

V 102

# **Drehschwingungen**

Julian Hochhaus  
julian.hochhaus@tu-dortmund.de

Niko Salewski  
niko.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.01.2017

Abgabe: 17.01.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Begriffe aus der Elastizitätstheorie . . . . .	3
2.1.1	Volumen- und Oberflächenkräfte . . . . .	3
2.1.2	Die Spannung . . . . .	3
2.1.3	Elastizitätskonstanten . . . . .	3
2.2	Bestimmung des Schubmoduls $G$ . . . . .	5
2.2.1	Die Torsion eines Zylinders . . . . .	6
2.2.2	Die dynamische Methode . . . . .	8
2.2.3	Bestimmung des Trägheitsmomentes . . . . .	8
2.3	Das magnetische Moment eines Permanentmagneten . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>11</b>
4.1	Magnetisches Moment eines Permanentmagneten . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Durchführung</b>	<b>12</b>
5.1	Bestimmung der Periodendauer zur Berechnung der elastischen Konstanten	12
5.2	Magnetisches Moment eines Permanentmagneten . . . . .	13
5.3	Messung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
6.1	Bestimmung des Schubmoduls $G$ . . . . .	13
6.1.1	Bestimmung des Trägheitsmoment . . . . .	13
6.1.2	Bestimmung des Drahtradius . . . . .	14
6.1.3	Bestimmung der Schwingungsdauer ohne äußeres Magnetfeld . . .	14
6.2	Berechnung der weiteren elastischen Materialkonstanten . . . . .	15
6.3	Bestimmung des magnetischen Moments $m$ des Helmholtzspulenpaars . .	15
6.4	Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>18</b>
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

# 1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch werden über die Untersuchung von Drehschwingungen die elastischen Konstanten eines Drahtes bestimmt.

Zudem wird ebenfalls über die Messung der Periodendauer der Drehschwingung das magnetische Moment eines Helmholtzspulenpaares sowie die horizontale Komponente des Erdmagnetfelds ermittelt.

## 2 Theorie

### 2.1 Begriffe aus der Elastizitätstheorie

#### 2.1.1 Volumen- und Oberflächenkräfte

Kräfte, die an Festkörpern angreifen, lassen sich in Volumenkräfte und Oberflächenkräfte unterteilen. Letztere werden in diesem Versuch genauer betrachtet. Volumenkräfte wirken auf jedes Volumenelement des Festkörpers und können Translationsbewegungen und Rotationsbewegungen hervorrufen. Im Gegensatz dazu können **Oberflächenkräfte** – Kräfte, die an Oberflächenelementen angreifen – Gestalts- und Volumenänderungen bewirken. Sie können neben der Oberfläche auch an jeder Querschnittsfläche des Körpers nachgewiesen werden.

#### 2.1.2 Die Spannung

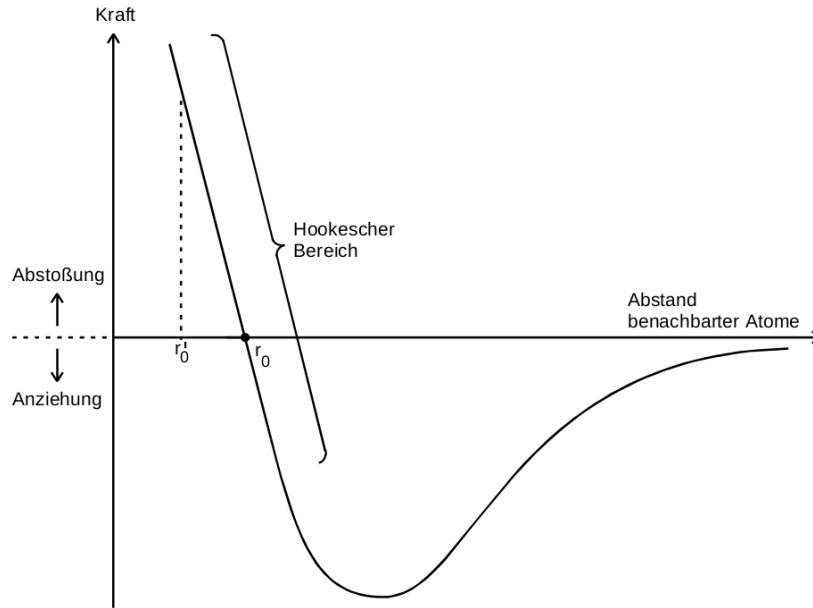
Es wird der Begriff der **Spannung** eingeführt, welche als Oberflächenkraft pro Fläche definiert ist. Des Weiteren unterscheidet man zwischen der **Normalspannung**  $\sigma$  (auch **Druck**  $P$ ) und der **Tangentialspannung**  $\tau$  (auch **Schubspannung**), welche dem orthogonalen bzw. dem tangentialen Anteil der Spannung entsprechen.

Wirkt eine Spannung auf einen Festkörper, treten Verformungen – in Form von Gestalts- und Volumenänderungen – auf. Diese Verformungen entsprechen auf molekularer Ebene einem veränderten Gleichgewichtszustand der Atom- bzw. Molekülstruktur, der durch die elektrostatischen Kräfte zwischen den Atomen bzw. Molekülen eintritt. Wenn die wirkende Spannung abgenommen wird und der Körper in seinen ursprünglichen Zustand – mit gleicher Form und Größe – zurückkehrt, spricht man von einer **elastischen Deformation**.

