

Durchführung: 20.12.2016

1. Abgabe: 10.01.2017

2. Abgabe: 24.01.2017

PRAKTIKUMSPROTOKOLL V353

DAS RELAXATIONSVERHALTEN EINES RC-KREISES

Anneke Reinold¹,
Vanessa Sulaiman²

¹anneke.reinold@tu-dortmund.de

²vanessa.sulaiman@tu-dortmund.de

1 Einleitung

Mithilfe dieses Versuchs wird das Relaxationsverhalten beim Entladevorgang eines Kondensators in einem RC-Tiefpass auf sein Frequenzverhalten, auch bei hohen Frequenzen, und die Phasenverschiebung zwischen der Kondensator- und der Generatorspannung hin untersucht. Weiterhin wird die Eigenschaft, nach welcher der Tiefpass als Integrator verwendet werden kann, betrachtet.

2 Theorie

Der Vorgang der Relaxation eines Systems ist dadurch beschrieben, dass es nach Verlassen seines Ausgangszustands wieder nicht-oszillatorisch in denselben zurückkehrt.

Als hier im Versuch näher betrachtetes Beispiel für eine Relaxation wird der Auf- und Entladevorgang eines Kondensators in einem RC-Glied, wie exemplarisch in Abbildung 1 zu sehen, gewählt.

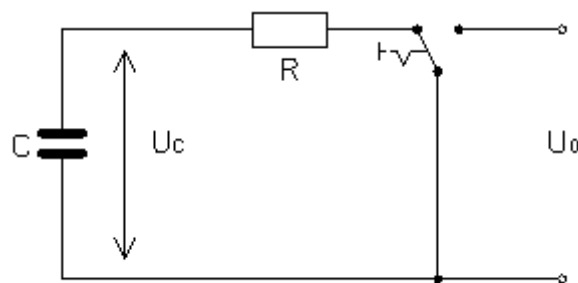


Abbildung 1: Schaltung eines RC-Glieds.

Für den Aufladevorgang folgt aus den Kirchhoffschen Gesetzen und aus der Betrachtung der beiden Randbedingungen

$$Q(0) = 0 \qquad Q(\infty) = CU_0, \qquad (1)$$

dass sich für diesen Fall eine Beziehung der Form

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \qquad (2)$$

ergibt.

Hier und im Folgenden ist C die Kapazität des Kondensators, R der Wert des Widerstands und $Q(0)$ die Ladung zum Zeitpunkt $t=0$.

Der zeitliche Verlauf der Entladung des Kondensators kann durch

$$Q(t) = Q(0) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \qquad (3)$$

beschrieben werden.

Die Zeitkonstante RC gibt hierbei an wie schnell das System in den Endzustand $Q(\infty)$

relaxiert.

Des Weiteren lassen sich Analogien zu mechanischen Systemen finden. Wird ein solches mit einer Kraft mit seiner Frequenz angeregt, so steht es in direktem Bezug zu einem angeregten RC-Kreis. Somit lässt sich der RC-Kreis als globales Beispiel betrachten, dessen Verhalten auf andere Bereiche, wie der Mechanik, übertragen werden können. So können zum Beispiel Parallelen in den Schwingungsgleichungen selber und im Verhalten bei einem Widerstand gefunden werden.

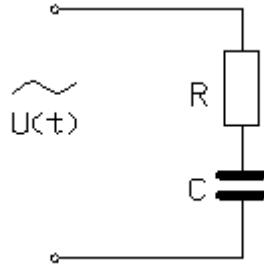


Abbildung 2: Schaltung eines angeregten RC-Glieds.

Unter Betrachtung eines RC-Kreises, der mit einer Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

angeregt wird, kann bemerkt werden, dass eine Phasenverschiebung zwischen der Eingangsspannung und der Spannung am Kondensator bei zunehmender Frequenz auftritt. Ist die Frequenz ω hinreichend gering, also $\omega \ll \frac{1}{RC}$, so wird die Kondensatorspannung $U_C(t)$ ungefähr gleich der Eingangsspannung $U(t)$ sein.

Durch Erhöhen der Frequenz kann eine Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen erzwungen werden; das Auf- und Entladen des Kondensators bleibt über die Zeit gesehen hinter der Generatorspannung zurück.

