

Versuch 204

Wärmeleitfähigkeit

Richard Leven
richard.leven@udo.edu

Joell D. Jones
joell-david.jones@udo.edu

Durchführung: 14.01.2020

Abgabe: 22.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|------------------------------|-----------|
| 1 | Ziel | 3 |
| 2 | Theorie | 3 |
| 3 | Durchführung | 4 |
| 3.1 | Statische Methode | 5 |
| 3.2 | Dynamische Methode | 5 |
| 4 | Auswertung | 6 |
| 4.1 | Statische Methode | 6 |
| 4.2 | Dynamische Methode | 9 |
| 5 | Diskussion | 13 |
| 5.1 | Statische Methode | 13 |
| 5.2 | Dynamische Methode | 14 |
| | Literatur | 14 |

1 Ziel

Es wird bei jeweils Messing, Edelstahl und Aluminium die Wärmeleitfähigkeit überprüft.

2 Theorie

Ein Temperaturungleichgewicht kann durch Wärmetransport, wie zum Beispiel Wärmestrahlung oder Konvektion, ausgeglichen werden. Dabei werden Phononen und freie Elektronen transportiert.

Die dabei überführte Wärmemenge in einem Stab wird wie folgt berechnet:

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

wobei A die Querschnittsfläche des Stabes ist, L die Länge, κ die Wärmeleitfähigkeit, $\frac{\partial T}{\partial x}$ die Temperaturübertragung, wobei das Vorzeichen durch die in Richtung geringerer Wärme fließender Temperatur entsteht.

Es gilt für die Wärmestromdichte

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

und die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

Dabei ist ρ die Materialdichte und c die spezifische Wärme ist.

Die Wärme breitet sich wellenartig aus, weshalb sie mit seiner Funktion, dessen Form die einer typischen Welle ist, beschrieben werden kann (was bereits durch die wellenförmige Differentialgleichung, Gleichung 3, ersichtlich wird. Anhand dessen kann übrigens induziert werden, dass die Proportionalitätskonstante die Geschwindigkeit der Temperaturveränderung darstellt):

$$T(x, t) = T_{max} e^{-x \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}} \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}\right) \quad (4)$$

Wird diese Funktion in Gleichung 3 eingesetzt, so ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit v :

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \quad (5)$$

Anhand des Amplitudenverhältnisses an zwei verschiedenen Messstellen mit Abstand Δx ergibt sich für κ :

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Delta t} \quad (6)$$

Δt ist hierbei die Phasendifferenz der Temperaturwellen im Abstand Δx . Falls Unsicherheiten auftreten, so wird die Gauß'sche Fehlerformel benutzt, um die resultierende Unsicherheit zu berechnen:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2} \quad (7)$$

3 Durchführung

Für die Messung wurde eine Grundplatte wie in Abbildung 1 dargestellt benutzt. Genauere Daten der Probestäbe wurden in der Tabelle 1 angegeben.

