V105

Das Magnetische Moment

Jannis Speer
jannis.speer@tu-dortmund.de

Kevin Talits
kevin.talits@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.10.17 Abgabe: 30.10.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Es soll das magnetische Moment eines Permanentmagneten auf drei unterschiedliche Arten bestimmt werden.

2 Theorie

In der Natur gibt es, anders als bei Ladungen, kein magnetisches Monopl. Die einfachste Form des Magnetismus ist der *magnetische Dipol* mit in sich geschlossenen Magnetfeldlinien. Durch einen Permanentmagneten oder eine stromdurchflossene Leiterschleife kann ein makroskopischer Dipol realisiert werden, die das *magnetische Moment*

$$\boldsymbol{\mu} = I \cdot \boldsymbol{A} \tag{1}$$

besitzt, wobei I der Strom in der Leiterschleife und A die Querschnittsfläche der Schleife ist. Für einen Permanentmagneten ist $\boldsymbol{\mu}$ nicht so einfach zu berechnen; es kann aber auf verschiedene Weise experimentell bestimmt werden.

In einem homogenen Magnetfeld wirkt auf einen Dipol ein Drehmoment $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$. Der Dipol erfährt hierbei solange eine Drehung, bis das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ und die magnetische Flußdichte $\boldsymbol{B}$ gleichgerichtet sind. Zum Aufbau eines *homogenen Magnetfeldes* werden häufig zwei gleichsinnig vom Strom I durchflossene Kreisspulen so angeordnet, daß die Achsen zusammenfallen und dass der gegenseitige Abstand der Spulen dem Spulenradius R entspricht. Das Magnetfeld im Inneren des *Helmholtz-Spulenpaares* ist auf der Symmetrieachse homogen und lässt sich aus aus dem *Biot-Savartschen Gesetz*

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2}$$

für eine stromdurchflossene Spule mit einer Windung

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

herleiten. Das Feld im Zentrum des Helmholtz-Spulenpaares ergibt sich aus der Überlagerung der Einzelfelder, wobei der Ursprung im Idealfall in der Mitte des Spulenpaares gelegt wird. In diesem Experiment unterscheidet sich der Spulenradius R geringfügig vom Abstand $d = 2 \cdot x$, sodaß der allgemeine Fall berechnet wird. Das Feld in der Mitte der Helmholtz-Spulen ergibt sich dann zu

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

2.1 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Magnetens unter Ausnutzung der Gravitation

Bei dieser statistischen Methode wirkt auf die Masse m die Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_g = m \cdot \boldsymbol{g}$, die ein Drehmoment $\boldsymbol{D}_g = m \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g})$ auf die Billardkugel ausübt. Die verschiebbare

Masse m ist auf einen Aluminiumstab gesteckt, der wiederum in die Kugel gesteckt werden kann. Der Abstand r für das Drehoment ist der Abstand vom Anfang des Stabes bis zur Masse m. Die Gravitationskraft wirkt dem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ der Spulen entgegen. Bei einer gegebenen Magnetfeldstärke liegt ein Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment $\boldsymbol{D}_B = \boldsymbol{\mu}_{Dipol} \times \boldsymbol{B}$ und dem Drehmoment $\boldsymbol{D}_g$, welches die Gravitation verursacht.

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} \times \boldsymbol{B} = m \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}) \tag{5}$$

Das Kreuzprodukt kann durch $rmgsin(\theta) = \mu_{Dipol} Bsin(\theta)$ ersetzt werden. θ ist der von dem Aluminiumstab und dem Magnetfeld eingeschlossene Winkel. Da $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{B}$ parallel sind, fällt die Winkeabhängigkeit weg und das magnetische Moment kann durch den Abstand r und das Magnetfeld bestimmt werden.

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} \cdot B = m \cdot r \cdot g \tag{6}$$

2.2 Bestimmung des magnetischen Moments über die Schwingungsdauer eines Magnetens

Die schwingende Billardkugel verhält sich im homogenen magnetischen Feld der Helmholtz-Spulen wie ein harmonischer Oszillator, dessen Bewegung sich durch

$$-|\boldsymbol{\mu}_{Dipol} \times \boldsymbol{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7}$$

beschreiben lässt. Die Lösung dieses DGL ist die Schwingungsdauer T der oszilierenden Kugel. Das magnetische Moment μ_{Dipol} lässt sich dann quantitativ über das Trägheitsmoment J_K der Kugel, der Magnetfeldstärke B und der Schwingungsdauer

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\boldsymbol{\mu}_{Dipol}} \frac{1}{B} \tag{8}$$

bestimmen.