Als Formel ergibt sich

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (4)$$

für die Phasenverschiebung ϕ in Abhängigkeit von der Frequenz ω .

Für niedrigere Frequenzen nähert sich die Phasenverschiebung dem Wert 0 an.

Für hohe hingegen tritt eine asymptotische Näherung an $\frac{\pi}{2}$ auf.

Auch kann mithilfe von

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (5)$$

festgestellt werden, dass die Amplitude A der Kondensatorspannung bei hohen Frequenzen abnimmt.

Es gilt, dass aus $\omega \rightarrow 0$ folgt, dass $A(\omega)$ gegen U_0 geht und umgekehrt für $\omega \rightarrow \infty$ die

Amplitude gegen 0 verläuft.

Dieses Verhalten solcher Tiefpässe ist eben dadurch charakterisiert, dass Frequenzen mit $\omega \gg \frac{1}{RC}$ immer weiter gesperrt und $\omega \ll \frac{1}{RC}$ durchgelassen werden.

Es lässt sich außerdem zeigen, dass ein solcher RC-Tiefpass unter der Voraussetzung dass $\omega \gg \frac{1}{RC}$, also die Frequenz sehr groß ist, die zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ integriert.

Es gilt:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (6)$$

3 Aufbau

Das generelle Schaltungsprinzip ist in Abbildung 3 zu sehen.

Die Tiefpassschaltung lässt sich mit einem Generator antreiben, wobei hier, was für die Durchführung wichtig ist, zwischen Sinus- und Rechteckspannung gewechselt werden kann.

Parallel dazu wird ein Frequenzmesser geschaltet und an der Ausgangsspannung ein Zweikanaloszilloskop angeschlossen.

Außerdem kann an der Ausgangsspannung durch Umstecken auch Spannung mit einem Voltmeter gemessen werden.

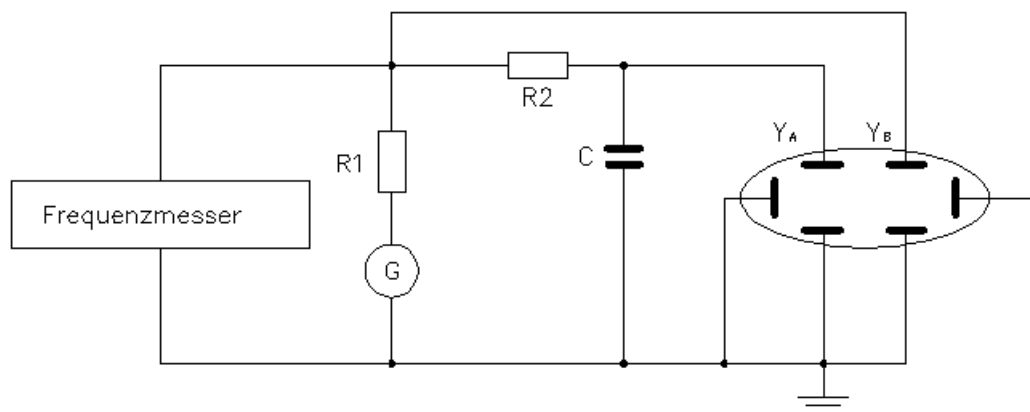


Abbildung 3: Prinzipschaltung für die unterschiedlichen Messungen.

4 Durchführung

Zuerst wird die Zeitkonstante des RC-Glieds bestimmt. Dazu wird mit dem Generator eine Rechteckspannung angelegt und am Ende die Ausgangsspannung mit einem Kanal des Oszilloskops in Abhängigkeit der Zeit dargestellt.

Explizit interessiert der Auf- und Entladevorgang des Kondensators; der Kondensator lädt sich auf, solange zu sehen ist, dass der Graph am Oszilloskop auf die Spannungsamplitude

steigt und er entlädt sich, wenn der Graph diesen Maximalwert verlässt und auf 0 zurück sinkt.

Für eine geeignete Darstellung zur Auswertung wird die Frequenz und das Oszilloskop eingestellt, sodass sich die Spannung $U_C(t)$ um einen Faktor von 5 bis 10 ändert.

