

V 103

Biegung elastischer Stäbe

Timo Gräßer
timo.graesser@udo.edu

Jasper Karl Lammering
jasper.lammering@udo.edu

Durchführung: 19.1.16

Abgabe: 26.1.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	3
1.1. Problemstellung	3
1.2. Biegung eines Stabes bei einseitiger Aufhängung	3
1.3. Biegung eines Stabes bei beidseitiger Auflage	5
2. Durchführung und Aufbau	6
3. Auswertung	7
3.1. Fehlerrechnung	7
3.2. Runder Stab	8
3.2.1. Bestimmung der Dichte und des Flächenträgheitsmoments	8
3.2.2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei einseitiger Einspannung . .	9
3.3. Quadratischer Stab	9
3.3.1. Bestimmung der Dichte und des Flächenträgheitsmoments	9
3.3.2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei einseitiger Einspannung . .	10
3.3.3. Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei doppelseitiger Auflage . . .	11
4. Diskussion	18
4.1. Runder Stab	18
4.1.1. Bestimmung des Materials anhand der Dichte	18
4.1.2. Elastizitätsmodul	18
4.2. Quadratischer Stab	18
4.2.1. Bestimmung des Materials anhand der Dichte	18
4.2.2. Elastizitätsmodul	19
4.3. Systematische Abweichungen von den Theoriegleichungen	19
4.3.1. Einseitig eingespannter Stab	19
4.3.2. Zweiseitig aufgelegter Stab	20
Literatur	23
A. Kopie der Originaldaten	23

1. Theorie

1.1. Problemstellung

Ein Körper an den Kräfte angreifen kann dadurch eine Volumenänderung oder eine Verformung erfahren. Wenn die Kraft auf die Flächeneinheit bezogen wird, wird sie als Spannung σ bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen der Volumenänderung und der Spannung ist in vielen Fällen linear. Bezeichnet wird dieser Zusammenhang als Hookesches Gesetz (1).

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Hier wird die Änderung in einer Dimension, der Längenänderung L , beschrieben; dabei ist die Spannung eine Tangentialspannung. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 1 zu sehen.

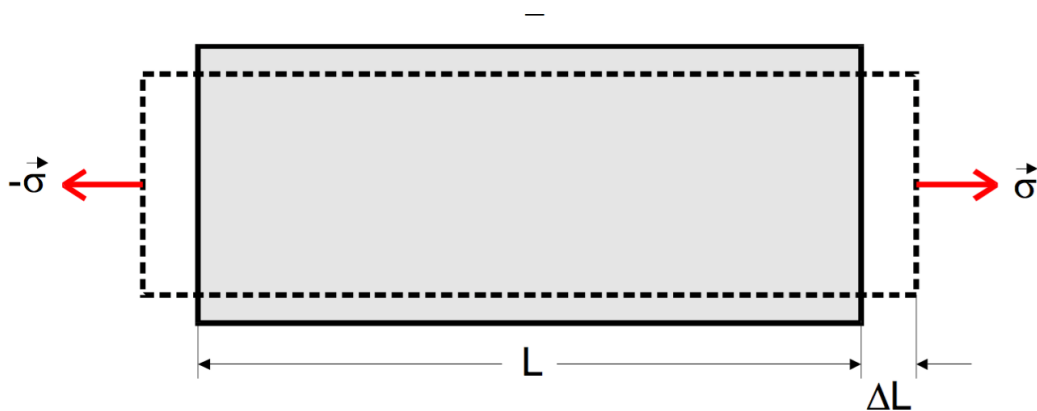


Abbildung 1: Längenänderung eines Stabes auf Grund einer Tangentialspannung[2].

Der Proportionalitätsfaktor E ist die in diesem Versuch zu bestimmende Größe, der Elastizitätsmodul. Da allerdings eine Längenänderung oft schwer zu messen ist, wird in diesem Versuch E über die Biegung der zu untersuchenden Materialien bestimmt. Dabei können mit relativ geringer Krafteinwirkung gute Ergebnisse erzielt werden.

1.2. Biegung eines Stabes bei einseitiger Aufhängung

Bei diesem Aufbau wird an den Stab, der an einer Seite eingespannt ist, ein Gewicht angehängt, wodurch er sich biegt. Diese Biegung ist auch auf Dehnung zurückzuführen; nur dass hier die Dehnung auf der Länge des Stabes nicht gleichmäßig ist. Auf der Unterseite des Stabes wird sogar negative Dehnung, also Stauchung, vorgefunden. Die Durchbiegung, also die Verschiebung eines Punktes vor und nach Belastung, wird durch die später bestimmte Funktion $D(x)$ beschrieben. Darin ist erneut der Elastizitätsmodul enthalten.

In Abbildung 2 ist die Biegung nach $D(x)$ gegeben. Zu erkennen ist auch die Querschnittsfläche Q , die aus ihrer vertikalen Position verdreht ist. Dies geschieht auf Grund

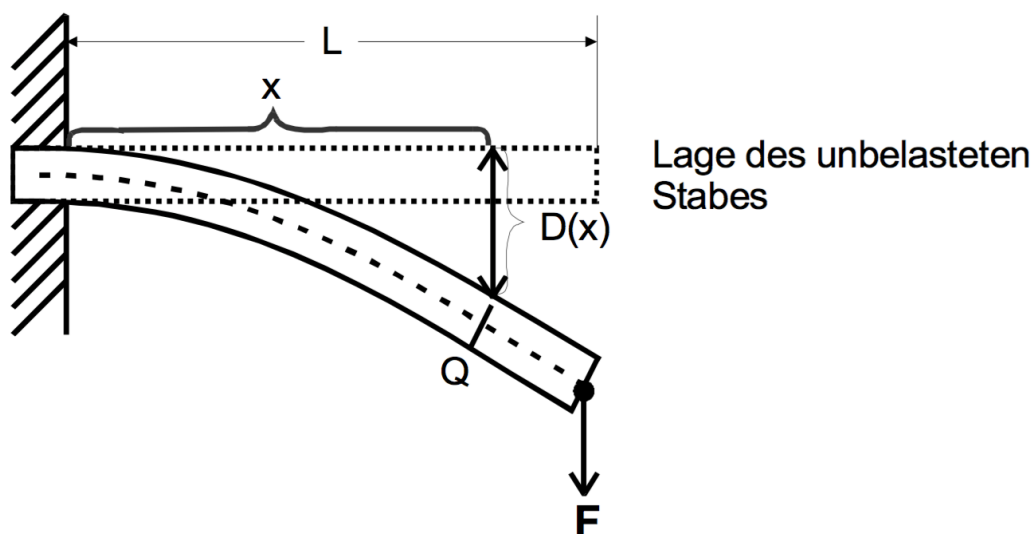


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung[2].

von Kräftepaaren, die entgegengesetzt oben und unten an Q angreifen. Dann muss das Drehmoment betrachtet werden.

