Die blauen Linien den Schnittpunkt der Geraden in dem Diagramm. Für die Brennweite kann ein ungefährer von 10,3 cm ermittelt werden. Nach Herstellerangaben beträgt die Brennweite der Linse 10,3 cm.

Dieses Verfahren wird mit einer Linse unbekannter Brennweite wiederholt. In Tabelle 2 werden die gemessenen Werte zu dieser Linse dargestellt.

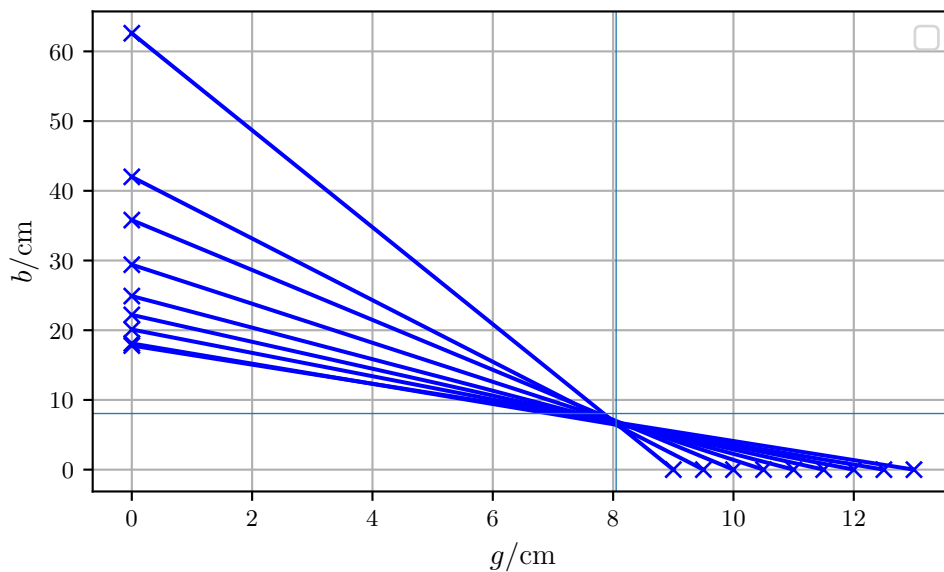


**Tabelle 2:** Gemessene und berechnete Daten einer Linse mit unbekannter Brennweite

$g/\text{cm}$	$b/\text{cm}$	$f/\text{cm}$
9,5	42,0	7,75
9,0	62,6	7,87
10,0	35,8	7,82
10,5	29,4	7,74
11,0	24,9	7,63
11,5	22,2	7,58
12,0	20,1	7,51
12,5	18,1	7,39
13,0	17,8	7,51
13,5	16,8	7,49

Der Mittelwert der Brennweiten beträgt  $(7,63 \pm 0,05) \text{ cm}$ .

Erneut werden  $g$  und  $b$  in einem Diagramm aufgetragen und Geraden durch alle Messwertepaare gelegt. Dies ist in Abbildung 6 dargestellt.



**Abbildung 6:** Aufgetragene Bildweiten und Gegenstandsweiten zur Bestimmung der Brennweite einer mit Wasser gefüllten Linse.

Aus dem Diagramm lässt sich für die Brennweite ein ungefährer Wert von  $8,05 \text{ cm}$ . Dieser

Wert wird aus dem Schnittpunkt der vertikalen Linie mit der x-Achse entnommen. Die zugehörige y-Koordinate weicht für  $y = 8.05$  von dem Schnittpunkt der Geraden ab.

## 4.2 Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Bessel

Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt 10 cm.

In Tabelle 3 werden die gemessenen Abstände  $e, g_1, b_1, g_2, b_2$  sowie die daraus nach Gleichung (3) errechneten Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ .

