Versuch 103

Biegung elastischer Stäbe

5. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist die Messung des Elastizitätsmoduls unterschiedlicher Stangen. Dieser Unterschied bestand in der Geometrie.

2 Theorie

Die Biegung der elastischen Stäbe erfolgt durch eine Krafteinwirkung. Die Spannung, Kraft pro Flächeneinheit, ist eine charakteristische Größe zur Beschreibung der Phänomene. Diese wird in Schub-, die zur Oberfläche parallel stehende Kraft, oder Normalspannung σ, auch Druck genannt, aufgeteilt. Der Druck setzt sich aus den Kraftkomponenten senkrecht zur Oberfläche zusammen.

2.1 Hookesches Gesetz

Das Hookesche Gesetz

$$\sigma = \mathrm{E}\,\frac{\Delta \mathrm{L}}{\mathrm{L}}. \tag{1}$$

ist der lineare Zusammenhang zwischen σ, dem Druck, und der relativen Änderung des betrachteten Körpers. Dieses gilt jedoch nur bei kleinen relativen Änderungen $\Delta \mathrm{L}/\mathrm{L}$. E ist der materialspezifische Elastizitätsmodul und in (1) die Proportionalitätskonstante.

2.2 Biegung bei einseitiger Auflage

Die Biegung ist eine spezielle Form der Deformation, bei der schon eine kleine Kraft F zu großen Auslenkungen führen kann. Dies liegt an dem, am Stab, angreifenden Drehmoment

$$\mathrm{M_F} = \mathrm{F}(\mathrm{L} - x), \tag{2}$$

welches den Stab aus seiner Ruhelage auslenkt. Die oberen Schichten des Stabes werden bei dieser Biegung gestreckt und die unteren gestaucht. Dies führt zu einer Schicht die in ihrer Ausdehnung bleibt, die neutrale Faser. Die endgültige Biegung des Stabes an jeder Stelle x lässt sich aus dem Gleichgewicht der Drehmomente bestimmen:

$$\mathrm{M_\sigma} = \mathrm{M}_F. \tag{3}$$

Wobei $\mathrm{M_\sigma}$ das Drehmoment beschreibt, welches durch die herrschenden Zug- und Druckspannungen verursacht wird. Berechnet wird $\mathrm{M_\sigma}$ mit der Normalspannung $\sigma(y)$ und y, dem Abstand des betrachteten Punktes von der neutralen Faser. Integriert wird über den Querschnitt Q des jeweiligen Stabes,

$$\mathrm{M} \;= \int_{\mathrm{Q}} \mathrm{y}\sigma(\mathrm{y})\,\mathrm{d}q. \tag{4}$$

σ wird hier analog zu (1) berechnet. Betrachtet wird aber die kurze Änderung der Länge im Abstand y zur neutralen Faser. Demnach gilt

$$\sigma(y) = \mathrm{E}\frac{\delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{x}}, \tag{5}$$

wobei

$$\delta \mathrm{x} = \mathrm{y}\frac{\Delta \mathrm{x}}{\mathrm{R}} \tag{6}$$

über die Geometrie des Problems und die Kleinwinkelnäherung hergeleitet werden kann. Das führt zu

$$\sigma(\mathrm{y}) = \mathrm{E}\,\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{R}} \tag{7}$$

mit

$$\frac{1}{\mathrm{R}} \approx \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{D}}{\mathrm{dx}^2}. \tag{8}$$

Setzt man all dieses in Gleichung (3) ein, folgt

$$\mathrm{E}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{D}}{\mathrm{dx}^2}\int_{\mathrm{Q}} y^2\,\mathrm{dq} = \mathrm{F}(\mathrm{L} - x). \tag{9}$$