Wenn der Stab in Schichten aufgeteilt wird, haben die Oberen Zugspannung und die Unteren Druckspannung. Die Schicht ohne jegliche Spannung, die auch die ursprüngliche Länge beibehält, wird neutrale Faser genannt.

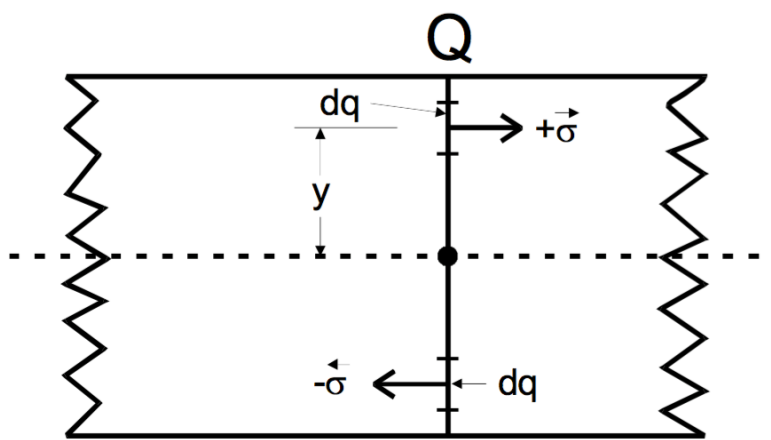


Abbildung 3: Skizze zur Berechnung des Drehmoments[2].

Das Drehmoment M kann wie in Formel (2) berechnet werden:

$$M = \int_Q y \sigma(y) dq. \quad (2)$$

Dabei ist y der Abstand der Abstand zur neutralen Faser. Über die Gleichheit der

Drehmomente in Formel (4) wird die Momentengleichung (5) hergeleitet.

mit

$$M_F = F(L - x) \quad (3)$$

$$M_F = M \quad (4)$$

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \underbrace{\int_Q y^2 dq}_{\equiv I} = F(L - x) \quad (5)$$

Das markierte I ist das Flächenträgheitsmoment. Nach Ausführen der Integration ergibt sich für die Durchbiegung in Abhängigkeit von x, dem Abstand zur Einspannung, Gleichung (6).

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (6)$$

1.3. Biegung eines Stabes bei beidseitiger Auflage

Bei diesem Aufbau wird der Stab an beiden Seiten aufgelegt und in der Mitte des Stabs ein Gewicht angehängt.

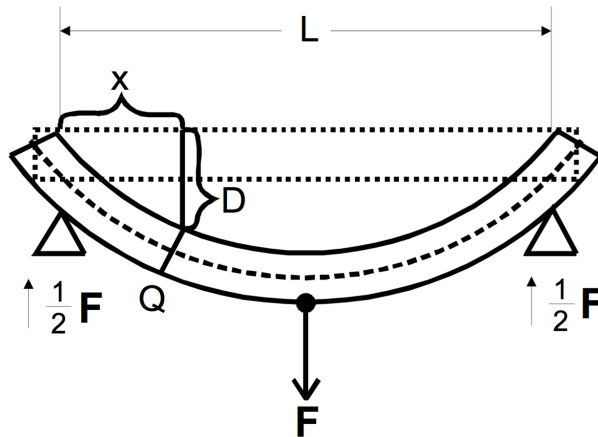


Abbildung 4: Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage[2].

Die Kräfteverteilung ist in Abbildung 4 zu sehen. Dann wird Gleichung (3) zu Gleichung (7) mit einer Fallunterscheidung.

$$M_F = \begin{cases} -\frac{F}{2}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ -\frac{F}{2}(L - x), & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (7)$$

Die Momentengleichung (8) sieht dann aus wie folgt:

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F}{EI} \frac{x}{2} \text{ für } 0 \leq x \leq L/2 \text{ bzw. } \frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{1}{2} \frac{F}{EI} (L - x) \text{ für } L/2 \leq x \leq L. \quad (8)$$

Als Endergebnis ergibt sich dann Gleichung (9) beziehungsweise Gleichung (10).

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2 x - 4x^3) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L/2 \quad (9)$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2 x - L^3) \quad \text{für } L/2 \leq x \leq L \quad (10)$$

2. Durchführung und Aufbau

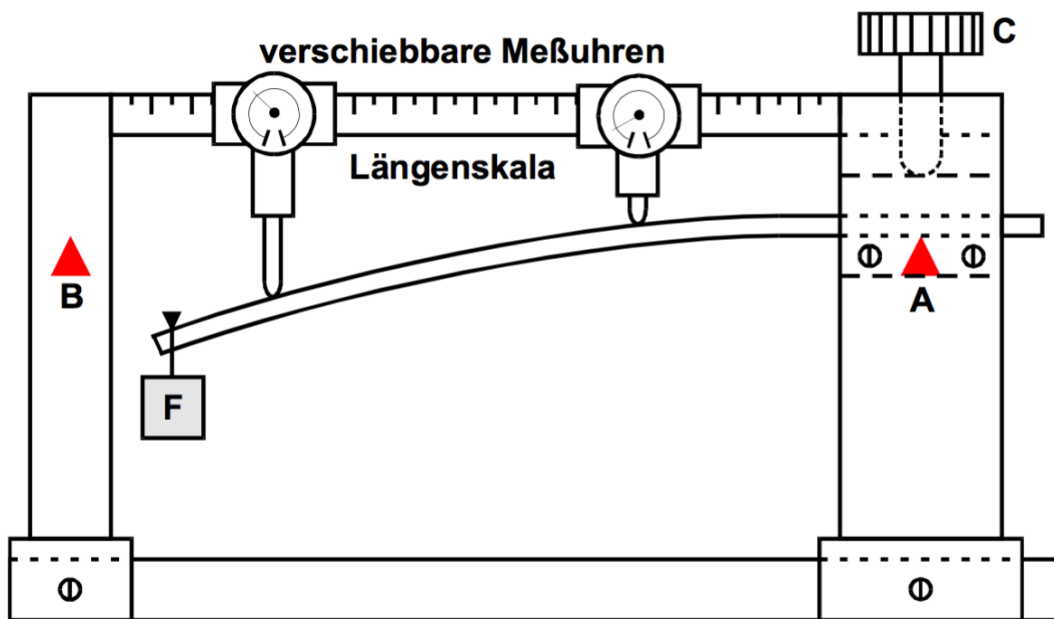


Abbildung 5: Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe[2].

