V351

Fourier-Analyse und Synthese

Michael Windau Patrick Schmidt

Durchführung: 06.12.2016 Abgabe: 13.12.2016

1 Theorie

Die Fourier-Analyse beschäfftigt sich mit periodische Funktionen, die sich nach endlicher Zeit T oder endlicher Distanz D wiederholen. In diesen Fällen gilt:

$$f(t+T) = f(t) \tag{1}$$

Durch unterschiedliche Zusammensetzungen dieser Funktion sind alle nattürlichen, periodischen Vorgänge in einer konvergenten Funktion f(t) darstellbar, die als Fouriersches Theorem [1] bekannt ist.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) \tag{2}$$

Durch einsetzten der Koeffizienten a_n und b_n, sowie der Werte von T und t, wird ersichtlich, das nur Phasen von 0, $\pi/2$ und $3\pi/2$ auftreten können. Mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \tag{3}$$

und

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt \tag{4}$$

ist zu erkennen, dass in einem Abstand von 2π ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz v_1 = 1/T auftreten. Diese ganzzahligen Vielfachen werden harmonische Oberschwingungen genannt.

Die Suche bzw. Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n wird als harmonische Fourier-Analyse bezeichnet. Es erschließt sich, dass bei geraden Funktionen (f(t)=f(-t)) alle $b_n = 0$ werden und dasselbe für alle a_n einer ungeraden Funktion (f(t)=-f(-t)) geschieht.

Trägt man die Amplituden der Oberwellen gegen die Frequenz auf, so ergibt sich ein ein Linienspektrum. Eine solche Abbildung ist in 1 zu sehen. Solche Funktionen, die periodisch aber nicht stetig sind, können mit Fourierreihen genähert werden, jedoch sind eventuelle Sprungstellen immer noch zu erkennen. Lässt man n nun gegen ∞ gehen, bleibt die Größe des Sprunges gleich. Dieser Zusammenhang wird Gibbsches Phänomen [1] gennant.

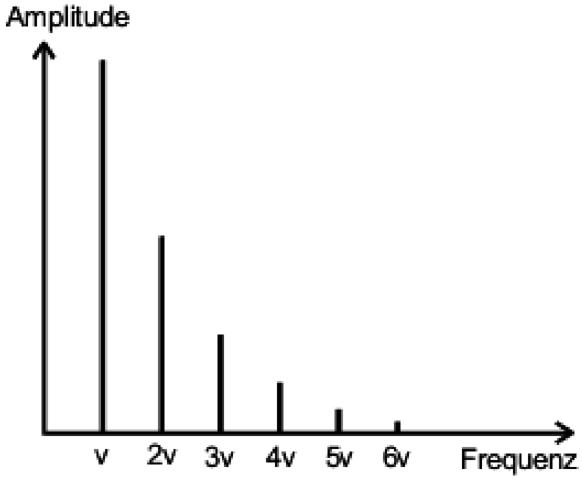

Abbildung 1: Beispiel für ein Frequenzspektrum mit Grundfrequenz v. [1]

Mit der Fourier-Transformation

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ivt} dt \tag{5}$$

wird das gesamte Frequenzspektrum bestimmt. Die hier besprochenden periodischen Funktionen ergeben das in Abbildung 1 zu sehende Linienspektrum, wobei alle nicht periodischen Funktionen ein kontinuierliches Spektrum erzeugen. Da aber die bei der Fourier-Analyse betrachteten Funktionen nicht im unendlichen betrachtet werden können, wird jede Funktion als nichtperiodisch angenommen. Dadurch bilten sich Nebenmaxima aus, die bei der Analyse erkannt, aber ignoriert werden.

2 Durchführung

2.1 Vorbereitung

Vor Beginn der Durchführung wurden die Fourier-Koeffizienten von drei verschiedenen periodischen Funktionen berechnet. In unserem Fall wurden die Sägezahn-, Dreieck- und Rechteck-Spannung so parametrisiert, dass sie entweder gerade oder ungerade sind, damit bei den geraden Funktionsteilen $b_n = 0$ und bei den ungeraden $a_n = 0$ für alle n gilt. Die jeweiligen Koeffizienten lauten damit:

2.1.1 Sägezahn

$$a_n = 0 \tag{6}$$
$$b_n = -\frac{T}{n\pi}(-1)^n \tag{7}$$
$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{T}{n\pi}(-1)^n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \tag{8}$$