Durch Zuhilfenahme des Flächenträgheitsmoments

$$\boldsymbol{I} := \int_{\mathrm{Q}} y^2\,\mathrm{d}q(y) \tag{10}$$

kann diese vereinfacht werden. Für einen einseitig eingespannten Stab wird somit die folgende Formel benutzt:

$$\mathrm{D}(x) = \frac{\mathrm{F}}{2\mathrm{E}\boldsymbol{I}}\left(\mathrm{L}x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad (\text{für } 0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{L}). \tag{11}$$

2.3 Biegung bei zweiseitiger Auflage

Um den Elastizitätsmodul für einen zweiseitig eingespannten Stab zu berechnen, muss der Drehmomentansatz abgeändert werden, sodass jede Seite betrachtet werden kann. Zunächst wird der Teil des Stabes mit

$$0 \leq x \leq \frac{\mathrm{L}}{2}$$

betrachtet. Hierfür ist

$$\mathrm{M_F} = -\frac{\mathrm{F}}{2}x. \tag{12}$$

Gleichung (9) lässt sich, mit einsetzen und integrieren, nach

$$\mathrm{D}(x) = \frac{\mathrm{F}}{48\,\mathrm{E}\boldsymbol{I}}\left(3\mathrm{L}^2x - 4x^3\right) \tag{13}$$

umformen. Die erste Integrationskonstante wird über die horizontale Steigung im Mittelpunkt des Stabes bestimmt. Die zweite wird durch das Festlegen des Nullniveaus, im Auflagepunkt, eliminiert. Der zweite Teil des Stabes wird mit

$$\frac{\mathrm{L}}{2} \leq x \leq \mathrm{L}$$

charakterisiert. Das durch die angehängte Masse wirkende Drehmoment ist jetzt

$$\mathrm{M_F} = -\frac{\mathrm{F}}{2}(\mathrm{L} - x). \tag{14}$$

Mit der Vorgehensweise vom ersten Teil folgt

$$\mathrm{D}(x) = \frac{\mathrm{F}}{48\mathrm{E}\boldsymbol{I}} \left(4x^3 - 12\mathrm{L}x^2 + 9\mathrm{L}^2 x - \mathrm{L}^3\right). \tag{15}$$

3 Fehlerrechnung

Der Mittelwert eines Datensatzes, mit N Werten, berechnet sich nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} x_i. \tag{16}$$

Der wahre Mittelwert liegt in der Umgebung des oben berechneten Mittelwertes. Die Größe dieser σ-Umgebung, wird nach

$$\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \tag{17}$$

berechnet. Der Anteil der Werte innerhalb der 1-σ-Umgebung ist ein Indiz für die Güte der Messung. Der wahrscheinlichste Fehler einer zusammengesetzten Größe $\mathrm{f}(y_1, \dots, y_K)$, auch Gauß-Fehler genannt, lautet

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{j=0}^{K} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_j}\Delta y_j\right)^2} \tag{18}$$

4 Aufbau

Eine Skizze des grundlegenden Versuchaufbaus ist in Abbildung 1 zu sehen. Bei einseitiger Auflage wurde der Stab auf der rechten Seite (A) mit einer Schraube (C) fixiert, bei zweiseitiger Auflage konnte die linke Seite nur aufgelegt werden (B). Die Schiene auf der die Messuhren befestigt sind, ist mit einem cm-Maß beschriftet. Die Messuhren haben eine kleine Anzeige zur Represäntation der mm. Die große Skala ist in 10 0,1mm Stücke unterteilt, welche ebenfalls in 10 Teilstücke unterteilt sind. Die Messung bei einseitiger Auflage erfolgte mit einer Messuhr. Der jeweilige Stab ragte 50cm weit in den Bereich der Messuhren hinein. Das Gewicht wurde am freien Ende des Stabes eingehängt. Bei beidseitiger Auflage hing das Gewicht in der Mitte des Stabes und es wurde mit beiden Messuhren gemessen.