2.3 Bestimmung des magnetischen Moments über die Präzession eines Magneten

Wirkt eine äußere Kraft auf die Drehachse eines rotierenden Körpers, dann führt die Figurenachse eine Präzessionsbewegung aus. Die Präzessionsbewegung im Magnetfeld der Helmholtzspulen lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Dipol}} \times \boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{L}_K}{dt} \tag{9}$$

beschreiben, wobei die Präzessionsfrequenz Ω_p

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|L_K|} \tag{10}$$

eine Lösung der Differentailgleichung ist. Den Drehimpuls $L_K = J_K \omega$ der Kugel kann über das Trägheitsmoment J_K der Billiardkugel und deren Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ bestimmt werden. Da sich die Präzessionsfrequenz Ω_p aus der Zeit T_p für einen Umlauf berechnen lässt, lässßt sich das magnetische Moment μ_{Dipol} der Kugel über

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{Dipol}}{2\pi L_K} B \tag{11}$$

berechnen.

Durch ein Stroboskop wird die notwendige Konstanz der Rotationsfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ kontrolliert. Wenn die weiße Markierung auf der Kugel stationär unter dem Stroboskop erscheint, dann hat die Kugel die am Gerät eigenstellte Frequenz. Da die Frequenz exponentiell mit der Zeit abnimmt, muss direkt nach dem Erreichen der eingestellten Frequenz mit der Messung begonnen und eine geeignete Frequenz gewählt werden, zwischen $\nu = 4\,\mathrm{Hz}$ und $\nu = 6\,\mathrm{Hz}$, weil hier der Abfall der Exponentialkurve bereits hinreichend langsam geschieht (etwa 2 Hz pro Minute).[1]

3 Aufbau

Ein äußeres Magnetfeld wird durch ein Helmholtz-Spulenpaar mit (N = 195) Windungen erzeugt, deren Radius $R_{\text{Spule}} = 0.109\,\mathrm{m}$ beträgt und die in einem Abstand von (d = 0.138 m) stehen. In der Mitte der beiden Spulen steht ein zylindrisches Podest, auf dem sich eine Billiardkugel mit einem mittig eingelassenen Permanentmagneten , reibungsfrei mittels eines Luftkissens bewegen lässt. Der Permanentmagnet ist so ausgerichtet, dass sein magnetisches Moment μ_{Dipol} in Richtung des Stiels gerichtet ist, der sich auf der Kugel befindet. Zur Bestimmung der Drehfrequenz befindet sich auf der Kugel ein weißer Punkt, den man mit Hilfe eines ,an der oberen Spule befestigtem, Stroboskops, zum stehen bringen kann, so dass die Drehfrequenz mit der Frequenz des Stroboskops übereinstimmt. Das Stroboskop, das Luftkissen und der Spulenstrom und somit auch das externe Magnetfeld, werden über ein Steuergerät angesteuert.

4 Durchführung

4.1 Bestimmung über Gravitation

Die Aluminiumstange mit der verstellbaren Masse wird in die Kugel gesteckt, die auf dem Messingzylinder platziert wird. Am Steuergerät wird das Luftkissen eingeschaltet und die Feldrichtung auf „up“ und der Feldgradient auf „off“ gestellt. Für einen vorher festgelegten Abstand r der Hebelmasse wird das $\boldsymbol{B}$-Feld über die Stromstärke I so reguliert, dass sich die Kugel im Gleichgewicht befindet. Die Werte für r und I werden notiert und die Messung für verschiedene Abstände r wiederholt.

4.2 Bestimmung über Schwingungsdauer

Die vorherigen Einstellungen am Steuergerät werden beibehalten. Es werden 10 Messungen für unterschiedliche Magentfeldstärken $\boldsymbol{B}$ durchgeführt. Die Kugel wird um einen kleinen Winkel ausgelenkt, sodass sie wie ein harmonischer Oszillator schwinkt. Anschließend werden 10 Periodendauern T am Stück gemessen und das Ergebnis gemittlet.

4.3 Bestimmung über Präzession

Am Steuergerät wird jetzt noch zusätlich das Stroboskop mit einer Frequenz von 5,1 Hertz eingeschaltet. Die Kugel wird in eine möglichst stabile Rotation versetzt, um später eine ungewollte Nutation zu vermeiden. Dabei soll die Drehachse nicht vertikal sein. Mit Hilfe des Stroboskops wird die Frequenz der Kugel eingestellt. Wenn der weiße Punkt auf der Kugel stationär erscheint, stimmt die Frequenz mit der des Stroboskops überein. Jetzt wird das Magentfeld eingeschaltet und die Kugel beginnt zu präzedieren. Es wird die Zeit T von 3 Umläufen gemessen und die mittlere Umlaufzeit gebildet. Die Messung wird durchgeführt mit 10 verschiedenen Magnetfeldstärken $\boldsymbol{B}$.

