

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Jan Lukas Schubert
jan-lukas.schubert@tu-dortmund.de

Jan Lukas Späh
janlukas.spah@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.17

Abgabe: 28.11.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Gedämpfte Schwingungen	3
2.2	Erzwungene Schwingungen	5
3	Durchführung	6
4	Fehlerrechnung	9
5	Auswertung	10
5.1	Ermittlung der Widerstände R_{eff} des Schwingfalls und R_{ap} des aperiodischen Grenzfalls	10
5.2	Bestimmung der Güte und der Breite der Resonanzkurve für erzwungene Schwingungen	12
5.3	Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung im angelegten Schwingkreis	16
6	Diskussion	20
	Korrektur	22
	Literatur	25

1 Ziel

Ziel dieses Versuchs ist es, die Zeitabhängigkeit der Amplitude eines gedämpften RLC-Kreises und den daraus resultierenden Dämpfungsfaktor zu bestimmen, sowie den Widerstand für den aperiodischen Grenzfall der Schwingung zu bestimmen. Auch soll das Phänomen der Resonanz nachvollzogen werden, indem die Spannung am Kondensator des RLC-Kreises in Abhängigkeit Frequenz der angelegten Spannung, sowie die Phasenverschiebung zwischen beiden Spannungen gemessen wird.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingungen

Wird einem System, das aus Kondensator und Spule besteht, Energie zugeführt, so kann diese Energie im System gespeichert werden, indem sie zwischen der Kapazität C des Kondensators und der Induktivität L der Spule hin und her schwingt. In der Theorie kann dies verlustfrei geschehen, sodass sich eine ungedämpfte Schwingung ergibt. In der Praxis ist das allerdings nicht realisierbar, da jeder Leiter einen Innenwiderstand besitzt und die Schwingung somit gedämpft wird. Zusätzlich kann auch ein separater Widerstand R in den Schwingkreis eingebaut werden. Mithilfe der Kirchhoff'schen Regeln ergibt sich dann für diesen Schaltkreis 1

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

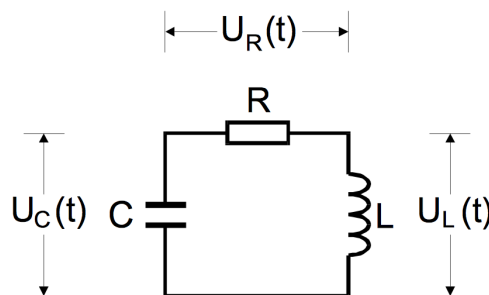


Abbildung 1: Skizze eines RLC Kreises[2]

Dabei ist U_R die Spannung am Widerstand, U_C die Spannung am Kondensator und U_L die Spannung an der Induktivität. Werden nun die Beziehungen $U_R(t) = RI(t)$, $U_C(t) = Q(t)/C$ und $U_L(t) = L(dI/dt)$ eingesetzt und wird nach der Zeit abgeleitet, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (2)$$

für gedämpfte Schwingungen. Dabei ist I die Stromstärke, R der Widerstand, C die Kapazität des Kondensators und L die Induktivität der Spule. Zur Lösung kann der Ansatz

$$\underline{I}(t)^1 = \underline{U} \exp(i\omega t) \quad (3)$$

gewählt werden. Dann ergibt sich nach Einsetzen von (3) in (2) der Zusammenhang

$$\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0. \quad (4)$$

Daraus lässt sich die Gesamtlösung der Differentialgleichung (2) zu

$$\underline{I} = \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \left(\underline{U}_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) + \underline{U}_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) \right) \quad (5)$$

bestimmen, indem aus (4) Lösungen für ω bestimmt und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gemäß des Superpositionsprinzips gebildet wird. Nun müssen die beiden Fälle

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \quad (6)$$

unterschieden werden. Für ersteren ist die Wurzel reell. Damit ergibt sich die reelle Lösungsfunktion I mit einem geeigneten Ansatz zu

$$I = A_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \eta\right), \quad (7)$$

wobei A_0 eine beliebige Konstante und η eine beliebige Phase ist. Dies entspricht der Gleichung einer gedämpften Schwingung, da die Amplitude mit zunehmender Zeit t gegen null geht. Die für die Abnahmegeschwindigkeit charakteristische Abklingdauer T_{ex} wird definiert als

$$T_{\text{ex}} := \frac{2L}{R}. \quad (8)$$

Für den zweiten Fall ist die Wurzel imaginär. Dann werden alle Exponentialfunktionen reell, sodass keine oszillatorischen Anteile mehr vorliegen. Dieser Fall wird Kriechfall genannt. Dann liegt nach einiger Zeit ein einfaches Relaxationsverhalten vor. Für den Spezialfall

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \quad (9)$$

tritt der aperiodische Grenzfall ein. Dies ist die stärkste mögliche Dämpfung eines Systems.

¹Komplexe Zahlen werden im Folgenden mit einem Unterstrich kenntlich gemacht.

2.2 Erzwungene Schwingungen

An den Schwingkreis wird nun sinusförmige Wechselspannung angelegt. Eine Skizze hierzu ist in 2 zu finden. Diese hat die Form

$$\underline{U}_G(t) = U_0 \exp(i\omega t). \quad (10)$$

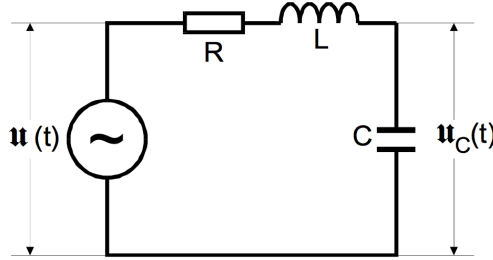


Abbildung 2: Skizze eines RLC Kreises mit angelegter sinusförmiger Spannung [2]

Dabei ist U_0 die Amplitude der angelegten Spannung und ω deren Kreisfrequenz.

Dadurch wird die im zuvor diskutierten Fall noch homogene Differentialgleichung zu einer inhomogenen Differentialgleichung mit der angelegten sinusförmigen Spannung als Inhomogenität:

$$LC \frac{d^2 \underline{U}_C}{dt^2} + RC \frac{d\underline{U}_C}{dt} + \underline{U}_C = U_0 \exp(i\omega t). \quad (11)$$

Eine Lösung für diese Differentialgleichung lässt sich mit einem geeigneten Ansatz zu

$$-LC\omega^2 \underline{U} + i\omega RC \underline{U} + \underline{U} = U_0 \quad (12)$$

bestimmen. Durch Umstellen nach \underline{U} und einige weitere Umformungen ergibt sich für die Phasenverschiebung der Zusammenhang

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (13)$$

Die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit von der Frequenz ergibt sich durch weitere Umformung zu

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (14)$$

Hier ist erkennbar, dass die Spannung am Kondensator für kleine ω gegen die Frequenz der angelegten Spannung und für sehr große ω gegen 0 geht. Für einen bestimmten Bereich dazwischen, in dem die Frequenz der angelegten Spannung ungefähr der Eigenfrequenz des Schwingkreises entspricht, tritt Resonanz auf. In diesem Fall kann bei schwacher Dämpfung die Amplitude der Spannung U_C am Kondensator größer als die Amplitude der

Generatorspannung U_G werden. Am Maximum der Amplitude der Kondensatorspannung ist diese um den Faktor

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (15)$$

überhöht. Dieser Faktor q wird Güte des Schwingkreises genannt. Ist die Dämpfung des Schwingkreises dabei zu gering, kann es zu einer Resonanzkatastrophe kommen. Dabei geht U_C für Frequenzen nahe der Eigenfrequenz des Systems gegen unendlich. Die dafür charakteristische Kreisfrequenz lässt sich zu

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (16)$$

bestimmen. Ein weiterer charakteristischer Wert der Resonanz ist die Breite der Resonanzkurve. Dabei charakterisieren ω_+ und ω_- die Frequenzen, bei denen U_C $1/\sqrt{2}$ des Maximalwertes beträgt. Die Breite der Resonanzkurve ist dann

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (17)$$

Bei stark gedämpften Systemen tritt keine Resonanz auf. Die Spannung U_C am Kondensator geht dann gegen null.