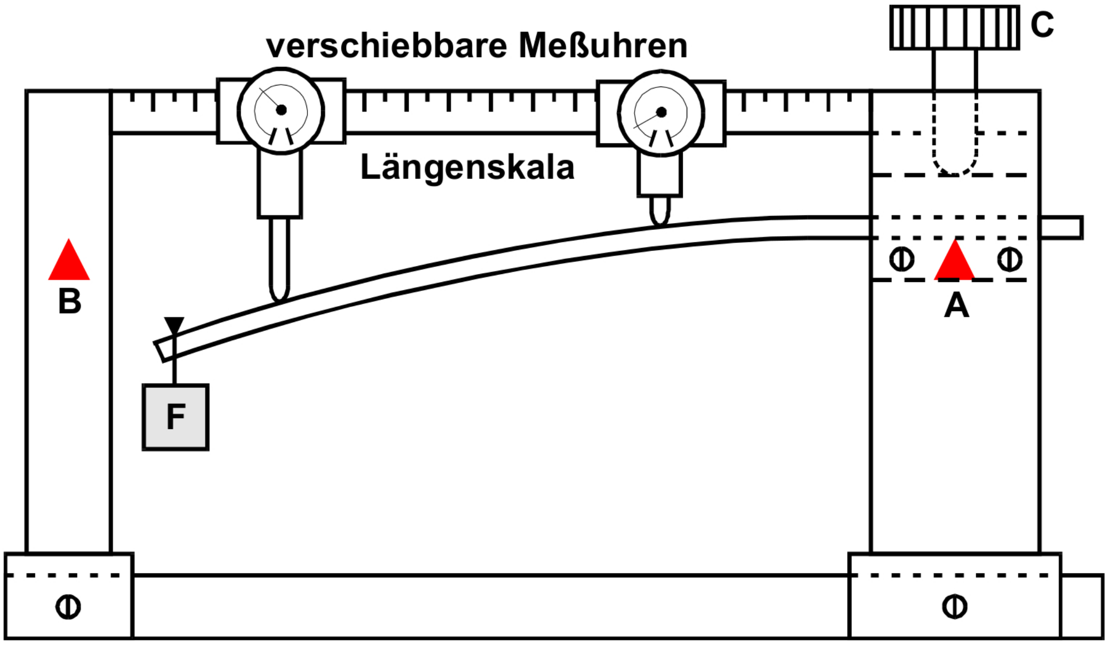

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. [3]

5 Durchführung

Zuerst wurde der eckige Stab an einer Seite, möglichst parallel zur Schiene der Messuhren, befestigt. Dann wurde mit einer Messuhr die Nulllage in 2cm Schritten gemessen. Im nächsten Schritt wurde ein Gewicht an das nicht befestigte Ende gehängt, um eine Biegung des Stabes zu bekommen. Diese sollte zwischen 3 und 7 mm liegen. Jetzt wurde die Auslenkung an den gleichen Positionen genommen. Mit dem runden Stab wurde analog verfahren.
Für die Auslenkung bei beidseitiger Auflage haben wir den eckigen Stab benutzt. Auch hier wurde erst die Nulllage und dann die Auslenkungslage vermessen. Das Gewicht wurde hier jedoch mittig, zwischen den beiden Auflagepunkten, befestigt.

6 Auswertung

6.1 Flächenträgheitsmomente

Die Flächenträgheitsmomente der beiden Stäbe berechnen sich nach Gleichung (2.2).

6.1.1 Eckiger Stab

Die gemessenen Werte des eckigen Stabes stehen in Tabelle 3. Somit ist

$$\begin{aligned} I_{\text{eckig}} &= \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} b'^2 \,\mathrm{d}b' \,\mathrm{d}a' && (19) \\ &= \frac{a}{3}\left(\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8}\right)\right) && (20) \\ &= \frac{ab^3}{12} && (21) \\ &= 1{,}44 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^4. && (22) \end{aligned}$$

Mit dem Fehler nach (18) ist

$$I_{\text{eckig}} = (1{,}44 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^4. \quad (23)$$

