

Versuch 204

# **Wärmeleitung von Metallen**

5. Mai 2021

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung und Aufbau</b>	<b>4</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1 Statische Methode . . . . .	5
4.2 Dynamische Methode . . . . .	7
<b>5 Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>6 Fehlerformeln</b>	<b>11</b>
<b>Literatur</b>	<b>12</b>

## 1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist die Bestimmung der Wärmeleitung verschiedener Metalle.

## 2 Theorie

Existiert in einem Körper ein Temperaturungleichgewicht, findet ein Wärmetransport in Richtung des kälteren Wärmereservoirs statt. Dies kann als eine Variation des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik aufgefasst werden. Hier wird nun angenommen, dass der Wärmetransport allein durch Phononen, welche als elementare Anregung eines elastischen Feldes verstanden werden können, und freie Elektronen geschieht. Die Wärmemenge, welche durch einen Stab der Länge  $L$  mit der Querschnittsfläche  $A$ , der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c$ , fließt berechnet sich gemäß

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt, \quad (1)$$

wobei  $\kappa$  die materialabhängige Wärmeleitfähigkeit ist. Damit gilt für den Wärmestrom

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2)$$

Unter Zuhilfenahme der der Kontinuitätsgleichung lässt sich

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\kappa}{\rho c} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3)$$

die Wärmeleitungsgleichung<sup>1</sup>, herleiten [1]. Sie beschreibt die Temperaturverteilung innerhalb des Körpers mit der Zeit. Der Faktor  $(\kappa/\rho c) = \sigma_T$  wird Temperaturleitfähigkeit genannt und gibt an, wie schnell sich die Temperatur innerhalb des Körpers ausgleicht. Für die dynamische Methode wird eine Temperaturwelle, durch Erwärmen und Abkühlen des Körpers, erzeugt. Diese hat die Form

$$T(x, t) = T_{\max} \exp \left( -\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right). \quad (4)$$

Für die Phasengeschwindigkeit der Welle muss die Dispersionsrelation

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} = \omega / \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \quad (5)$$

gelten.

Der Dämpfungsfaktor wird aus dem Amplitudenverhältnis  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  an den beiden Messstellen  $x_{\text{nah}}$  und  $x_{\text{fern}}$  bestimmt. Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  lautet mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>Die vollständige Wärmeleitungsgleichung ist eine Differentialgleichung in alle drei Raumdimensionen  $(x, y, z)$ .

und

$$\Phi = \frac{2\pi\Delta t}{T} \quad (7)$$

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln(A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}})} \quad (8)$$

Der Abstand der beiden Messstellen zueinander ist dabei  $\Delta x$  und  $\Delta t$  ist die Phasenverschiebung der Temperaturwelle an den beiden Messstellen.

