

Anfängerpraktikum V102

## Drehschwingungen

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 20. Januar 2015      Abgabe: 27. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Zielsetzung

Elastische Konstanten charakterisieren das Verhalten eines Stoffes bei Krafteinwirkung. Sie fungieren als Proportionalitätsfaktoren zwischen der pro Flächeneinheit angreifenden Kraft und der daraus resultierenden relativen Deformation – einer Gestalts- oder Volumenänderung. Ziel ist es, die elastischen Konstanten einer Metallegierung zu bestimmen. Außerdem soll das magnetische Moment eines Permanentmagneten, sowie das Erdmagnetfeld gemessen werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Wirkung von Kräften auf Körper

Wirken Kräfte auf einen Körper ein, kann dies auf zwei Arten geschehen. Die Kraft kann einerseits an jedem Volumenelement angreifen, dadurch den Bewegungszustand des Körpers ändern und ihn in eine Translations- oder Rotationsbewegung versetzen. Andererseits ist es möglich, dass die angreifende Kraft nur auf die Oberfläche des Körpers wirkt und dazu führt, dass sich Gestalt bzw. Volumen ändern.

Diese Kraft pro Flächeneinheit wird als Spannung definiert. Diese teilt sich in zwei Komponenten auf: die Normalkomponente  $\sigma$  bewirkt eine Längenänderung senkrecht, eine Tangentialspannung  $\tau$  eine Längenänderung parallel zur Kraftrichtung auf eine Probe. Die Kräfte wirken nachweislich an der Oberfläche und jeder beliebigen Querschnittsfläche des Körpers. In Festkörpern sind die Atome in einem Kristallgitter regelmäßig angeordnet und befinden sich mit ihren direkten Nachbarn in einem Gleichgewichtszustand, in dem sich die abstoßenden und anziehenden Kräfte zu Null addieren. Durch Krafteinwirkung wird ein neuer Zustand hergestellt, indem der Abstand  $r_0$  der Teilchen zueinander variiert wird und sich ein neuer Gleichgewichtszustand mit dem Abstand  $r'_0$  einstellt. Das HOOKEsche Gesetz

$$\sigma = E \frac{L}{L} \quad \text{oder} \quad P = Q \frac{V}{V} \quad (1)$$

beschreibt für hinreichend kleine Kräfte an der Oberfläche bzw. an jedem Volumenelement einen linearen Zusammenhang zwischen der Spannung und der durch diese hervorgerufenen relative Deformation. Liegt eine elastische Deformation vor, so kehrt der Körper in seine Ausgangslage zurück, sobald die Krafteinwirkung unterbrochen ist. Der Vorgang ist reversibel.

### 2.2 Die elastischen Konstanten eines Materials

Werden unsymmetrische Kristalle mit richtungsabhängigen elektrostatischen Kräften betrachtet, müssen viele Komponenten gemessen und errechnet werden. Isotrope Körper,

beispielsweise polykristalline Kristalle, zeichnen sich stattdessen durch richtungsunabhängige elastische Konstanten aus und können theoretisch durch zwei Konstanten beschrieben werden. Es erweist sich jedoch als zweckmäßig, insgesamt vier Konstanten einzuführen. Der Schubmodul  $G$  beschreibt die Gestalts-, der Kompressionsmodul  $Q$  die Volumenelastizität. Der Elastizitätsmodul  $E$  ist der Proportionalitätsfaktor aus Gleichung (1). Die POISSONSche Querkontraktionszahl

$$\mu = -\frac{B}{L} \frac{L}{B} \quad (2)$$

beschreibt die relative Längenänderung bei angreifender Normalspannung in Spannungsrichtung. Die genannten Moduln sind nicht unabhängig voneinander und stehen über

$$E = 2G(\mu + 1) \quad \text{und} \quad E = 3(1 - 2\mu)Q \quad (3)$$

in Beziehung.