#### 2.1.3 Elastizitätskonstanten

Weiterhin ergibt sich ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Deformation – in Form einer relativen Längen- oder Volumenänderung  $\frac{\Delta L}{L}$  bzw.  $\frac{\Delta V}{V}$  – und der Spannung, wenn der Betrag der wirkenden Oberflächenkraft nicht zu groß ist, was in Abbildung 1 durch den Hookeschen Bereich illustriert ist. Liegt die Kraft in diesem Bereich, wird ein proportionaler Zusammenhang angenommen, der sich zu

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{oder} \quad P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (1)$$



**Abbildung 1:** Schematischer Verlauf der Kraft zwischen benachbarten Atomen ( $r_0$ =Gleichgewichtsabstand). [1]

ergibt.

Allgemein werden 36 Konstanten (jeweils 6 Konstanten zur Charakterisierung der Spannung und Deformation) in Form einer Matrix benötigt, um den proportionalen Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation zu beschreiben. Zusätzlich ist das Schema der Elastizitätskonstantenmatrix symmetrisch [3], sodass im allgemeinen Fall 21 Elastizitätskonstanten benötigt werden. Im sogenannten kubischen Kristallsystem verbleiben aufgrund weiterer Symmetrien 3 notwendige Elastizitätskonstanten und bei **isotropen Körpern** – Körper mit richtungsunabhängigen Elastizitätskonstanten – wird diese Anzahl auf nur 2 reduziert.

Diese 2 Konstanten werden als **Schubmodul**  $G$  (auch **Torsionsmodul**) und **Kompressionsmodul**  $Q$  bezeichnet. Letztere ist eine Kenngröße für die Volumenelastizität. Der Schubmodul charakterisiert die Gestaltselastizität.

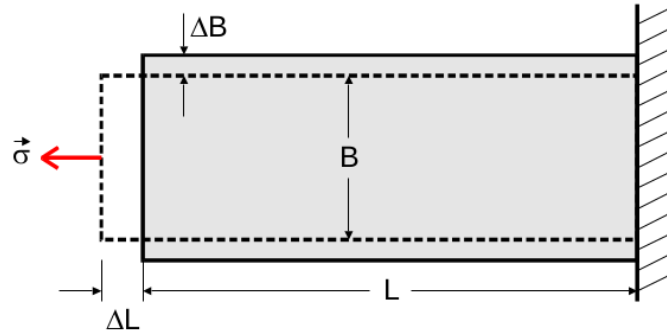
Weiterhin definiert man in der Praxis zwei weitere Konstanten: der **Elastizitätsmodul**  $E$  und die **Poissonsche Querkontraktionszahl**  $\mu$ .

Der Elastizitätsmodul wurde in Gleichung (1) definiert und ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Druck  $P$  und der relativen Volumenänderung  $\frac{\Delta V}{V}$ . Bewirkt eine Oberflächenspannung  $\vec{\sigma}$  an einem Festkörper eine Längenänderung, entspricht die Poissonsche Querkontraktionszahl  $\mu$  dem Proportionalitätsfaktor zwischen der Längenänderung parallel zur Spannungsrichtung  $\frac{\Delta L}{L}$  und der Längenänderung orthogonal zur Spannungsrichtung  $\frac{\Delta B}{B}$ . Die Poissonsche Querkontraktionszahl wird in Abbildung 2 durch

das Beispiel eines gedehnten Stabes erklärt und als

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L}$$

definiert.



**Abbildung 2:** Poissonsche Querkontraktionszahl  $\mu$  erklärt an einem gedehnten Stab.  
[1]

Da bei isotropen Körpern nur zwei Konstanten benötigt werden, müssen die zwei zusätzlichen Konstanten durch zwei Gleichungen miteinander verknüpft sein. Diese Zusammenhänge ergeben sich zu

$$E = 2G(\mu + 1), \quad (2)$$

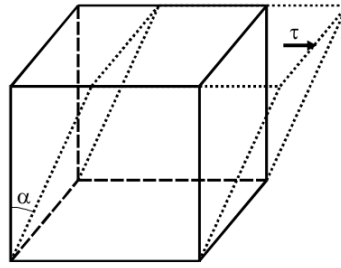
$$E = 3Q(1 - 2\mu). \quad (3)$$

## 2.2 Bestimmung des Schubmoduls $G$

Der Schubmodul  $G$  ist eine Kenngröße für die Gestaltelastizität eines Körpers und entspricht dem Proportionalitätsfaktor zwischen einer Tangentialspannung  $\tau$  und einem Scherungswinkel  $\alpha$ :

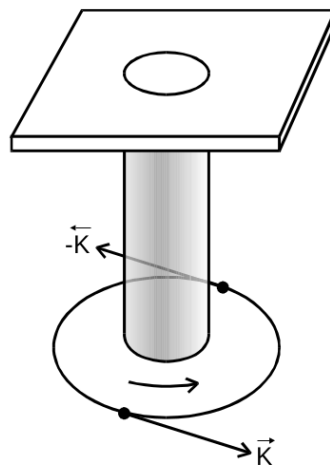
$$\tau = G\alpha. \quad (4)$$

Die dem Schubmodul  $G$  zugehörige Deformation wird also als **Scherung** bezeichnet. Diese Deformation ist durch eine an einem Körper angreifende Tangentialspannung bedingt, die den Körper – wie in Abbildung 3 illustriert – um einen Scherungswinkel  $\alpha$  neigt. Da der Scherungswinkel  $\alpha$  in Abbildung 3 allerdings nur schwierig zu messen ist, wird im Folgenden die Torsion eines Zylinders betrachtet.