**Tabelle 3:** Messwerte und errechnete Brennweiten bei der Methode von Bessel

$e/\text{cm}$	$g_1/\text{cm}$	$b_1/\text{cm}$	$g_2/\text{cm}$	$b_2/\text{cm}$	$f_1/\text{cm}$	$f_2/\text{cm}$
40	17,7	22,3	21,8	18,2	9,87	9,92
50	14,2	35,8	36,4	13,6	10,17	9,90
55	13,6	41,4	42,2	12,8	10,24	9,82
60	13,0	47,0	47,3	12,7	10,18	10,01
70	12,5	57,5	58,0	12,0	10,27	9,94
75	12,8	62,8	63,9	11,1	10,42	9,46
80	12,1	67,1	68,2	11,8	10,55	10,06
90	11,9	78,1	78,6	11,4	10,33	9,96
100	11,7	88,3	88,8	11,2	10,33	9,95
110	11,5	98,5	98,8	11,2	10,30	10,06

Daraus ergeben sich die folgenden Mittelwerte

$$f_1 = (10.26 \pm 0.06) \text{ cm}$$

$$f_2 = (9.91 \pm 0.06) \text{ cm}$$

Aus  $\sigma_1 = 1 - \frac{f_s}{f_1}$  bzw.  $\sigma_2 = 1 - \frac{f_s}{f_2}$  ergeben sich relative Abweichungen von

$$\sigma_1 = 2,5\%$$

$$\sigma_2 = -0,9\%$$

Auf dieselbe Weise werden die Brennweiten für die Messung mit einem Rotfilter vor dem Gegenstand errechnet. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 4 zu finden.

**Tabelle 4:** Messwerte und errechnete Brennweiten bei der Methode von Bessel mit Rotfilter

$e_r/\text{cm}$	$g_{1r}/\text{cm}$	$b_{1r}/\text{cm}$	$g_{2r}/\text{cm}$	$b_{2r}/\text{cm}$	$f_{1r}/\text{cm}$	$f_{2r}/\text{cm}$
60	13,0	47,0	47,4	12,6	10,18	9,95
70	12,5	57,5	58,0	12,0	10,27	9,94
80	12,2	67,8	68,7	11,3	10,34	9,70
90	11,8	78,2	78,5	11,5	10,25	10,03
100	11,7	88,3	88,9	11,1	10,33	9,87

Daraus ergeben sich diesmal die folgenden Mittelwerte

$$f_{1r} = (10.27 \pm 0.03) \text{ cm}$$

$$f_{2r} = (9.90 \pm 0.06) \text{ cm}$$

Es ergeben sich hierbei relative Abweichungen von

$$\sigma_{1r} = 2,6\%$$

$$\sigma_{2r} = -1,0\%$$

Und ein weiteres Mal für die Messung mit einem Blaufilter vor dem Gegenstand. Die Werte sind Tabelle 5 zu entnehmen.

**Tabelle 5:** Messwerte und errechnete Brennweiten bei der Methode von Bessel mit Blaufilter

$e_b/\text{cm}$	$g_{1b}/\text{cm}$	$b_{1b}/\text{cm}$	$g_{2b}/\text{cm}$	$b_{2b}/\text{cm}$	$f_{1b}/\text{cm}$	$f_{2b}/\text{cm}$
60	13,0	47,0	47,7	12,3	10,18	9,78
70	12,5	57,5	57,9	12,1	10,27	10,01
80	12,1	67,9	68,6	11,4	20,27	9,78
90	12,0	78,0	78,8	11,2	10,40	9,81
100	11,8	88,2	88,7	11,3	10,41	10,02