Das erhaltene Bild wird mit dem Oszilloskop gespeichert.

Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Spannungsamplitude am Kondensator von der Zeit bestimmt, wenn der Generator mit einer Sinusspannung eine periodische Auslenkung vorgibt.

Am Ausgang wird lediglich wieder die Spannung $U_C(t)$ gemessen.

Untersucht werden mehrere Messungen in einem Frequenzbereich von 10 Hz bis 30 kHz hinweg.

Des Weiteren wird die Phasenverschiebung zwischen der Generator- und der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt.

Hierzu verwendet man unter anderem auch den zweiten Kanal des Oszilloskops, der an der Generatorspannung $U_G(t)$ angelegt wird.

Ergibt sich eine Phasenverschiebung ϕ von $\phi > 0$, so entsteht ein Graphenverlauf wie in Abbildung 4 zu sehen.

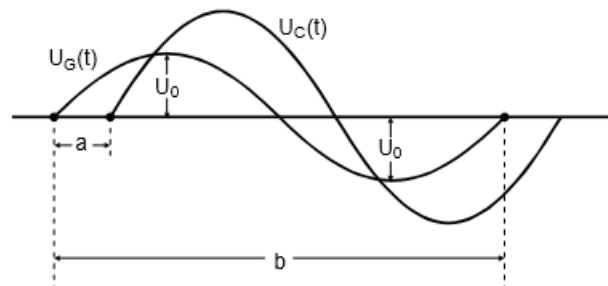


Abbildung 4: Darstellung der beiden Spannungen zur Bestimmung der Phasenverschiebung[1].

Gemessen wird der zeitliche Abstand a zwischen den beiden Nulldurchgängen. Es folgt der Vergleich mit der Schwingungsdauer b .

Berechnet werden kann die Phasenverschiebung ϕ durch

$$\phi = \frac{a}{b} 2\pi. \quad (7)$$

Die Eigenschaft des Integrierens lässt sich zeigen, indem vom Generator unterschiedliche Spannungsimpulse ausgehen und sich die Spannungen am Generator $U_G(t)$ und am Kondensator $U_C(t)$ auftragen lassen. Untersucht werden die Rechtecks-, die Sinus- und die Dreiecksspannung bei hinreichend groß eingestellter Frequenz. Gemessen wurde bei einer Frequenz von 20,67 kHz

5 Auswertung

Alle nachfolgenden Plots und Regressionen wurden mithilfe von python erstellt und berechnet.

5.1 Entladevorgang

Zuerst wird der Entladevorgang des Kondensators betrachtet. Das Oszilloskop zeigt Abbildung 5. Aus diesem Graphen werden einige Werte abgelesen und in Tabelle 1 dargestellt. Das Nullniveau befindet sich bei

$$U_0 = 17,6 \text{ V}.$$

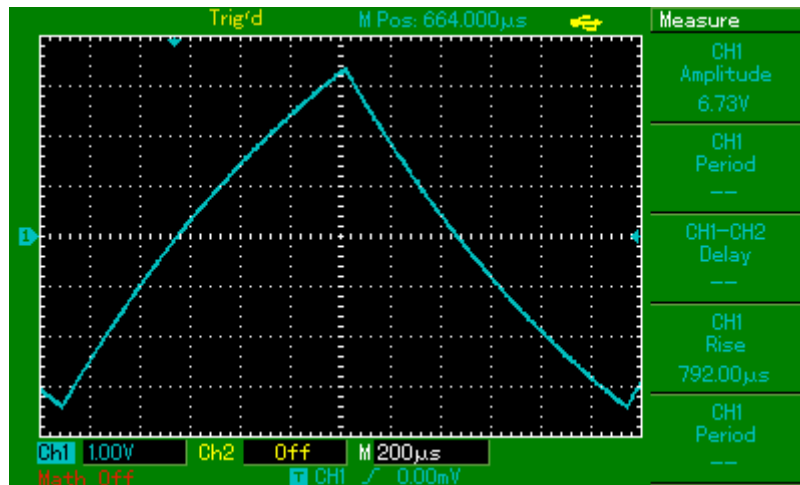


Abbildung 5: Lade- und Entladevorgang des Kondensators.