Die Phasenverschiebung zwischen der Generatorspannung U_G und der Spannung U_C am Kondensator wurde in (13) bereits genannt. Man kann erkennen, dass die Phasenverschiebung für kleine Kreisfrequenzen gegen null und für große Frequenzen gegen π geht, wobei U_G U_C vorausleitet. Analog zu ω_+ und ω_- bei der Amplitude lassen sich auch für die Phasenverschiebung zwei Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 definieren, die charakteristische Werte aufweisen. Dabei ist ω_1 der Wert, bei dem die Phasenverschiebung $\phi = \frac{\pi}{4}$ beträgt und ω_2 der Wert, bei dem die Phasenverschiebung $\phi = \frac{3\pi}{4}$ beträgt. Für diese Größen folgt nach (13) der Zusammenhang

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{(R^2/4L^2 + 1/LC)}. \quad (18)$$

Außerdem ergibt sich der Zusammenhang

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}. \quad (19)$$

3 Durchführung

Zunächst soll die Zeitabhängigkeit der Amplitude des gedämpften Schwingkreises auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht und daraus der Dämpfungsfaktor bestimmt werden. Dafür wird die Schaltung aus 3 benutzt. Im Gegensatz zur Schaltung in der Abbildung wird jedoch Rechteckspannung statt einer Nadelimpulsspannung verwendet. In diesem Versuch wird der kleinere der beiden zur Verfügung stehenden Widerstände benutzt. Am

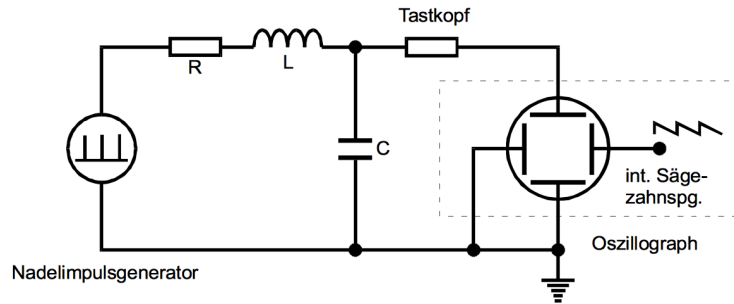


Abbildung 3: Schaltung zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Amplitude der gedämpften Schwingung durch Beobachtung und Auswertung der Kondensatorspannung [2]

Oszilloskop wird der Graph von U_C so dargestellt, dass man einen Amplitudenverlauf möglichst genau erkennen kann. Das entstandene Bild wird gespeichert. Daraufhin wird die Einhüllende eingezeichnet und es werden Werte von dieser abgelesen.

Daraufhin soll der Widerstand ermittelt werden, bei dem der aperiodische Grenzfall vorliegt. Dafür wird die Schaltung aus 4 verwendet. Der Widerstand ist hierbei variabel und wird zunächst auf sein Maximum geregelt. Nun wird der Widerstand so lange reduziert, bis sich auf dem Oszilloskop eine Überschwingung der Amplitude erkennen lässt. Nun wird der Widerstand wieder erhöht, bis gerade keine Überschwingung mehr erkennbar ist. An dieser Stelle liegt dann der aperiodische Grenzfall vor.

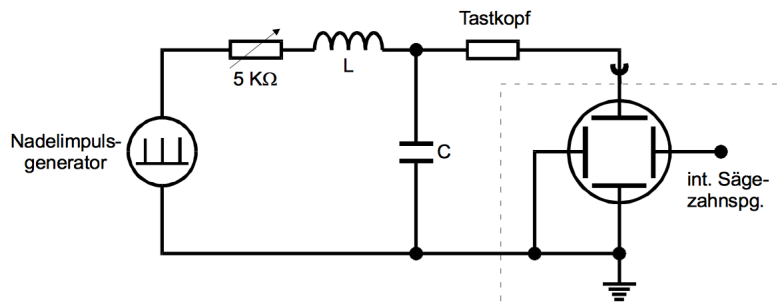


Abbildung 4: Schaltung zur Bestimmung des Widerstandes, bei dem sich der aperiodische Grenzfall einstellt [2]

Im Anschluss daran soll die Spannung U_C am Kondensator in Abhängigkeit von der anregenden Kreisfrequenz ω gemessen werden, wobei an den Schwingkreis eine sinusförmige Spannung angelegt wird. Dafür wird die Schaltung aus 5 verwendet, jedoch wird hier zur Spannungsmessung ein Oszilloskop statt eines Millivoltmeters verwendet. Nun wird über Frequenzen in verschiedenen Größenordnungen hinweg die Spannung U_C am Kondensator gemessen. In Bereichen mit großen Änderungen werden dabei mehr Werte aufgenommen als in Bereichen mit wenig Änderungen. Da der Tastkopf des Oszilloskops selbst ebenfalls

eine Frequenzabhängigkeit besitzt, wird daraufhin die erzeugte Spannung für die zuvor gewählten Frequenzen erneut mit dem Tastkopf gemessen.

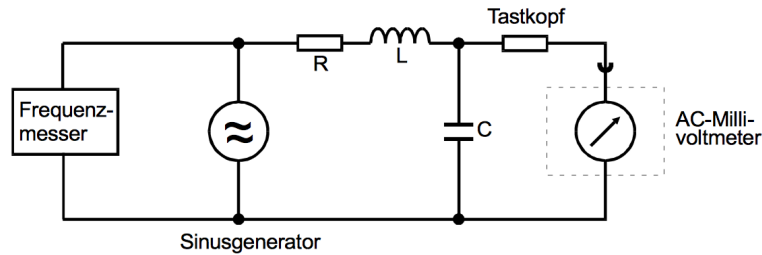


Abbildung 5: Schaltung zur Bestimmung der Abhängigkeit der Spannung am Kondensator in Abhängigkeit von der an den RLC-Kreis angelegten Frequenz[2]