6.1.2 Runder Stab

Der Durchmesser des runden Stabes ist ebenfalls in Tabelle 3 notiert. Damit folgt

$$\begin{aligned} I_{\text{rund}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} r^3 \sin(\varphi)^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi && (24) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{d^4}{16}\right) && (25) \\ &= \frac{\pi \mathrm{d}^4}{64} && (26) \\ &= 4{,}9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4. && (27) \end{aligned}$$

Mit dem Fehler nach (18) folgt

$$I_{\text{rund}} = (4{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4. \quad (28)$$

6.2 Einseitig befestigter runder Stab

Um den Elastizitätsmodul der beiden Stäbe zu berechnen, wird die Biegung $D(x)$ gegen den Ausdruck $\mathrm{L}x^2 - \frac{x^3}{3}$, für die einseitige Einspannung, aufgetragen. Die Biegung $D(x)$ wird gemäß

$$D(x) = D_0(x) - D_{\mathrm{G}}(x) \quad (29)$$

berechnet. Dies beugt Ungenauigkeiten in der Messung der Null- und Auslenkungslage vor.

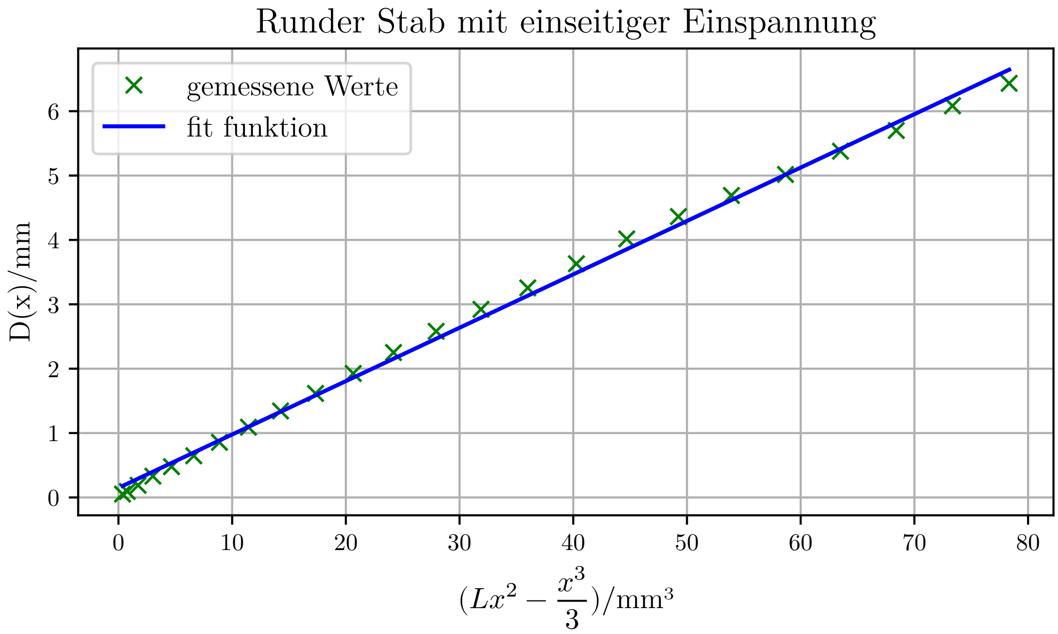

Abbildung 2: $D(x)$ gegen $\mathrm{L}x^2 - \frac{x^3}{3}$

Die lineare Regression der Form $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ liefert folgende Parameter:

$$\mathrm{a} = (0{,}0829 \pm 0{,}0009)\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$
$$\mathrm{b} = (0{,}1484 \pm 0{,}0356)\,\mathrm{mm}.$$

Durch den Vergleich der linearen Regression mit Formel (11) erhält man für den Elastizitätsmodul:

$$\mathrm{E} = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{rund}} \cdot a}. \tag{30}$$