Daraus ergeben sich die Mittelwerte

$$f_{1b} = (10.31 \pm 0.05) \text{ cm}$$

$$f_{2b} = (9.88 \pm 0.06) \text{ cm}$$

Daraus ergeben sich relative Abweichungen von

$$\sigma_{1b} = 3,0\%$$

$$\sigma_{2b} = -1,2\%$$

### 4.3 Bestimmung der Brennweite nach der Methode von Abbe

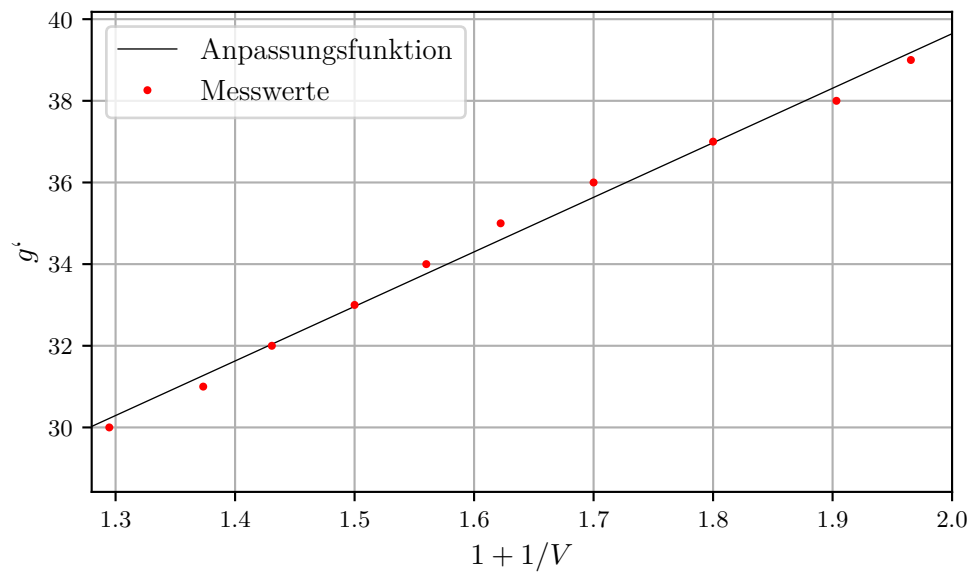
Es wird ein Linsensystem aus einer Zerstreuungslinse mit  $f_z = -10\text{ cm}$  und einer Sammellinse mit einer Brennweite von  $f_s = 10\text{ cm}$  verwendet.

Die bei der Methode von Abbe gemessenen Abstände  $g'$  und  $b'$  sowie die gemessene Bildgröße  $B$  werden in Tabelle 6 aufgeführt.

**Tabelle 6:** Messwerte bei der Messung nach der Methode von Abbe

$g'/\text{cm}$	$b'/\text{cm}$	$B/\text{cm}$
30,0	62,5	9,5
31,0	53,3	7,5
32,0	46,4	6,5
33,0	42,9	5,6
34,0	37,7	5,0
35,0	35,7	4,5
36,0	32,4	4,0
37,0	30,0	3,5
38,0	28,0	3,1
39,0	26,9	2,9

Wird  $g'$  gegen  $1 + 1/V$  aus Gleichung (4) aufgetragen, so ergibt sich das folgende Diagramm.

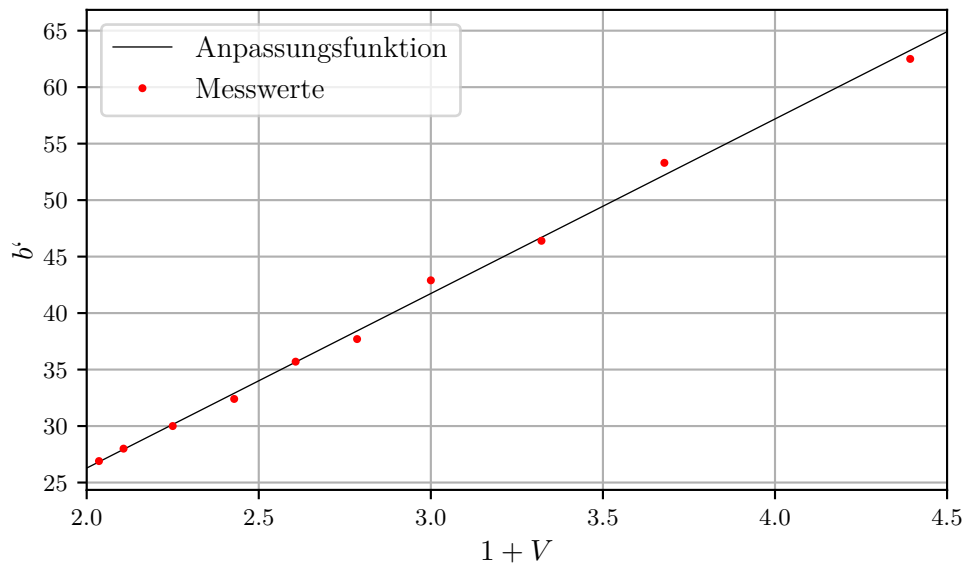


**Abbildung 7:** Diagramm zur Bestimmung der Brennweite aus  $g'$ .

Aus der linearen Regression ergibt sich eine Brennweite von

$$f_g = (13,36 \pm 0,42) \text{ cm}$$

Wird  $b'$  gegen  $1+V$  aus Gleichung (5) aufgetragen, so ergibt sich das folgende Diagramm.