Tabelle 1: Entladevorgang des Kondensators.

t in ms	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
U_C in V	6,0	5,2	4,5	3,8	3,1	2,6	2,0	1,5	1,0	0,6

Diese Werte werden in Abbildung 6 zusammen mit der entsprechenden linearen Regression halblogarithmisch aufgetragen.

Die Regression berechnet sich nach

$$f(x) = ax$$

mit $f(x) = \log(\frac{U_C}{U_0})$ und $a = -\frac{1}{RC}$ und es ergibt sich der Wert

$$a = (-3,335 \pm 0,180) \text{ kHz}.$$

Daraus folgt

$$RC = -\frac{1}{a} = (0,300 \pm 0,016) \text{ ms}.$$

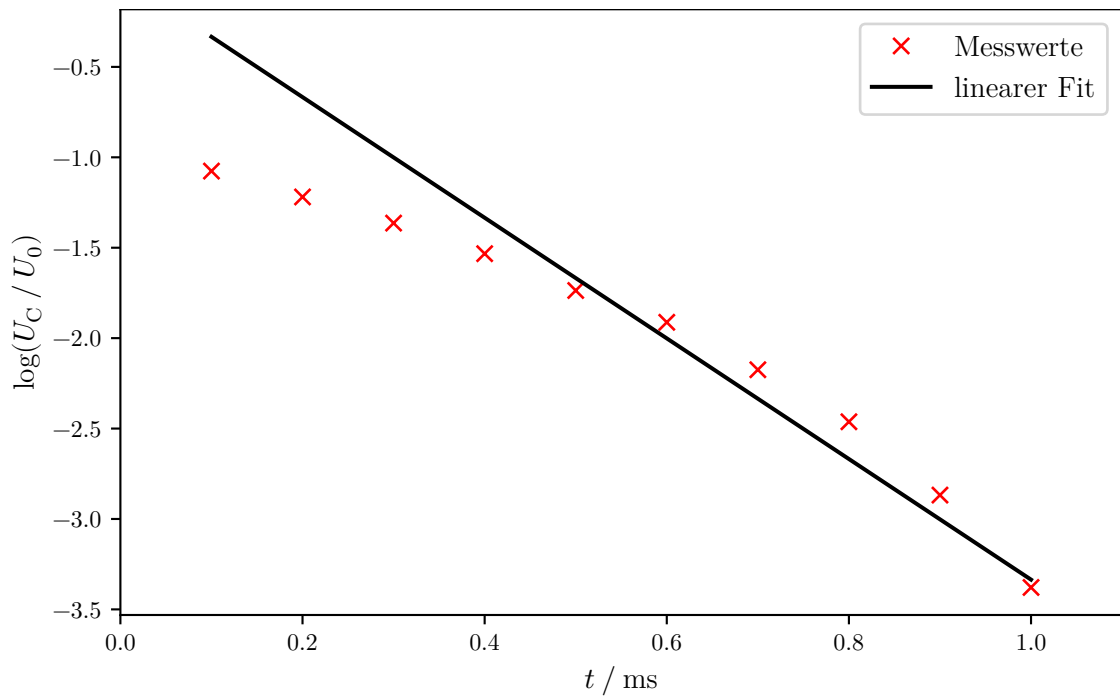


Abbildung 6: Kondensatorspannung beim Entladevorgang.

5.2 Amplitude und Phasenverschiebung

Als nächstes werden die Amplitude U_C und die Phasenverschiebung ϕ abhängig von der Frequenz ν betrachtet und die Messergebnisse in Tabelle 2 aufgetragen. Dabei wird die Phasenverschiebung ϕ nach (7) berechnet.

Tabelle 2: Messwerte der Frequenzabhängigkeit der Amplitude und der Phasenverschiebung.