### 2.3 Der Schubmodul $G$ eines Drahtes

Erfährt ein Probekörper ausschließlich Tangentialspannungen, verformt er sich so, dass eine Scherung um den Winkel  $\alpha$  auftritt. Nach HOOKE ist mit

$$\tau = G\alpha \quad (4)$$

die Spannung proportional zum Scherungswinkel. Experimentell wird ein einseitig fest eingespannter zylinderförmiger Draht um den Winkel  $\phi$  verdreht, wobei ein Drehmoment  $M$  wirkt. Die Schichten des Zylindermantels werden dabei um den Winkel  $\alpha$  ausgelenkt. Da das Drehmoment abhängig vom Hebelarm, also vom Probendurchmesser ist, werden im weiteren Verlauf infinitesimale Drehmomente  $dM$  betrachtet, die eine Kraft  $dK$  auf das Massenelement im Radius  $r$  bewirken. Aus

$$dM = r dK \quad (5)$$

folgt mit (4) und  $\tau = \frac{dK}{dF}$

$$dM = r G \alpha dF. \quad (6)$$

Aus dem Zusammenhang  $\alpha = \frac{r\phi}{L}$ , dem Flächeninhalt des Kreisrings und anschließender Integration über den Radius der Probe folgt eine Formel für das Gesamtdrehmoment

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2L} \phi = D\phi. \quad (7)$$

Wird an das freie Drahtende ein Körper mit Trägheitsmoment  $\theta$  angehängt, kann der Draht ungedämpfte harmonische Schwingungen der Dauer

$$T_G = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{D}} \quad (8)$$

ausführen. Das Trägheitsmoment einer Kugel ist

$$\theta = \frac{2}{5} m_K r_K^2, \quad (9)$$

womit sich

$$G = \frac{16\pi m_K r_K^2 L}{5T^2 R^4} \quad (10)$$

ergibt. Der Vorteil der dynamischen Methode über die Messung der Schwingungsdauer ist die geringere Fehleranfälligkeit. Die Ergebnisse bei statischer Messung können durch eventuelle elastische Nachwirkungen verfälscht werden.

## 2.4 Das magnetische Moment $m$

Befinden sich Draht und angehängter Körper mit einem magnetischen Moment  $m$  in einem homogenen Magnetfeld

$$B = \frac{8\mu_0}{\sqrt{125}} \frac{I}{R_{\text{HS}}} n, \quad (11)$$

erzeugt von HELMHOLTZ-Spulen mit Windungszahl  $n$ , Radius  $R_{\text{HS}}$  und Spulenstrom  $I$ , führt er Schwingungen mit

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \quad (12)$$

aus. Die Periodendauer wird geringer, da ein zusätzliches Drehmoment wirkt.

### 3 Durchführung

#### 3.1 Aufbau der Messapparatur

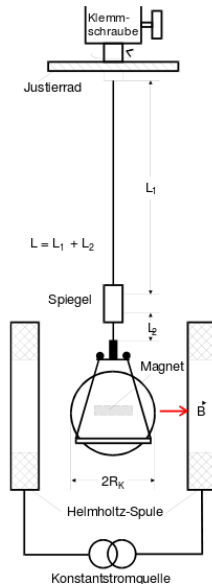


Abbildung 1 zeigt die Messapparatur. Am unteren Ende eines einseitig fest eingespannten Drahtes ist eine Kugel befestigt, in deren Innern sich ein Permanentmagnet befindet. Sie hängt zwischen HELMHOLTZ-Spulen, die bei ein annähernd homogenes Magnetfeld erzeugen, sobald sie von einem Strom  $I$  durchflossen werden. In der unteren Drahhälfte wird dieser durch einen kleinen Spiegel unterbrochen, der zur Bestimmung der Periodendauer benötigt wird.