Zur Messung der Phasenverschiebung ϕ der Ausgangsspannung U_G und der Spannung U_C am Kondensator wird die Schaltung aus 6 verwendet. Beide Spannungen werden auf dem Oszilloskop dargestellt und gemäß 7 wird der zeitliche Unterschied der Nulldurchgänge der beiden Spannungen für Frequenzen über mehrere Größenordnungen hinweg gemessen. Die Phasenverschiebung ergibt sich dann zu

$$\phi = \frac{a}{b} 2\pi. \quad (20)$$

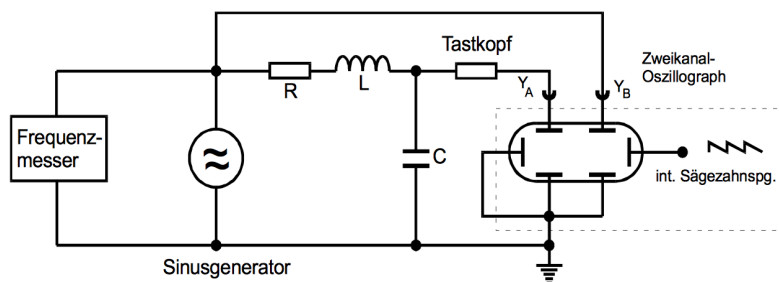


Abbildung 6: Schaltung zur Bestimmung der Abhängigkeit der Phasenverschiebung der Generatorspannung und der Spannung am Kondensator in Abhängigkeit von der an den RLC-Kreis angelegten Frequenz [2]

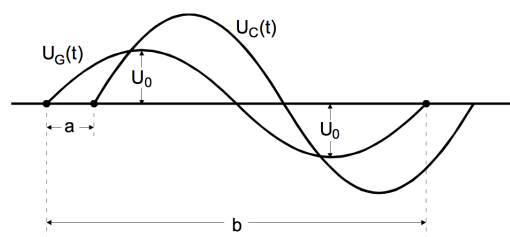


Abbildung 7: Skizze zur Bestimmung der Phasenverschiebung [1]

4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von N Werten wird durch

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \quad (21)$$

berechnet. Die empirische Standardabweichung dieser Stichprobe ist durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (22)$$

gegeben. Ist f eine Funktion, die von unsicheren Variablen x_i mit Standardabweichungen σ_i abhängt, so ist die Unsicherheit von f

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2}. \quad (23)$$

Diese Formel bezeichnet man als "Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz".

Bei einer linearen Regression folgt eine Ausgleichsgerade

$$y(x) = ax + b \quad (24)$$

mit der Steigung a und dem Ordinatenabschnitt b . Liegen Fehler in y -Richtung und nur in y -Richtung vor, dann sind die Parameter a und b selbst unsicher und ergeben sich zu

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (25)$$

$$b = \frac{\bar{y} - \bar{x}^2 - \overline{xy} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (26)$$

Wenn im Folgenden Mittelwerte, Standardabweichungen und Fehler von Funktionen unsicherer Größen berechnet werden, so werden stets die obigen Formeln verwendet. Regressionen werden mit IPython 5.3.0 in Python 3.6.1 durchgeführt.

5 Auswertung

Die Werte der Bauteile in der untersuchten Schaltung betragen

$$L = (10,11 \pm 0,03) \text{ mH} ,$$

$$C = (2,098 \pm 0,006) \text{ nF} ,$$

$$R_1 = (48,1 \pm 0,1) \Omega ,$$

$$R_2 = (509,5 \pm 0,5) \Omega .$$

5.1 Ermittlung der Widerstände R_{eff} des Schwingfalls und R_{ap} des aperiodischen Grenzfalls

Für jegliche Messungen und Berechnungen wird ab hier der Widerstand R_1 verwendet. Die mit dem Oszilloskop aufgenommene Spannung am Kondensator bei der gedämpften Schwingung ist in Abbildung 8 zu sehen. Dort ist auch bereits die Einhüllende eingezeichnet.

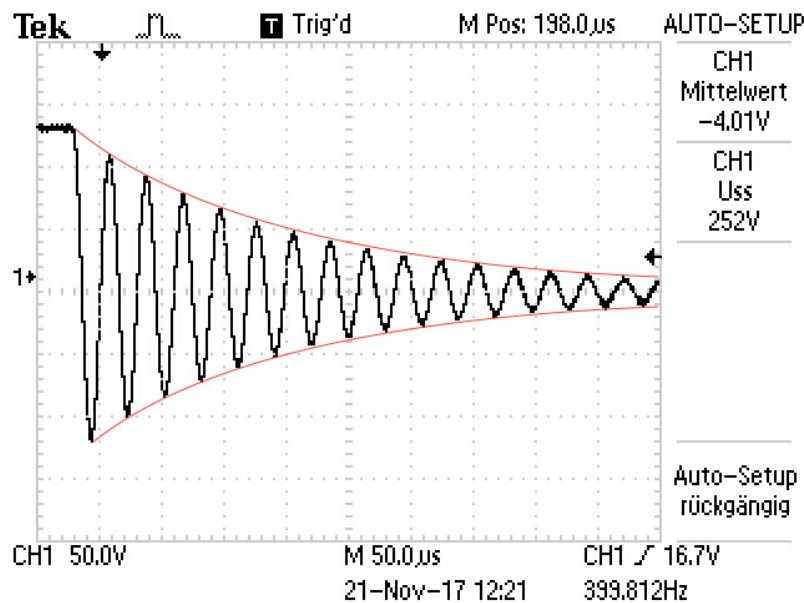


Abbildung 8: Aufnahme des Spannungsverlaufs am Kondensator und Einhüllende bei der gedämpften Schwingung

Alle Spannungen am Oszilloskop wurden mit zehn multipliziert dargestellt. Die aus der Kurve entnommenen Messwerte sind in Tabelle 1 eingetragen.

Tabelle 1: Messdaten zur gedämpften Schwingung des Schwingkreises

$t/\mu\text{s}$	$10U_C/\text{V}$	U_C/V
1	132	13,2
29	112	11,2
58	94	9,4
88	80	8,0
118	66	6,6
147	58	5,8
177	50	5,0
206	42	4,2
236	36	3,6
265	30	3,0
297	28	2,8
324	24	2,4
354	20	2,0
382	18	1,8
412	16	1,6
441	14	1,4

Es wird eine nichtlineare Ausgleichsrechnung mit diesen Messwerten durchgeführt. In diesem Fall gilt $U(t) \propto I(t)$ gemäß (7), sodass die Ausgleichsfunktion der Zuordnung

$$U_C(t) = U_0 \exp(-2\pi\mu t) \quad (27)$$

folgt. Dabei gilt für μ der Zusammenhang

$$\mu = \frac{R}{4\pi L} . \quad (28)$$

Der Widerstand R wird hier mit dem effektiven Dämpfungswiderstand R_{eff} assoziiert, der durch die Ausgleichsrechnung aus μ bestimmt werden kann. In Abbildung 14 sind die abgelesenen Messwerte und der Graph der konkreten Ausgleichsfunktion zu sehen.