Die angehängte Masse mit der Eigenmasse des Stabes zusammen ergeben 1143 g. Somit berechnet sich der Elastizitätsmodul mit dem Fehler nach (18) zu

$$\mathrm{E}_{\mathrm{rund}} = (137{,}7 \pm 1{,}5) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

6.3 Einseitig befestigter eckiger Stab

Die Auslenkungen wurden wie beim runden Stab, (29), berechnet. Die lineare Regression der Form $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ liefert folgende Parameter:

$$\mathrm{a} = (0{,}0714 \pm 0{,}0009)\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$
$$\mathrm{b} = (0{,}4315 \pm 0{,}0375)\,\mathrm{mm}.$$

Wie beim runden Stab kann mit Umstellen der Formel (11) der Elastizitätsmodul berechnet werden:

$$\mathrm{E} = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{eckig}} \cdot a} \tag{31}$$

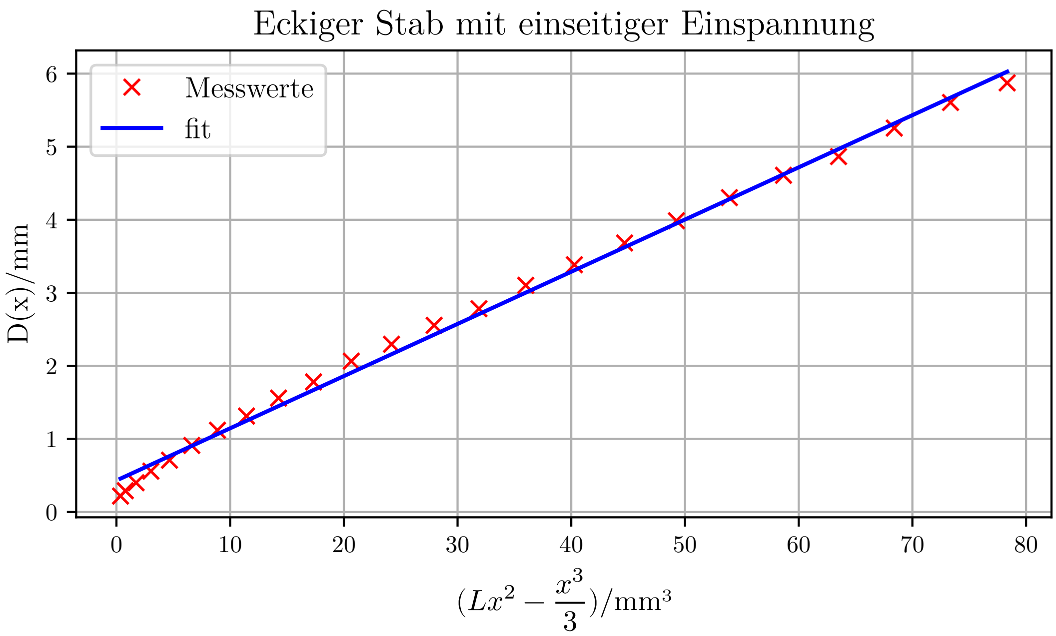

Abbildung 3: $D(x)$ gegen $\mathrm{L}x^2 - \frac{x^3}{3}$

Die Gesamtmasse, aus angehängter Masse und Eigenmasse des Stabes zusammengesetzt, ergeben 2960,5 g. Somit berechnet sich der Elastizitätsmodul, mit dem Fehler nach (18), zu

$$\mathrm{E}_{\mathrm{eckig}} = (141{,}2 \pm 1{,}9) \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

6.4 Zweiseitig befestigter eckiger Stab

Im folgenden wird wieder der eckige Stab, derselbe aus der Auswertung für den einseitig eingespannten Stab, benutzt. Am Mittelpunkt des Stabes wurde eine Masse von 4694,1 g angehängt.
Zuerst wird der Bereich des Stabes für $0 \leq x \leq \mathrm{L}/2$ betrachtet (rechts). Die relative Auslenkung wird hierfür gegen $3\mathrm{L}^2 x - 4x^3$ aufgetragen. Die lineare Regression der Form $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ liefert folgende Parameter:

$$\mathrm{a}_r = (4{,}6 \pm 6{,}5) \cdot 10^{-9} \, \frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$
$$\mathrm{b}_r = (-0{,}16 \pm 0{,}02) \, \mathrm{mm}.$$