**Abbildung 1:** Aufbau der Messapparatur. [1]

Die Periodendauer der Torsionsschwingung wird über eine elektronische Stoppuhr gemessen. Mit Schwingungsbeginn soll das Zählwerk starten; nach einer Periode enden. Die Periodendauer  $T$  kann dann direkt am Zählwerk abgelesen werden. Dieser Vorgang wird umgesetzt über eine, durch die in Abbildung 2 gezeigte Lichtschranke, steuerbare Torstufe. Das Licht einer Lampe wird zunächst durch eine Sammellinse gebündelt und anschließend durch einen Spalt auf den Spiegel am Torsionsdraht geworfen. Wird der Draht durch Bewegen des Justierrades zu Schwingungen angeregt, passiert der reflektierte Lichtstrahl dabei die Photodiode. Sobald der Lichtstrahl auf die Photodiode trifft erzeugt diese ein elektrisches Signal, welches durch eine geeignete Schaltung auf die Torsteuerungseingänge des Zählwerks geleitet wird.

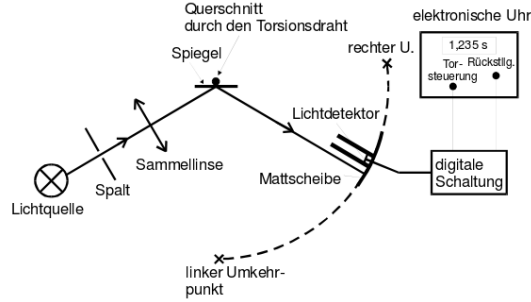


Abbildung 2: Aufbau der Lichtschranke. [1]

### 3.2 Bestimmung der gesuchten Größen

Zur Berechnung der Moduln müssen Drahtlänge und -durchmesser bekannt sein. Gemessen werden diese mit einer Mikrometerschraube und einem Maßband. Übrige Systemparameter sind bekannt.

In drei Versuchsteilen wird der Draht durch Auslenken des Justierrades zu harmonischen Schwingungen angeregt und die am Zählwerk angezeigte Schwingungsdauer notiert. Zur Bestimmung des Schubmoduls  $G$  muss der Permanentmagnet  $m$  parallel zum Draht und senkrecht zum Erdmagnetfeld ausgerichtet sein, damit die Messung nicht beeinflusst wird. Es werden zehn Messwerte aufgenommen. Anschließend wird das magnetische Moment  $m$  des Permanentmagneten bestimmt. Hierzu werden die HELMHOLTZ-Spulen eingeschaltet und der Permanentmagnet  $m$  parallel zum Magnetfeld der Spulen ausgerichtet, um den maximalen Einfluss des Magnetfeldes auf die Schwingung zu erreichen. Die Spulenstrom  $I$  wird von  $I = 0,1 \text{ A}$  bis  $I = 1 \text{ A}$  in fünf Schritten variiert und jeweils fünf Schwingungsdauern werden notiert.

Zur Bestimmung des Erdmagnetfelds wird die Messung mit abgeschalteten HELMHOLTZ-Spulen wiederholt. Die Schwingungsdauer wird zehn Mal gemessen.

## 4 Auswertung

Die in der Auswertung verwendeten Mittelwerte  $n$ -fach gemessener Größen sind gemäß der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (13)$$

bestimmt. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich dabei zu

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (14)$$

Resultiert eine Größe über eine Gleichung  $f$  aus  $N$  anderen fehlerbehafteten Größen  $x_i$  mit  $i \in \{1, \dots, N\}$ , so berechnet sich der Gesamtfehler  $f(x_i)$  nach der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung zu

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \right)^2}. \quad (15)$$

Es werden im Folgenden alle errechneten Größen auf zwei Nachkommastellen gerundet angegeben, die Rechnung wird stets mit den exakten Werten durchgeführt.

#### 4.1 Eigenschaften des untersuchten Systems

Das untersuchte Material ist Federstahl. Die Abmessungen des verwandten Drahtes sind in Tabelle 1 aufgetragen, die Werte von Durchmesser und den Teillängen korrelieren nicht. Der Mittelwert mit Standardabweichung des Durchmessers ist  $d = (0,19 \pm 0,01)$  mm, die der Gesamtlänge ist  $l = (0,60 \pm 0,01)$  m.