In Abbildung 5 ist eine schematische Darstellung der zu verwendenden Apparatur zu sehen. Hier kann ein Gewicht F an den Stab gehängt werden und der Stab kann entweder mit der Vorrichtung C eingespannt werden oder an den Punkten A und B aufgelegt werden. Die beiden Messuhren sind auf einer Längenskala verschiebbar.

- Um später den berechneten Elastizitätsmodul mit Literaturwerten zu vergleichen muss zunächst das Material benannt werden. Dazu wird die Dichte bestimmt. Zu diesem Zweck wird die Länge sowie der Durchmesser zehn Mal vermessen; außerdem wird die Masse ein Mal bestimmt. Mehrfache Messungen dienen der Genauigkeit. Diese Messungen werden bei einem ausgewählten Stab kreisförmigen Querschnitts sowie bei einem mit quadratischem Querschnitt durchgeführt.

- Nun wird die Biegung bei einseitiger Einspannung mit beiden Stäben durchgeführt. Dazu wird der jeweilige Stab an einer Seite mit der Vorrichtung C eingespannt. Das Gewicht, das den Stab an der anderen Seite belastet, wird so gewählt, dass die maximale Durchbiegung zwischen 3 und 7 mm liegt. Dann werden 30 Messwertpaare aus Durchbiegung $D(x)$ und Position x der Messuhr aufgenommen. Die Durchbiegung $D(x)$ ist die Differenz zwischen Durchbiegung mit Gewicht D_M und ohne Gewicht $D_0(x)$.

$$D(x) = D_M - D_0(x)$$

Gemessen wird in Nähe des Gewichts genauer, wobei immer größere Abstände genommen werden desto weiter sich die Messuhr von dem Gewicht entfernt. Darüber hinaus wird die Länge des Stabs von Einspannung bis zu dem Gewicht drei Mal gemessen. Das angehängte Gewicht wird ein Mal gemessen.

- Zuletzt wird die Durchbiegung bei beidseitiger Auflage vermessen. Der Stab wird links und rechts aufgelegt und das Gewicht wird in der Mitte angehängt. Dazu wird ein Gewicht großer Masse¹ gewählt. Die Länge von Auflage zu Auflage wird ein Mal gemessen und der Mittelpunkt bestimmt. Dann wird links und rechts von dem Gewicht jeweils 15 Mal die Durchbiegung $D(x)$, wie oben beschrieben, gemessen. Erneut ist die Genauigkeit um das Gewicht herum größer.

3. Auswertung

3.1. Fehlerrechnung

Für die Fehlerfortpflanzung bei Gleichungen mit N fehlerbehafteten Größen wird jeweils die Formel zur Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \quad (11)$$

mit der jeweiligen Funktion $f(x_i)$, den Messgrößen x_i und den zugehörigen Fehlern σ_i verwendet. Zur Berechnung des arithmetischen Mittels von N Messwerten wird jeweils die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (12)$$

mit den Messwerten x_i benutzt. die Standardabweichung des Mittelwerts wird jeweils mit der Gleichung

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (13)$$

¹Größenordnung 5 kg

mit den N Messwerten x_i berechnet.

3.2. Runder Stab

3.2.1. Bestimmung der Dichte und des Flächenträgheitsmoments

In Tabelle 1 sind Messwerte für die Länge l_r und den Durchmesser d_r des Stabes mit kreisförmigem Querschnitt dargestellt.

Tabelle 1: Messwerte für den runden Stab.

l_r/m	d_r/mm
0.580	10.00
0.579	10.00
0.580	10.00
0.579	10.00
0.579	10.00
0.579	10.10
0.579	10.14
0.580	10.02
0.579	10.00
0.579	10.02

Daraus ergeben sich die Mittelwerte und Standardabweichungen

$$l_r = (0.5793 \pm 0.0005) \text{ m} \quad d_r = (10.03 \pm 0.05) \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (14)$$

Über das Volumen

$$V_r = \frac{\pi d_r^2}{4} l_r = (4.58 \pm 0.05) \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad (15)$$

und die Masse

$$m_r = 0.3564 \text{ kg} \quad (16)$$

folgt die Dichte des runden Stabes

$$\rho_r = (7.79 \pm 0.08) \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (17)$$

Aus der Formel (5) ergibt sich das Flächenträgheitsmoment des runden Stabes

$$I_r = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2(\varphi) dr d\varphi = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d_r^4}{64} = (4.97 \pm 0.10) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4. \quad (18)$$

3.2.2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei einseitiger Einspannung

In Tabelle 5 sind die Messwerte der Durchbiegungsmessung am einseitig eingespannten, runden Stab dargestellt. Dabei ist $x_{1,r}$ die Position auf dem Stab, von der eingespannten Seite aus gesehen, und

$$D_{1,r,a} - D_{1,r,b} = D_{1,r} \quad (19)$$

die Auslenkung des Stabes aus seiner Anfangsposition, in der er nicht belastet wird. In Tabelle 2 sind die Messwerte für die effektive Länge des eingespannten runden Stabes aufgeführt.

Tabelle 2: Effektive Länge des einfach eingespannten, runden Stabes.