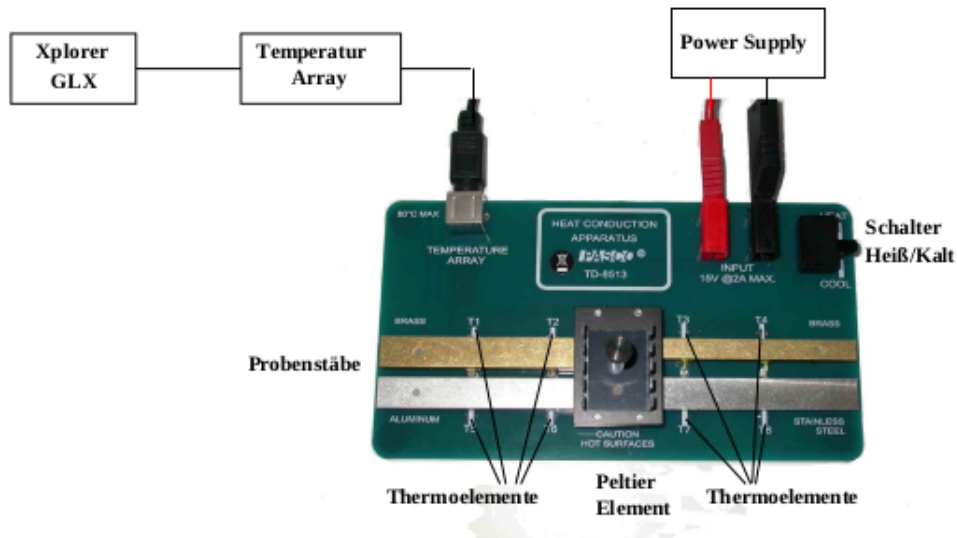


Abbildung 1: Hier zu sehen ist die für das Experiment verwendete Grundplatte, dessen Probestäbe im Verlauf des Versuchs aufgeheizt und abgekühlt wurden. Die einzelnen Bauteile sind hier beschrieben.

Tabelle 1: Hier ist eine Auflistung für die gegebenen Werte der Bauteile des Schwingkreises.

| Material | Abmessungen [cm] | $\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ | $c \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$ |
|------------------|------------------|--------------------------------------|---|
| Messing (breit) | 9 x 1.2 x 0.4 | 8520 | 385 |
| Messing (schmal) | 9 x 0.7 x 0.4 | 8520 | 385 |
| Aluminium | 9 x 1.2 x 0.4 | 2800 | 830 |
| Edelstahl | 9 x 1.2 x 0.4 | 8000 | 400 |

Weiterhin wird für Messzwecke ein Temperatur-Array ein GLX und eine Spannungsquelle. Der Versuch wird wie in Abbildung 2 aufgebaut und nun auf zwei verschiedenen Weisen durchgeführt.

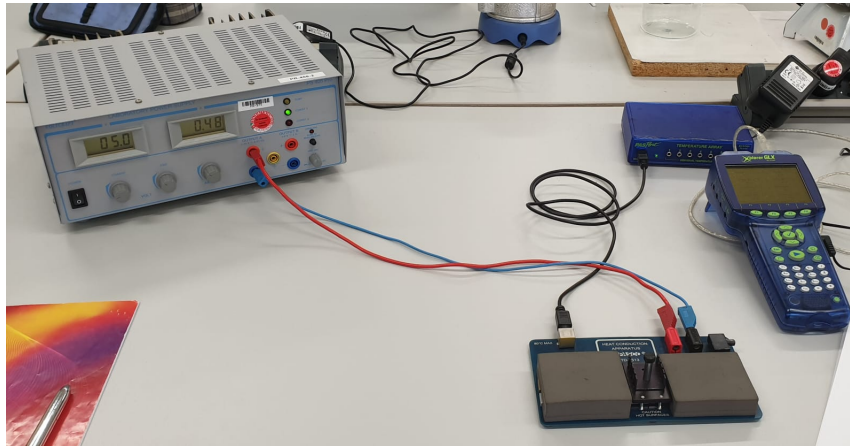


Abbildung 2: Diese Abbildung visualisiert, wie das Experiment aufgebaut wurde. Links oben ist die Spannungsquelle, der Power Supply, zu sehen. Im Vordergrund die Grundplatte, rechts im Vordergrund das für die Messung verwendete GLX und dahinter das Temperatur Array.

3.1 Statische Methode

Die statistische Methode gibt vor, an zwei verschiedenen auf der Grundplatte markierten Stellen die Temperatur als Funktion der Zeit zu messen.

Dazu wird zunächst die Spannungsquelle auf 5V und der Strom auf maximaler Amplitude eingestellt. Auf dem GLX wird die Abtastrate auf 5 Sekunden gesetzt und abgewartet, bis die Temperatur des Thermoelements T_7 45°C erreicht. Danach wird der Schalter auf der Grundplatte von "HEAT" auf "COOL" geschaltet und die Stäbe abgekühlt.

Die Temperaturen an den Thermoelementen T_1 , T_4 , T_5 und T_8 werden aufgezeichnet. Das Abkühlen geht weiter, bis die Thermoelemente in etwa 30°C erreichen.

Zum Schluss werden Grafiken für $|T_7 - T_8|$ und $|T_2 - T_1|$ als Funktion der Messzeit t erstellt und der Wärmestrom nach Gleichung 1 berechnet.