**Abbildung 3:** Darstellung der durch die Schubspannung verursachte elastische Deformation. [1]

### 2.2.1 Die Torsion eines Zylinders

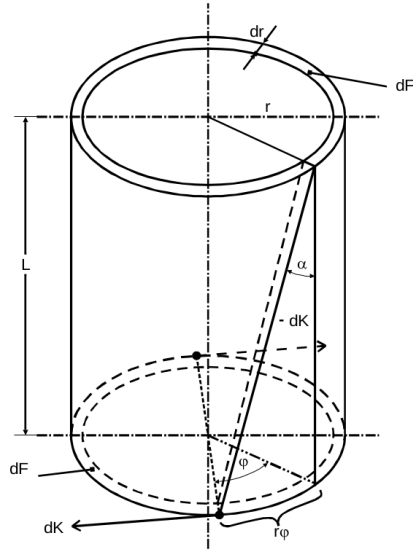


**Abbildung 4:** Torsion eines zylindrischen Stabes. [1]

Der Zylinder ist an einem Ende fest eingespannt und wird am anderen Ende durch zwei gegenüberliegende, in entgegengesetzte Richtung wirkende Kräfte gedreht (siehe Abbildung 4). Durch diese Kräfte wirkt ein Drehmoment  $M$  auf den Zylinder und erzeugt eine Drehung des losen Endes des Zylinders gegenüber dem fest eingespannten Ende des Zylinders. Diese Drehung wird durch den Torsionswinkel  $\varphi$  festgelegt. Da das Drehmoment über den Durchmesser des Zylinders variiert, wird der Zylinder in Hohlzylinder mit dem Radius  $r$  und Dicke  $dr$  zerlegt, von denen sich die einzelnen Drehmomente über den gesamten Zylinderradius integrieren lassen, sodass man das Gesamtdrehmoment  $M$  erhält.

Des Weiteren legt der Torsionswinkel  $\varphi$  den Scherungswinkel  $\alpha$  zwischen den Mantelschichten fest, wie in Abbildung 5 dargestellt. Es ergibt sich der Zusammenhang zwischen Torsionswinkel  $\varphi$  und Scherungswinkel  $\alpha$  zu

$$\alpha = \frac{r\varphi}{L}, \quad (5)$$



**Abbildung 5:** Darstellung des Zusammenhangs zwischen Drehmoment  $M$  und Verdrillungswinkel  $\phi$ . [1]

mit der Länge  $L$  und dem Radius  $r$  der Hohlzylinder.

Mit Gleichung (4) soll nun ein Zusammenhang zwischen dem Drehmoment  $M$  und dem Torsionswinkel  $\varphi$  gefunden werden. Das infinitesimale Drehmoment  $dM$ , welches auf einen Punkt mit der Entfernung  $r$  zur Zylinderachse wirkt, ergibt sich durch

$$dM = r dK,$$

wobei  $dK$  der Tangentialkraft entspricht. Weiterhin ist die Tangentialspannung  $\tau$  aus Gleichung (1) als Tangentialkraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{dK}{dF}$$

definiert. Mit diesen beiden Definitionen und Gleichungen (4) und (5) ergibt sich das Drehmoment eines Hohlzylinders  $dM$  zu

$$dM = 2\pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr. \quad (6)$$

Integration über den Zylinderradius  $R$  liefert das Drehmoment

$$M = \int_0^R dM = \frac{\pi G R^4}{2} \varphi. \quad (7)$$

Die Gleichung (7) entspricht also einem abgewandelten Hookeschen Gesetz mit dem Proportionalitätsfaktor

$$D := \frac{\pi G R^4}{2L}, \quad (8)$$

der als Richtgröße des Zylinders bezeichnet wird.

Gleichung (7) ermöglicht es theoretisch – nach der Messung der unbekannten Größen – den Schubmodul  $G$  zu bestimmen. Diese Methode wird allerdings in der Praxis nicht verwendet, da durch die **elastischen Nachwirkung** eine mögliche Fehlerquelle entstehen kann. Die elastische Nachwirkung beschreibt das Phänomen, dass einige Stoffe nach dem Aufgeben der Spannung nicht sofort wieder in den Ausgangszustand zurückkehren.

Daher wird in der Praxis die sogenannte dynamische Methode verwendet, bei der die Spannung einer periodischen Funktion der Zeit entspricht.