$L_{\text{eff},1,r}/\text{m}$
0.462
0.462
0.462

Es ergibt sich der Mittelwert

$$L_{\text{eff},1,r} = 0.462 \text{ m}. \quad (20)$$

Mit der Masse

$$M_{1,r} = 1.1831 \text{ kg} \quad (21)$$

des benutzten Gewichts und der Erdbeschleunigung [3]

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2} \quad (22)$$

folgt die am Stab angreifende Gewichtskraft

$$F_{1,r} = 11.606 \text{ N}. \quad (23)$$

Mit den berechneten Werten kann die Ausgleichsfunktion (6) der Biegung des runden Stabes und somit der Elastizitätsmodul E bestimmt werden. In Abbildung 6 sind sowohl die Messwerte, als auch die Ausgleichsfunktion $D_{1,e}(x)$ abgebildet. Der ausgegebene Funktionsparameter ist der Elastizitätsmodul des runden Stabes

$$E_{1,r} = (1910 \pm 5) \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}. \quad (24)$$

3.3. Quadratischer Stab

3.3.1. Bestimmung der Dichte und des Flächenträgheitsmoments

In Tabelle 3 sind Messwerte für die Länge l_q und den Durchmesser d_q des Stabes mit quadratischem Querschnitt dargestellt. Daraus ergeben sich die Mittelwerte und Standardabweichungen

$$l_q = (0.5911 \pm 0.0003) \text{ m} \quad d_q = (9.97 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \text{ m.} \quad (25)$$

Über das Volumen

$$V_q = d_q^2 \cdot l_q = (5.87 \pm 0.03) \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad (26)$$

und die Masse

$$m_q = 0.1641 \text{ kg} \quad (27)$$

folgt die Dichte des quadratischen Stabes

$$\rho_q = (2.79 \pm 0.01) \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (28)$$

Tabelle 3: Messwerte für den quadratischen Stab.

l_q/m	d_q/mm
0.591	10.00
0.591	9.96
0.591	9.98
0.591	10.00
0.592	9.96
0.591	9.96
0.591	9.92
0.591	9.98
0.591	9.98
0.591	9.94

Über die Formel (5) ergibt sich das Flächenträgheitsmoment des quadratischen Stabes

$$I_q = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} x^2 dx dy = \frac{D^4}{12} = \frac{d_q^4}{12} = (8.23 \pm 0.08) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4. \quad (29)$$

3.3.2. Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei einseitiger Einspannung

In Tabelle 6 sind die Messwerte der Durchbiegungsmessung am einseitig eingespannten, quadratischen Stab dargestellt. Dabei ist wieder $x_{1,q}$ die Entfernung von der eingespannten Seite und

$$D_{1,q,a} - D_{1,q,b} = D_{1,q} \quad (30)$$

die Biegung des Stabes. In Tabelle 4 sind die Messwerte für die effektive Länge des eingespannten quadratischen Stabes aufgeführt.

Tabelle 4: Effektive Länge des einfach eingespannten, quadratischen Stabes.

$L_{\text{eff},1,q}/\text{m}$
0.482
0.4815
0.482

Es ergibt sich der Mittelwert

$$L_{\text{eff},1,q} = (0.4818 \pm 0.0003) \text{ m.} \quad (31)$$

Über die Masse

$$M_{1,q} = 0.5395 \text{ kg} \quad (32)$$

des benutzten Gewichts und die Erdbeschleunigung (22) folgt die am quadratischen Stab angreifende Gewichtskraft

$$F_{1,q} = 5.293 \text{ N.} \quad (33)$$

Aus diesen Werten wird die Ausgleichsfunktion (6) und der Elastizitätsmodul E bestimmt. Die Messwerte und der Fit sind in Abbildung 7 abgebildet und der Elastizitätsmodul des quadratischen Stabes lautet

$$E_{1,q} = (640 \pm 2) \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}. \quad (34)$$

3.3.3. Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei doppelseitiger Auflage

In Tabelle 7 sind die Messwerte der Durchbiegungsmessung am doppelt aufgelegten, quadratischen Stab abgebildet. Da das Gewicht bei dieser Messung in der Mitte hängt, müssen Messwerte für beide Seiten getrennt aufgenommen werden. Die effektive Länge des aufgelegten Stabes beträgt

$$L_{\text{eff},2,q} = 0.55 \text{ m,} \quad (35)$$

womit der Aufhängepunkt des Gewichtes in der Mitte bei 0.275 m liegt. Die Werte $x_{2,q}$ sind die jeweiligen Abstände der betrachteten Stellen von dem Aufhängepunkt. Diese werden für die Ausgleichsrechnungen so umgerechnet, dass sie die Abstände der jeweiligen betrachteten Stellen von der linken Auflagestelle beschreiben. Somit sind die Abstandswerte für die Biegungswerte an der linken Seite

$$x_{2,q,l} = x_{2,q}, \quad (36)$$

mit umgedrehter Zuordnung, und an der rechten Seite

$$x_{2,q,r} = x_{2,q} + 0.275 \text{ m.} \quad (37)$$

Die Biegung des Stabes an der linken Seite ist

$$D_{2,q,l,a} - D_{2,q,l,b} = D_{2,q,l} \quad (38)$$

und die an der rechten Seite

$$D_{2,q,r,a} - D_{2,q,r,b} = D_{2,q,r}. \quad (39)$$

Die Gewichtskraft, die am Stab angreift, ist mit der Masse

$$M_{2,q} = 4.7094 \text{ kg} \quad (40)$$

und der Erdbeschleunigung (22)

$$F_{2,q} = 46.20 \text{ N} \quad (41)$$

Es werden zwei Ausgleichsfunktionen (9) und (10) und somit auch zwei Elastizitätsmodule bestimmt. Die Messwerte für den linken und den rechten Teil des Stabes und die jeweiligen Fits sind in den Abbildungen 8 und 9 dargestellt. Aus den daraus resultierenden Elastizitätsmodulen

$$E_{2,q,l} = (109 \pm 7) \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \quad (42)$$

und

$$E_{2,q,r} = (131 \pm 1) \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \quad (43)$$