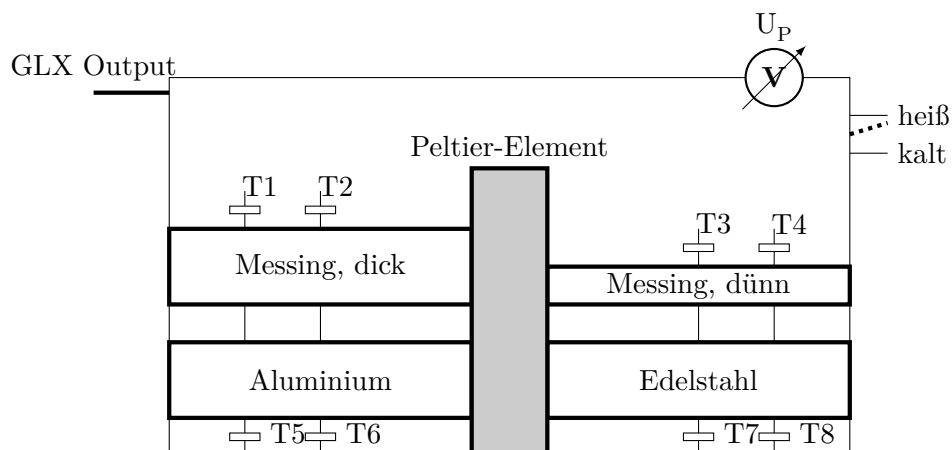
### 3 Durchführung und Aufbau

Zunächst wird die statische Methode durchgeführt. Dabei wird zunächst eine ähnliche Schaltung wie in Abbildung 1 zusehen ist aufgebaut. An jeweils zwei Stellen pro Stab wird die Temperatur elektronisch alle 5 s gemessen, die Spannung des Heizaggregats wird auf  $U_P = 5 \text{ V}$  gestellt. Die Temperatur  $T_7$  darf nicht heißer werden als  $45^\circ\text{C}$ . Während der Messvorgänge sind die Metallstäbe mit einem Isolator nach oben und zu den langen Seiten hin umgeben. Nach der Messung werden die Stäbe abgekühlt.

Bei der dynamischen Methode, welche auch als Ångström-Methode bekannt ist, werden die Stäbe in periodischen Abständen erhitzt und wieder abgekühlt um eine „Temperaturwelle“ zu erzeugen. Die Spannung wird diesmal auf 8 V gestellt. Die Temperatur der Stäbe wird alle 2 s elektronisch gemessen. Die Stäbe werden mit einer Periode von 80 s geheizt, das bedeutet 40 s heizen und 40 s abkühlen lassen. Die Messung erstreckt sich über eine Länge von 10 Perioden. Danach werden die Stäbe wieder gekühlt.

Die gleiche Messung wird nochmals mit einer Periode von 200 s durchgeführt. Es wird solange gemessen, bis eine der Temperaturen  $80^\circ\text{C}$  erreicht. Die Stäbe werden wieder abgekühlt.

**Abbildung 1:** Skizze der Apparatur, mit Tikz erstellt.



## 4 Auswertung

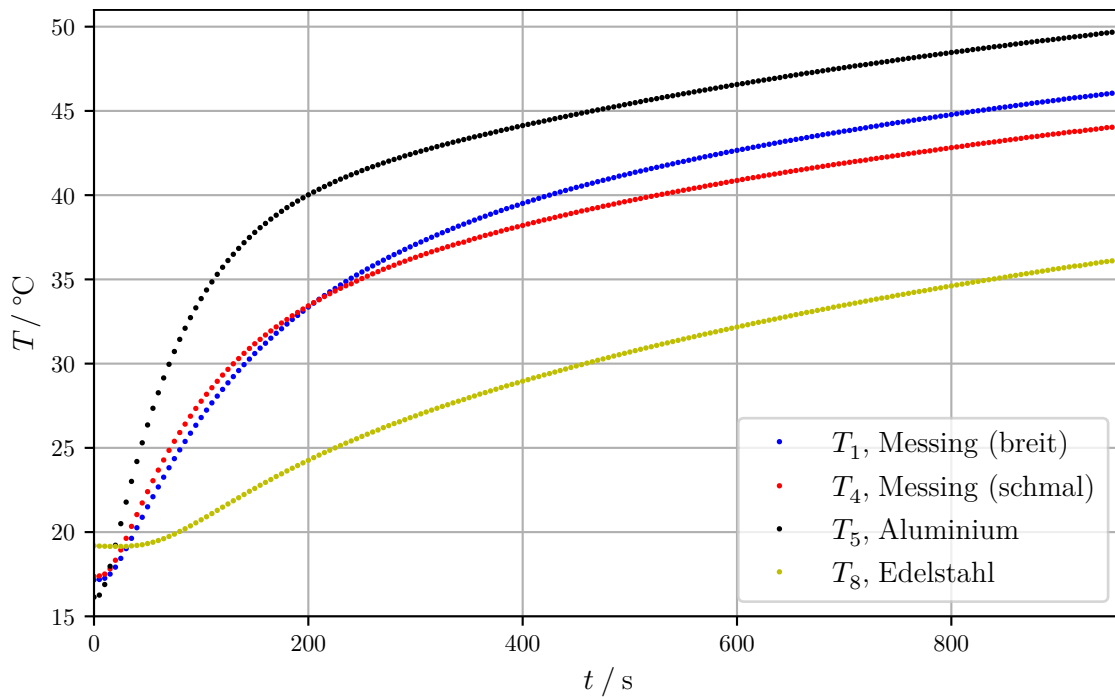
Im folgenden sind die Materialeigenschaften der Metalle aufgezeigt. Die Werte für  $\rho$  und  $c$  stammen aus der Anleitung [1] die Werte für  $\kappa$  werden von der Website [2] entnommen.

