V106

Gekoppelte Pendel

Julian Hochhaus
julian.hochhaus@tu-dortmund.de

Niko Salewski
niko.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 31.01.2017 Abgabe: 03.02.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch soll die Schwingungs- und Schwebungsdauer von gekoppelten Pendeln bei gleichsinniger, gegensinniger und gekoppelter Schwingung bestimmt werden.

2 Theorie

Zunächst wird ein einzelnes Fadenpendel mit der angehängten Masse m und der Pendellänge l betrachtet.
Zudem wird angenommen, dass die Pendelaufhängung reibungsfrei sei und Däpfungseffekte werden als vernachlässigbar klein erachtet.
Wird das Pendel ausgelenkt, wirkt die Gewichtskraft der Auslenkung entgegen und verursacht ein rückstellendes Drehmoment $M = D_\mathrm{p} \cdot \phi$. Hierbei ist D_p die Winkelrichtgröße und ϕ der Auslenkwinkel.
Die Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = J \cdot \ddot{\phi}$ ergibt sich aus $F_\mathrm{G} = m \cdot a$, indem die Beschleunigung a durch die Winkelbeschleunigung ersetzt wird. Zudem wird beachtet, dass die Pendelmasse ausgedehnt ist, daher wird das Massenträgheitsmoment J eingeführt.
Für kleine Winkel kann die Kleinwinkelnäherung, $\sin\phi = \phi$ verwendet werden und es ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\phi} = -D_\mathrm{p}\phi\,. \tag{1}$$

Durch die Lösung der Bewegungsgleichung wird eine harmonische Schwingung beschrieben. Die Schwingungsfrequenz ist hierbei

$$\omega = \sqrt{\frac{D_\mathrm{p}}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,. \tag{2}$$

Da sich die Schwingungsdauer aus der Schwingungsfrequenz ergibt, hängt diese für kleine Auslenkungen weder von der Pendelmasse, noch vom Auslenkwinkel ϕ ab.

Werden zwei Pendel mit identischer Pendellänge und -masse durch eine Feder gekoppelt, wirkt ein zusätzliches Drehmoment D_F auf die beiden Pendel.
Dabei ist D_F abhängig von der Auslenkung der Feder. Diese ergibt sich hier über die Auslenkwinkel ϕ_i der beiden Pendel.
Aufgrund der Kopplung durch die Feder lässt sich die Bewegung somit durch ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$J \cdot \ddot{\phi}_1 + D_\mathrm{p}\phi_1 = D_\mathrm{F}(\phi_2 - \phi_1), \tag{3}$$

$$J \cdot \ddot{\phi}_2 + D_\mathrm{p}\phi_2 = D_\mathrm{F}(\phi_1 - \phi_2). \tag{4}$$

beschreiben.
Das System lässt sich entkoppeln und als Überlagerung der Eigenmoden der einzelnen Pendel formulieren. Die Lösungen der entkoppelten Differentialgleichungen sind wiederum harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω_i und dem Auslenkwinkel α_i.
Je nach Anfangsbedingungen des Systems, also Anfangsauslenkung und Anfangswinkelgeschwindigkeit, werden verschiedene Schwingungsarten unterschieden.

2.1 Gleichsinnige Schwingung

Sind zu Beginn beide Pendel um den gleichen Winkel, also $\alpha_1 = \alpha_2$, ausgelenkt, ist die Feder nicht gespannt und verursacht daher kein zusätzliches Drehmoment. Somit ist die Schwingungsfrequenz und die Schwingungsdauer identisch mit den Werten für ein einzelnes Pendel.
Für die Schwingungsfrequenz gilt somit

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5}$$

und für die Schwingungsdauer

$$T_+ = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6}$$

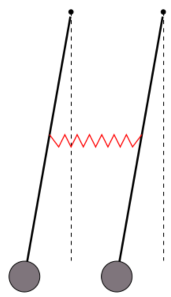

Abbildung 1: Gleichsinnige Schwingung [2].

2.2 Gegensinnige Schwingung

Sind beide Pendel gegengleich ausgelenkt, gilt also für die Auslenkwinkel $\alpha_1 = -\alpha_2$, so übt die Kopplungsfeder auf beide Pendel die entgegengesetzt gleichgroße Kraft aus. Hierdurch ergibt sich eine symmetrische Schwingung mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \tag{7}$$

und der Schwingungsdauer

$$T_- = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + 2K}}. \tag{8}$$

K ist hierbei die Kopplungskonstante der Feder.