3.2 Dynamische Methode

Nun wird die Spannung bis auf 8 Volt erhöht. Im Gegensatz dazu bleiben alle anderen Einstellungen unverändert.

Im nächsten Experiment werden die Probenstäbe T-Periodisch aufgeheizt und abgekühlt. Zuerst wird alle 40 Sekunden erwärmt und gekühlt. Dies mindestens 10 Mal. Daraufhin folgt eine Abkühlung, sodass die Temperaturen der Stäbe ca. 30°C betragen. Zum Schluss des Experiments werden die Stäbe alle 200 Sekunden erhitzt und gekühlt, bis der heißeste Stab eine Temperatur von 80°C erreicht. Auch dies wird graphisch ausgegeben. Die Absicht hierbei ist es die Wärmeleitfähigkeit κ mithilfe von Gleichung 6 zu ermitteln.

4 Auswertung

4.1 Statische Methode

In Abbildung 3 ist zu erkennen, dass beide Temperaturen ähnlich verlaufen, doch ist die Temperatur am Abtastpunkt T4 durchschnittlich 11.908% kleiner.

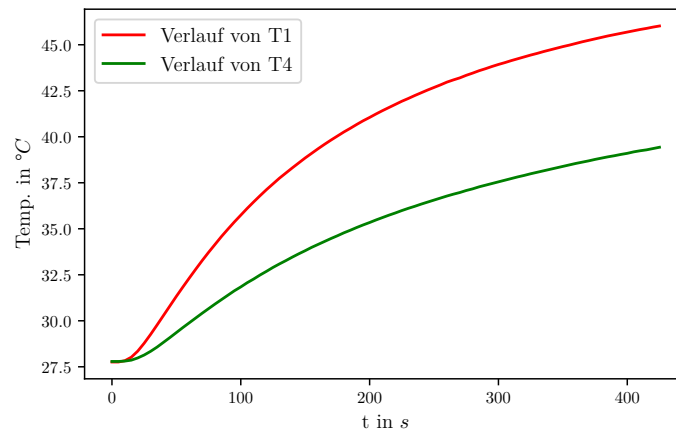


Abbildung 3: Die Temperaturverläufe von Messing weisen eine ähnliche logarithmische Steigung auf. Dabei steigt T4 langsamer an als T1.

Sehr ähnlich verlaufen auch die Temperaturen in Abbildung 4, wobei hier T5 deutlich stärker ansteigt als T8. Die Temperaturkurven haben einen durchschnittlichen Unterschied von 27.499% voneinander.

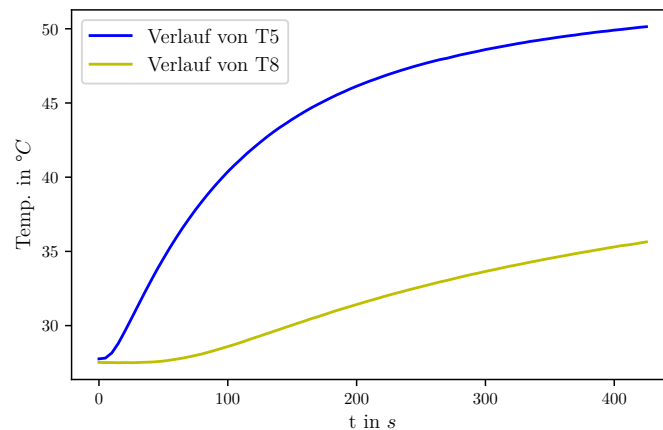


Abbildung 4: Die Temperaturverläufe von Aluminium und Edelstahl steigen ebenfalls logarithmisch an, wobei Edelstahl deutlich langsamer an Hitze gewinnt.