folgt der Mittelwert

$$E_{2,q} = (120 \pm 4) \cdot 10^9 \text{ N m}^2. \quad (44)$$

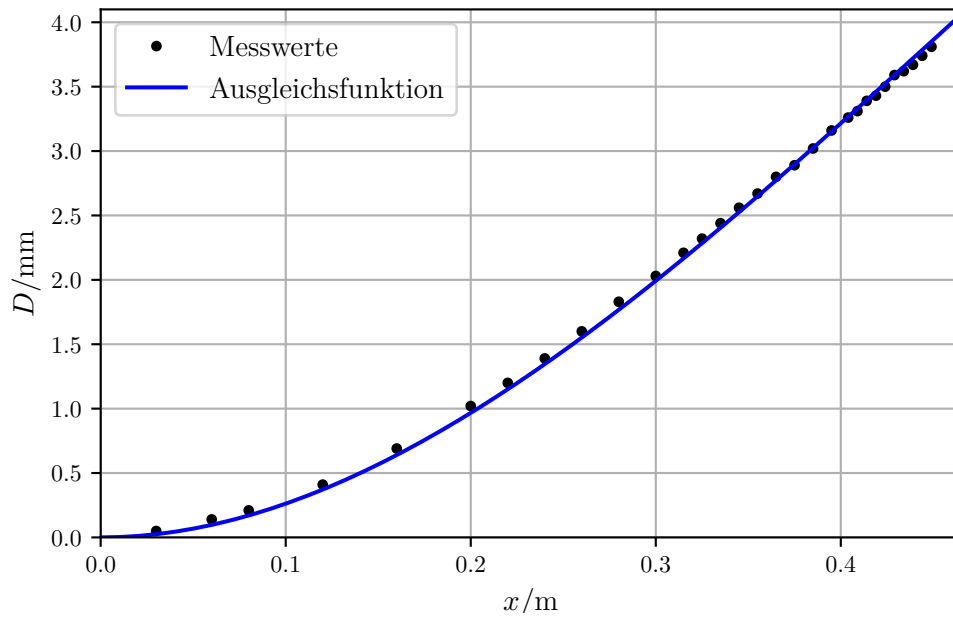


Abbildung 6: Messwerte und Fit $D_{1,e}(x)$ der Abstandsmessung am einseitig eingespannten, runden Stab.

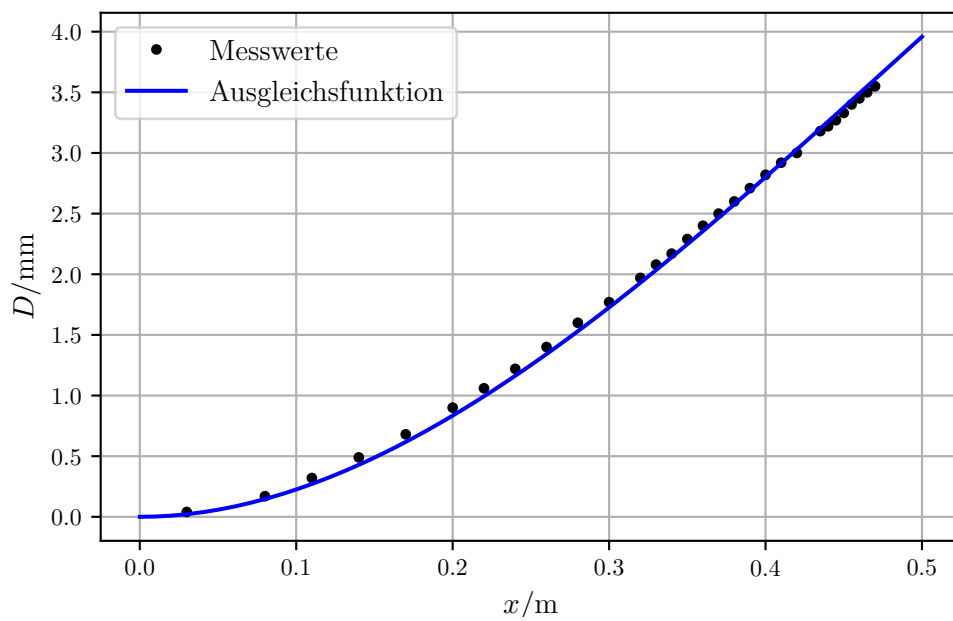


Abbildung 7: Messwerte und Fit $D_{2,e}(x)$ der Abstandsmessung am einseitig eingespannten, quadratischen Stab.

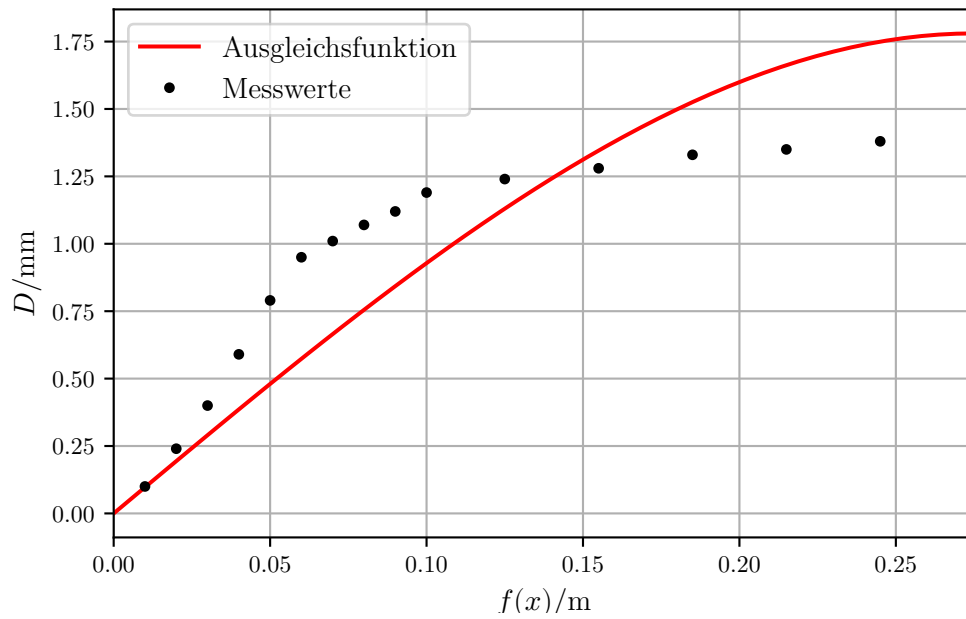


Abbildung 8: Messwerte und Fit $D_{2d,l}(x)$ der Abstandsmessung am linken Teil des einseitig eingespannten, quadratischen Stabes.