ν / Hz	U_C / V	a / ms	b / ms	ϕ / rad
10	21,380	0,000	100,000	0,000
50	19,800	1,600	20,000	0,503
100	15,440	1,400	10,000	0,880
200	10,300	0,880	5,000	1,106
300	7,130	0,640	3,330	1,208
400	5,540	0,520	2,500	1,307
500	4,440	0,440	2,000	1,382
1000	2,300	0,240	1,000	1,508
2000	1,130	0,128	0,500	1,608
3000	0,792	0,088	0,330	1,676
4000	0,594	0,068	0,250	1,709
5000	0,495	0,056	0,200	1,759
10 000	0,238	0,026	0,100	1,634
20 000	0,135	0,014	0,050	1,759
30 000	0,095	0,010	0,033	1,904

Die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit der Frequenz ist in Abbildung 7 dargestellt. Dabei ist $U_0 = 21,6 \text{ V}$.

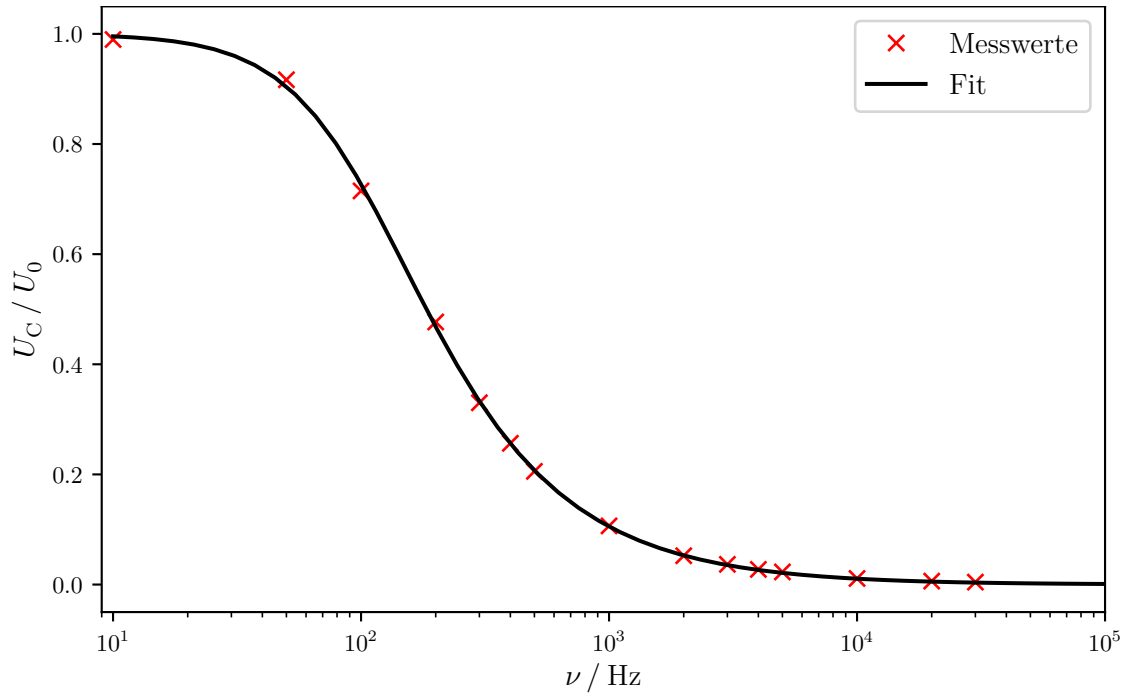


Abbildung 7: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung.

Die nicht-lineare Regression wird nach

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{2\pi} a^2\right)^2}}$$

mit $a = RC$ wie in (5) berechnet und liefert den Wert

$$RC = (0,0593 \pm 0,0005) \text{ s}.$$

Es zeigt sich, dass das auf diese Weise ermittelte RC deutlich größer ist, als das RC aus der linearen Regression des Entladevorgangs.

Die Phasenverschiebung ϕ abhängig von der Frequenz ist mitsamt einer Regression der Form

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\nu}{2\pi} a\right),$$

analog zu Gleichung (4), in Abbildung 8 dargestellt.