Die Parameter ergeben sich hier zu

$$\begin{aligned} U_0 &= (13,04 \pm 0,11) \text{ V} , \\ \mu &= (861 \pm 12) \mu\text{s} , \end{aligned}$$

sodass für den effektiven Dämpfungswiderstand R_{eff} nach (28)

$$R_{\text{eff}} = (109,4 \pm 1,6) \Omega$$

folgt. Die relative Unsicherheit beträgt 1,46%. Die charakteristische Abklingdauer T_{ex} ist mit (8) und (28) dann

$$T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R} = \frac{1}{2\pi\mu} = (184,8 \pm 2,6) \mu\text{s}$$

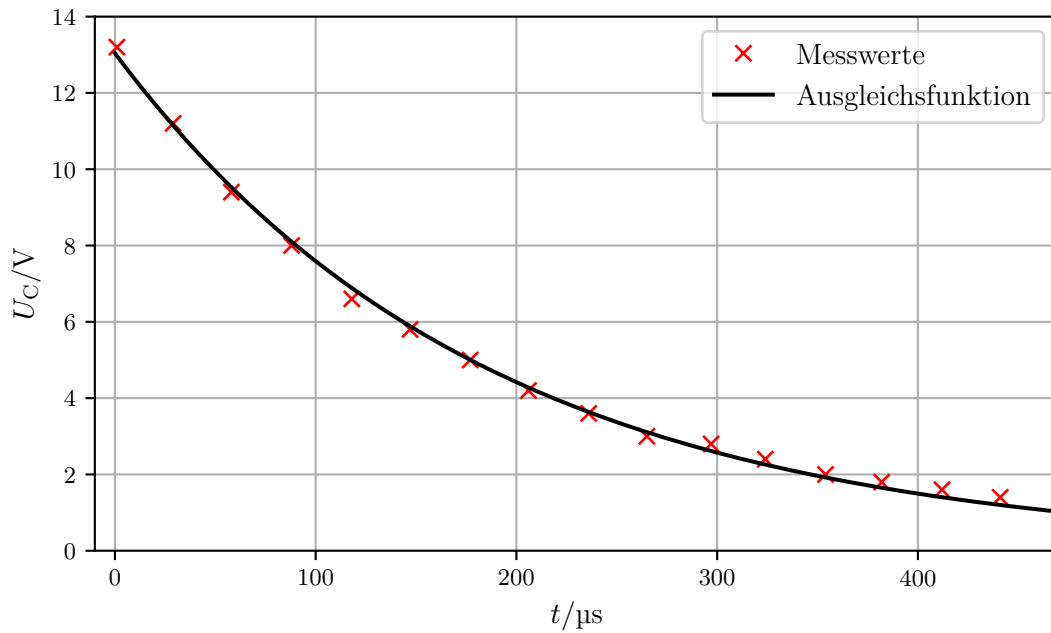


Abbildung 9: Auftragung der Kondensatorsspannung gegen die Zeit und Graph der Ausgleichsfunktion

mit einer relativen Unsicherheit von 1,41%.

Es ist auffällig, dass der experimentell bestimmte Wert R_{eff} vom Wert R_1 des verwendeten Widerstands um ungefähr $50\ \Omega$ abweicht. Dies ist jedoch genau der Innenwiderstand des verwendeten Generators. Deswegen wird dieser ab sofort bei allen Berechnungen zu dem gegebenen Widerstand addiert.

Für den aperiodischen Grenzfall muss ein Widerstand R_{ap} eingestellt werden. Dieser wurde zu $3,550\ \text{k}\Omega$ bestimmt. Wird dieser Widerstand nach (9) bestimmt, so ergibt sich für ihn $(4,390 \pm 0,009)\ \text{k}\Omega$. Dabei beträgt die absolute Unsicherheit $(-840 \pm 9)\ \Omega$.

5.2 Bestimmung der Güte und der Breite der Resonanzkurve für erzwungene Schwingungen

Bei allen Messungen und Berechnungen wird ab hier der Widerstand R_2 verwendet, auf diesen wird der Generatorinnenwiderstand von $50\ \Omega$ addiert.

Wie an (14) ersichtlich ist, hängt die Kondensatorspannung von der Frequenz ab. In den Tabellen 2 und 3 sind die aufgenommenen Messwerte angegeben, die untersucht werden sollen. Dabei ist U_C die Kondensatorspannung, U ist die durch den frequenzgängigen Tastkopf gemessene Generatorspannung. Es sei darauf hingewiesen, dass ursprünglich

Messwerte bereits ab einer Frequenz von 10 Hz genommen wurden. Diese tragen jedoch keine signifikante Information, da für sie durchgängig $U_C/U \approx 1$ gilt. Daher werden sie nicht weiter betrachtet. Die nicht verwendeten Messwerte können bei Bedarf im Anhang eingesehen werden.

In Abbildung 10 ist die Kondensatorspannung relativ zur Generatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Die Achse, auf der die Frequenz aufgetragen ist, ist logarithmisch skaliert.

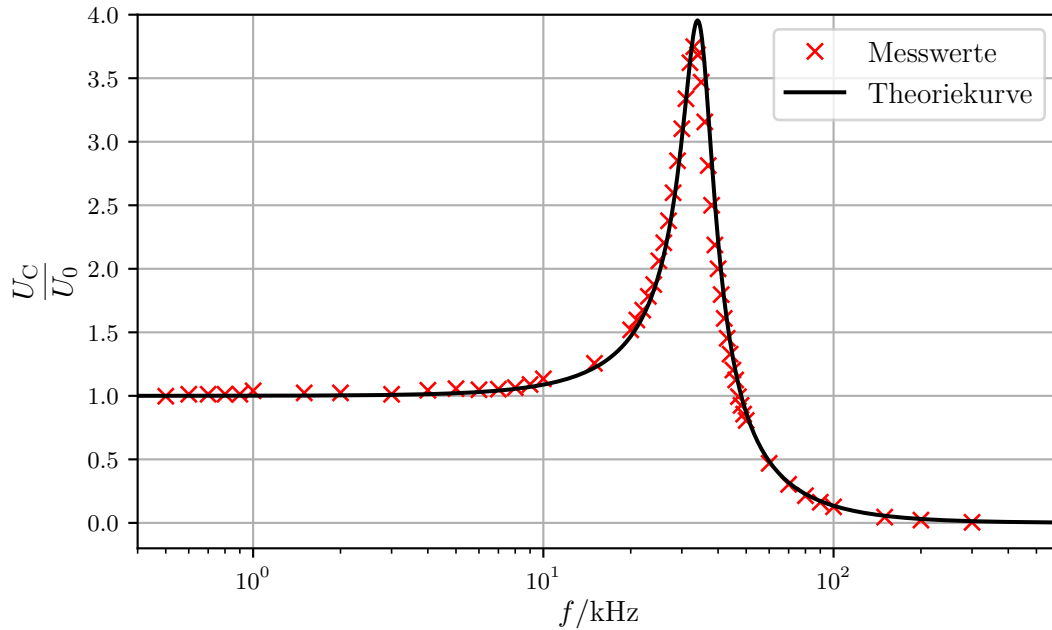


Abbildung 10: Halblogarithmische Auftragung der normierten Kondensatorspannung gegen die Frequenz

Aus dem Diagramm und den Messwerten lässt sich die Güte, die die maximale Überhöhung der Amplitude angibt, zu ungefähr

$$q_{\text{exp}} = 3,748$$

bestimmen. Der theoretische Wert ergibt sich durch Berechnung mit (15) zu

$$q_{\text{theo}} = (3,923 \pm 0,009) ,$$

wobei für R der Wert $R_2 + 50\Omega$ eingesetzt wird. Die relative Messabweichung beträgt dann 4,46%. Der Bereich, in dem die Resonanz auftritt, wird in Abbildung 11 linear dargestellt, um den Bereich der Resonanz besser zu veranschaulichen.