**Abbildung 8:** Diagramm zur Bestimmung der Brennweite aus  $b'$ .

Aus der linearen Regression ergibt sich eine Brennweite von

$$f_b = (15,45 \pm 0,31) \text{ cm}$$

Über die geometrische Optik lässt sich in unserem Fall von einer Sammel- und einer Zerstreuungslinse entgegengesetzt gleicher Brennweite eine Beziehung zur Gesamtbrennweite des optischen Systems herleiten. Diese lautet:

$$f_{\text{ges}} = -\frac{f_s \cdot f_z}{d}$$

Dabei ist  $d$  der Abstand zwischen den beiden Linsen. In unserem Fall ist  $d = 6 \text{ cm}$ . Daraus ergibt sich

$$f_{\text{ges}} = 16,67 \text{ cm}$$

Analog zu den Ausführungen bei der Besselmethode ergeben sich hier die folgenden relativen Abweichungen zum Theoriewert

$$\sigma_g = -24,8\%$$

$$\sigma_b = -7,9\%$$

## 5 Diskussion

Die berechneten Abbildungsmaßstäbe mit dem Abbildungsgesetz liegen innerhalb ihrer Standardabweichung, welche jedoch bei beiden Werten relativ groß ist. Die Abweichungen lassen sich durch systematische Fehler erklären. Das scharf Stellen des Bildes kann für viele Positionen nur ungenau vorgenommen werden, da ein scharfes Bild sich bei Verschiebung oft nur minimal ändert. Dies führt zur ungenauen Werten für die Bildweite. Zusätzlich führt das Abmessen der Bildgröße mit einem Geodreieck zu ungenauen Werten für die Bildgröße. Statistische Fehler sind als primäre Fehlerquelle auszuschließen.

Die Abweichung der berechneten Brennweiten ist ebenfalls relativ gering. Dennoch liegt der Theoriewert der Brennweite nur von 5 Standardabweichungen des berechneten Mittelwertes der Brennweite. Auch hier lässt sich die Abweichung durch die obigen genannten Gründe erklären.

Die ermittelten Brennweiten der mit Wasser gefüllten Linse liegen innerhalb von 8 Standardabweichungen voneinander. Trotz der systematischen Fehler ist die prozentuale Abweichung mit 5,2% relativ gering. Das Verfahren ist also im Grunde geeignet um Brennweiten von Linsen bestimmen zu können.

Bei der Methode nach Bessel ergeben sich Werte, die wieder nur sehr gering von der tatsächlichen Brennweite der Linse abweichen. Trotzdem liegen sie nicht innerhalb der Standardabweichung. Bei der Messung mit Rot- und Blaufilter ist zu erwarten, dass die aus der Messung mit dem Rotfilter errechneten Werte im Verhältnis zu den Werten ohne Filter vergrößern. Andersrum sollten sie sich bei der Messung mit dem Blaufilter verkleinern. Der Grund dafür ist die unterschiedliche Wellenlänge. Blaues Licht daher stärker als rotes Licht. Bei den errechneten Werten ist es schwierig über diesen Sachverhalt zu urteilen. Da die Fehler der Werte im Verhältnis zu dem Intervall, auf der sich die Verschiebung offenbar ereignen muss groß sind, kann nicht genau festgestellt werden, ob es tatsächlich zu der erwarteten Verschiebung kommt. Beide Werte liegen nämlich innerhalb der jeweils anderen Standardabweichung. Der tatsächliche Einfluss der unterschiedlichen Wellenlängen kann sich also gegen die oben bereits genannten systematischen Fehler nicht durchsetzen.

Bei der Methode nach Abbe ergeben sich nahezu lineare Kurvenverläufe bei den beiden Diagrammen. Daher ist eine lineare Regression problemlos möglich und auch die entstehenden Unsicherheiten fallen nicht sonderlich groß aus. Trotzdem decken die beiden errechneten Werte sich nicht, was jedoch der Fall sein sollte, da die gleiche Brennweite bestimmt wird. Zudem sind auch die Abweichungen zum Theoriewert recht groß. Dieser liegt ebenfalls in keiner der beiden Standardabweichungen der Werte. Da auch hier die Bildgrößen nur mit einem Geodreieck bestimmt werden und auch das Scharfstellen des Bildes durch Augenmaß geschieht, ist dieser Sachverhalt durch die obigen Überlegungen bezüglich der systematischen Fehler bereits erklärt.

## Literatur

- [1] Physikalisches Praktikum der TU Dortmund. *Versuchsanleitung des Versuchs V408 Geometrische Optik*. Abrufdatum: 05.07.2018. 2014.