5 Auswertung

Für die Auswertung werden neben NumPy[5] mehrere Python Pakete benutzt. Plots werden mit Matplotlib[2] erstellt und Ausgleichsgeraden mit SciPy[3]. Fehlerbehaftete Größen werden mit Uncertainties[4] berechnet, das auf der Gaußschen Fehlerfortpflanzung basiert:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \tag{12}$$

Alle gemessenen Größen werden als fehlerbehaftet betrachtet. Die Größe der Fehler wird an der Ungenauigkeit der Messinstrumente orientiert:

- Das Magentfeld konnte auf 0,1 Ampere genau eingestellt werden.
- Die Schieblehre hatte eine Millimeterskala, also eine Ungenauigkeit von 10^{-3} Metern.
- Die Stoppuhr maß auf 0,01 Sekunden genau.

5.1 Bestimmung über Gravitation

Aus den eingestellten Stromstärken I werden mit Gleichung (4) die entsprechenden Magnetfeldstärken $\boldsymbol{B}$ berechnet. Um das magnetische Moment zu bestimmen, muss zunächst eine Ausgleichsrechnung für die gemessenen Größen durchgeführt werden. Dafür wird r gegen $\boldsymbol{B}$ aufgetragen (siehe Abbildung 1) und eine Regressionsgerade berechnet mit:

$$f(x) = ax + b \tag{13}$$

Es ergeben sich folgende Parameter für die Ausgleichsgerade:

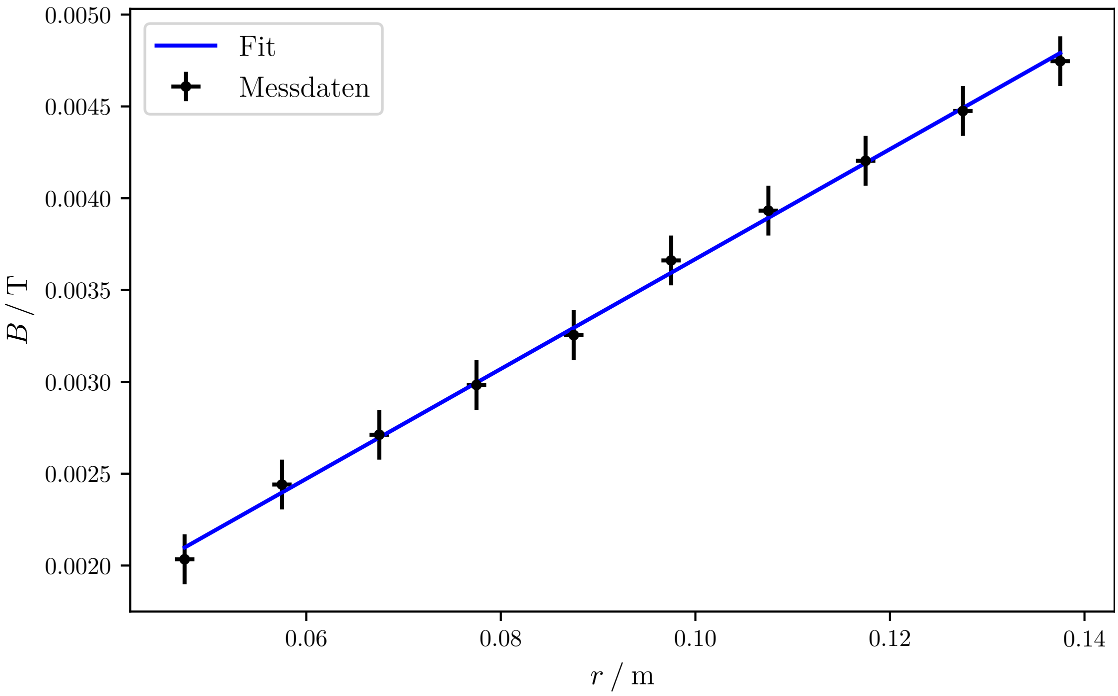

Abbildung 1: Gravitation.