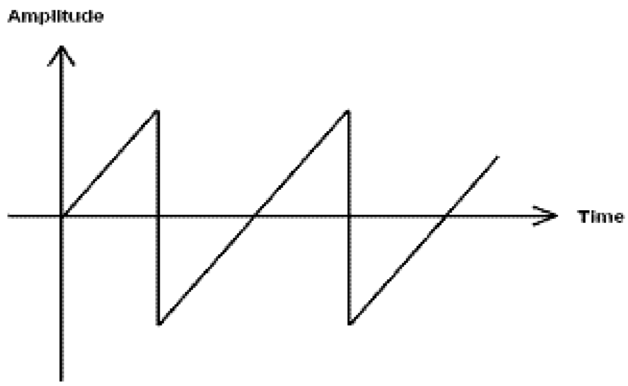

Abbildung 2: Darstellung einer Sägezahnspannung. [2]

2.1.2 Rechteck

$$a_n = 0 \tag{9}$$
$$b_n = -\frac{2T}{n\pi} - \frac{2T}{n\pi}(-1)^n \tag{10}$$
$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4T}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right) \tag{11}$$

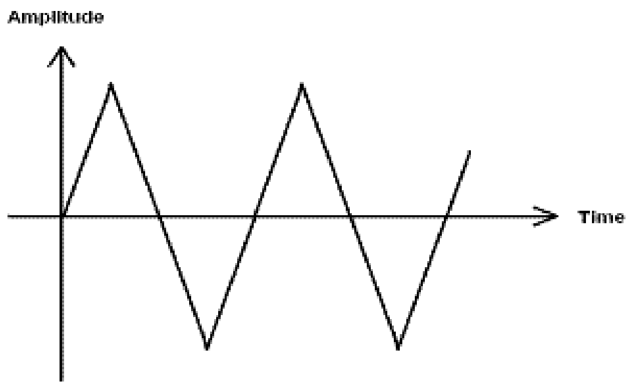

Abbildung 3: Darstellung einer Dreieckspannung. [2]

2.1.3 Dreieck

$$a_0 = 0 \tag{12}$$
$$a_n = \frac{4T}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{4T}{n^2\pi^2} \tag{13}$$
$$b_n = 0 \tag{14}$$
$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8T}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right) \tag{15}$$

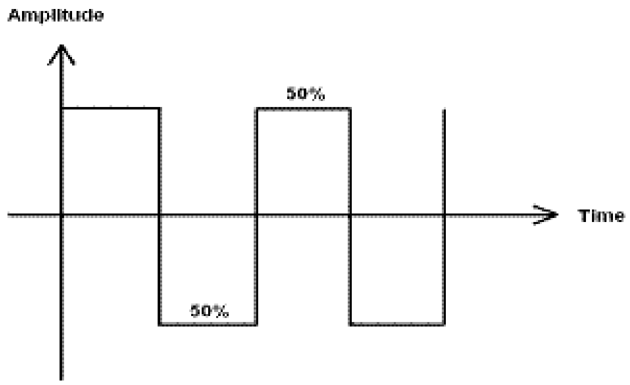

Abbildung 4: Darstellung einer Rechteckspannung [2]

2.2 Fourier-Analyse

Zur Analyse der Funktionen wird ein Funktionsgenerator an ein Oszilloskop angeschlossen, dass automatisch eine Fourier-Transformation durchführt. Bei der Kalibrierung ist zu beachten, das genügend Peaks des Linienspektrums zu sehen sind. Die auf dem Monitor zu erkennenden Peaks ohne die zuvor besprochenden Nebenmaxima sind zu notieren. Dies werde für alle drei Funktionen durchgeführt.

2.3 Fourier-Synthese

Der Oberwellengenerator wird zunächst mit jeweils zwei ausgängen an das Oszilloskop angeschlossen, welches in den X-Y-Betrieb geschaltet wird, damit alle Ausgänge in Phase geschaltet werden. Dann werden die Amplituden der einzelnen Oberwellen, damit sie eine optimale Genauigkeit haben, maximiert. Daraufhin werden die einzelnen Amplituden solange variiert, bis sich eine Lissajous-Figur in Form der jeweiligen Spannung (z.B. ein Rechteck bei der Rechteckspannung) auf dem Monitor bildete.