**Tabelle 1:** Materialeigenschaften der Metalle.

Metall	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [J/(kg K)]	$\kappa$ [W/(m K)]	$b$ [cm]	$h$ [cm]	$A$ [cm <sup>2</sup> ]
Messing(schmal)	8520	385	90	0,7	0,4	0,28
Messing(breit)	8520	385	90	1,2	0,4	0,48
Aluminium	2800	830	220	1,2	0,4	0,48
Edelstahl	8000	400	21	1,2	0,4	0,48

### 4.1 Statische Methode

Die Temperaturverläufe der statischen Messung sind in Abbildung 2 dargestellt. Außer bei Edelstahl steigt die Temperatur direkt mit Einschalten der Spannung an. Ab  $t \approx 300$  s steigen die Temperaturen der Stäbe nahezu linear an. Edelstahl liegt deutlich unter den anderen Kurven und steigt nicht direkt an. Die beiden Messingkurven liegen trotz unterschiedlicher geometrischer Eigenschaften sehr nahe zusammen.



**Abbildung 2:** Temperaturverläufe der statischen Messung.

$T_5$  ist nach  $t = 700$  s am höchsten von den aufgetragenen Temperaturen, vgl. Tabelle 2, nachdem die Anfangstemperatur an allen Proben gleich war. Die Wärmeleitung ist demnach bei Aluminium am besten, da auch die entsprechende Kurve am höchsten liegt.

**Tabelle 2:** Temperaturen bei  $t = 700$  s.

Zeitpunkt	$T_1$ [°C]	$T_4$ [°C]	$T_5$ [°C]	$T_8$ [°C]
700 s	43,74	41,86	47,52	33,41

Die Ergebnisse von  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ , nach Formel 1, sind für 5 verschiedene Zeiten in Tabelle 3 aufgetragen, mit den Werten aus Tabelle 1.

**Tabelle 3:** Wärmeströme für verschiedene Zeiten.

$t$ [s]	Me <sub>s</sub> [W/s]	Me <sub>b</sub> [W/s]	Al [W/s]	Ed [W/s]
100	−0,52	−0,84	−1,26	−0,35
300	−0,30	−0,49	−0,60	−0,35
500	−0,27	−0,41	−0,53	−0,32
700	−0,26	−0,39	−0,52	−0,31
900	−0,26	−0,39	−0,52	−0,30

Die Temperaturdifferenzen von Messing und Edelstahl steigen in Abbildung 3 beide erst an und fallen dann auf jeweils einen konstanten Wert ab. Die Kurve von Messing ist deutlich schneller auf diesem konstanten Wert. Die Aluminiumkurve erreicht diesen Wert nur asymptotisch. Dieser liegt höher als der von Messing.