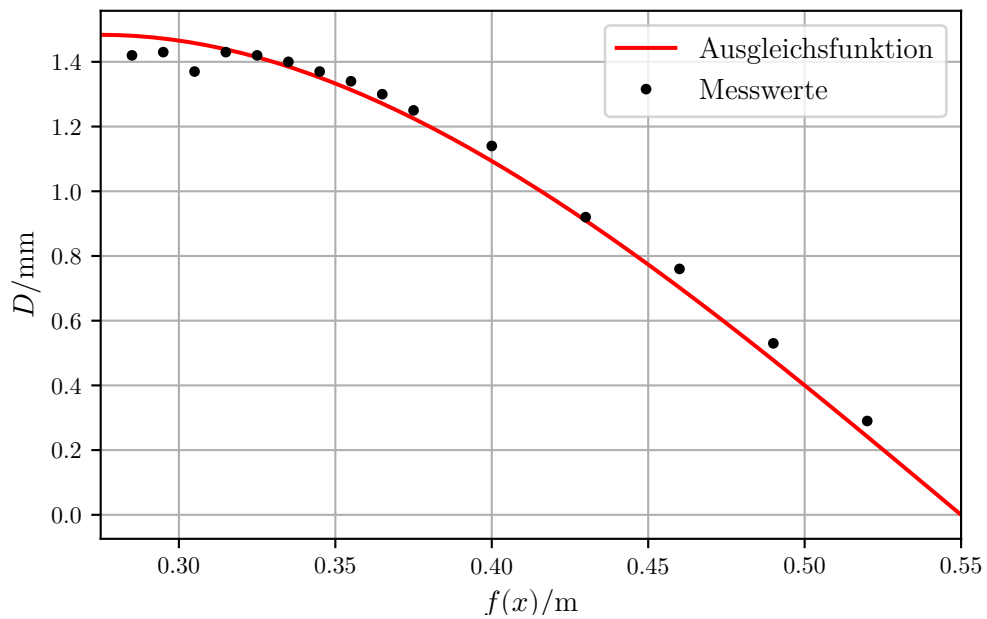


Abbildung 9: Messwerte und Fit $D_{2d,l}(x)$ der Abstandsmessung am rechten Teil des einseitig eingespannten, quadratischen Stabes.

Tabelle 5: Messwerte für den einfach eingespannten, runden Stab.

$x_{1,r}/\text{m}$	$D_{1,r,a}/\text{mm}$	$D_{1,r,b}/\text{mm}$
0.449	9.61	5.80
0.444	9.62	5.88
0.439	9.62	5.95
0.434	9.63	6.01
0.429	9.64	6.05
0.424	9.64	6.14
0.419	9.65	6.22
0.414	9.65	6.26
0.409	9.66	6.35
0.404	9.66	6.40
0.395	9.68	6.52
0.385	9.69	6.67
0.375	9.69	6.80
0.365	9.70	6.90
0.355	9.70	7.03
0.345	9.71	7.15
0.335	9.71	7.27
0.325	9.70	7.38
0.315	9.71	7.50
0.300	9.71	7.68
0.280	9.72	7.89
0.260	9.72	8.12
0.240	9.72	8.33
0.220	9.72	8.52
0.200	9.73	8.71
0.160	9.73	9.04
0.120	9.71	9.30
0.080	9.64	9.43
0.060	9.60	9.46
0.030	9.54	9.49

Tabelle 6: Messwerte für den einfach eingespannten, quadratischen Stab.

$x_{1,q}/\text{m}$	$D_{1,q,a}/\text{mm}$	$D_{1,q,b}/\text{mm}$
47.0	10.42	6.87
46.5	10.42	6.92
46.0	10.46	7.01
45.5	10.45	7.05
45.0	10.45	7.12
44.5	10.45	7.18
44.0	10.45	7.23
43.5	10.54	7.36
42.0	10.51	7.51
41.0	10.52	7.60
40.0	10.50	7.68
39.0	10.50	7.79
38.0	10.49	7.89
37.0	10.48	7.98
36.0	10.47	8.07
35.0	10.46	8.17
34.0	10.45	8.28
33.0	10.43	8.35
32.0	10.41	8.44
30.0	10.38	8.61
28.0	10.35	8.75
26.0	10.29	8.89
24.0	10.25	9.03
22.0	10.21	9.15
20.0	10.13	9.23
17.0	10.05	9.37
14.0	9.95	9.46
11.0	9.85	9.53
8.0	9.71	9.54
3.0	9.50	9.46

Tabelle 7: Messwerte für den doppelt aufgelegten, quadratischen Stab.

$x_{2,q}/\text{cm}$	$D_{2,q,l,a}/\text{mm}$	$D_{2,q,r,a}/\text{mm}$	$D_{2,q,l,b}/\text{mm}$	$D_{2,q,r,b}/\text{mm}$
1.0	8.49	9.03	7.07	7.65
2.0	8.47	9.03	7.04	7.68
3.0	8.37	9.04	7.00	7.71
4.0	8.40	9.06	6.97	7.78
5.0	8.38	9.08	6.96	7.84
6.0	8.37	9.10	6.97	7.91
7.0	8.37	9.12	7.00	8.00
8.0	8.35	9.15	7.01	8.08
9.0	8.33	9.17	7.03	8.16
10.0	8.33	9.19	7.08	8.24
12.5	8.27	9.25	7.13	8.46
15.5	8.20	9.32	7.28	8.73
18.5	8.15	9.35	7.39	8.95
21.5	8.11	9.36	7.58	9.12
24.5	8.08	9.37	7.79	9.27

4. Diskussion

4.1. Runder Stab

4.1.1. Bestimmung des Materials anhand der Dichte

Mit der berechneten Dichte des runden Stabes kann durch einen Vergleich mit einer Auswahl an Werkstoffen und deren zugehöriger Dichte [1] das benutzte Material bestimmt werden. Die aus den Messwerten berechnete Dichte des runden Stabes beträgt

$$\rho_r = (7.79 \pm 0.08) \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (45)$$

Am nächsten kommt diesem Wert die Dichte von Eisen [1]

$$\rho_{\text{Fe}} = 7.87 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (46)$$

Die Abweichung zwischen Mess- und Literaturwert ist mit

$$1 - \frac{\rho_r}{\rho_{\text{Fe}}} = 1.02 \% \quad (47)$$

gering.