### 2.2.2 Die dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird das Beispiel aus Abschnitt 2.2.1 mit einem Körper mit Trägheitsmoment  $\Theta$  am freien Ende des Zylinders erweitert. Das Drehmoment  $M_T$  des Körpers ergibt sich zu

$$M_T = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (9)$$

Wird nun der Zylinder ausgelenkt, wirken zwei entgegengesetzte Drehmomente: Das Drehmoment durch die Torsion des Zylinders und das Drehmoment bedingt durch die Trägheit des Körpers.

Dadurch entsteht eine Drehschwingung mit der Differentialgleichung

$$D\varphi + \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (10)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich durch

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (11)$$

wobei

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}} \quad (12)$$

der Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung – unter Vernachlässigung von Reibungskräften – entspricht.

### 2.2.3 Bestimmung des Trägheitsmomentes

Das Trägheitsmoment  $\Theta$  ist als

$$\Theta = \int_V \vec{r}_\perp^2 \rho(\vec{r}) dV$$

definiert, mit dem Vektor  $\vec{r}_\perp$ , der den Abstand eines Massenelementes zur Rotationsachse festlegt.

Im Versuch wird eine Kugel mit homogener Masseverteilung verwendet. Das Trägheitsmoment  $\Theta_{\text{Kugel}}$  ergibt sich zu

$$\Theta_{\text{Kugel}} = \frac{8}{15}\pi\rho R_k^5,$$



mit dem Kugelradius  $R_k$ . Mit der Kugelmasse

$$m_k = \frac{4}{3}\pi R_k^3 \rho$$

ergibt sich das Trägheitsmoment einer Kugel schließlich zu

$$\Theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m_k R_k^2. \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (8), (12) und (13) ergibt sich schließlich der Schubmodul  $G$  zu

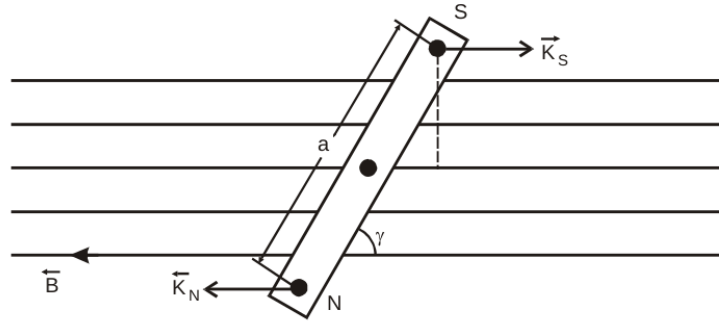
$$G = \frac{16}{5} \pi \frac{m_k R_k^2 L}{T^2 R^4}. \quad (14)$$

### 2.3 Das magnetische Moment eines Permanentmagneten

Das magnetische Moment  $\vec{m}$  ist als

$$\vec{m} := p \vec{a} \quad (15)$$

definiert, wobei  $p$  der Polstärke und  $\vec{a}$  einem Vektor vom Nordpol zum Südpol mit dem Betrag vom Abstand der beiden Pole entspricht.



**Abbildung 6:** Angreifende Kräfte an einem stabförmigen Permanentmagneten in einem äußeren Magnetfeld. [1]

Befindet sich dieser Magnet in einem homogenen, äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$ , wirken zwei Kräfte an dem Magneten, die am Nordpol und Südpol angreifen (siehe Abbildung 6). Da diese Kräfte den gleichen Betrag haben, führt der Magnet keine Translationsbewegung aus sondern rotiert durch das Drehmoment  $M_{\text{Mag}}$  in Feldrichtung. Das Drehmoment  $M_{\text{Mag}}$  ergibt sich zu

$$M_{\text{Mag}} = p \vec{a} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (16)$$

Das magnetische Moment  $\vec{m}$  kann mit der dynamischen Methode aus Abschnitt 2.2.2 bestimmt werden, indem zusätzlich der Permanentmagnet in die Kugel eingebaut und ein homogenes Magnetfeld erzeugt wird. Die abgeänderte Anordnung ergibt wieder periodische Schwingungen, allerdings mit einer abweichenden Periodendauer  $T_m \neq T$ .

Richtet man den Magneten parallel zur Feldrichtung aus, entspricht  $\gamma$  aus Abbildung 6 dem Torsionswinkel  $\varphi$  und es ergibt sich die Differentialgleichung

$$mB \sin(\varphi) + D\varphi + \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (17)$$

Diese nicht-lineare Differentialgleichung lässt sich mit einer Kleine-Winkel-Näherung

$$\sin(\varphi) \approx \varphi + o(\varphi^2)$$

schreiben als

$$(mB + D)\varphi + \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (18)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung hat die Form

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_m} t\right), \quad (19)$$

mit der neuen Periodendauer

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mB + D}}. \quad (20)$$

### 3 Fehlerrechnung

Alle berechneten Mittelwerte werden mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (21)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwerts bestimmt sich mit:

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (22)$$

Wenn fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel weiter verwendet werden, so wird der sich fortpflanzende Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (23)$$

Haben Messgeräte baubedingte Unsicherheiten, so errechnen sich die Fehler des Mittelwerts nach der Regel zur Fehlerfortpflanzung von Gerätefehlern wie folgt:

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (24)$$

Die Regression von Polynomen und Ausgleichsgrade, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler werden mit IPython 5.1.0 mittels Scipy 0.18.1 durchgeführt. Parameter eventueller Ausgleichsgeraden

$$y = a \cdot x + b. \quad (25)$$

werden bestimmt über

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \quad (26)$$

$$b = \frac{\overline{x^2\overline{y}} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \quad (27)$$

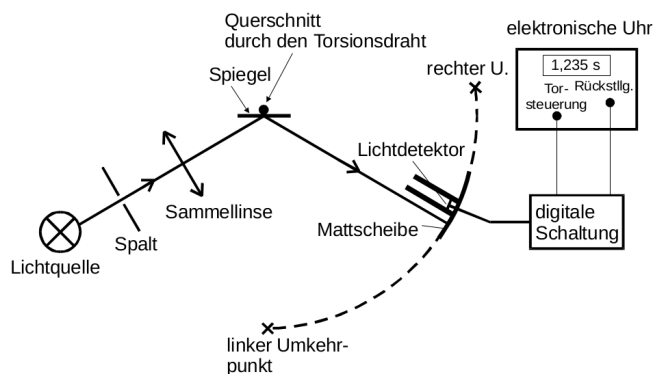
## 4 Versuchsaufbau

In Abbildung 8a ist die prinzipielle Versuchsanordnung dargestellt. Es handelt sich hierbei um ein Pendel, welches in der Lage ist, Drehschwingungen auszuführen.

Der Pendeldraht ist hierbei aus einem zunächst unbekannten Metall, dessen elastische Konstanten über die Periodendauer  $T$  der Drehschwingung bestimmt werden.

In der Kugelmass am Pendel befindet sich zudem ein Magnet, dessen Ausrichtung anhand einer Schraube gekennzeichnet ist. Dieser wird, wie in der Durchführung beschrieben, je nach Messaufgabe, verschieden ausgerichtet.

Zur genauen Messung der Periodendauer  $T$  ist ein kleiner Spiegel knapp oberhalb der Pendelmasse am Draht angebracht.



**Abbildung 7:** Schematische Aufsicht der Signalweitergabe an den Zeitmesser. [1]

Über diesen wird, wie in Abbildung 7, ein gebündelter Lichtstrahl bei bestimmten Auslenkungen des Drehschwingers so reflektiert, dass er auf eine Photodiode trifft.

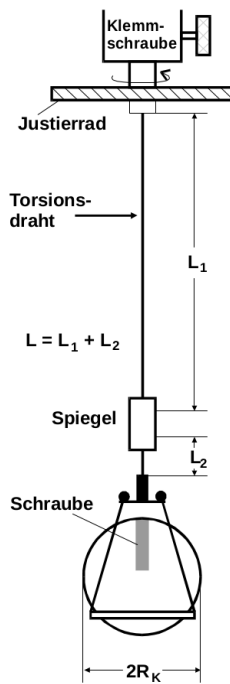
Die Photodiode sendet, wenn der Lichtstrahl sie überstreicht, ein Signal über die digitale Schaltung an die elektronische Stoppuhr.

Die digitale Schaltung ist so realisiert, dass beim ersten Überstreichen des Lichtstrahls über die Photodiode die Stoppuhr gestartet wird.

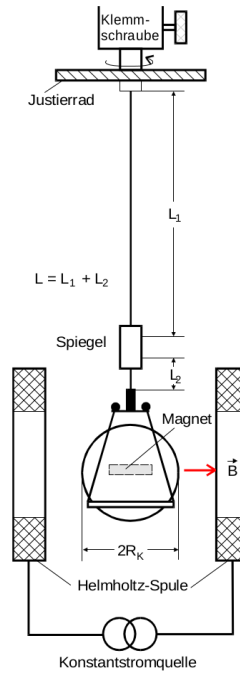
Das zweite Signal wird ignoriert.

Dies wird realisiert über die Speicherfunktion eines RS-Flip-Flop und darüber, dass die Stoppuhr die fallende Flanke triggert. Beim dritten Signal wird die Stoppuhr gestoppt (es wurde somit eine volle Periode gemessen) und beim vierten Signal wird die Stoppuhr zurückgesetzt.

Dies wird erreicht über die Speicherfunktion eines zweiten RS-Flip-Flops sowie eines AND-Gatters. Mit dem fünften Signal ist die Schaltung im gleichen Zustand wie beim ersten Signal, sodass die nächste Periode direkt anschließend gemessen werden kann.



(a) Versuchsaufbau zur Untersuchung der Schwingungsdauer des Drehschwingers. [1]



(b) Versuchsaufbau zur Untersuchung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten. [1]

## 4.1 Magnetisches Moment eines Permanentmagneten

Zur Bestimmung des magnetischen Moments wird der Versuchsaufbau um ein Helmholtzspulenpaar, wie in Abbildung 8b gezeigt, erweitert.

# 5 Durchführung

## 5.1 Bestimmung der Periodendauer zur Berechnung der elastischen Konstanten

Zur Messung der Periodendauer zur Berechnung des Schubmoduls  $G$  wird der Magnet in der Kugelmass vertikal ausgerichtet. Dadurch steht der Magnet senkrecht auf der horizontalen Komponente des Erdmagnetfelds und wird durch diese somit nicht beeinflusst. Über eine Vierteldrehung am Justierrad (vgl. 8a) wird das System zum Schwingen angeregt.