Der Elastizitätsmodul berechnet sich also mit (18) und mit der Formel für den Elastizitätsmodul, (13) umgestellt, zu:

$$\mathrm{E}_r = (1{,}62 \pm 0{,}23) \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

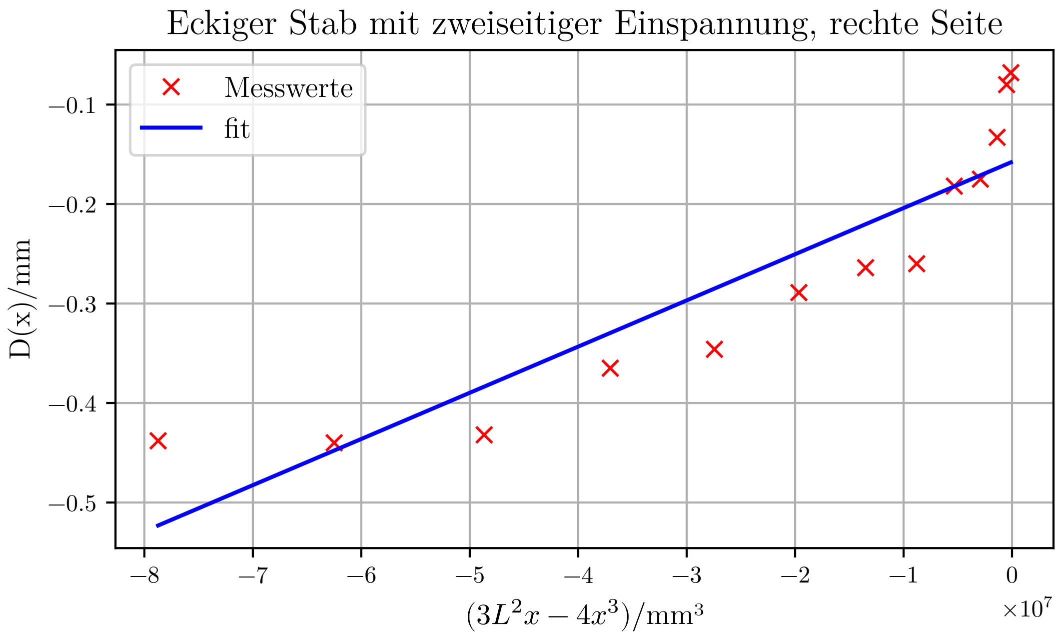

Abbildung 4: $D(x)$ gegen $3\mathrm{L}^2 x - 4x^3$

Für die linke Seite, mit $\mathrm{L}/2 \leq x \leq \mathrm{L}$, liefert die lineare Regression der Form $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ folgende Parameter:

$$\mathrm{a}_l = (9{,}75 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-10} \, \frac{1}{\mathrm{mm}^2}$$
$$\mathrm{b}_l = (-0{,}72 \pm 0{,}02) \, \mathrm{mm}.$$

Der Elastizitätsmodul berechnet sich also mit (18) und mit der Formel für den Elastizitätsmodul, nach (15), zu:

$$\mathrm{E}_l = (7{,}7 \pm 0{,}4) \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