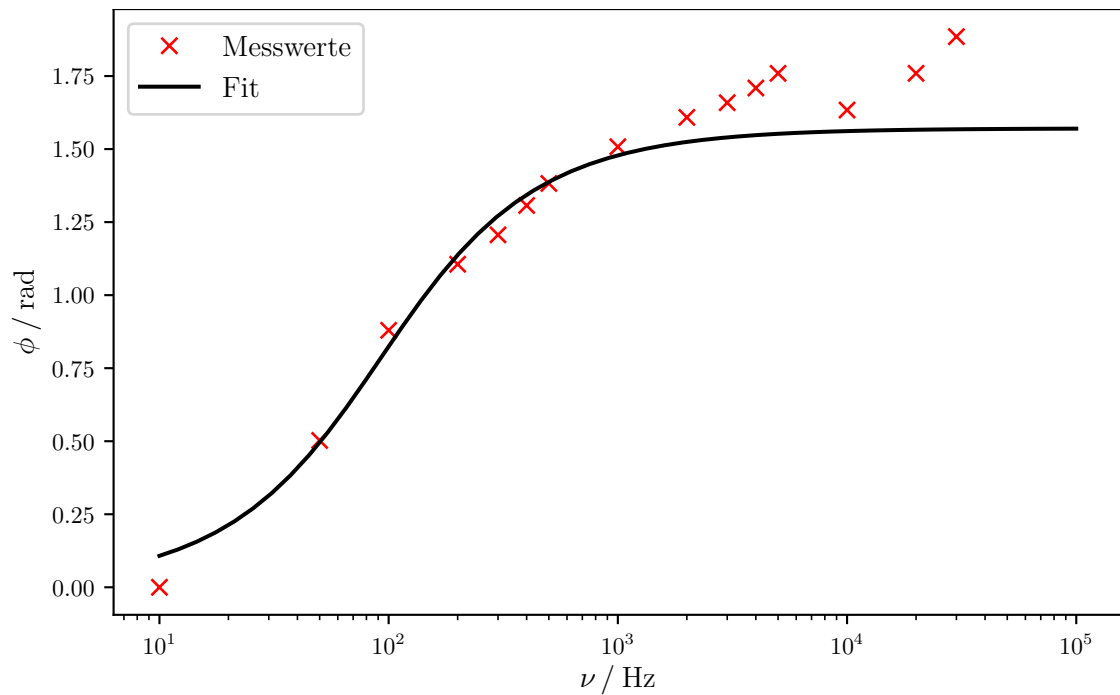


Abbildung 8: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung.

Die Regression liefert den Wert

$$a = RC = (0,068 \pm 0,011) \text{ s},$$

welcher ähnlich zu dem Wert ist, welcher sich aus der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung ergab.

Der Zusammenhang zwischen der Spannungsamplitude U_C und der Phasenverschiebung ϕ ist in Abbildung 9 in einem Polarplot aufgetragen. Dabei sind sowohl die Theoriekurve (schwarz) als auch die Messwerte (rot) dargestellt.

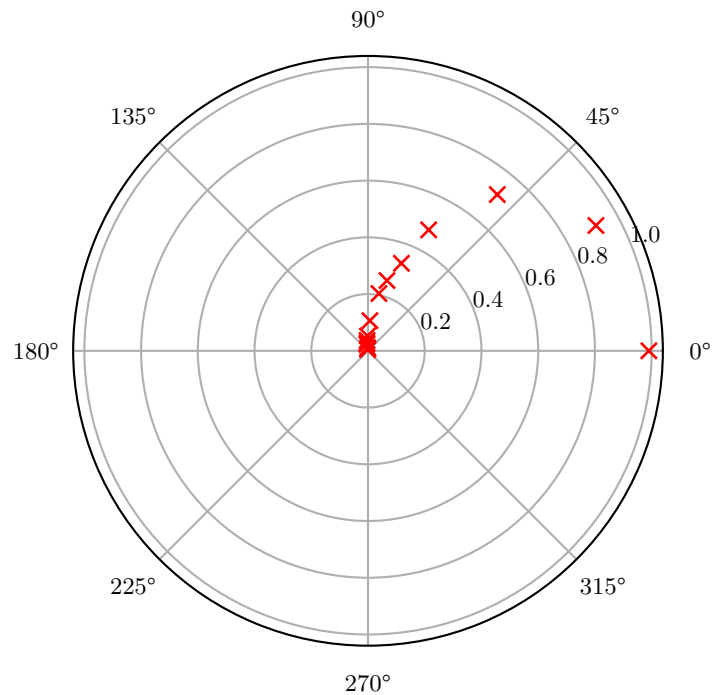


Abbildung 9: Abhängigkeit zwischen Spannungsamplitude und Phase.