Durchmesser	Längen		Masse der Kugel	Radius der Kugel
$d/$ mm	$l_1/$ m	$l_2/$ m	$m_K/$ g	$r_K/$ mm
0,190	0,551	0,0500	<b>Tabelle 2:</b> Eigenschaften der Kugel. [1]	$25,3800 \pm 0,0018$
0,189	0,551	0,0510		
0,191	0,550	0,0500		
0,193	0,551	0,0520		
0,195	0,551	0,0520		

**Tabelle 1:** Abmessungen des Drahtes.

Die Eigenschaften der Kugel sind in Tabelle 2 aufgetragen. Unter Berücksichtigung des Trägheitsmomentes der Kugelaufhängung  $\theta_{\text{Aufhängung}} = 22,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$  [1] wird das Kugelträgheitsmoment  $\theta_{\text{Kugel}}$  in den folgenden Rechnungen mit dem Gesamtträgheitsmoment  $\theta$  des schwingenden Systems ersetzt. Mit

$$\theta = \theta_{\text{Kugel}} + \theta_{\text{Aufhängung}} \quad (16)$$

$$= \frac{2}{5} m_K r_K^2 + \theta_{\text{Aufhängung}} \quad (17)$$

wird das Gesamtträgheitsmoment  $\theta = (0,13 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  angenommen.

## 4.2 Bestimmung des Schubmoduls $G$

$T_G / \text{s}$	
18,585	18,589
18,598	18,592
18,593	18,594
18,588	18,598
18,585	18,588

**Tabelle 3:** Schwingungsdauern zur Berechnung des Schubmoduls  $G$ .

Die zur Berechnung des Schubmoduls  $G$  benötigten Schwingungsdauern  $T_G$  sind in Tabelle 3 aufgetragen. Der Mittelwert und dessen Standardabweichung von der Schwingungsdauer ist  $T_G = (18,59 \pm 0,01) \text{ s}$ . Der Schubmodul  $G$  wird mit Formel (10) berechnet. Es gilt

$$G = 8\theta \frac{\pi L}{T^2 r_D^4} \quad (18)$$

$$= (69,7 \pm 1,6) \frac{\text{GN}}{\text{m}^2}. \quad (19)$$

Aus der Literatur ist der Schubmodul für das Material Federstahl mit

$$G_{\text{Theorie}} = 73,575 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \quad (20)$$

bekannt. Die Messung weicht von der Theorie um  $-5.27\%$  ab.

## 4.3 Bestimmung des Dipolmomentes $m$

Tabelle 4 zeigt in Abhängigkeit von der Stromstärke  $I$  der HELMHOLTZ-Spulen, die gemessenen Schwingungsdauern  $T_{m,i}$ , sowie deren Mittelwerte und Standardabweichungen. Die einzelnen Schwingungsdauern verschiedener Stromstärken  $I$  korrelieren nicht.

$I / \text{A}$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
$T_{m,i} / \text{s}$	11,424	9,526	6,889	5,837	5,171
	11,441	9,513	6,949	5,785	5,169
	11,386	9,490	6,953	5,841	5,172
	11,411	9,480	6,955	5,831	5,162
	11,384	9,473	6,954	5,844	5,162
$T_m / \text{s}$	$11,41 \pm 0,01$	$9,49 \pm 0,01$	$6,94 \pm 0,01$	$5,83 \pm 0,01$	$5,17 \pm 0,01$