$$a = (2,99 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T/m}$$

$$b = (6,77 \pm 0,48) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T/m}$$

Gleichung (6) lässt sich dann zu umstellen und das magnetsiche Moment kann berechnet werden:

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} = (0,459 \pm 0,008)\ \mathrm{A^2/m}$$

5.2 Bestimmung über Schwingungsdauer

Genau wie zuvor muss zunächst mit Gleichung (4) die Magentfeldstärke berechnet werden. Im nächsten Schritt wird, um das magentische Moment zu bestimmen, $1/B$ gegen T^2 aufgetragen und die lineare Regression durchgeführt. Für die Ausgleichsgerade (siehe Abbildung 2) werden folgende Parameter ermittelt:

$$a = (3,30 \pm 0,13) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s^2T}$$

$$b = (3,82 \pm 7,64) \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s^2T}$$

Gleichung (8) lässt sich dann umstellen zu

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} = 4\pi^2 J_K \frac{1}{a} \tag{14}$$

mit $a = T^2 \cdot B$. Das magnetische Moment lässt sich dann einfach berechnen:

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} = (0,442 \pm 0,018)\ \mathrm{A^2/m}$$

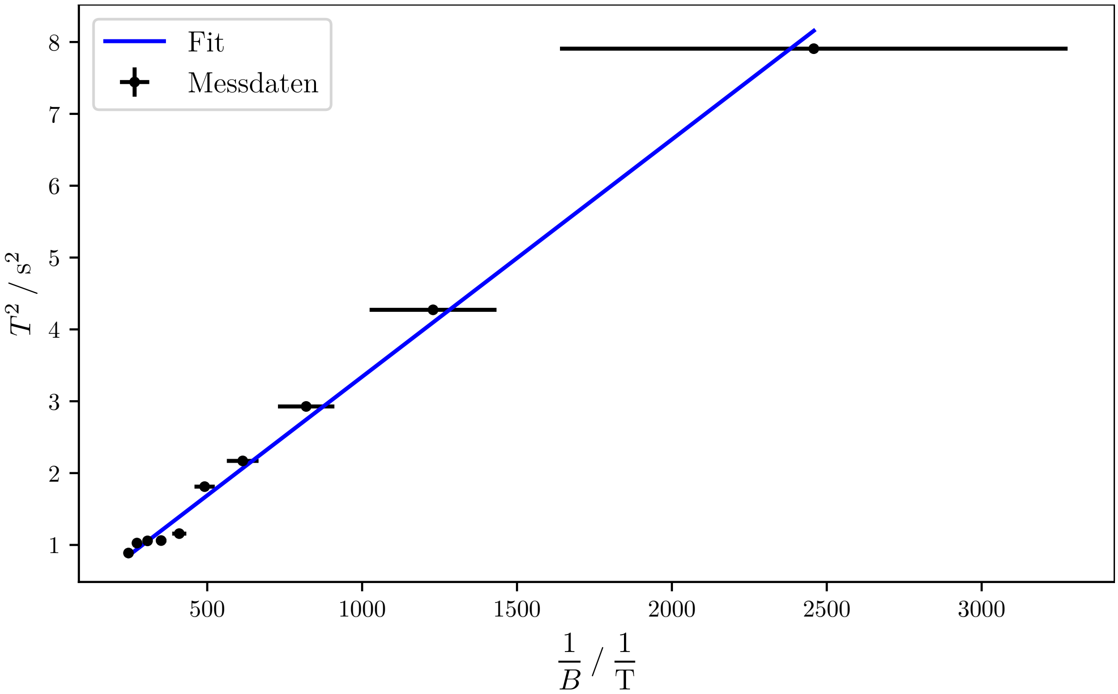

Abbildung 2: Schwingung.

5.3 Bestimmung über Präzession

Als Erstes wird wieder mit Gleichung (4) die Magnetfeldstärke berechnet. Für die Ausgleichsrechnung wird B gegen $1/T$ aufgetragen. Der Fit (siehe Abbildung 3) besitzt folgende Werte:

$$a = (151{,}32 \pm 5{,}18)\ 1/\mathrm{T\ s}$$

$$b = (5{,}51 \pm 0{,}54) \cdot 10^{-2}\ 1/\mathrm{T\ s}$$

Um das magnetische Moment bestimmen zu können muss jetzt noch Gleichung (11) umgeformt werden