Die Temperatur der Thermoelemente am Ende der Messung bei 425 s betragen:

$$T1 = 48.74 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T4 = 50.14 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T5 = 50.37 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T8 = 35.64 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Die beste Wärmeleitung hat demnach Aluminium am Abgriff T5.
Um den Wärmestrom $\Delta Q/\Delta t$ zu berechnen, braucht es die Werte der Wärmeleitfähigkeit für die verschiedenen Materialien [1], sowie den Querschnitt der Metalle und den Abstand der Abgriffstellen.

$$\kappa_{Messing} = 111 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$A_{Messing(breit)} = 48 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$\Delta x_{Messing(breit)} = 0.03 m$$

$$\kappa_{Edelstahl} = 14.4 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$A_{Edelstahl} = 48 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$\Delta x_{Edelstahl} = 0.03 m$$

$$\kappa_{Aluminium} = 237 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$A_{Aluminium} = 48 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$\Delta x_{Aluminium} = 0.03 m$$

Daraus ergeben sich für 5 zufällige Messzeiten mithilfe der Gleichung 1 folgende Wärmeströme in Tabelle 2.

Tabelle 2: Tabelle des Wärmestroms für 5 versch. Messzeiten.

| Messzeit [s] | $\Delta T = T2 - T1$ [K] | $\frac{\Delta Q}{\Delta t_{12}}$ [W] | $\Delta T = T7 - T8$ [K] | $\frac{\Delta Q}{\Delta t_{78}}$ [W] |
|--------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| 50 | 5.73 | -1.02 | 5.17 | -0.119 |
| 100 | 5.32 | -0.94 | 9.19 | -0.212 |
| 150 | 4.48 | -0.796 | 10.51 | -0.242 |
| 200 | 3.87 | -0.687 | 10.69 | -0.246 |
| 250 | 3.42 | -0.607 | 10.48 | -0.241 |

In Abbildung 5 ist die Differenz der Temperaturen dargestellt, die in Tabelle 2 zur Berechnung verwendet wurden.

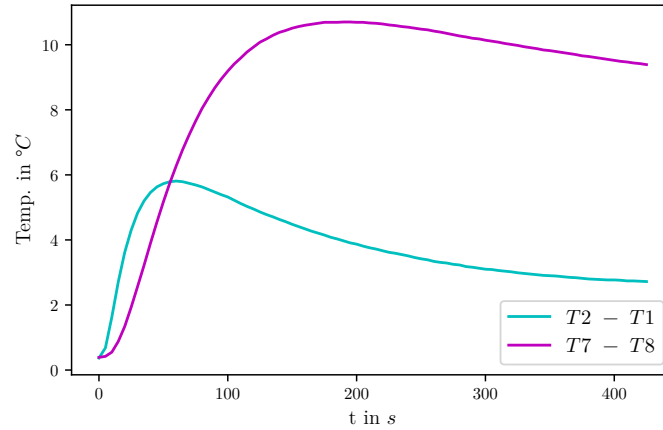


Abbildung 5: Plot der Differenzen der Temperatur von Messing und Edelstahl.

4.2 Dynamische Methode

Die Abbildung 6 zeigt die Temperaturverläufe von beiden Abgriffstellen des breiten Messingstabs. Um die notwendigen Amplituden für die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit κ zu bestimmen, wird jede einzelne Amplitude per Hand vermessen und berechnet. Die Extrema werden hierbei mithilfe von *Scipy.signal.argrelextrema* bestimmt.

In Tabelle 3 sind die korrekten Amplituden für beide Abgriffstellen verzeichnet.

Tabelle 3: Es sind A_{nah} , A_{fern} , sowie der ausgerechnete natürliche Logarithmus und die Phasendifferenz aufgelistet.

| $A_{nah} \pm 0.1 [K]$ | $A_{fern} \pm 0.1 [K]$ | $\ln(\frac{A_{nah}}{A_{fern}})$ | Phasendifferenz $\Delta t [s]$ |
|-----------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 2.25 | 0.5 | 1.504 ± 0.205 | 25 |
| 2.5 | 0.75 | 1.204 ± 0.139 | 20 |
| 2.5 | 0.9 | 1.022 ± 0.118 | 15 |
| 2.55 | 1.0 | 0.936 ± 0.107 | 15 |
| 2.6 | 1.1 | 0.860 ± 0.099 | 15 |
| 2.7 | 1.15 | 0.853 ± 0.095 | 15 |
| 2.75 | 1.15 | 0.872 ± 0.094 | 15 |