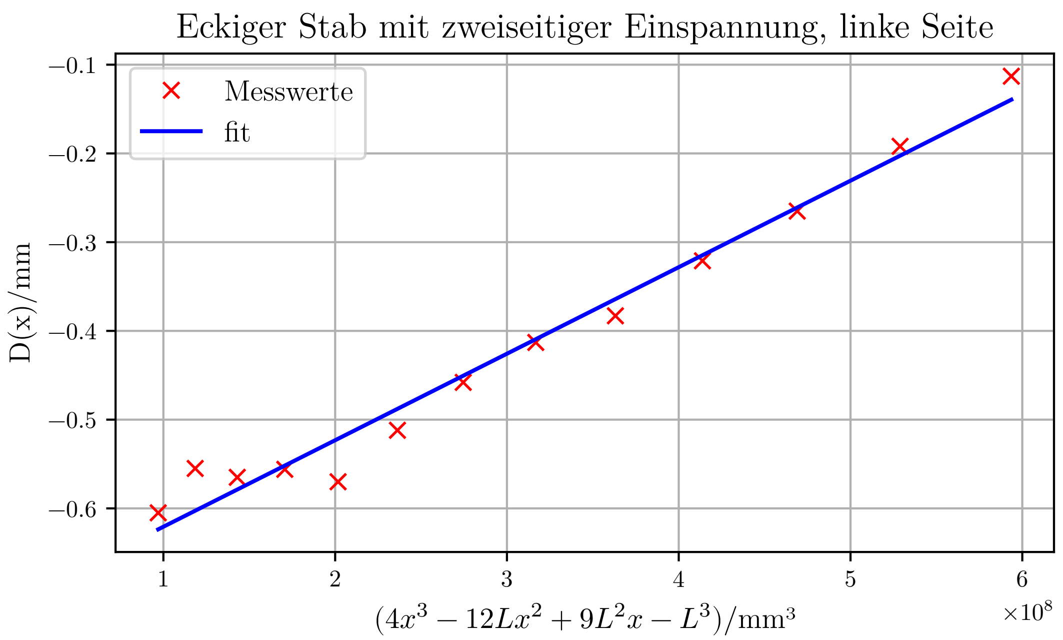

Abbildung 5: $D(x)$ gegen $4x^3 - 12\mathrm{L}x^2 + 9\mathrm{L}^2x - \mathrm{L}^3$

7 Diskussion

Damit die gemessenen Werte mit den Literaturwerten verglichen werden können, berechnet man die Dichte der beiden Stäbe nach

$$\rho = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}. \tag{32}$$

Mit den Maßen aus (3), erhält man für die beiden Stangen:

$$\rho_{\text{eckig}} = 8{,}003\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$
$$\rho_{\text{rund}} = 8{,}369\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Die Dichten der beiden Stäbe entsprechen den Dichten von Messing oder Neusilber, nach [2].

$$\rho_{\text{Messing}} = (8{,}1 - 8{,}7)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$
$$\rho_{\text{Neusilber}} = 8{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Da die Stäbe aber eine goldgelbe Farbe haben, ist das Material nicht mit Neusilber, sondern als Messing anzunehmen.

Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls von Messing ist

$$\mathrm{E}_{\text{Messing}} = (78 \cdot 10^9 - 123 \cdot 10^9)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$$

nach [1]. Die Abweichung zu unseren experimentell ermittelten Werten sind für die einseitige Einspannung

$$\Delta\mathrm{E}_{\text{rund}} = 10{,}7\,\%$$
$$\Delta\mathrm{E}_{\text{eckig}} = 12{,}9\,\%.$$

Der Unterschied liegt zu großen Teilen an der Messmethode, da schon bei einer leichten Berührung des Tisches auf den Messuhren ein Unterschied von 0,05 mm zu erkennen war.

Bei der Messung des Elastizitätsmoduls des eckigen Stabes liegt der experimentell ermittelte Wert mehrere Größenordnungen neben dem Literaturwert. Da die Messung der Elastizitätsmodule für die einseitige Einspannung gut gelungen ist, liegen die starken Abweichungen des Elastizitätsmoduls des beidseitig eingespannten Stabes vermutlich an den sehr empfindlichen Messuhren. In (4) kann man auch sehr deutlich sehen, dass die Ausgleichsgerade nicht optimal liegt, weshalb dadurch eine Bestimmung des Elastizitätsmoduls sehr fehleranfällig ist. Die Auslenkung war bei dieser Messung kleiner, da wir keine größere Masse anhängen konnten.