4.1.2. Elastizitätsmodul

Das berechnete Elastizitätsmodul für den runden Eisen-Stab beträgt

$$E_{1,r} = (1910 \pm 5) \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2} \quad (48)$$

und der Literaturwert [1]

$$E_{\text{Fe}} = 2197 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2} \quad (49)$$

Die Abweichung

$$1 - \frac{E_{1,r}}{E_{\text{Fe}}} = 13.06 \% \quad (50)$$

ist gering.

4.2. Quadratischer Stab

4.2.1. Bestimmung des Materials anhand der Dichte

Die aus den Messwerten berechnete Dichte des quadratischen Stabes beträgt

$$\rho_q = (2.79 \pm 0.01) \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (51)$$

Am nächsten kommt diesem Wert die Dichte von Aluminium [1]

$$\rho_{\text{Al}} = 2.70 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (52)$$

Die Abweichung zwischen Mess- und Literaturwert ist mit

$$1 - \frac{\rho_q}{\rho_{\text{Al}}} = -3.33 \% \quad (53)$$

gering.

4.2.2. Elastizitätsmodul

Die berechneten Elastizitätsmodule des Aluminium-Stabes betragen

$$E_{1,q} = (640 \pm 2) \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2} \quad (54)$$

bei der ersten und

$$E_{2,q} = (120 \pm 4) \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2} \quad (55)$$

bei der zweiten Messung. Die Abweichung des Elastizitätsmoduls, das beim einseitig eingespannten Stab bestimmt wurde, von dem Literaturwert [1]

$$E_{Al} = 688 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2} \quad (56)$$

ist mit

$$1 - \frac{E_{1,q}}{E_{Al}} = 6.98 \% \quad (57)$$

sehr gering. Die Abweichung des Elastizitätsmoduls, das beim doppelt aufgelegten Stab bestimmt wurde, von dem Literaturwert (56) ist mit

$$1 - \frac{E_{2,q}}{E_{Al}} = -74.4 \% \quad (58)$$

sehr groß. Die Erklärung dafür folgt in Kapitel 4.3.2.

4.3. Systematische Abweichungen von den Theoriegleichungen

4.3.1. Einseitig eingespannter Stab

Die Gleichung (6) für die Durchbiegung des einseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit von der Entfernung zur eingespannten Seite beinhaltet die Proportionalität zwischen der Funktion

$$f_1(x) = Lx^2 - \frac{x^3}{3} \quad (59)$$

und $D_1(x)$. In den Abbildungen 10 und 11 sind jeweils die Messwerte für die Biegung des einfach eingespannten runden und quadratischen Stabes D_1 gegen die Funktion $f_1(x)$ des gemessenen Abstandes x_1 aufgetragen. Zusätzlich werden die Werte jeweils durch eine Ausgleichsgerade approximiert. Die Abweichung der Steigung

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{0.0002}{0.0598} = 0.32 \% \quad (60)$$

bei dem runden Stab und

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{0.0002}{0.0488} = 0.44 \% \quad (61)$$

bei dem quadratischen Stab ist sehr gering, die Theoriegleichung (59) für einen einfach eingespannten Stab beschreibt das elastische Verhalten also sehr gut.

4.3.2. Zweiseitig aufgelegter Stab

Aus der Gleichung (9) folgt die Proportionalität zwischen

$$f_2(x) = 3L^2x - 4x^3 \quad (62)$$

und $D_2(x)$. In Abbildung 12 sind die Biegunsmesswerte D_2 für die rechte und linke Seite des doppelt aufgelegten Stabes gegen $f_2(x_2)$ mit den Abstandsmesswerten x_2 aufgetragen. Durch die Messwerte für die rechte und linke Seite des Stabes wird jeweils eine Ausgleichsgerade gelegt. Die Abweichung der Steigung ist mit

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{0.0012}{0.0122} = 10.15 \% \quad (63)$$

für die linke Seite und

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{0.0007}{0.0107} = 6.79 \% \quad (64)$$

für die rechte Seite sehr groß. Das bedeutet nicht zwangsweise, dass die Theoriegleichung (62) ungeeignet ist, da es bei der doppelseitigen Auflage des Stabes einige Fehlerquellen gibt. Mit einem fast vier mal so großen Gewicht wie bei der einseitigen Einspannung entstehen nur etwa halb so große Biegungen am Stab. Dadurch haben kleine unerwünschte Verbiegungen am Stab deutlich größere Auswirkungen auf die Messwerte. Daraus, dass die Messwerte für die linke und rechte Seite jeweils unterschiedlich verlaufen, lässt sich schließen, dass der Stab entweder nicht gerade ist, oder das angreifende Gewicht nicht exakt in der Mitte hängt. Das hat zur Folge, dass das zweite bestimmte Elastizitätsmodul $E_{2,q}$ auch stark von dem Literaturwert abweicht wie an (58) zu sehen ist.