Tabelle 2: Messdaten zur Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

f/kHz	$10U_C/\text{V}$	U_C/V	$10U/\text{V}$	U/V	U_C/U
0,5	64,8	6,48	65	6,5	0,997
0,6	64,8	6,48	64	6,4	1,012
0,7	64,8	6,48	64	6,4	1,012
0,8	64,8	6,48	64	6,4	1,012
0,9	64,8	6,48	64	6,4	1,012
1,0	66,0	6,60	63,5	6,35	1,039
1,5	66,0	6,60	64,5	6,45	1,023
2,0	66,0	6,60	64,5	6,45	1,023
3,0	66,8	6,68	66	6,6	1,012
4,0	66,8	6,68	64	6,4	1,044
5,0	67,6	6,76	64	6,4	1,056
6,0	67,6	6,76	64,5	6,45	1,048
7,0	68,4	6,84	65	6,5	1,056
8,0	69,2	6,92	65	6,5	1,065
9,0	70,8	7,08	65	6,5	1,089
10	72,0	7,20	63,5	6,35	1,133
15	81,0	8,10	64,5	6,45	1,256
20	98,0	9,80	64,5	6,45	1,519
21	103	10,3	64,5	6,45	1,597
22	108	10,8	64,5	6,45	1,674
23	115	11,5	64,5	6,45	1,783
24	121	12,1	64,5	6,45	1,876
25	131	13,1	63,5	6,35	2,063
26	140	14,0	63,5	6,35	2,205
27	151	15,1	63,5	6,35	2,378
28	165	16,5	63,5	6,35	2,598
29	181	18,1	63,5	6,35	2,850
30	197	19,7	63,5	6,35	3,102
31	212	21,2	63,5	6,35	3,339
32	230	23,0	63,5	6,35	3,622
33	238	23,8	63,5	6,35	3,748
34	234	23,4	63,5	6,35	3,685
35	222	22,2	64	6,4	3,469
36	202	20,2	64	6,4	3,156
37	180	18,0	64	6,4	2,813
38	160	16,0	64	6,4	2,500
39	140	14,0	64	6,4	2,188
40	128	12,8	64	6,4	2,000

Tabelle 3: Messdaten zur Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung (Fortsetzung)

f/kHz	$10U_C/\text{V}$	U_C/V	$10U/\text{V}$	U/V	U_C/U
41	115	11,0	64	6,4	1,797
42	103	10,3	64	6,4	1,609
43	93,0	9,30	64	6,4	1,453
44	85,0	8,50	64	6,4	1,328
45	77,0	7,70	64	6,4	1,203
46	72,0	7,20	64	6,4	1,125
47	63,6	6,36	64	6,4	0,938
48	59,2	5,92	64	6,4	0,925
49	54,8	5,48	64	6,4	0,856
50	51,6	5,16	64	6,4	0,806
60	30,0	3,00	64	6,4	0,469
70	19,4	1,94	64	6,4	0,303
80	13,7	1,37	64	6,4	0,214
90	10,4	1,04	64	6,4	0,163
100	8,10	0,81	64	6,4	0,127
150	2,91	0,29	64	6,4	0,045
200	1,40	0,14	64	6,4	0,022
300	0,29	0,03	64	6,4	0,005

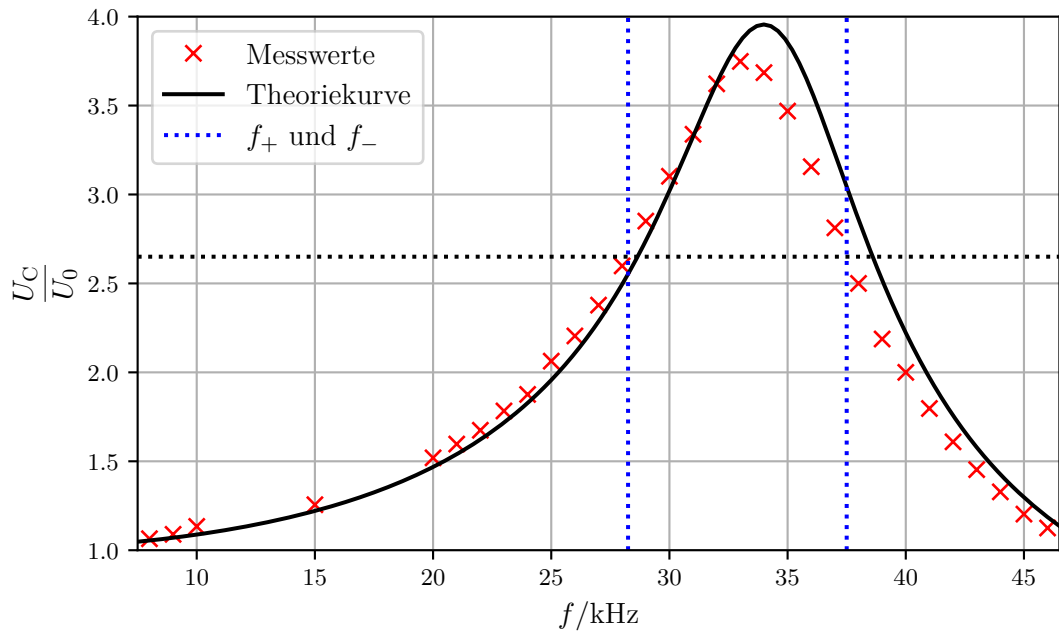


Abbildung 11: Lineare Auftragung der normierten Kondensatorsspannung gegen die Frequenz um den Resonanzbereich

Die Breite der Resonanzkurve $f_+ - f_-^2$, definiert analog zu den Erklärungen zu (17), ergibt sich experimentell zu

$$(f_+ - f_-)_{\text{exp}} = (37,5 - 28,25) \text{ Hz} = 9,25 \text{ kHz}.$$

Der nach der Theorie zu erwartende Wert beträgt nach der zuvor angegebenen Gleichung

$$(f_+ - f_-)_{\text{theo}} = \frac{R_2 + 50 \Omega}{2\pi L} = (8,808 \pm 0,027) \text{ kHz}.$$

Die relative Abweichung zu diesem Wert ist 4,77%.

5.3 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung im angeregten Schwingkreis

Der gemessene Abstand a zwischen den Nulldurchgängen der Kondensator- und Generatorspannung sowie die daraus nach (20) ermittelte Phasenverschiebung bei eingestellter Frequenz zwischen ihnen sind in den Tabellen 4 und 5 zu sehen.

²Hier wird die Breite in der Frequenz betrachtet statt in der Kreisfrequenz. Dies erscheint sinnvoll, da am Generator stets eine Frequenz und nicht die Kreisfrequenz eingestellt wurde.