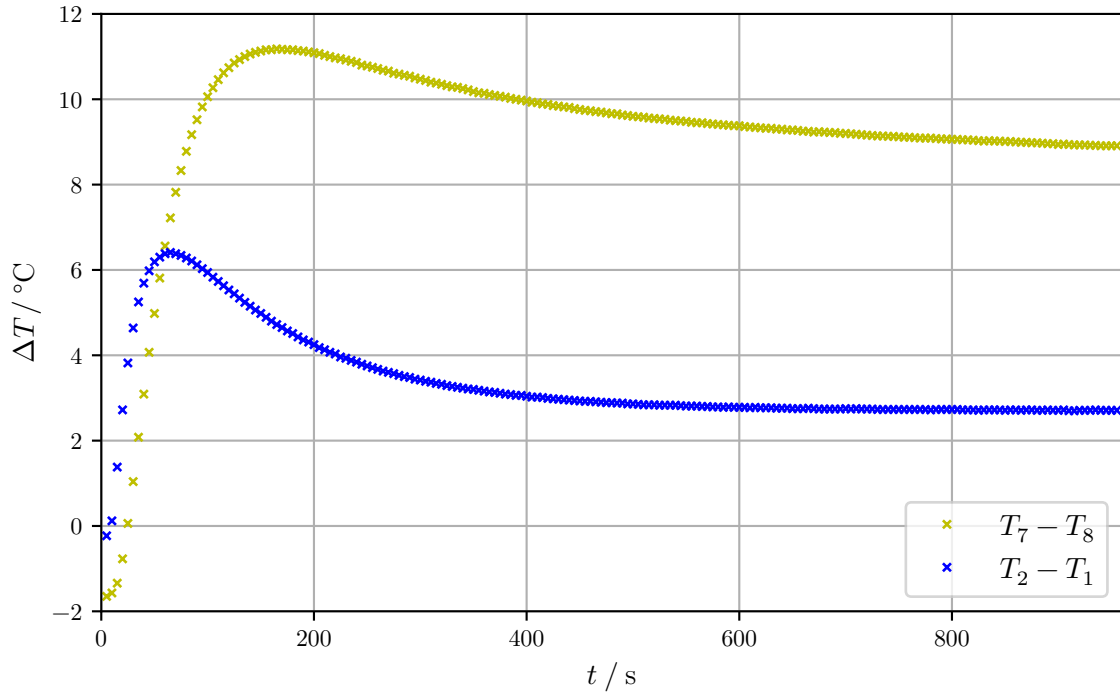


Abbildung 3: Differenz zwischen den Messstellen.

## 4.2 Dynamische Methode

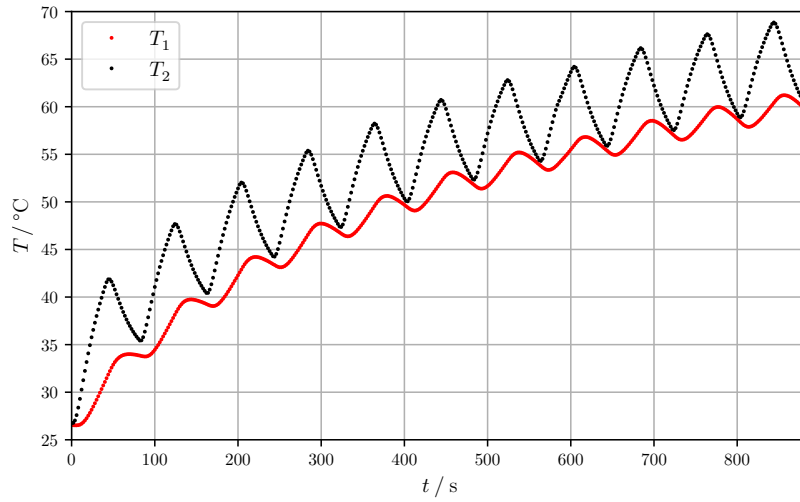
Interessant bei der dynamischen Methode sind das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung zwischen den beiden gemessenen Temperaturen.

Die Minima und Maxima wurden aus den Messwerten bestimmt, indem die lokal größten und kleinsten Werte gesucht wurden. Für diese wurde der Abstand zwischen den benachbarten Extrema bestimmt und dann um die Minima gemittelt. Die Phase  $\Phi$  wurde nach Gleichung 7 je Amplitudenpaar bestimmt. Nach Gleichung 8 wird die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  berechnet. Die Werte für  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  sind aus der jeweiligen Tabelle zu nehmen. Die Extrema der  $T_8$ -Kurve aus Abbildung 6 sind nicht so eindeutig wie bei allen anderen Kurven, sodass hier die Punkte teils aus der Abbildung genommen wurden. Um diesen Fehler zu minimieren, sowie dass nur alle 2s gemessen wurde, werden die Mittelwerte und Fehler für jedes Metall nach 9 und 10 bestimmt.