Um eine Sägezahn- oder Rechteckspannung zu erhalten, werde der zuvor berechnete Fourierkoeffizient mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{n}$ betrachtet. Dazu werden die Ausgänge der Oberwellen einzeln eingestellt. Nach Wiederanschluss des Generators an das Oszilloskop und Wechsel in den normalen X-T-Betrieb können die einzelnen Oberwellen einzelnd hinzuadiert und um Phase 180° gedreht werden. Dies wird solange ausgeführt, bis die am Oszilloskop zu erkennende Schwingung möglichst genau eine Sägezahnspannung wiederspiegelt.

Eine Besonderheit bei der Rechteckspannung ist, dass nur ungerade Oberwellen genutzt werden. Auch hier werden die Phasen der Oberwellen um 180° variiert um eine möglichst genaue Rechteckspannung zu rekonstruieren.

Die Dreieckspannung besitzt anders als die beiden zuvor betrachteten Spannungen einen Proportionalitätsfaktor von $\frac{1}{n^2}$. Die Amplituden der Oberwellen werden wieder dementsprechend eingestellt. Hier ist wie an der Rechnung zu erkennen nur jede ungerade Oberwelle zu nutzen. Ebenso wie zuvor werden die berwellen einzeln hinzugeschaltet und gegebenenfalls um 180° gedreht, um wieder eine möglichst genaue Abbildung der Dreieckspannung hervorzurufen.

3 Auswertung

3.1 Fourier-Analyse

Für die Fourier-Analyse werden die gemessenen Amplituden der Oberwellen verwendet. In den folgenden Tabellen finden sich diese Amplituden und die dazu gehörigen Frequenzen:

Tabelle 1: Messdaten der Sägezahnspannung

$\nu/10^3\,\mathrm{Hz}$	U/V
10	4.48
20	2.24
30	1.48
40	1.10
50	0.88
60	0.72
70	0.62
80	0.54
90	0.48
100	0.43

Tabelle 2: Messdaten der Rechteckspannung und Dreieckspannung

$\nu/10^3\,\mathrm{Hz}$	U/V
10	8.960
30	2.860
50	1.640
70	1.120
90	0.824

$\nu/10^3\,\mathrm{Hz}$	U/V
10	5.680
30	0.604
50	0.204
70	0.097
90	0.055

In einem doppeltlogarithmischen Graphen werden die Amplituden über die Anzahl der Oberwellen aufgetragen, und durch eine Ausgleichsgerade approximiert. Die Steigung dieser Ausgleichsgeraden und dessen Fehler wird über Python berechnet.

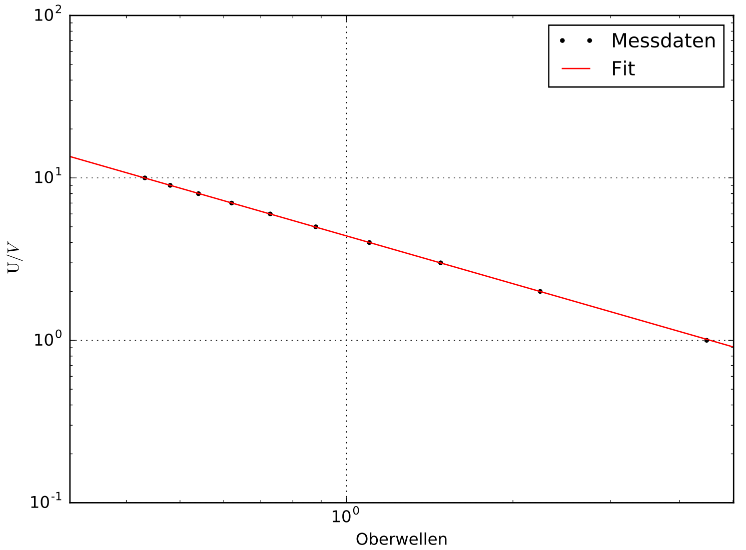

Abbildung 5: Graphik der Sägezahnspannung.