8 Anhang

Tabelle 1: Messwerte für einseitige Einspannung

eckiger Stab				runder Stab		
D_0 [mm]	D_G [mm]	D_{eckig} [mm]	x [cm]	D_0 [mm]	D_G [mm]	D_{rund} [mm]
1,460	1,678	−0,218	2,7	3,289	3,341	−0,052
1,350	1,641	−0,291	4	3,145	3,238	−0,093
1,280	1,680	−0,400	6	2,989	3,178	−0,189
1,212	1,771	−0,559	8	2,820	3,150	−0,330
1,150	1,859	−0,709	10	2,672	3,150	−0,478
1,080	1,991	−0,911	12	2,513	3,160	−0,647
1,000	2,119	−1,110	14	2,353	3,209	−0,856
0,965	2,278	−1,313	16	2,202	3,293	−1,091
0,951	2,509	−1,558	18	2,111	3,454	−1,343
0,920	2,701	−1,781	20	1,992	3,607	−1,615
0,920	2,985	−2,065	22	1,900	3,826	−1,926
0,915	3,210	−2,295	24	1,777	4,028	−2,251
0,911	3,467	−2,556	26	1,663	4,244	−2,581
0,910	3,691	−2,781	28	1,548	4,470	−2,922
0,876	3,979	−3,103	30	1,450	4,705	−3,255
0,840	4,225	−3,385	32	1,325	4,955	−3,630
0,810	4,492	−3,682	34	1,222	5,238	−4,016
0,788	4,775	−3,987	36	1,142	5,505	−4,363
0,771	5,074	−4,303	38	1,090	5,781	−4,691
0,761	5,369	−4,608	40	1,078	6,095	−5,017
0,750	5,615	−4,865	42	1,070	6,448	−5,378
0,745	6,000	−5,255	44	1,050	6,750	−5,700
0,740	6,345	−5,605	46	1,057	7,140	−6,083
0,740	6,613	−5,873	48	1,050	7,483	−6,433
0,740			50	1,085		

Tabelle 2: Messwerte für beidseitige Einspannung

linke Hälfte			rechte Hälfte		
x [cm]	D_0 [mm]	D_G [mm]	x [cm]	D_0 [mm]	D_G [mm]
27	0,982	1,420	29	−0,010	0,595
25	0,960	1,400	31	−0,005	0,550
23	0,952	1,384	33	−0,023	0,542
21	0,950	1,315	35	−0,035	0,521
19	0,949	1,295	37	−0,040	0,530
17	0,963	1,252	39	−0,009	0,503
15	0,978	1,242	41	0,000	0,458
13	1,028	1,288	43	0,009	0,422
11	1,100	1,282	45	0,058	0,441
9	1,160	1,335	47	0,031	0,352
7	1,220	1,353	49	0,015	0,280
5	1,300	1,380	51	−0,015	0,177
3	1,412	1,480	53	−0,035	0,078

Tabelle 3: Gerätedaten

Objekt	Höhe [cm]	Breite [cm]	Masse [g]	Länge [cm]
eckiger Stab	$1 \pm 0,005$	$1,2 \pm 0,005$	$605,0$	63
runder Stab	$1 \pm 0,005$	$1 \pm 0,005$	$394,4$	60

Literatur

[1] Rolf Preuß. *Elastizitätsmodul.* URL: http://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html (besucht am 05. 11. 2017).

[2] *Tabellensammlung Chemie/ Dichte fester Stoffe.* URL: https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/_Dichte_fester_Stoffe (besucht am 04. 11. 2017).

[3] *Versuchsanleitung für v103 biegung elastischer Stäbe im AP der Fakultät Physik an der TU Dortmund.* URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf (besucht am 05. 11. 2017).