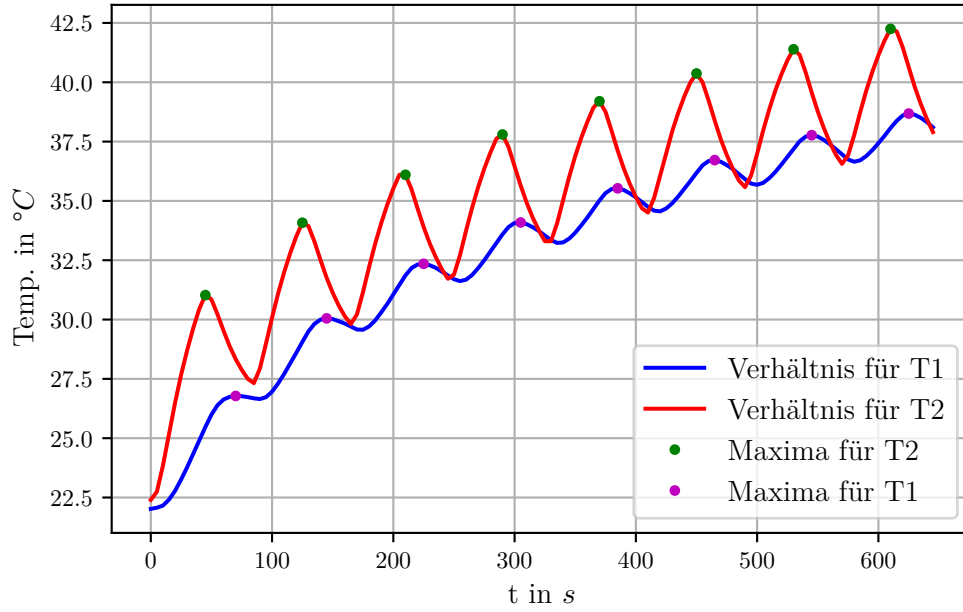


Abbildung 6: Temperaturverlauf des breiten Messingstabs bei einer Periodendauer von 80 s.

Die benötigten und gemittelten Daten von Tabelle 3 für die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit $\kappa_{Messing}$ lauten:

$$\ln\left(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}\right) = 1.04 \pm 0.05$$

$$\Delta t = 17.143 \text{ s} \pm 1.487 \text{ s}$$

$$\Delta x = 0.03 \text{ m}$$

$$\rho = 8520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung 6:

$$\kappa_{Messing} = 83 \pm 8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad (8)$$

Bei allen Berechnungen wurden die Unsicherheiten mit Gleichung 7 und *Python 3.7*, *uncertainties* ausgerechnet.

Die Abbildung 7 zeigt die Temperaturverläufe von Aluminium an beiden Abgriffstellen. Wie zuvor bei Messing werden hier ebenfalls die Amplituden einzeln vermessen und in Tabelle 4 zusammen mit Logarithmus und Phasenverschiebung aufgelistet.

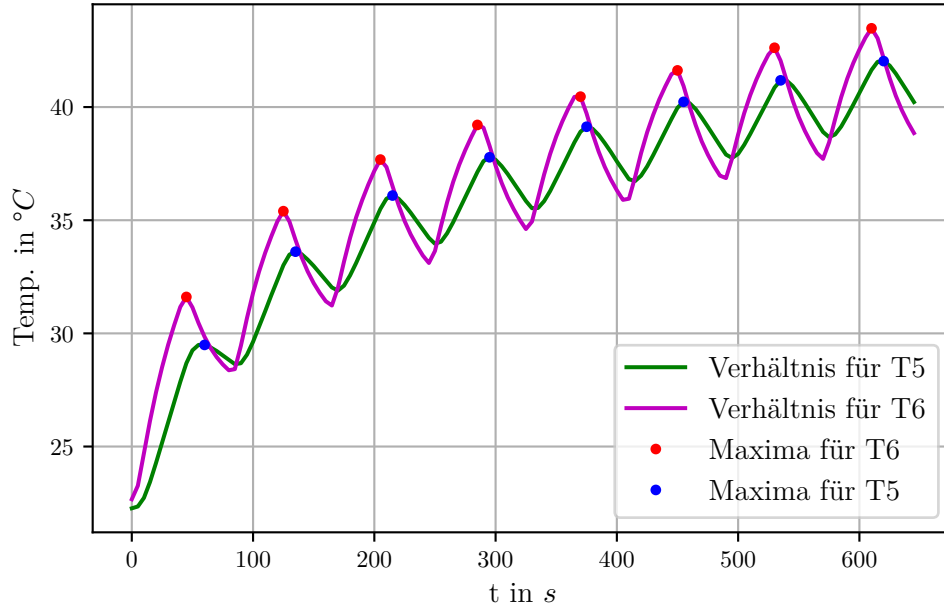


Abbildung 7: Temperaturverlauf von Aluminium bei einer Periodendauer von 80 s.