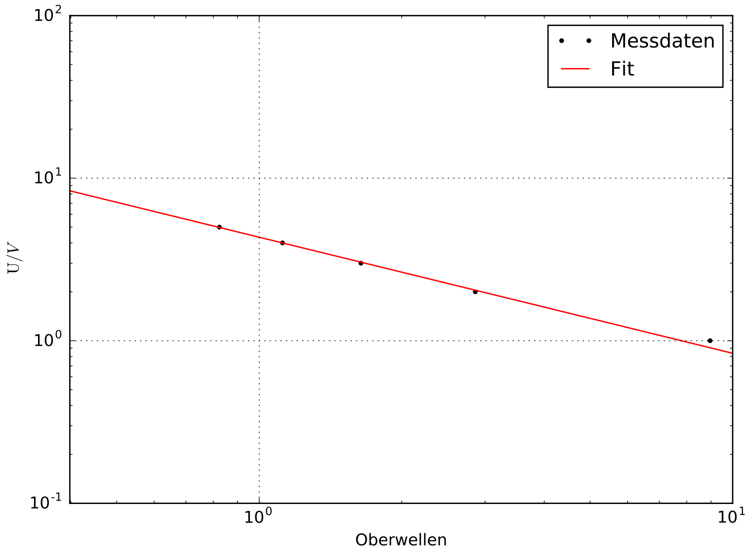

Abbildung 6: Graphik der Rechteckspannung.

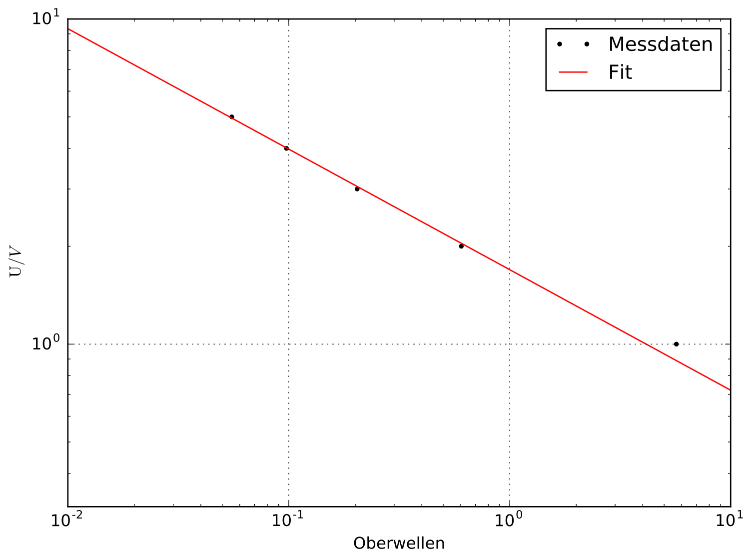

Abbildung 7: Graphik der Dreieckspannung.

Die Steigung a der Spannungen und dessen Fehler:

$$\text{Sägezahnspannung} : a = -1.0122 \pm 0.002$$

$$\text{Rechteckspannung} : a = -1.5652 \pm 0.041$$

$$\text{Dreieckspannung} : a = -2.0502 \pm 0.01$$

Die ermittelten Steigungen werden mit dem Theoriewert verglichen.

$$\begin{aligned} \text{Sägezahnspannung} : a_{\text{theorie}} &= -1 \\ \text{Rechteckspannung} : a_{\text{theorie}} &= -1 \\ \text{Dreieckspannung} : a_{\text{theorie}} &= -2 \end{aligned}$$

Bei der Rechteckspannung lässt sich eine größere Abweichung erkennen (56%). Bei der Sägespannung und der Sägezahnspannung dagegen, befinden sich die ermittelten Steigungen nahe an den Theoriewerten.

3.2 Fourier-Synthese

Die bei der Fourier-Synthese synthetisierten Funktionen, werden über eine endliche Anzahl von eingestellten Spannungsamplituden zusammengesetzt. Diese fallen zueinander mit $\frac{1}{n}$ bzw. bei der Dreieckspannung mit $\frac{1}{n^2}$ ab.

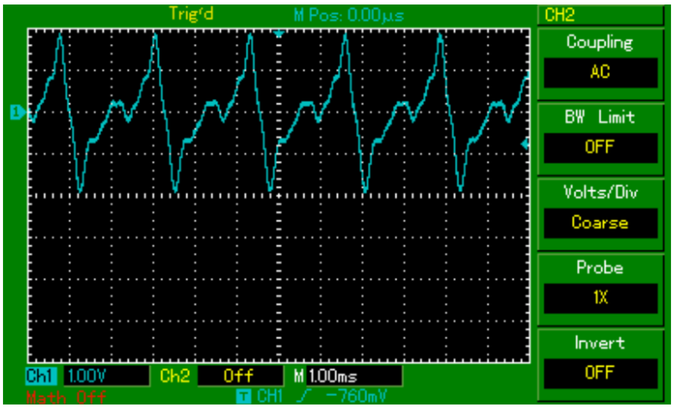

Abbildung 8: Synthetisierte Sägezahnspannung.