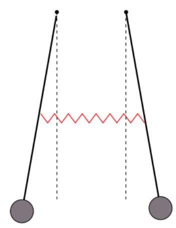

Abbildung 2: Gegensinnige Schwingung [2].

2.3 Gekoppelte Schwingung

Werden beide Pendel unterschiedlich weit ausgelenkt, also zum Beispiel $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ lässt sich eine Schwebung beobachten.
Diese entsteht, indem das zunächst ausgelenkte Pendel über die Kopplung durch die Feder nach und nach das andere Pendel in Schwingung versetzt, indem es seine gesamte Energie nach und nach auf das zu Beginn ruhende Pendel überträgt.
Die Schwingungsamplitude des zu Beginn ausgelenkten Pendels nimmt im gleichen Maße ab, wie die des zuvor ruhenden Pendel zunimmt. Schließlich kommt das zu Beginn ausgelenkte Pendel zur Ruhe und der Vorgang wiederholt sich periodisch. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels wird hierbei als **Schwebungsdauer** bezeichnet.
Die Schwebungsfunktion ist also die Einhüllende des Schwingungsamplitudenverlaufs.

Die Schwebungsdauer T_S und die Schwebungsfrequenz ω_S lassen sich hierbei über die bereits betrachteten Schwingungsdauern und -frequenzen der gegen- und gleichsinnigen Schwingung wie folgt bestimmen

$$T_\mathrm{S} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}, \tag{9}$$

$$\omega_\mathrm{S} = |\omega_+ - \omega_-| \,. \tag{10}$$

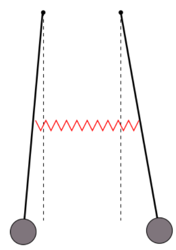

Abbildung 3: Gekoppelte Pendel [2].

Der **Kopplungsgrad** κ der Feder wird definiert als

$$\kappa = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \,. \tag{11}$$

3 Durchführung

Zuerst werden die Massen der beiden Pendel auf die gleiche Höhe eingestellt, welche mit einem Maßband gemessen wird. Die Masse der Gewichte beträgt nach [2] $m = 1\,\mathrm{kg}$.

Es werden zunächst die Periodendauern der Pendel ohne Kopplung gemessen. Hierzu werden die Pendel ausgelenkt und eine Stoppuhr gestartet. Nach fünf Perioden wird die Zeit gestoppt und notiert. Für die beiden Pendel sollen jeweils zehn Zeiten gemessen werden.

Für die Messung der Schwingungsdauer T_+ der gleichsinnigen Schwingung werden die beiden Pendel durch eine Feder gekoppelt. Die beiden Pendel werden unter dem gleichen Winkel – wie in Abbildung 1 – ausgelenkt. Analog wie bei der Bestimmung der ungekoppelten Schwingungen werden zehn Zeiten für fünf Perioden der gleichsinnigen Schwingung notiert.

Weiterhin werden die Pendel für die Bestimmung der Schwingungsdauer T_- der gegensinnigen Schwingung – wie in Abbildung 2 – gegengleich ausgelenkt und wieder zehn Messwerte für fünf Periodendauern ermittelt.

Zuletzt wird die Messung für die Schwebung durchgeführt, indem beide Pendel unter unterschiedlichen Winkeln ausgelenkt werden (vgl. Abbildung 3). Hier wird zuerst die Zeit für eine Schwebungsdauer – also einen Stillstand der Pendelbewegung – bestimmt und weiterhin die Zeit für fünf Perioden – also fünf Stillstände.

Dies wird alles ein weiteres Mal mit einer zweiten Pendellänge durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Verwendete Fehlerformeln

Alle im folgenden berechneten Mittelwerte werden mit

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{12}$$

bestimmt. Der zugehörige Fehler des Mittelwerts bestimmt sich über

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{13}$$

Wenn fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel weiter verwendet werden, so wird der sich fortpflanzende Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \tag{14}$$