Die Frequenz wurde nach  $f = 1/T$  und die Wellenlänge  $\lambda$  mit Gleichung (5) und  $v = \lambda \cdot f$  bestimmt.

Tabelle 4: Mittelwerte von  $\Phi$  und  $\kappa$ ,  $f$  und  $\lambda$  mit Literaturwerten.

Material	$\Phi$ [°]	$\kappa$ [W/(m K)]	$f$ [Hz]	$\lambda$ [cm]
Messing	$1,3 \pm 0,1$	$76 \pm 4$	0,0125	16,6
Aluminium	$0,66 \pm 0,03$	$173 \pm 6$	0,0125	30,8
Edelstahl	$2,5 \pm 0,3$	$31 \pm 7$	0,005	12,8

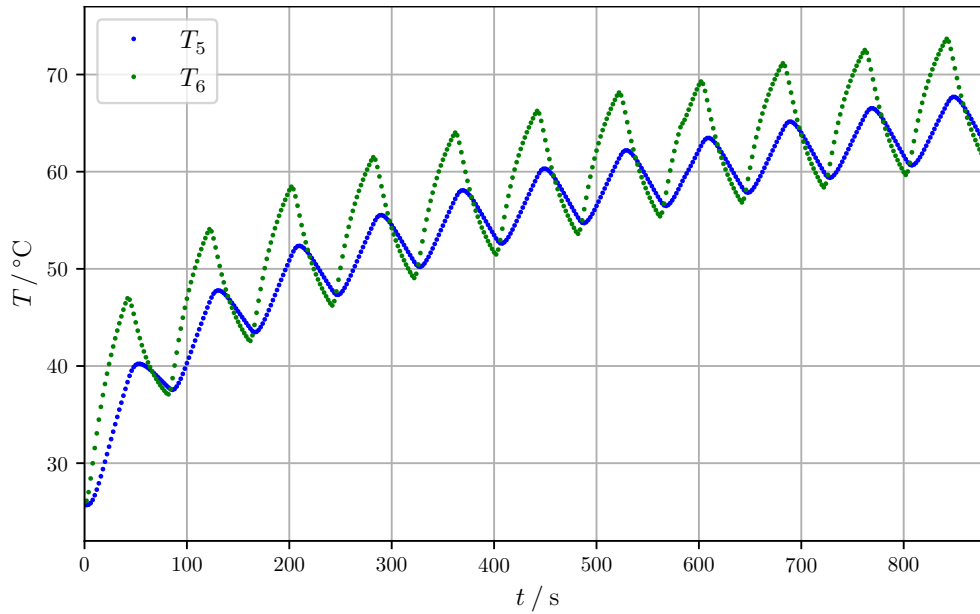


**Abbildung 4:** Temperaturkurve für Messing.

**Tabelle 5:** Minima und Maxima für Messing.

$T_1$ - fern					$T_2$ - nah						
Maximum		Minimum			Maximum		Minimum			$\Phi$	$\kappa$
$t$ [s]	$T$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$A_1$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$A_2$ [°C]	[°]	[W/(m K)]
72	34,00	90	33,75	1,56	46	41,86	84	35,43	4,67	2,04	51,88
146	39,75	172	39,05	1,47	126	47,67	164	40,43	4,71	1,57	63,20
224	44,21	254	43,13	1,42	206	52,03	246	44,25	4,73	1,41	68,08
302	47,72	334	46,38	1,40	286	55,38	326	47,36	4,72	1,26	75,77
382	50,63	414	49,08	1,39	366	58,23	406	50,06	4,71	1,26	75,74
460	53,10	494	51,39	1,38	446	60,72	486	52,34	4,71	1,10	85,89
540	55,20	574	53,36	1,33	526	62,80	566	54,30	4,60	1,10	84,71
620	56,82	656	54,93	1,37	606	64,20	646	55,89	4,63	1,10	86,71
700	58,53	736	56,53	1,36	686	66,10	726	57,54	4,66	1,10	85,61
780	59,97	816	57,88	1,35	766	67,62	806	58,89	4,67	1,10	85,17
858	61,21				846	68,85				0,94	