Tabelle 4: Messdaten zur Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung

f/kHz	$a/\mu\text{s}$	ϕ/rad
0,01	9200	0,58
0,02	2400	0,30
0,03	1080	0,20
0,04	540	0,14
0,05	500	0,16
0,06	360	0,14
0,07	260	0,11
0,08	208	0,10
0,09	160	0,09
0,10	148	0,09
0,125	127	0,10
0,15	97	0,09
0,175	80	0,09
0,20	68	0,09
0,225	57	0,08
0,25	48	0,08
0,275	43	0,07
0,3	39	0,07
0,4	27	0,07
0,5	21,2	0,07
0,6	17,6	0,07
0,7	15,2	0,07
0,8	13,2	0,07
0,9	11,2	0,06
1	10,8	0,07
1,5	7,2	0,07
2	5,5	0,07
3	4,1	0,08
4	3,4	0,09
5	2,8	0,09
6	2,64	0,10
7	2,44	0,11
8	2,24	0,11
9	2,16	0,12
10	2,00	0,13
15	1,52	0,14
20	1,84	0,23
25	2,48	0,39
27,5	3,08	0,53
30	4,16	0,78

Tabelle 5: Messdaten zur Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung (Fortsetzung)

f/kHz	$a/\mu\text{s}$	ϕ/rad
32	5,72	1,15
34	7,5	1,60
36	9,1	2,06
38	9,8	2,34
40	10	2,51
45	9,6	2,71
50	8,9	2,80
60	7,9	2,98
70	6,9	3,03
80	6,1	3,07
90	5,60	3,17
100	5,12	3,22
150	3,76	3,54

Die Phasenverschiebung ϕ wird in Abbildung 12 gegen die Frequenz f aufgetragen. Die Frequenzachse wird erneut logarithmisch skaliert. Blau markierte Punkte sind auf Messfehler zurückzuführende Ausreißer. Die Phasenverschiebung kann nicht mehr als π betragen.

Wie zuvor wird der relevante Bereich erneut in einem linear skalierten Diagramm dargestellt. Aus Abbildung 13 lassen sich dann zuverlässiger die Größen f_1 , f_{res} und f_2 , bei denen die Phasenverschiebung jeweils $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ beträgt, ablesen.

Die theoretischen Werte für die charakteristischen Frequenzen lassen sich durch (18), die Resonanzfrequenz durch (16) berechnen. In Tabelle 6 werden experimentelle und theoretische Werte aufgelistet und verglichen.

	$f_{\text{res}}/\text{kHz}$	f_1/kHz	f_2/kHz
Experiment	33,8	38,15	30
Theorie	$33,99 \pm 0,07$	$39,24 \pm 0,08$	$30,43 \pm 0,06$
relative Abweichung	0,56%	2,78%	1,41%

Tabelle 6: Vergleich der experimentell ermittelten und theoretisch berechneten Werte für die Frequenzen f_{res} und $f_{1,2}$

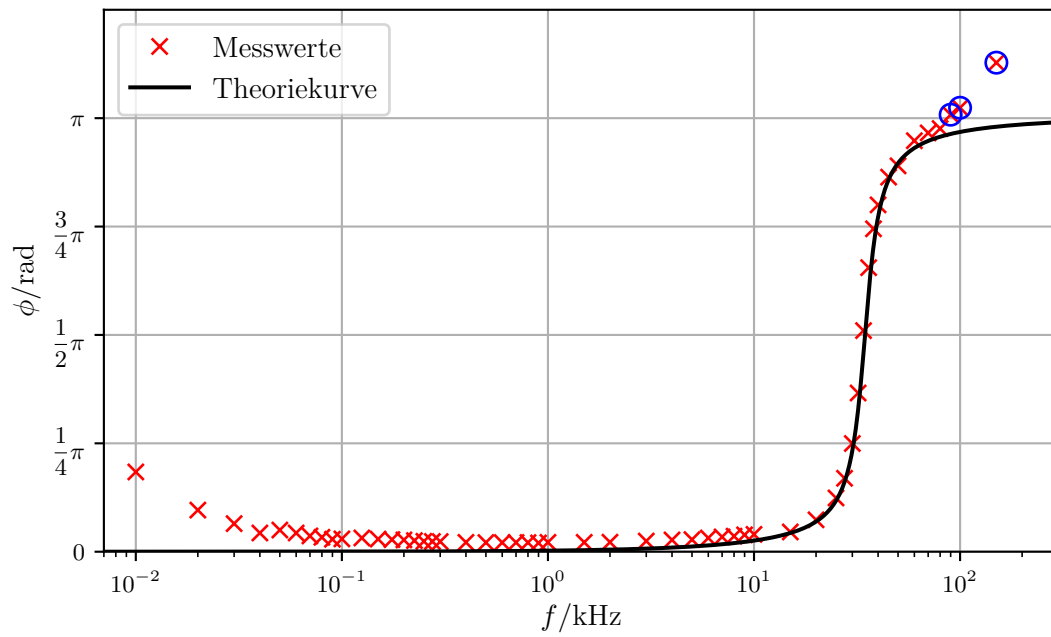


Abbildung 12: Halblogarithmische Auftragung der Phasenverschiebung gegen die Frequenz

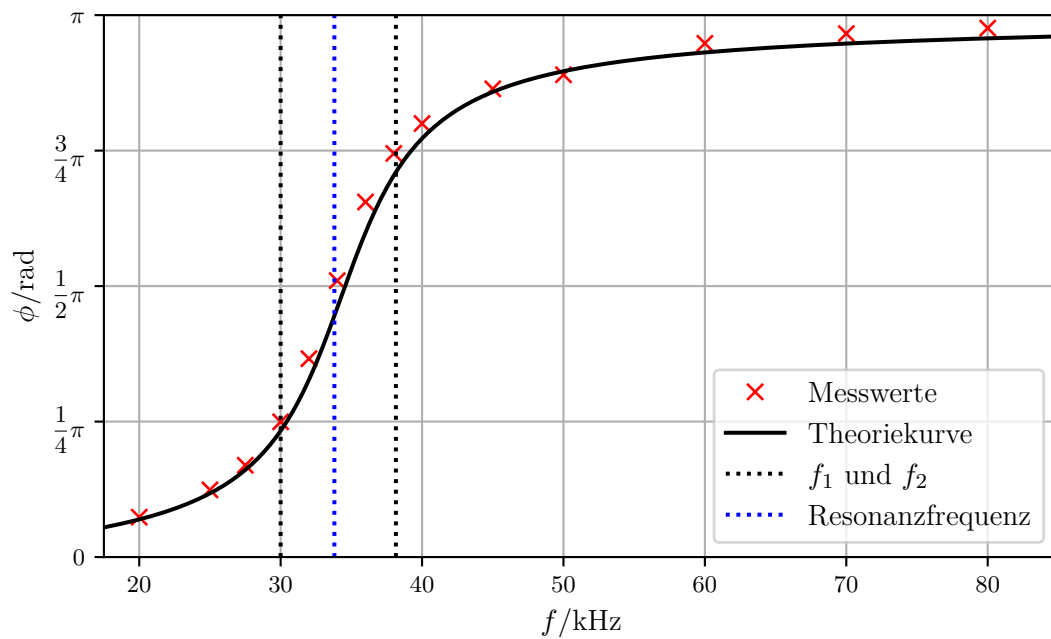


Abbildung 13: Lineare Auftragung der Phasenverschiebung gegen die Frequenz

6 Diskussion

Die gemessenen Werte erscheinen im Allgemeinen sinnvoll, da sie insgesamt sehr nah an den theoretisch berechneten Werten liegen.

Dennoch muss angemerkt werden, dass für die Messung des effektiven Widerstandes R_{eff} nur wenige Messwerte berücksichtigt wurden und diese nur aus einer manuell eingezeichneten Einhüllenden abgelesen wurden.

Auffällig ist die große Abweichung des experimentell bestimmten Wertes für den Widerstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, vom theoretisch berechneten Wert. Mögliche Ursachen dafür sind die in der Messung nicht berücksichtigten Innenwiderstände der anderen Geräte, sowie Ungenauigkeiten beim Ablesen vom Oszilloskop. Es war nicht genau erkennbar, wann genau kein Überspringen mehr stattfand. Außerdem wurde die Messung nur ein einziges Mal durchgeführt.