Falls das System deutliche Pendelbewegungen ausführt, können diese über ein Bremskissen unter der Kugelmass gedämpft werden, sodass das System möglichst nur noch

Drehschwingungen ausführt. Die Schwingungsdauer  $T$  wird zehn mal gemessen.

## 5.2 Magnetisches Moment eines Permanentmagneten

Zur Bestimmung des magnetischen Moments des Helmholtz-Spulenpaars wird der Magnet in der Kugelmasse parallel zu den Feldlinien des Spulenpaars ausgerichtet.

Der Drehschwinger wird erneut über das Justierrad um einen kleinen Auslenkungswinkel ausgelenkt (vgl. Formel (18)). Diese gilt nur für kleine Auslenkungswinkel). Die Stromstärke für das Helmholtzspulenpaar wird von  $A = 0.1 \text{ A}$  in  $0.1 \text{ A}$ -Schritten bis  $1 \text{ A}$  hochgeregelt. Für jede Stromstärke wird die Periodendauer  $T$  fünfmal gemessen.

## 5.3 Messung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds

Zur Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds wird der Magnet in Nord-Süd-Richtung, also parallel zu den Feldlinien des Erdmagnetfelds, ausgerichtet.

Das System wird in Drehschwingungen versetzt und die Periodendauer  $T$  wird anschließend zehn Mal gemessen.

# 6 Auswertung

Es wurden Bauteile mit folgenden Größen verwendet:

$$\begin{aligned} M_{\text{Kugel}} &= (512.2 \pm 0.2) \text{ g}, \\ D_{\text{Kugel}} = 2R_{\text{Kugel}} &= (50.760 \pm 0.004) \text{ mm}, \\ \Theta_{\text{Halterung}} &= 22.5 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2, \\ L_{\text{Draht}} &= 585 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{28}$$

## 6.1 Bestimmung des Schubmoduls $G$

Zur Bestimmung des Schubmoduls  $G$  nach Gleichung (14) ist zu beachten, dass das gesamte Trägheitsmoment  $\Theta_{\text{Gesamt}}$  des Drehschwingers sich zusammensetzt aus  $\Theta_{\text{Halterung}}$  und  $\Theta_{\text{Kugel}}$ . Aus Gleichung (12) folgt

$$D = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \Theta_{\text{Gesamt}}.$$

Mit Gleichung (8) ergibt sich für  $G$  der Ausdruck

$$G = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \Theta_{\text{Gesamt}} \cdot \frac{2L}{\pi \cdot R^4}.$$

### 6.1.1 Bestimmung des Trägheitsmoment

Zur Bestimmung des Schubmoduls  $G$  wird zunächst  $\Theta_{\text{Kugel}}$  nach Formel (13) bestimmt. Mit den Kenngrößen des Drehschwingers (vgl. 28) und dem Fehler nach Gaußscher

Fehlerfortpflanzung mit Formel (23) ergibt sich

$$\Theta_{\text{Kugel}} = (1.3197 \pm 0.0006) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

Damit ergibt sich  $\Theta_{\text{Gesamt}}$  zu:

$$\Theta_{\text{Gesamt}} = \Theta_{\text{Kugel}} + \Theta_{\text{Halterung}} = (1.3422 \pm 0.0006) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

### 6.1.2 Bestimmung des Drahradius

**Tabelle 1:** Durchmesser und Radius an 6 verschiedenen Messpunkten des Drahtes.

Messpunkt	$D_{\text{Draht}} / \mu\text{m}$	$R_{\text{Draht}} / \mu\text{m}$
1	180	90.0
2	177	88.5
3	171	85.5
4	170	85.0
5	168	84.0
6	166	83.0

Zudem wird zur Bestimmung des Schubmoduls  $G$  der Radius des Drahtes benötigt. In Tabelle 1 sind die gemessenen Durchmesser des Drahtes an sechs verschiedenen Stellen sowie der Radius  $R_{\text{Draht}} = 0.5 \cdot D_{\text{Draht}}$  eingetragen. Nach Formel (21) ergibt sich der Mittelwert sowie nach Formel (22) der Fehler des Mittelwerts des Drahradius zu:

$$R_{\text{Draht}} = (86.0 \pm 1.1) \mu\text{m}.$$

### 6.1.3 Bestimmung der Schwingungsdauer ohne äußeres Magnetfeld

**Tabelle 2:** Schwingungsdauer  $T$  ohne äußeres Magnetfeld

Messpunkt	Schwingungsdauer $T/\text{s}$
1	20.032
2	20.039
3	20.044
4	20.033
5	20.032
6	20.033
7	20.034
8	20.037
9	20.03
10	20.048