Tabelle 4: Tabelle der Amplituden und Phasenverschiebung von Aluminium.

| $A_{nah} \pm 0.1$ [K] | $A_{fern} \pm 0.1$ [K] | $\ln(\frac{A_{nah}}{A_{fern}})$ | Phasendifferenz Δt [s] |
|-----------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 1.9 | 0.9 | 0.747 ± 0.123 | 15 |
| 2.35 | 1.25 | 0.631 ± 0.091 | 10 |
| 2.5 | 1.5 | 0.511 ± 0.078 | 10 |
| 2.55 | 1.5 | 0.531 ± 0.077 | 10 |
| 2.5 | 1.6 | 0.446 ± 0.074 | 5 |
| 2.65 | 1.6 | 0.505 ± 0.073 | 5 |
| 2.75 | 1.65 | 0.511 ± 0.071 | 5 |

Für die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit von Aluminium sind die Werte

$$\ln\left(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}\right) = 0.555 \pm 0.032$$

$$\Delta t = 8.571 \text{ s} \pm 1.429 \text{ s}$$

$$\Delta x = 0.03 \text{ m}$$

$$\rho = 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 830 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

in Gleichung 6 einzusetzen.

Die Wärmeleitfähigkeit für Aluminium ist somit:

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = 220 \pm 40 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad (9)$$

Die Periodendauer der Messung von Edelstahl betrug 200 s, bis eines der acht Abtastpunkte 80 °C erreichte, sodass möglichst viele Zyklen gemessen werden konnten. In Abbildung 8 ist der Temperaturverlauf von den Abtastpunkten T7 und T8 aufgetragen, sowie die Maxima.

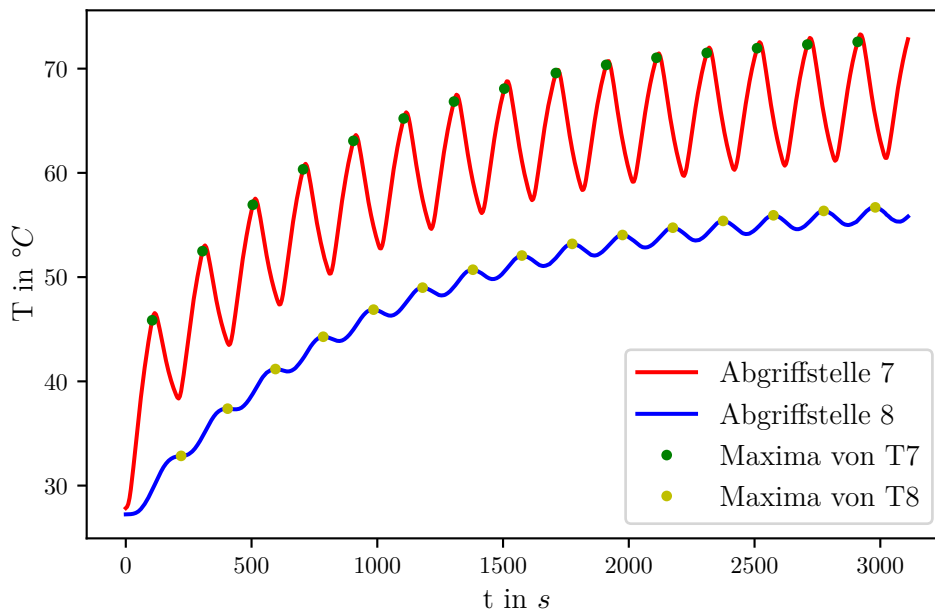


Abbildung 8: Verlauf der Temperatur von Edelstahl bei einer Periodendauer von 200 s.