Eine Weitere Quelle für systematische Fehler bei der Messung liegt in der Ungenauigkeit des Oszilloskops. Das verwendete Gerät kann auf der gewählten Einstellung, bei der das Zehnfache der angelegten Spannung angezeigt wird, die Spannung nur bis auf 0.2V genau anzeigen. Dies führt zu Ungenauigkeiten beim Ablesen der Werte. Insbesondere bei der Messung der Phasenverschiebung führen bereits geringe Änderungen der abgelesenen Werte zu sehr großen Abweichungen des Ergebnisses. Dies ist eine mögliche Erklärung für die Werte der Phasenverschiebung, die oberhalb von π liegen. Außerdem zeigt der Schwingkreis nicht zu vernachlässigende Phasenverschiebungen für kleine Frequenzen, die auf systematische Fehler beim Ablesen und Eigenheiten der Schaltung zurückzuführen sind.

Auf expliziten Wunsch des Versuchsbetreuers werden die zu korrigierenden Bestandteile des Protokolls gesondert an das Protokoll angehängt. Somit sind alle ab diesem Punkt aufgeführten Elemente so zu verstehen, dass sie die unkorrigierten Elemente des Protokolls ersetzen.

Korrektur

In Abbildung 14 ist die Einhüllende nun bis zum rechten Rand des Diagramms fortgesetzt. Eine Fortführung links der zeitlichen Nulllinie wird als nicht sinnvoll erachtet, da der Entladevorgang des Kondensators erst ab $t = 0$ beginnt.

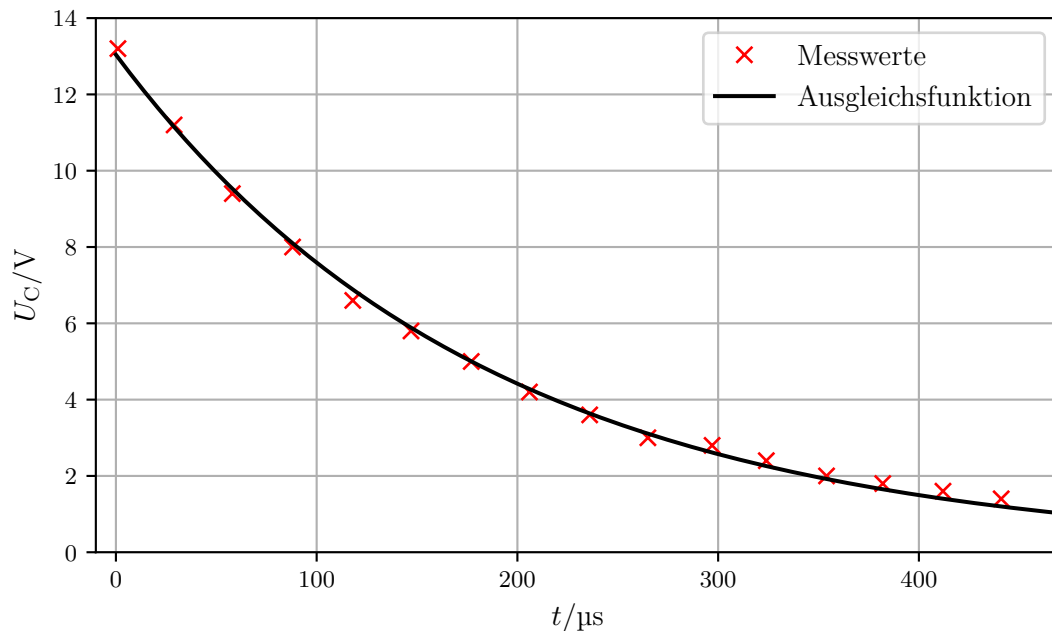


Abbildung 14: Auftragung der Kondensatorspannung gegen die Zeit und Graph der Ausgleichsfunktion

Die Theoriekurve für die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit von der Frequenz f wird mit (14) berechnet. Es ergibt sich die in Abbildung 15 und 16 dargestellte Theoriekurve.

Hier ist erkennbar, dass die Messwerte dem Verlauf der Theoriekurve in guter Näherung folgen. Allerdings erreichen die Messwerte nicht die gleiche Höhe wie die Theoriekurve und sind zudem relativ zu dieser leicht nach links verschoben. Dies könnte auf Effekte der Schaltung, wie zum Beispiel nicht zu vernachlässigende Widerstände von Kondensator und Spule, zurückzuführen sein.

Für die Berechnung der Theoriekurve für die Phasenverschiebung in Abhängigkeit von

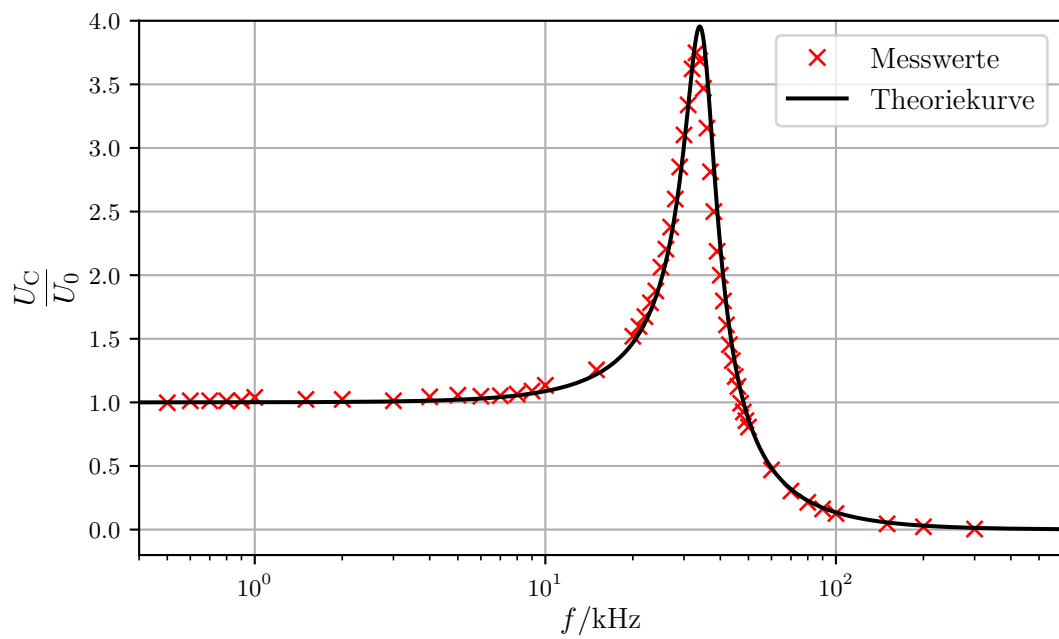


Abbildung 15: Halblogarithmische Auftragung der normierten Kondensatorspannung gegen die Frequenz