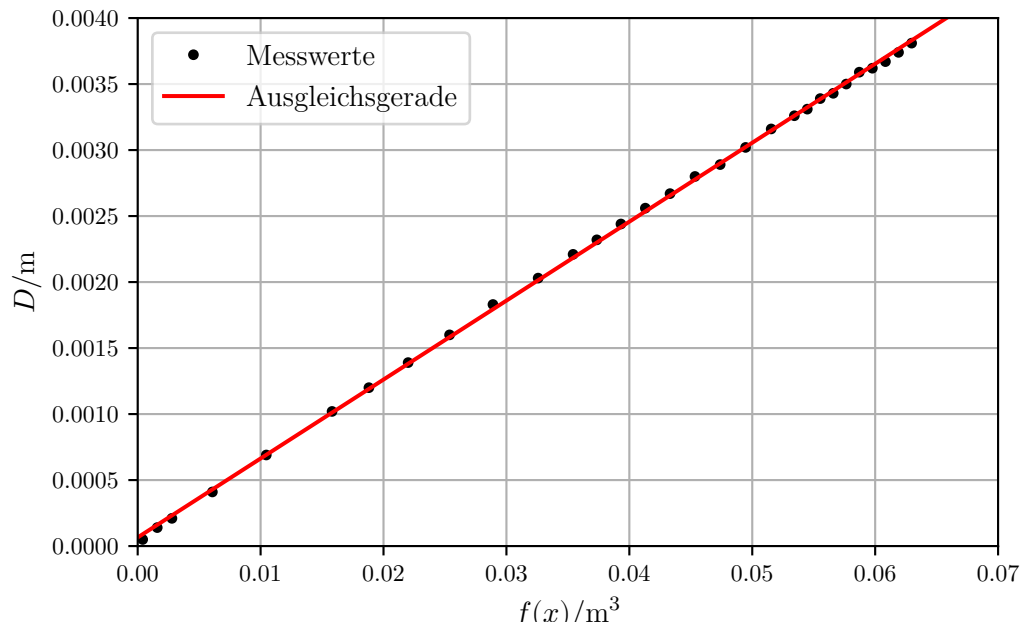


Abbildung 10: Biegunsmesswerte $D_{1,r}$ des einfach eingespannten, runden Stabes gegen $f_1(x_{1,r})$ aufgetragen und lineare Regression.

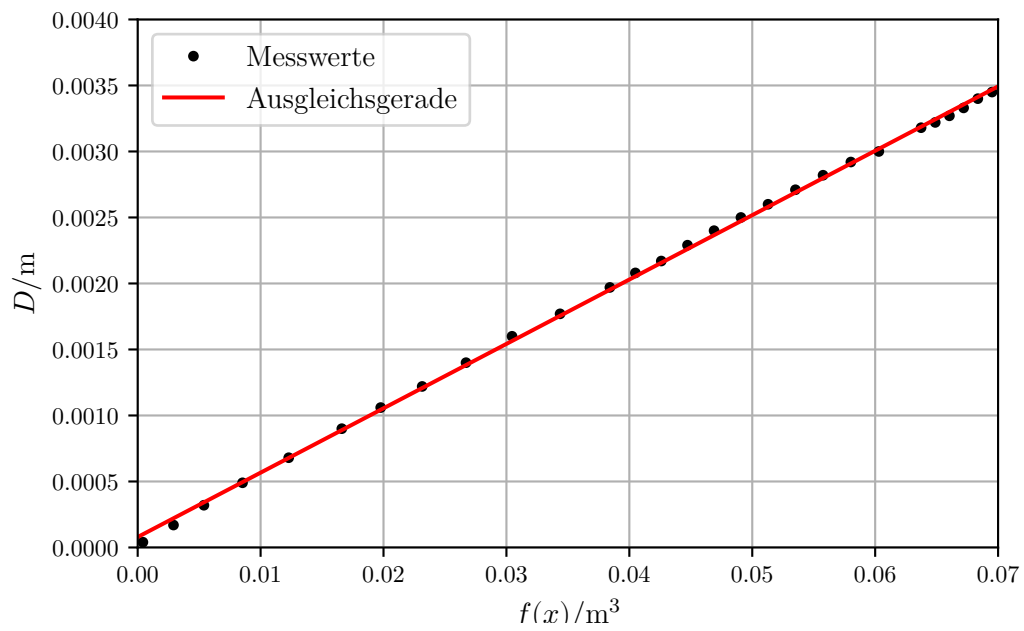


Abbildung 11: Biegunsmesswerte $D_{1,q}$ des einfach eingespannten, quadratischen Stabes gegen $f_1(x_{1,q})$ aufgetragen und lineare Regression.

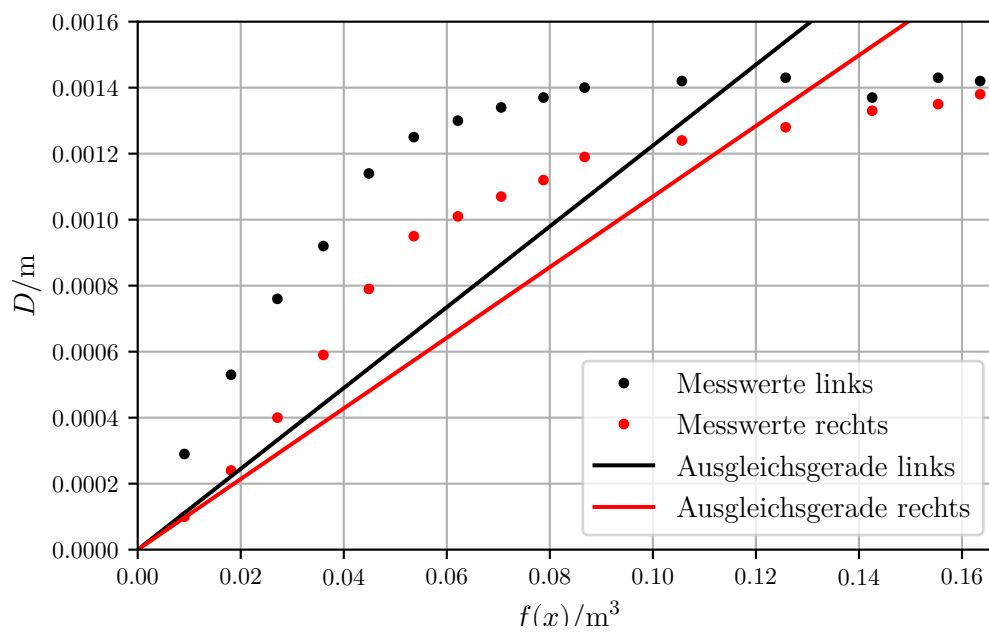


Abbildung 12: Bieungsmesswerte $D_{2,q,l}$ und $D_{2,q,r}$ des doppelt aufgelegten, quadratischen Stabes gegen $f_1(x_{2,q})$ aufgetragen und lineare Regression für beide Seiten.

Literatur

- [1] HUG Industrietechnik und Arbeitssicherheit GmbH. *Dichte und Elastizitätsmodul einiger Metalle*. 2016. URL: <http://www.hug-technik.com/inhalt/ta/metall.htm>.
- [2] TU-Dortmund. *Biegung elastischer Stäbe*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf>.
- [3] National Institute of Standards und Technology. *Erdbeschleunigung*. 2016. URL: <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gn>.

A. Kopie der Originaldaten