5.3 Integrator

Gleichung (6) zeigt, dass der RC-Kreis auch als Integrator verwendet werden kann. In Abbildung 10 ist das Oszilloskopbild der Integration einer Sinusspannung mit

$$f(x) = A \sin(x)$$

$$F(x) = -A \cos(x)$$

zu sehen.

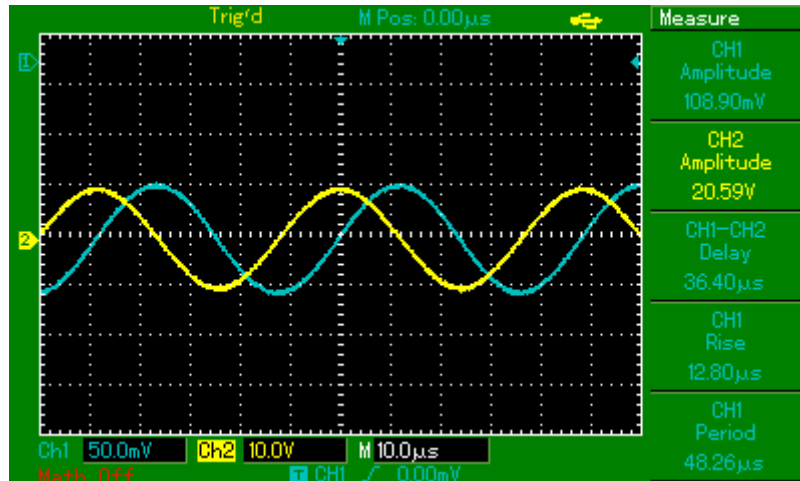


Abbildung 10: Integration einer Sinusspannung.

Für eine Dreiecksspannung gilt

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{für } 2\pi n < x \leq 2\pi n + 1 \\ -Ax & \text{für } 2\pi n + 1 < x \leq 2\pi(n + 1) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}Ax^2 & \text{für } 2\pi n < x \leq 2\pi n + 1 \\ -\frac{1}{2}Ax^2 & \text{für } 2\pi n + 1 < x \leq 2\pi(n + 1) \end{cases}$$

und das entsprechende Oszilloskopaufnahme ist in Abbildung 11 dargestellt.

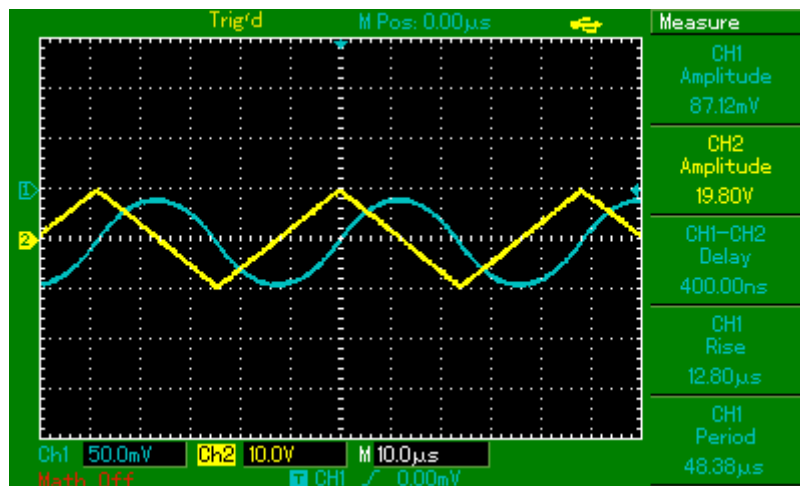


Abbildung 11: Integration einer Dreiecksspannung.

Auch eine Rechteckspannung mit

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{für } 2\pi n < x \leq 2\pi n + 1 \\ -A & \text{für } 2\pi n + 1 < x \leq 2\pi(n+1) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} Ax & \text{für } 2\pi n < x \leq 2\pi n + 1 \\ -Ax & \text{für } 2\pi n + 1 < x \leq 2\pi(n+1) \end{cases}$$

lässt sich im RC-Kreis integrieren, wie Abbildung 12 zeigt.