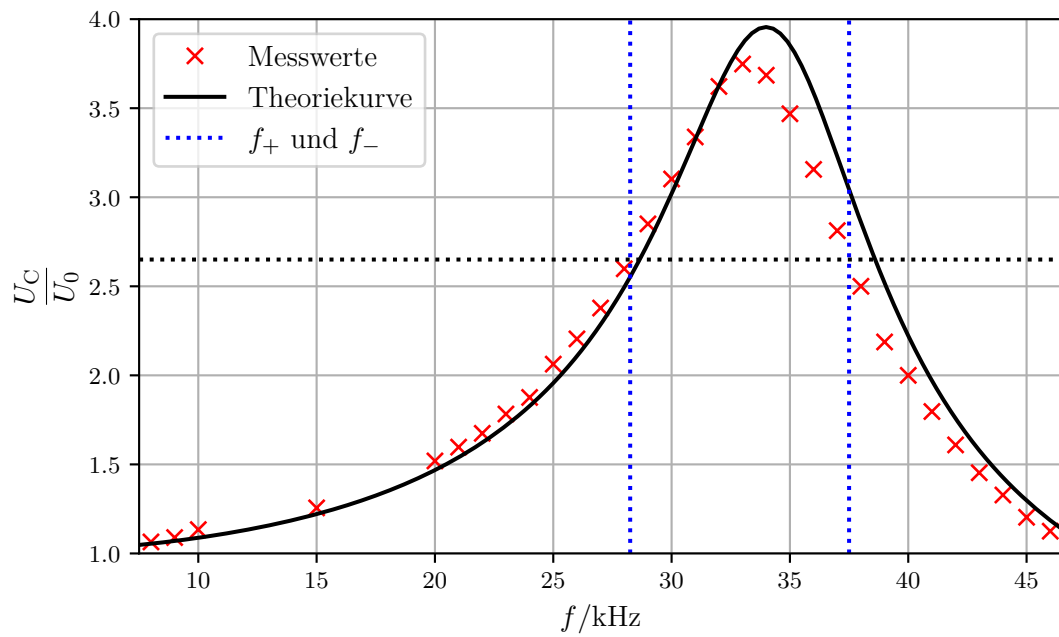


Abbildung 16: Lineare Auftragung der normierten Kondensatorspannung gegen die Frequenz um den Resonanzbereich

der Frequenz wird die folgende Formel³ verwendet:

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega RC}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (29)$$

Es ergibt sich die in Abbildung 17 und 18 dargestellte Theoriekurve.

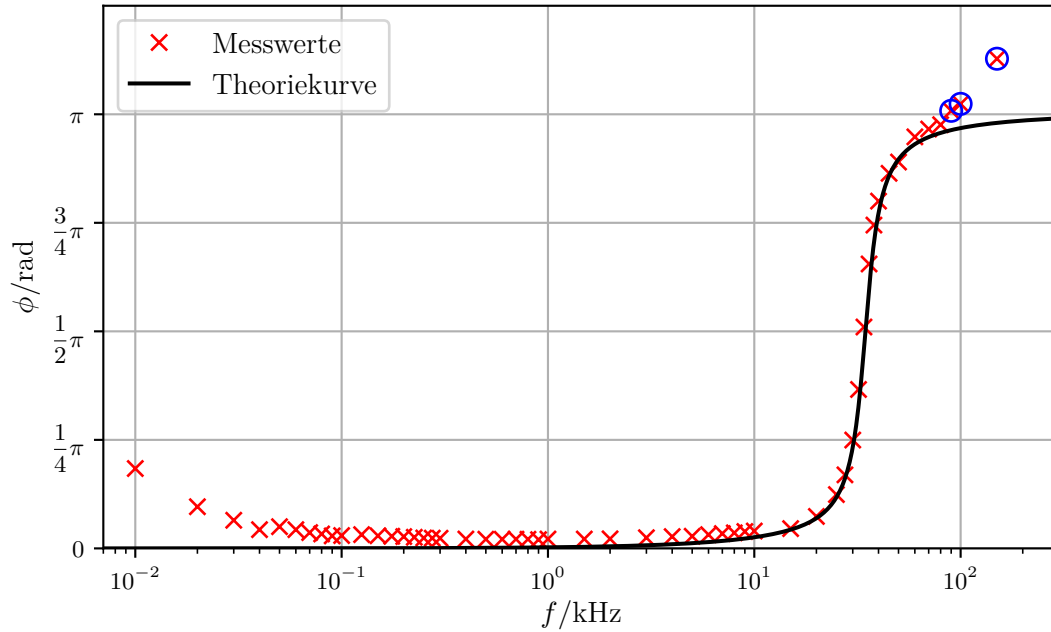


Abbildung 17: Halblogarithmische Auftragung der Phasenverschiebung gegen die Frequenz

Es ist erkennbar, dass die Messwerte dem Verlauf der Theoriekurve für hinreichend hohe Frequenzen f in guter Näherung erfüllen. Die blau markierten Messwerte sind als fehlerhaft zu bewerten.

³Die in der Versuchsanleitung angegebene Formel (13) führt zu keinem sinnvollen Ergebnis. Zähler und Nenner wurden vertauscht. Zudem muss noch die Phasenverschiebung am Kondensator berücksichtigt werden.

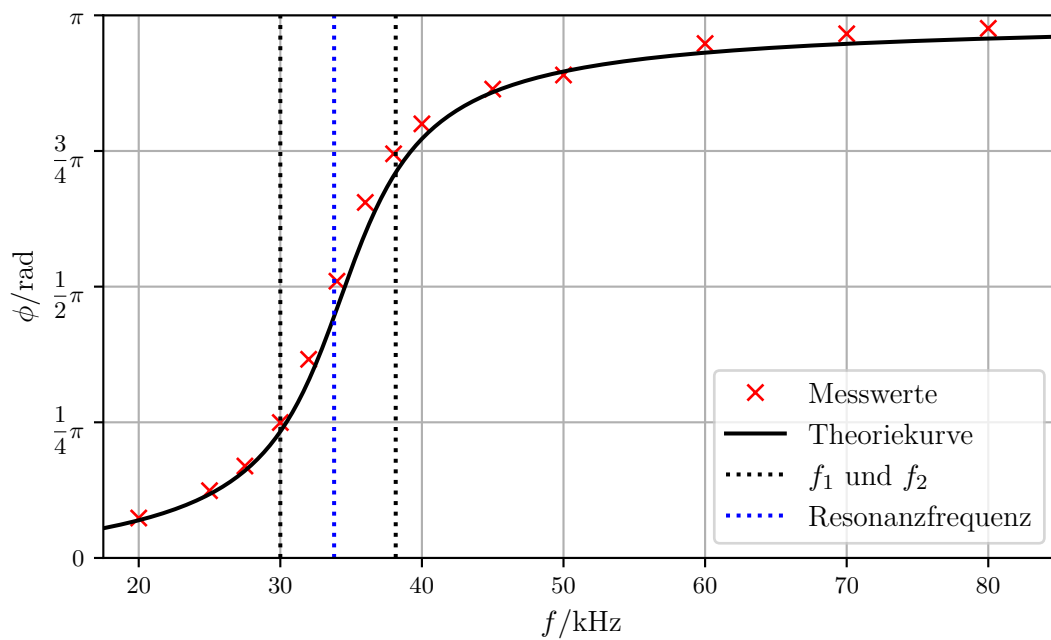


Abbildung 18: Lineare Auftragung der Phasenverschiebung gegen die Frequenz

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. [Online; aufgerufen am 21.11.2017]. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] TU Dortmund. *Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. [Online; aufgerufen am 21.11.2017]. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.