In Tabelle 2 sind die Schwingungsdauern  $T$  für 10 Perioden für den Drehschwinger ohne äußeres Magnetfeld dargestellt. Der Mittelwert der Schwingungsdauer gibt sich nach Formel (21) samt dem Fehler des Mittelwerts nach Formel (22) zu:

$$T = (20.0362 \pm 0.0018) \text{ s.}$$

Somit ergibt sich der Schubmodul  $G$  mit  $\Theta_{\text{Gesamt}}$ ,  $R_{\text{Draht}}$  und  $T$  zu:

$$G = (90 \pm 5) \text{ GPa.}$$

## 6.2 Berechnung der weiteren elastischen Materialkonstanten

Da die Messung zur Bestimmung des Elastizitätsmodul  $E$  entfiel, wird dieses angegeben mit:

$$E = (210.0 \pm 0.5) \text{ GPa.}$$

Nach Formel (2) ergeben sich nun der Kompressionsmodul  $Q$  und die Querkontraktionszahl  $\mu$  zu:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2G} - 1 = 0.168 \pm 0.003, \\ Q &= \frac{E}{3(1-2\mu)} = (105.6 \pm 1.1) \text{ GPa.} \end{aligned}$$

Die Fehler wurden hierfür mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung nach Gleichung (23) bestimmt.

## 6.3 Bestimmung des magnetischen Moments $m$ des Helmholtzspulenpaars

Durch Umformen von Gleichung (20) ergibt sich

$$B = \frac{1}{m} \cdot \left( \left( \frac{2\pi}{T_m} \right)^2 \cdot \Theta_{\text{Gesamt}} - D \right). \quad (29)$$

beziehungsweise

$$B = a \cdot \frac{1}{T_m^2} + b \text{ nach Gleichung (25).}$$

Es lässt sich somit ein linearer Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte  $B$  und  $\left(\frac{1}{T_m}\right)^2$ , also dem reziproken Quadrat der Schwingungsdauer mit den Regressionsparametern  $a = \frac{1}{m} \cdot 4\pi^2 \cdot \Theta_{\text{Gesamt}}$  sowie  $b = -\frac{D}{m}$  nach Gleichung (25) feststellen. Aus diesem linearen Zusammenhang wird nun das magnetische Moment  $m$  bestimmt. Das B-Feld eines Helmholtzspulenpaars ergibt sich nach [5] zu

$$B_H = \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot \mu_0 \frac{I \cdot N}{R}. \quad (30)$$

In Tabelle 3 befinden sich die fünf Periodendauern  $T_i$  zu jeder Stromstärke der Messung mit eingeschalteten Helmholtz-Spulen. Zudem wurde für jede Stromstärke die mittlere

**Tabelle 3:** Messdaten zur Bestimmung des magnetischen Moments

$I / \text{A}$	$T_1 / \text{s}$	$T_2 / \text{s}$	$T_3 / \text{s}$	$T_4 / \text{s}$	$T_5 / \text{s}$	$T_{\text{mittel}} / \text{s}$	$B / \text{mT}$
0.1	14.154	14.137	14.107	14.085	14.052	$(14.107 \pm 0.018)$	0.4496
0.2	12.143	12.106	12.080	12.045	12.013	$(12.077 \pm 0.023)$	0.8992
0.3	10.215	10.186	10.156	10.131	10.105	$(10.159 \pm 0.019)$	1.3488
0.4	8.893	8.882	8.856	8.845	8.821	$(8.859 \pm 0.013)$	1.7984
0.5	8.022	7.997	7.998	7.972	7.972	$(7.992 \pm 0.009)$	2.2480
0.6	7.359	7.344	7.327	7.333	7.341	$(7.341 \pm 0.005)$	2.6980
0.7	6.839	6.840	6.838	6.834	6.829	$(6.836 \pm 0.002)$	3.1471
0.8	6.389	6.406	6.396	6.403	6.409	$(6.401 \pm 0.004)$	3.5967
0.9	6.159	6.067	6.030	6.009	6.030	$(6.059 \pm 0.027)$	4.0463
1.0	5.861	5.820	5.698	5.619	5.656	$(5.730 \pm 0.050)$	4.4959

Schwingungsdauer sowie der zugehörige Fehler nach Formel (21) bzw. (22) bestimmt. Außerdem wird jeweils die magnetische Flussdichte  $B$  angegeben. Der zugehörige Fehler wurden über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung nach Formel (23) bestimmt.

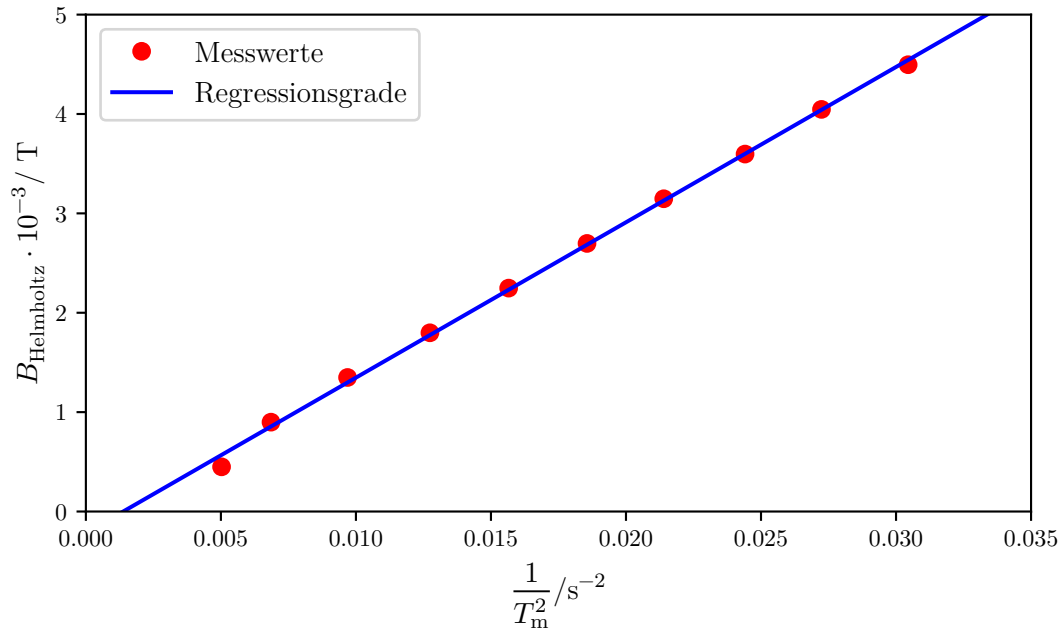
Eine lineare Regression mit python/matplotlib [4] für Gleichung (29) nach Formel (25) liefert:

$$m = (0.0339 \pm 0.0004) \text{ A m}^2,$$

$$D = (7.3 \pm 1.3) \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}.$$

Die zugehörigen Messdaten samt der Regressionsgeraden findet sich in Abbildung 9. Das magnetische Moment ergibt sich also zu  $m = (0.0339 \pm 0.0004) \text{ A m}^2$ .





**Abbildung 9:** Plot von  $B$  gegen  $\frac{1}{T_m^2}$  samt Regressionsgraden berechnet nach Formel (25).

#### 6.4 Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes

Die Messwerte der Periodendauer  $T$  der Drehschwingung zur Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes sind in Tabelle 4 aufgetragen. Damit ergibt sich die Periodendauer  $T$  als Mittelwert (bestimmt mit Formel (21) dieser Messwerte mit zugehörigem Fehler (bestimmt mit Formel (22)) zu

$$T = (19,942 \pm 0,003) \text{ s.}$$

Die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes ergibt sich durch Formel (20) und der Richtgröße eines Zylinders  $D$  (Formel (8)) zu

$$B = 4\pi^2 \frac{\Theta_{\text{Gesamt}}}{mT^2} - \frac{\pi GR^4}{2Lm}. \quad (31)$$

Damit erhält man mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung (Formel (23)) die Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes

$$B = (3 \pm 29) \mu\text{T}.$$

**Tabelle 4:** Messwerte der Periodendauer  $T$  zur Bestimmung der Horizontalkomponente des Magnetfeldes.

Nummer	$T/s$
1	19.957
2	19.948
3	19.949
4	19.940
5	19.944
6	19.944
7	19.936
8	19.933
9	19.937
10	19.930

## 7 Diskussion

Über den bereits angegebenen Elastizitätsmodul  $E$  wurde das Material des Drahtes bestimmt. Es handelt sich hierbei wahrscheinlich um Stahl. Dessen Elastizitätsmodul beträgt nach [6]  $E = 210 \text{ GPa}$ . Der Schubmodul von Stahl beträgt nach [6]  $G = 81 \text{ GPa}$ . Unser experimentell bestimmter Schubmodul beträgt  $G_{\text{Experiment}} = (90 \pm 5) \text{ GPa}$ . Somit weicht das experimentell bestimmte Ergebnis um etwa 11% vom Theoriewert ab.

Die Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds (in Dortmund) hat nach [2] den Wert  $B_{\text{Literatur}} = 19.3 \mu\text{T}$ . Es liegt also eine Abweichung von circa 543% vom experimentell bestimmten Wert zum Literaturwert vor. Da der Literaturwert im berechneten Fehlerintervall ( $B_{\text{Experiment}} = (3 \pm 29) \mu\text{T}$ ) liegt, ist die große Abweichung auf die Messungenauigkeiten der fünf fehlerbehafteten zu bestimmenden Größen zurückzuführen.

Weiterhin wurde bei der Messung bereits festgestellt, dass die Messapparatur sehr empfindlich auf Luftzug reagiert. Es reichte bereits, wenn jemand sich in der Nähe der Apparatur bewegte (zum Beispiel hinter dem Experiment herging), um deutliche Änderungen in der Schwingungsdauer festzustellen.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 102: Drehschwingungen*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf> (besucht am 12.01.2017).
- [2] Helmholtz-Zentrum Potsdam Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ. *IGRF- Deklinationsrechner 12. Generation für die Jahre 1900 - 2020*. URL: <http://www.gfz-potsdam.de/deklinationsrechner/> (besucht am 16.01.2017).
- [3] F. Hund. *Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften*. Berlin Heidelberg, Deutschland: Springer, 1939.

- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [5] Ludwig-Maximilians-Universität München. *Magnetfeldes eines Helmholtzspulenpaares*. URL: <http://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/elektronenbahnen/b-feld/B-Feld/Helmholtzspulenpaar.php> (besucht am 16.01.2017).
- [6] Herbert Wittel u. a. *Roloff/Matek Maschinenelemente -Normung, Berechnung, Gestaltung-*. 20. Aufl. Wiesbaden, Deutschland: Vieweg+Teubner, Springer, 2011.