Bei der Tabelle 5 sind, wie bei Messing und Aluminium, die Amplituden und der Logarithmus, sowie die Phasenverschiebung aufgetragen.

Tabelle 5: Tabelle der Amplituden und Phasenverschiebung von Edelstahl.

| $A_{nah} \pm 0.5 [K]$ | $A_{fern} \pm 0.25 [K]$ | $\ln(\frac{A_{nah}}{A_{fern}})$ | Phasendifferenz $\Delta t [s]$ |
|-----------------------|-------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 4 | 0.5 | 2.079 ± 0.515 | 115 |
| 4.5 | 0.5 | 2.197 ± 0.512 | 100 |
| 5 | 0.75 | 1.897 ± 0.348 | 90 |
| 5 | 0.75 | 1.897 ± 0.348 | 80 |
| 5.5 | 1 | 1.705 ± 0.266 | 80 |
| 5.5 | 1 | 1.705 ± 0.266 | 75 |
| 5.5 | 1.25 | 1.482 ± 0.22 | 75 |
| 5.75 | 1.25 | 1.526 ± 0.218 | 70 |
| 5.75 | 1.25 | 1.526 ± 0.218 | 65 |
| 5.75 | 1.5 | 1.344 ± 0.188 | 65 |
| 5.5 | 1.5 | 1.299 ± 0.19 | 65 |
| 5.75 | 1.5 | 1.344 ± 0.188 | 65 |
| 5.5 | 1.5 | 1.299 ± 0.19 | 65 |
| 5.75 | 1.75 | 1.19 ± 0.167 | 65 |
| 5.75 | 1.75 | 1.19 ± 0.167 | 70 |

Damit liegen die benötigten, gemittelten Werte bei:

$$\ln(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}) = 3.38 \pm 0.16$$

$$\Delta t = 76.333 \text{ s} \pm 3.857 \text{ s}$$

$$\Delta x = 0.03 \text{ m}$$

$$\rho = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 400 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Daraus ergibt sich für die Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl:

$$\kappa_{Aluminium} = 5.6 \pm 0.4 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad (10)$$

5 Diskussion

5.1 Statische Methode

Bei Abbildung 3 und Abbildung 4 zeigen sich logarithmische Wachstüme, wobei Aluminium am schnellsten steigt, also am besten die Wärme leitet. Es ist ebenfalls zu erkennen, dass die Form ausschlaggebend für die Wärmeleitung ist, da sich der dünne Messingstab schneller erhitzt als der Breite. Edelstahl steigt hingegen fast linear an, dies liegt aber

nur an der kurzen Dauer der Messung.

In Abbildung 5 sieht man, dass beide Metalle gegen eine bestimmte Temperaturdifferenz streben. Die lokalen Maxima, die bei beiden Graphen vorliegen, sind Überschüsse der Temperatur im Metall, die durch die schlagartige Erhitzung entsteht. Daher sind sie auch direkt zu Anfang der Messung. Durch die hohe Kurve (im Vergleich zu Messing) ist auch zu erkennen, dass Edelstahl die Wärme nur langsam leitet, da die Temperaturdifferenz der Abtastpunkte viel größer ist, als bei Messing.

5.2 Dynamische Methode

Bei den drei Berechnungen für die Metalle Messing, Aluminium und Edelstahl betragen die Abweichungen zu den Literaturwerten auf Seite 7:

Tabelle 6: Vergleich der ermittelten Werte und der Theoriewerte.

| Material | κ in $[\frac{W}{m \cdot K}]$ | κ_{Lit} in $[\frac{W}{m \cdot K}]$ | Abweichung in % |
|-----------|-------------------------------------|---|--------------------|
| Messing | 83 ± 8 | 111 | $25\% \pm 7\%$ |
| Aluminium | 220 ± 40 | 237 | $7\% \pm 17\%$ |
| Edelstahl | 5.6 ± 0.4 | 14.4 | $61.1\% \pm 2.8\%$ |

Bei Edelstahl ist die größte Abweichung, was wahrscheinlich durch systematische Fehler zu erklären ist.

Literatur

- [1] *The Engineering Toolbox*. Eingesehen am 20.01.2020. URL: https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-metals-d_858.html.