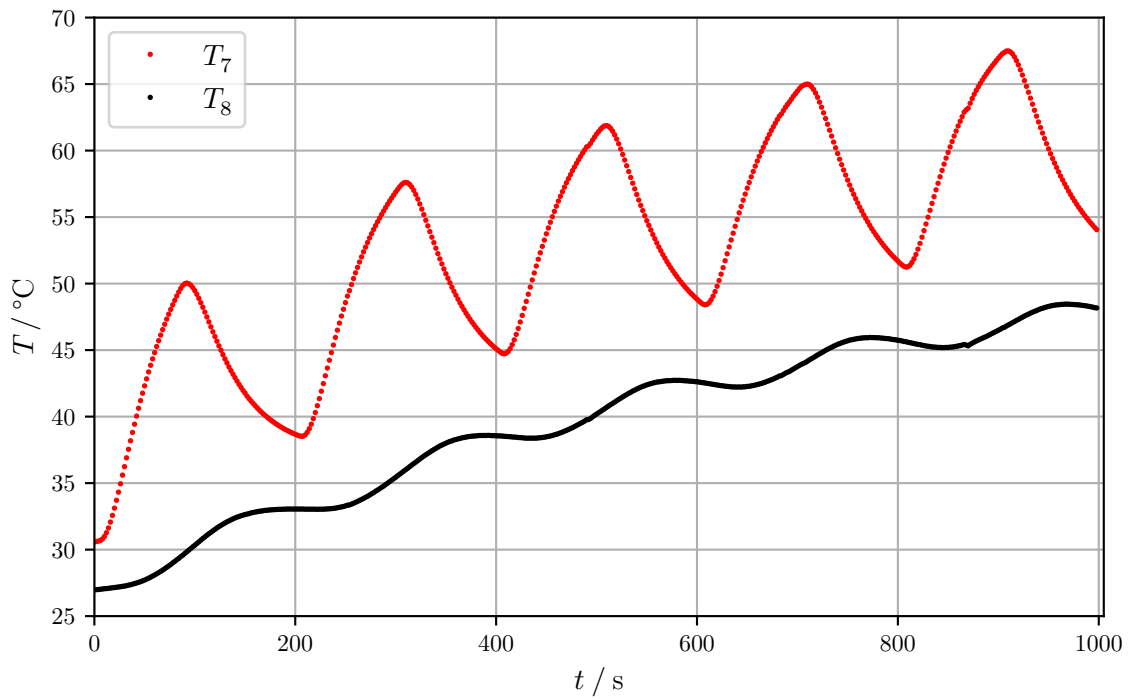




**Abbildung 5:** Temperaturkurve für Aluminum.

**Tabelle 6:** Minima und Maxima für Aluminum.

$T_5$ - fern					$T_6$ - nah						
Maximum		Minimum			Maximum		Minimum			$\Phi$	$\kappa$
$t$ [s]	$T$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$A_5$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$A_6$ [°C]	[°]	[W/(m K)]
56	40,23	88	37,55	3,23	44	46,97	84	37,09	6,72	0,94	118,89
132	47,78	168	43,48	3,30	124	54,08	164	42,59	6,84	0,63	179,26
212	52,37	250	47,33	3,31	204	58,45	244	46,23	6,87	0,63	179,02
292	55,53	330	50,21	3,30	284	61,49	324	49,06	6,85	0,63	178,90
372	58,08	410	52,61	3,29	364	64,02	404	51,49	6,82	0,63	179,42
452	60,31	490	54,71	3,27	444	66,25	484	53,61	6,79	0,63	178,82
532	62,19	570	56,48	3,18	524	68,14	564	55,41	6,65	0,63	176,82
612	63,47	650	57,84	3,23	604	69,28	644	56,84	6,69	0,63	180,01
692	65,15	730	59,37	3,23	684	71,15	724	58,39	6,72	0,63	178,54
772	66,52	810	60,65	3,23	764	72,52	804	59,67	6,71	0,63	178,52
852	67,69				844	73,67				0,63	