**Tabelle 4:** Schwingungsdauern zur Berechnung des magnetischen Moments  $m$ .



Zur Bestimmung des Dipolmomentes wird die Gleichung (12) benutzt, um die Magnetfeldstärke  $B$  der HELMHOLTZ-Spulen gegen das reziproke Schwingungsdauer-Quadrat  $\frac{1}{T_n^2}$  aufzutragen. Die Magnetfeldstärke  $B$  der HELMHOLTZ-Spulen ist durch die Gleichung (11) und durch den Spulenstrom  $I$  bekannt. Mit der Linearisierung

$$B = 4\pi^2 \underbrace{\frac{\theta}{m}}_{a_{\text{lin}}} \underbrace{\frac{1}{T_m^2}}_{x_{\text{lin}}} - \underbrace{\frac{D}{m}}_{b_{\text{lin}}} \quad (21)$$

und der Regression mit den Formeln (27) sind die Parameter des Fits

$$a_{\text{lin}} = (0,10 \pm 0,01) \text{ T s}^2, \quad (22)$$

$$b_{\text{lin}} = -(3,16 \pm 0,53) \cdot 10^{-4} \text{ T}. \quad (23)$$

Es folgt für das magnetische Moment

$$m = 4\pi^2 \frac{\theta}{a_{\text{lin}}} \quad (24)$$

$$= (0,05 \pm 0,01) \text{ T m}. \quad (25)$$

#### 4.4 Bestimmung der horizontalen Erdmagnetfeldstärke $B_{\text{Erde}}$

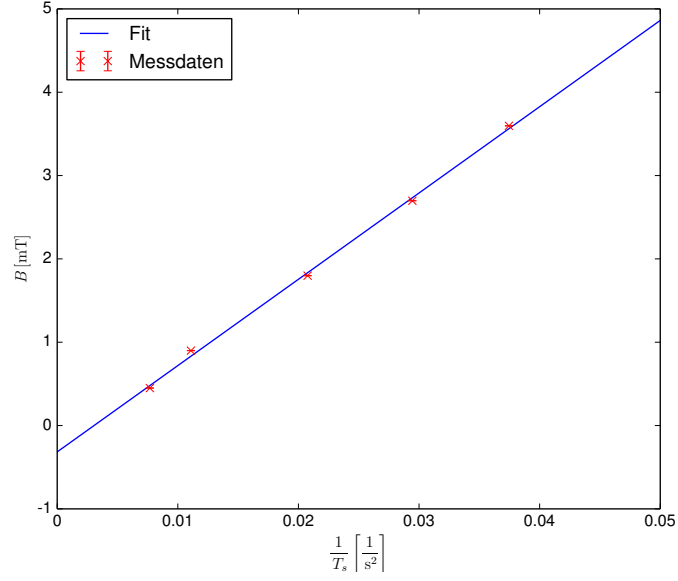
$T_{\text{E}} / \text{s}$	
18,413	18,404
18,411	18,395
18,390	18,399
18,409	18,396
18,379	18,391

**Tabelle 5:** Schwingungsdauern zur Berechnung des Erdmagnetfeldes  $B_{\text{Erde}}$ .

Die gemessenen Zeiten  $T_{\text{E},i}$  sind in Tabelle 5 aufgetragen, der Mittelwert mit Standardabweichung ist  $T_{\text{E}} = (18,40 \pm 0,01) \text{ s}$ . Mithilfe der Gleichung (21) wird die Stärke des Erdmagnetfeldes  $B_{\text{Erde}}$  bestimmt. Aus Abschnitt 2, Gleichung (7) und Abschnitt 4.3, Gleichung (25) sind die in Formel (21) benötigten Größen  $m$  und  $D$  bekannt. Die Winkelrichtgröße  $D$  beträgt  $D = (1,53 \pm 0,01) \cdot 10^{-5} \text{ N m}$ . Damit ist die Stärke des horizontalen Anteiles des Erdmagnetfeldes

$$B_{\text{Erde}} = (6,27 \pm 0,18) \cdot 10^{-6} \text{ T}. \quad (26)$$

Die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes wird für Deutschland mit durchschnittlich  $20 \cdot 10^{-6} \text{ T}$  [3] angenommen. Die Messung weicht von der Theorie um 68,65% ab.