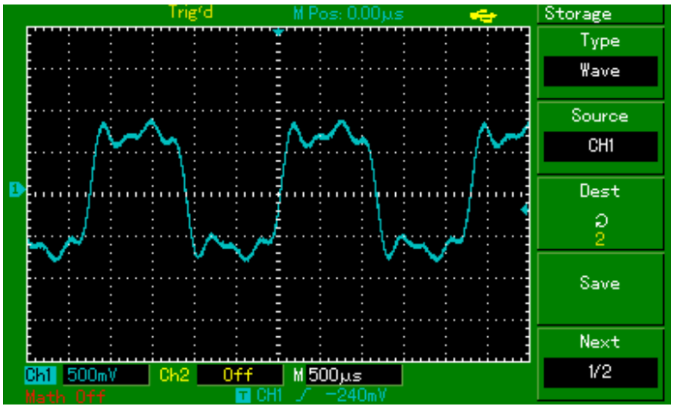

Abbildung 9: Synthetisierte Rechteckspannung.

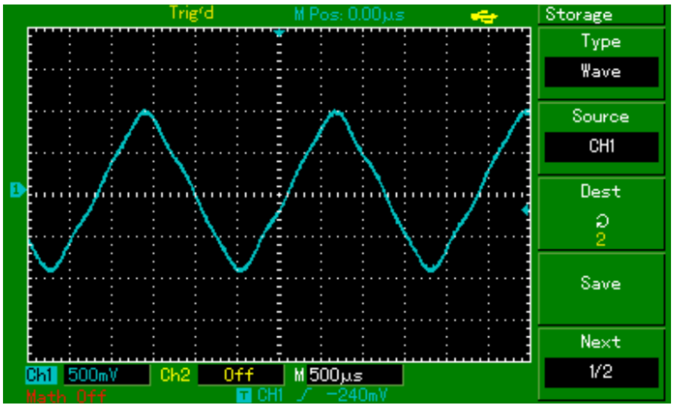

Abbildung 10: Synthetisierte Dreieckspannung.

Sowohl bei der Sägezahn- als auch bei der Rechteckspannung kommt es an den unstetigen Punkten zu größeren Ungenauigkeiten bei der Approximierung. Die Dreieckspannung dagegen, lässt sich trotz der wenigen Oberwellen gut approximieren.

4 Diskussion

Die in der Fourier-Analyse ermittelten Steigungswerte für die Sägezahn- und Dreieckspannung, liegen sehr nahe an den Werten aus der Theorie. Sie unterscheidet sich bei der Sägezahnspannung lediglich um 1%, und bei der Dreieckspannung um 2,5%. Auffälig ist jedoch die hohe Abweichung in der Steigung der Rechteckspannung (56%). Eine mögliche Erklärung für diese Abweichung würden die wenigen Messdaten und ein fehlerhaftes Messen darstellen. Eine andere und wahrscheinlichere Möglichkeit wäre jedoch ein systematischer Fehler, da die gemessenen Daten, bis auf einen Punkt, relativ nahe an der Ausgleichsgeraden liegen und nicht auf einen Messfehler vermuten lassen.

In der Fourier-Synthese traten bei der Rechteck- und Sägezahnspannung auffällige Ungenauigkeiten auf. Diese wurden bereits in der Auswertung erwähnt. Die Synthese der Dreieckspannung dagegen lieferte ein sehr genaues Bild mit nicht auffälligen Abweichungen. Der Grund dafür liegt in dem schnellen Abfallen der Amplituden, wodurch die nicht aufgefassten Oberwellen einen wesentlich geringeren Störfaktor als bei den anderen Spannungen lieferten.

5 Literatur

[1] TU Dortmund.Versuchsanleitung zum Versuch V351, Fourier-Analyse und Synthese. 2016

[2] Analoge Klangsynthese, 13.Dez 2016, Url: http://www.analogeklangsynthese.de/index.html