4.2 Messung 1: Pendellänge $0{,}45\,\mathrm{m}$

Für die Berechnung der Theoriewerte werden folgende fehlerbehaftete Größen verwendet:

$$l = (0{,}450 \pm 0{,}003)\,\mathrm{cm},$$
$$g = (9{,}811\,90 \pm 0{,}000\,04)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Hierbei ist l die Pendellänge samt Ablesefehler und die Erdanziehung g wird nach [1] für Dortmund angegeben. Um eine kleinere Messunsicherheit zu erhalten, wird jeweils für 5 Schwingungen gemessen. Daher wird der gemessene Wert zu Beginn durch fünf dividiert, um die Dauer für eine Schwingung zu erhalten.
In Tabelle 1 sind die Periodendauern für die beiden Pendel ohne Kopplungsfeder aufgetragen.
Nach Formel (12) ergibt sich der Mittelwert der Periodendauer mit dem Fehler des Mittelwerts nach Formel (13) zu

$$T_{\text{mittel,rechts}} = (1{,}300 \pm 0{,}005)\,\mathrm{s}$$
$$T_{\text{mittel,links}} = (1{,}305 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}$$

Ebenso wird die Periodendauer für die gleich-und gegensinnige Schwingung mit den Messwerten in Tabelle 2 nach Formel (12) mit dem Fehler des Mittelwerts nach Formel (13) berechnet zu

$$T_{\text{mittel,gleichsinnig}} = T_+ = (1{,}325 \pm 0{,}002)\,\mathrm{s},$$
$$T_{\text{mittel,gegensinnig}} = T_- = (1{,}13 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}.$$

Aus den Periodendauern lässt sich die experimentell bestimmte Schwingungsfrequenz jeweils über $\omega = \frac{2\pi}{T}$ bestimmen.
Es ergibt sich

$$\omega_+ = (4{,}742 \pm 0{,}009)\,\mathrm{Hz},$$
$$\omega_- = (5{,}58 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Hz}.$$

Tabelle 1: Periodendauer der ungekoppelten Pendel für die Pendellänge $l = 0{,}45\,\mathrm{m}$.

$T_{\mathrm{links}}/\ \mathrm{s}$	$T_{\mathrm{rechts}}/\ \mathrm{s}$
1.298	1.282
1.286	1.294
1.300	1.310
1.320	1.312
1.286	1.304
1.286	1.292
1.320	1.282
1.334	1.322
1.326	1.278
1.292	1.320

Tabelle 2: Periodendauer für gleich- und gegensinnige Schwingung für die Pendellänge $l = 0{,}45\,\mathrm{m}$.

$T_{\mathrm{gleichsinnig}}/\ \mathrm{s}$	$T_{\mathrm{gegensinnig}}/\ \mathrm{s}$
1.336	1.146
1.312	1.106
1.328	1.066
1.316	1.144
1.334	1.126
1.328	1.186
1.328	1.132
1.320	1.086
1.322	1.120
1.326	1.146

Der Theoriewert für ω_+ ergibt sich nach Formel (5) zu

$$\omega_+ = (4{,}67 \pm 0{,}02)\,\mathrm{Hz}.$$

Die theoretischen Werte für T_+ und T_- ergeben sich nach Formel (6) beziehungsweise (8). Die theoretische Periodendauer der gleichsinnigen Schwingung ergibt sich direkt zu

$$T_+ = (1{,}346 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s},$$

Die Fehler ergeben sich hierbei über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung nach Formel (14). Da die Kopplungskonstante K der Feder nicht bekannt ist, wird der Theoriewert T_- über den Theoriewert für ω_- bestimmt. Nach Formel (11) lässt sich ω_- wie folgt berechnen:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{\omega_+^2 \cdot (1+\kappa)}{1-\kappa}}. \tag{15}$$

Für den Kopplungsgrad κ ergibt sich mit den experimentell bestimmten Schwingungsdauern für die gleich-und gegensinnige Schwingung nach Formel (11)

$$\kappa = 0{,}161 \pm 0{,}009.$$

Damit ergibt sich für

$$\omega_- = (5{,}58 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Hz}.$$

Schließlich lässt sich der Theoriewert für T_- über

$$T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = (1{,}13 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$$

bestimmen.

In Tabelle 3 finden sich die gemessenen Schwebungsdauern der Messung der gekoppelten Schwingungen.
In der linken Spalte sind hierbei die Messwerte für die erste Schwebungsdauer und in der rechten Spalte die bereits auf eine Schwebung umgerechnete Dauer der Messung über fünf Schwebungsdauern aufgetragen.
Der Mittelwert über die einfache Messung ergibt sich zu

$$T_\mathrm{S} = (6{,}4 \pm 0{,}1)\,\mathrm{s}.$$

Der Mittelwert samt Fehler wird ebenso wie der Mittelwert der fünffachen Messung erneut nach Formel (12) und Formel (13) bestimmt.
Es ergibt sich

$$T_\mathrm{S} = (6{,}96 \pm 0{,}03)\,\mathrm{s}.$$

Tabelle 3: Schwebungsdauer gemessen über eine bzw. fünf Perioden für die Pendellänge $l = 0{,}45\,\mathrm{m}$.