**Abbildung 3:** Messdaten und Regression der Schwingdauern  $T_S$  und der Magnetfeldstärke  $B$ .

Regression nach

$$\Delta = N \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2, \quad (27a)$$

$$a_{\text{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\Delta}, \quad (27b)$$

$$b_{\text{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\Delta}, \quad (27c)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - a_{\text{Reg}} \cdot x - b_{\text{Reg}})^2}{N - 2}}, \quad (27d)$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}, \quad (27e)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} \quad (27f)$$

mit  $x = x_{\text{lin}} = \frac{1}{T_m^2}$ ,  $y = B$ ,  $a_{\text{Reg}} = a_{\text{lin}}$ ,  $b_{\text{Reg}} = b_{\text{lin}}$  und der Anzahl der Datenpaare  $N$ .

## 4.5 Bestimmung der Poissonschen Querkontraktionszahl $\mu$ und des Kompressionsmoduls $Q$

Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls  $E$  für Federstahl [4] ist

$$E = 190,3 \text{ GPa.} \quad (28)$$

Aus Abschnitt 4.1, Gleichung (19) ist der Schubmodul  $G$  mit

$$G = (69,7 \pm 1,6) \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \quad (29)$$

bekannt. Mithilfe der Zusammenhänge nach Gleichung (3) gilt für die POISSONSche Querkontraktionszahl  $\mu$  und für den Kompressionsmodul  $Q$

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1, \quad Q = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}, \quad (30)$$

$$= 0,36 \pm 0,03, \quad = (0,23 \pm 0,05) \frac{\text{TN}}{\text{m}}. \quad (31)$$

## 5 Diskussion

### 5.1 Diskussion des Materials

Der Begriff "Federstahl" ist nicht eindeutig. Die Messungen ergeben Werte, die mit den Literaturwerten des genormten Federstahls *X12CrNi18-8*, Werkstoff *1.4310* [4] verglichen werden. Die geringe Abweichung der Messung von der Theorie erhärten die Vermutung über das Material.

### 5.2 Diskussion der Fehler

Es sind die exakten Werte für das Schubmodul  $G$  und für die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes  $B_{\text{Erde}}$  bekannt. Der Abweichung des Schubmoduls, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben wird, gibt Aufschluss über das Material und weist daher a priori eine geringe Abweichung auf. Der in Abschnitt 4.4 bestimmte Wert des Erdmagnetfeldes weicht mit etwa 68,65% stark von der Literaturangabe ab. Die Literaturwerte stammen von einer Sekundärquelle, sodass auf exakte Information nicht zugegriffen werden kann. Weiter hängt der Wert von dem Inklinationswinkel ab, der in der Quelle für Deutschland gemittelt angenommen wird.

Die Methode zur Bestimmung der Schwingungsdauer in Abschnitt 3.1 zeigt dadurch ihre Eignung, dass die in Tabellen 3, 4 und 5 aufgeführten Messwerte nur geringfügig untereinander abweichen. Es wird daher angenommen, dass Schwankungen durch geringe äußere Einflüsse entstehen.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V102: Drehschwinungen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf> (besucht am 23.01.2015).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [3] FH Lausitz. *Messung des Erdmagnetfeldes E 11*. URL: [http://www.hs-lausitz.de/fileadmin/user\\_upload/public/fak/fak2/pdf/Physiklabor/E11\\_Messung\\_des\\_Erdmagnetfeldes.pdf](http://www.hs-lausitz.de/fileadmin/user_upload/public/fak/fak2/pdf/Physiklabor/E11_Messung_des_Erdmagnetfeldes.pdf) (besucht am 24.01.2015).
- [4] Manfred Meissner & Hans-Juergen Schorcht. „Metallfedern - Grundlagen, Werkstoffe, Berechnung, Gestaltung und Rechnereinsatz“. In: (2007).

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[2] erstellt.