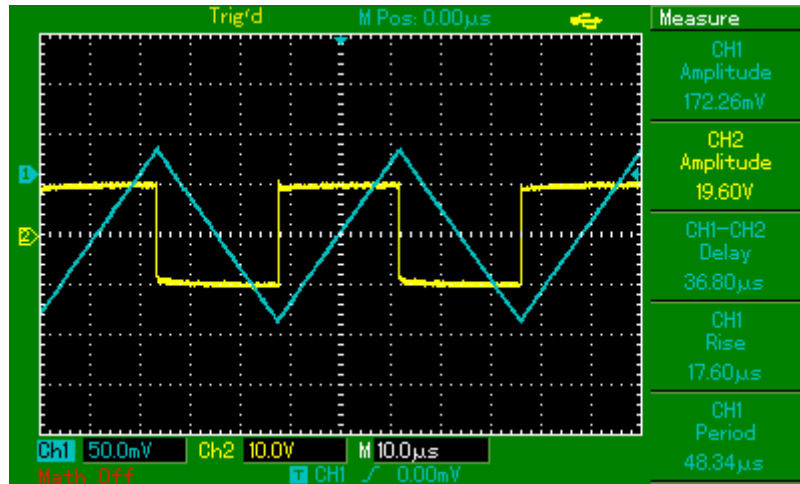


Abbildung 12: Integration einer Rechteckspannung.

In den Aufnahmen des Oszilloskops sind die Eingangsspannungen jeweils in gelb, die Ausgangsspannungen in blau dargestellt.

6 Diskussion

Die aus den verschiedenen Messmethoden bestimmten Werte der Zeitkonstante RC sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

Tabelle 3: Ergebnisse des Versuchs.

Messung	RC in s
Entladevorgang	$(0,300 \pm 0,016)$ ms
Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude	$(0,0593 \pm 0,0005)$ s
Frequenzabhängigkeit der Phase	$(0,068 \pm 0,011)$ s

Es zeigt sich, dass die Ergebnisse der zweiten und dritten Messung sehr ähnlich sind, das Ergebnis des Entladevorgangs jedoch stark davon abweicht. Dies könnte damit zusammenhängen, dass die Frequenzabhängigkeiten beide in der gleichen Messung aufgenommen wurden. So kann in dieser Messung ein systematischer Fehler nicht allein durch die ähnlichen Ergebnisse für RC ausgeschlossen werden. Weiterhin wurden für die Berechnung der Ausgleichsgeraden einige Werte manuell aus dem Oszilloskopbild abgelesen, wohingegen die Werte für die anderen beiden Messungen direkt vom Oszilloskop angezeigt wurden. Dies, sowie eine zu geringe Anzahl an abgelesenen Werten kann zu weiteren Ungenauigkeiten geführt haben. Zudem fällt auf, dass die Messwerte zum Teil deutlich von der Ausgleichsgeraden abweichen.

Bei der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung hingegen liegen die Messwerte fast alle direkt auf der Ausgleichsfunktion und der Fehler ist mit 0,84 % sehr gering. Bei der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung sind die Abweichungen in den hohen Frequenzbereichen sehr hoch, dennoch stimmt der Wert für RC relativ gut mit dem aus der zweiten Messung überein. Die hohen Abweichungen in den oberen Frequenzbereichen könnten daher kommen, dass die Differenz der Nulldurchgänge a am Oszilloskop nicht direkt abgelesen werden konnte, sondern mithilfe von Cursors, die per Hand auf die Nulldurchgänge eingestellt werden mussten und dies wurde mit steigender Frequenz immer ungenauer und schwieriger.

Im Polarplot des Zusammenhangs zwischen Kondensatorspannung und Phasenverschiebung sind die Messwerte im Großen und Ganzen auch sehr nah an der Theoriekurve, nur im höheren Bereich sind zwei Werte mit etwas größerer Abweichung, die sich ebenfalls durch die oben genannte Ungenauigkeit bei der Bestimmung der Phasenverschiebung erklären lässt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 353*. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf> (besucht am 24. 12. 2016).