$T_{\text{Schwebung,einfach}} /\ \mathrm{s}$	$T_{\text{Schwebung}} /\ \mathrm{s}$
5.64	6.814
6.44	6.984
6.72	6.846
6.32	6.872
6.36	7.098
6.90	6.900
6.87	7.106
6.03	6.900
6.36	7.080
6.44	6.972

Der Theoriewert der Schwebungsdauer berechnet sich nach Formel (9) mit den bereits bestimmten Theoriewerten für T_+ und T_- zu

$$T_\mathrm{S} = (6{,}9 \pm 0{,}4)\,\mathrm{s}.$$

Der Theoriewert und der experimentell bestimmte Wert der Schwebungsfrequenz ergibt sich nach $\omega_\mathrm{S} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{S}}$ zu

$$\omega_{\mathrm{S,Experiment2}} = (0{,}903 \pm 0{,}004)\,\mathrm{Hz},$$
$$\omega_{\mathrm{S,Theorie2}} = (0{,}91 \pm 0{,}06)\,\mathrm{Hz}.$$

Sowohl der Theoriewert, als auch der experimentell bestimmte Wert für die Schwebungsfrequenz ω_S können zudem nach Formel (10) mit den bereits bestimmten Werten für ω_+ und ω_- berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\omega_{\mathrm{S,Experiment1}} = (0{,}84 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Hz},$$
$$\omega_{\mathrm{S,Theorie1}} = (0{,}91 \pm 0{,}06)\,\mathrm{Hz}.$$

4.3 Messung 2: Pendellänge $0{,}72\,\mathrm{m}$

Für die Berechnung der Theoriewerte werden folgende fehlerbehaftete Größen verwendet:

$$l = (0{,}720 \pm 0{,}003)\,\mathrm{cm},$$
$$g = (9{,}811\,90 \pm 0{,}000\,04)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Hierbei ist l die Pendellänge samt Ablesefehler und die Erdanziehung g wird nach [1] für Dortmund angegeben. In Tabelle 4 finden sich die Messwerte für die Schwingungsdauern der ungekoppelten Pendel.

Tabelle 4: Messwerte für die Periodendauer der ungekoppelten Pendel bei einer Pendellänge von $l = 0{,}72\,\mathrm{m}$.

T_{links} / s	T_{rechts} / s
1.602	1.606
1.590	1.612
1.626	1.626
1.602	1.584
1.592	1.606
1.618	1.626
1.606	1.618
1.592	1.602
1.606	1.626
1.614	1.626

Die Mittelwerte samt Fehler für die Schwingungsdauern der ungekoppelten Pendel ergeben sich nach Formel (12) und (13) zu

$$T_{\text{mittel,links}} = (1{,}605 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}$$

und

$$T_{\text{mittel,rechts}} = (1{,}613 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}.$$

In Tabelle 5 finden sich die Messwerte für die Schwingungsdauern der gleich-und gegensinnigen Schwingung.

Tabelle 5: Messwerte für die Periodendauer der gekoppelten Pendel bei gleich- und gegenphasiger Schwinung bei einer Pendellänge von $l = 0{,}72\,\mathrm{m}$.

$T_{\text{gleichphasig}}$ / s	$T_{\text{gegenphasig}}$ / s
1.590	1.374
1.600	1.408
1.594	1.418
1.620	1.418
1.608	1.432
1.626	1.426
1.608	1.426
1.606	1.406
1.624	1.406
1.618	1.390

Die Mittelwerte samt Fehler werden nach Formel (12) und (13) berechnet zu

$$T_{\text{mittel,gleichphasig}} = T_{+} = (1{,}609 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}$$

und

$$T_{\text{mittel,gegenphasig}} = T_- = (1{,}410 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}.$$