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} = 2\pi L_K a \tag{15}$$

mit $a = 1/(T \cdot B)$ und $L_K = J_K \omega$. Das letzte Verfahren liefert dann für das magnetische Moment den Wert:

$$\boldsymbol{\mu}_{Dipol} = (0{,}179 \pm 0{,}006)\ \mathrm{A}^2/\mathrm{m}$$

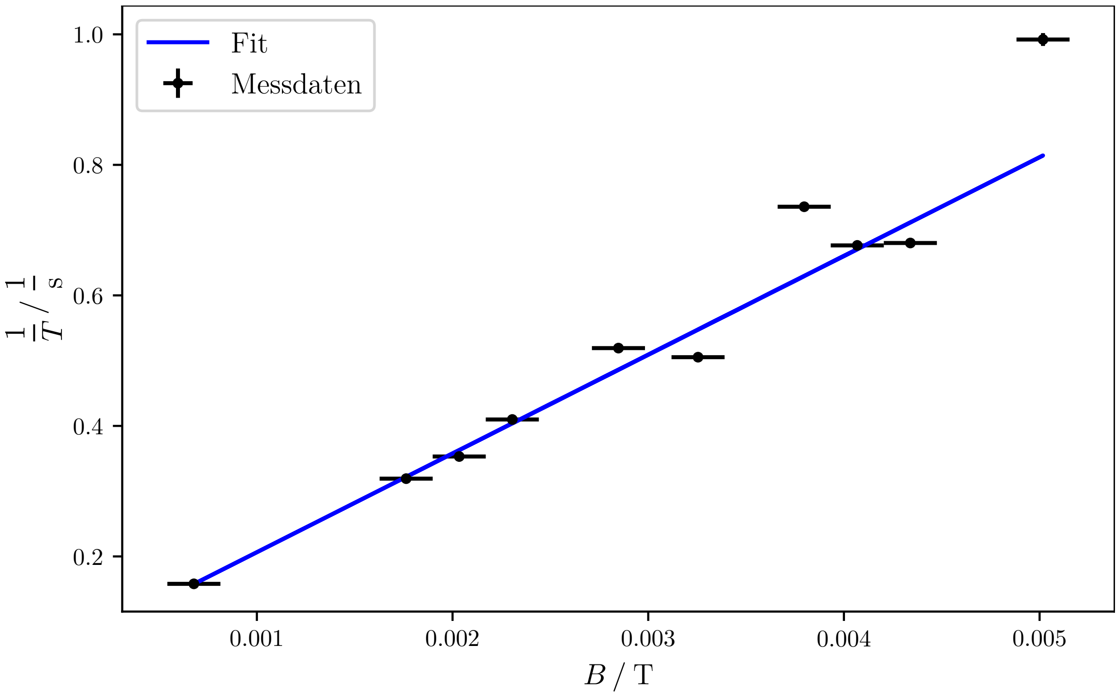

Abbildung 3: Präzession.

6 Diskussion

Durch einen Vergleich der drei Messmethoden und deren Ergebnissen lassen sich Aussagen über deren Genauigkeit und Aufwand treffen. Den Geringsten Aufwand bei der Durchführung ergibt sich aus dem Messen der Schwingungsdauer. Dort wird lediglich um einen kelinen Winkel ausgelenkt und es ist gut observabel wie die Schwingung zu bestimmen ist. Dagegen liefert die Messung über Präzession den höchsten Aufwand. Durch den hohen Zeitaufwand beim einstellen der richtigen Frequenz durch das Strobskop und die darauf noch folgende Messung der Umlaufdauer, wird hier am meisten Zeit gebraucht um Messergebnisse zu erhalten. Desweiteren nimmt die Frequenz der Kugel während des Durchlaufens der Präzession ab, welches besonders bei geringem Magnetfeld und somit langer Umlaufdauer zu Fehlern führt. Die besten Messergebnisse mit Hinblick auf den Erwartungswert liefert hingegen das Messen über die Gravitation. Das einstellen des Gleichgewichts ist aufwändiger als die Messung der Schwingungsdauer, jedoch mit hinreichend ruhiger Hand ist diese Methode nur marginal Aufwändiger. Mit den erhobenen Messdaten ist zu sehen, dass die Genauigkeit der Methoden des Messens über Schwingung und Präzession gegenüber der Messung über die Gravitation, im Nachteil sind und unpräzisere Ergebnisse liefern. Auf Basis dieser Messergebnisse und dem Vergleich aller Methoden ist die Aussage zu treffen, dass die Methode der Bestimmung des magnetichen Moments über die Gravitation die genaueste und zu bevorzugende Methode ist.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung V105 Das Magnetische Moment*.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: http://www.scipy.org/.

[4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/.

[5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.