**Abbildung 6:** Temperaturkurve für Edelstahl.

**Tabelle 7:** Minima und Maxima für Edelstahl.

$T_7$ - nah					$T_8$ - fern						
Maximum		Minimum			Maximum		Minimum			$\Phi$	$\kappa$
$t$ [s]	$T$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$A_7$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$t$ [s]	$T$ [°C]	$A_8$ [°C]	[°]	[W/(m K)]
94	50,04	208	38,52	7,65	194	33,05	224	33,03	1,39	3,14	52,87
312	57,61	410	44,72	7,51	394	38,59	436	38,38	1,14	2,58	29,37
512	61,88	610	48,41	7,52	584	42,73	642	42,22	1,06	2,26	22,98
712	65,00	810	51,24	7,50	774	45,95	846	45,19	1,01	1,95	19,92
912	67,49				970	48,46				1,82	

## 5 Diskussion

Die Abbildung 2 zeigt zunächst, dass jedes der vier Metalle zu Anfang schnell aufheizt doch danach langsam und linear in der Temperatur anwächst. Da die Temperatur von Aluminium schneller wächst als die der anderen Metalle, ist Aluminium die höchste Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  zuzuordnen. Dies lässt sich bereits aus Tabelle 1 entnehmen. Bei Aluminium ist außerdem die Änderung der Temperatur bezogen auf den Ort größer, weshalb auch der Wärmestrom größer sein muss. In Tabelle 3 wird das ebenfalls verdeutlicht. Die berechneten Wärmeströme sind für Aluminium höher als für Messing und Edelstahl. Die Kurve des schmalen Messingsstabes liegt in der Abbildung 2 nahe an der breiten Messing-Kurve, die Werte der Tabelle zeigen jedoch, dass nur der Faktor  $^{12}/_7$  der Unterschied zu den breiten Werten ist. Die Wärmeströme werden nicht 0, da an den Enden der Stäbe keine Isolierung anliegt und die Isolierung sonst nicht komplett abschirmt.

Bei den einzelnen Werten der Metalle fällt auf, dass nach ein paar Perioden die berechneten Größen konstant sind. Diese liegen dann auch näher an den Theoriewerten, als die Mittelwerte. Zu diesen Abweichungen kann es durch Einschwingvorgänge kommen, da es eine angeregte Welle innerhalb des Stabes ist. Die berechneten Werte liegen unter den Literaturwerten, da die thermische Isolierung nicht an allen Seiten der Stäbe anliegt und das System nicht ideal abschirmt. Der größere Fehler ist jedoch die Bestimmung der Amplitude einer Periode. Hierfür werden die Abstände zwischen Maxima und Minima gemittelt. Die Maxima der  $T_8$ -Kurve aus Abbildung 6 sind schwer zu bestimmen, deswegen weichen die Werte stärker voneinander ab.

**Tabelle 8:** Wärmeleitfähigkeiten

Material	$\kappa_{\text{mittel}}$ [W/(m K)]	$\kappa_{\text{lit}}$ [W/(m K)]	Abweichung [%]
Messing	$76 \pm 4$	90	18
Aluminium	$173 \pm 6$	220	27
Edelstahl	$31 \pm 7$	21	47

## 6 Fehlerformeln

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i \quad (9)$$

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (10)$$

## Literatur

- [1] *Anleitung zu v204: Wärmeleitung von Metallen.* URL: <http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V204.pdf> (besucht am 05.10.2017).
- [2] *Wärmekapazität von Metallen.* URL: [https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit\\_metall/wleit\\_metall.php](https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php) (besucht am 14.01.2018).