Weiterhin werden die Schwingungsfrequenz mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ berechnet zu

$$\omega_+ = (3{,}904 \pm 0{,}010)\,\mathrm{Hz}$$

und

$$\omega_- = (4{,}455 \pm 0{,}018)\,\mathrm{Hz}.$$

Der Theoriewert für ω_+ ergibt sich nach Formel (5) zu

$$\omega_+ = (3{,}692 \pm 0{,}008)\,\mathrm{Hz}.$$

Damit ergitb sich der Theoriewert für T_+ zu

$$T_+ = (1{,}7020 \pm 0{,}0035)\,\mathrm{s}.$$

Der Theoriewert für ω_- ergibt sich wieder analog zu Abschnitt 4.2 mit Formel (15). Mit dem Kopplungsgrad κ nach Formel (11)

$$\kappa = 0{,}131 \pm 0{,}005$$

ergibt sich der Theoriewert für ω_- zu

$$\omega_- = (4{,}212 \pm 0{,}022)\,\mathrm{Hz}.$$

Damit berechnet sich der Theoriewert für $T_- = \frac{2\pi}{\omega_-}$ zu

$$(1{,}492 \pm 0{,}008)\,\mathrm{s}.$$

Tabelle 6: Messwerte für die Schwebungsdauer bei einer Pendellänge von $l = 0{,}72\,\mathrm{m}$.

$T_{\text{Schwebung,einfach}}$ / s	$T_{\text{Schwebung}}$ / s
12.46	12.192
12.06	12.700
11.86	12.426
11.58	12.276
11.72	12.258
11.68	12.180
11.83	12.402
11.66	12.374
11.73	12.192
11.65	12.230

In Tabelle 6 sind die Messdaten für die Bestimmung der Schwebungsdauer aufgetragen.

Als Mittelwerte (bestimmt mit Formel (12)) mit zugehörigen Fehlern (nach Formel (13)) ergeben sich die Werte

$$T_{\mathrm{S,einfach}} = (11{,}82 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}$$

für die einfache Messung der Schwebungsdauer und

$$T_{\mathrm{S,fünffach}} = (12{,}32 \pm 0{,}05)\,\mathrm{s}$$

für die Messung über die fünf Schwebungsdauern.

Der Theoriewert für die Schwebungsdauer T_{S} berechnet sich mit Formel (9) zu

$$T_{\mathrm{S}} = (12{,}1 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s},$$

wobei sich der Fehler mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung (Formel (14)) ergibt.

Für die Schwebungsfrequenzen ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{S,Theorie1}} &= (0{,}521 \pm 0{,}020)\,\mathrm{Hz} \\
\omega_{\mathrm{S,Experiment1}} &= (0{,}551 \pm 0{,}020)\,\mathrm{Hz} \\
\omega_{\mathrm{S,Theorie2}} &= (0{,}521 \pm 0{,}020)\,\mathrm{Hz} \\
\omega_{\mathrm{S,Experiment2}} &= (0{,}5099 \pm 0{,}0021)\,\mathrm{Hz},
\end{aligned}$$

wobei $\omega_{\mathrm{S,Theorie1}}$ und $\omega_{\mathrm{S,Experiment1}}$ mit Formel (10) bestimmt werden und $\omega_{\mathrm{S,Theorie2}}$ und $\omega_{\mathrm{S,Experiment2}}$ über die Beziehung $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

5 Diskussion

Allgemein lässt sich die sowohl die Schwingungsdauer als auch die Schwebungsdauer der gekoppelten Pendel nur recht ungenau bestimmen, da sämtliche Zeiten manuell gestoppt wurden.
Zudem führten die Pendel kleine Schwingungen senkrecht zur vorgesehenen Auslenkung aus. Ein zusätzlicher Fehler ergibt sich eventuell über die teils klemmenden Knöpfe der Stoppuhr. Eine genauere Messung ließe sich beispielsweise realisieren, indem die Zeitnahme mittels Lichtschranken und einer entsprechenden Steuerungsschaltung automatisiert wird. Des Weiteren wurden die Pendel manuell ausgelenkt, sodass nicht garantiert werden kann, dass die Auslenkwinkel exakt gleich- bzw. gegensinnig sind. In Tabelle 7 und 8 sind die gemessenen und nach der Theorie berechneten Werte eingetragen.

Die größte Abweichung für die Pendellänge $l = 0{,}45\,\mathrm{m}$ in der Zeitmessung zeigt sich bei der einfach gemessenen Schwebungsdauer. Die Zeit war hier recht kurz, sodass sich ein Fehler verursacht durch verspätete Reaktion beim Starten oder Stoppen der Uhr besonders auswirkt.

Sämtliche weitere Abweichungen liegen deutlich unter der Auflösung der Messung, Fehler durch verzögertes Betätigen der Stoppuhr werden auf bis zu $0{,}2\,\mathrm{s}$ geschätzt (nach

Tabelle 7: Vergleich zwischen Theorie und Experiment für die Pendellänge $l = 0{,}45\,\mathrm{m}$.

Messung	Experiment	Theorie	prozentuale Abweichung
T_+	$(1{,}325 \pm 0{,}002)\,\mathrm{s}$	$(1{,}346 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}$	1.6%
ω_+	$(4{,}742 \pm 0{,}009)\,\mathrm{Hz}$	$(4{,}67 \pm 0{,}02)\,\mathrm{Hz}$	1.5%
T_-	$(1{,}13 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$	$(1{,}13 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$	0.0%
ω_-	$(5{,}58 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Hz}$	$(5{,}58 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Hz}$	0.0%
$T_{\mathrm{S,einfach}}$	$(6{,}4 \pm 0{,}1)\,\mathrm{s}$	$(6{,}9 \pm 0{,}4)\,\mathrm{s}$	7.2%
$T_{\mathrm{S,fünffach}}$	$(6{,}96 \pm 0{,}03)\,\mathrm{s}$	$(6{,}9 \pm 0{,}4)\,\mathrm{s}$	0.9%
$\omega_{\mathrm{S},1}$	$(0{,}84 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Hz}$	$(0{,}91 \pm 0{,}06)\,\mathrm{Hz}$	7.7%
$\omega_{\mathrm{S},2}$	$(0{,}903 \pm 0{,}004)\,\mathrm{Hz}$	$(0{,}91 \pm 0{,}06)\,\mathrm{Hz}$	0.7%

Tabelle 8: Vergleich zwischen Theorie und Experiment für die Pendellänge $0{,}72\,\mathrm{m}$.

Messung	Experiment	Theorie	prozentuale Abweichung
T_+	$(1{,}609 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}$	$(1{,}702 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}$	5.5%
ω_+	$(3{,}904 \pm 0{,}010)\,\mathrm{Hz}$	$(3{,}692 \pm 0{,}008)\,\mathrm{Hz}$	5.7%
T_-	$(1{,}410 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}$	$(1{,}492 \pm 0{,}008)\,\mathrm{s}$	5.5%
ω_-	$(4{,}455 \pm 0{,}018)\,\mathrm{Hz}$	$(4{,}212 \pm 0{,}022)\,\mathrm{Hz}$	5.8%
$T_{\mathrm{S,einfach}}$	$(11{,}82 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}$	$(12{,}1 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s}$	2.3%
$T_{\mathrm{S,fünffach}}$	$(12{,}32 \pm 0{,}05)\,\mathrm{s}$	$(12{,}1 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s}$	1.8%
$\omega_{\mathrm{S},1}$	$(0{,}551 \pm 0{,}020)\,\mathrm{Hz}$	$(0{,}521 \pm 0{,}020)\,\mathrm{Hz}$	5.8%
$\omega_{\mathrm{S},2}$	$(0{,}510 \pm 0{,}021)\,\mathrm{Hz}$	$(0{,}521 \pm 0{,}020)\,\mathrm{Hz}$	2.1%

[3]).
Beim Vergleich der $\omega_{S,1}$ berechnet nach Formel (10) und dem $\omega_{S,2}$ berechnet über die Schwingungsdauer fällt auf, dass die Schwingungsfrequenz berechnet über die Schwingungsdauer deutlich näher an den Theoriewerten liegt.
Der größere Fehler bei dem $\omega_{S,1}$ entsteht, da sich dieses über die Differenz der gleich -und gegensinnigen Schwingungsfrequenz bestimmt und sich kleine Fehler somit hier größer auswirken.

Die Abweichungen für die Pendellänge $l = 0{,}72\,\mathrm{m}$ entstehen durch die gleichen Unsicherheiten beim Bestimmen des Pendelstillstands und bei der manuellen Zeitmessung. Auch hier liegen die Differenzen zwischen Theorie und Experiment unter der Messauflösung, da wieder angenommen werden kann, dass die Stoppuhr mit bis zu 0,2 s Verzögerung (nach [3]) betätigt wurde.

Literatur

[1] Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB). *Gravity Information System of PTB.* URL: `http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php` (besucht am 20. 01. 2017).

[2] TU Dortmund. *Versuch 106: Gekoppelte Pendel.* 2016. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V106.pdf` (besucht am 31. 01. 2017).

[3] Dr. Sportwiss. Ralf Pfeifer. *Reaktionszeiten.* URL: `http://www.arsmartialis.com/index.html?name=http://www.arsmartialis.com/technik/reaktion/reaktion.html` (besucht am 31. 01. 2017).