

Geometrische Optik

Fabian Koch
fabian3.koch@udo.edu

Tom Rosenstein
tom.rosenstein@udo.edu

Durchführung: 08.05.18

Abgabe: 15.08.18

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Methode nach Bessel	4
2.2 Methode von Abbe	4
3 Durchführung	5
3.1 Messung der Gegenstands- und Bildweite	5
3.2 Methode nach Bessel	6
3.3 Methode nach Abbe	6
4 Auswertung	6
4.1 Messung der Gegenstands- und Bild-weite bei bekannter Brennweite . . .	6
4.2 Messung der Gegenstands- und Bild-weite bei unbekannter Brennweite . .	9
4.3 Methode nach Bessel	10
4.4 Chromatische Abberation und Bessel	12
4.5 Methode nach Abbe	13
5 Diskussion	15
Literatur	16

1 Zielsetzung

Bei diesem Versuch werden die Brennweiten verschiedener Linsen durch verschiedene Methoden ermittelt.

2 Theorie

Treffen Lichtstrahlen auf optisch dichtere oder dünnere Materialien, so werden sie abhängig von der Form dieser Objekte gebrochen. Man spricht dabei von Linsen. Grundsätzlich werden zwei Arten von Linsen unterschieden: Sammellinsen, welche zum Linsenrand dünner werden und das Licht in einem Brennpunkt bündeln, sowie Zerstreuungslinsen, welche eine entgegengesetzte Krümmung besitzen und eine negative Brennweite aufweisen. Eine Sammellinse erzeugt somit ein reelles Bild, wohingegen eine Zerstreuungslinse ein virtuelles Bild erzeugt. Die charakteristische Größe einer Linse ist die Brennweite, also die Distanz zwischen der Linse und ihrem Brennpunkt.

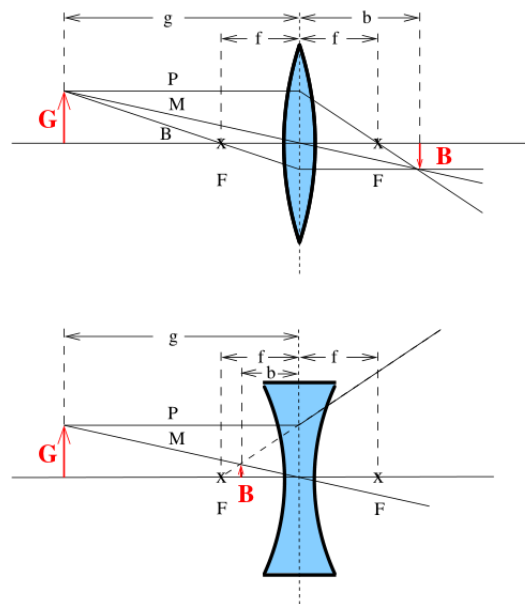


Abbildung 1: Der Aufbau einer Sammellinse (oben) und einer Zerstreuungslinse (unten), entnommen der Versuchsanleitung [1, S. 1]

In Abbildung 1 ist der Aufbau der zwei erwähnten Linsenarten dargestellt. Die Größe g ist dabei die Gegenstandsweite, also der Abstand zwischen Objekt und Linse, G ist die Gegenstandsgröße, also die Größe des Objekts, b ist die Bildweite, also der Abstand zwischen Linse und dem Schirm, bzw. dem Bild, B ist die Bildgröße, also die Größe des auf dem Schirm sichtbaren Bildes, und f ist die Brennweite. Aus den Strahlensätzen und der Bildkonstruktion folgt das Abbildungsgesetz. Dieses ist für den Abbildungsmaßstab V wie folgt definiert:

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

Für dünne Linsen folgt daraus die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (2)$$

$$f = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{g}} \quad (3)$$

Mit ihrer Hilfe kann damit die Brennweite einer Linse berechnet werden

2.1 Methode nach Bessel

Bei der Methode nach Bessel wird die Brennweite einer Linse bestimmt, indem man den Abstand zwischen Gegenstand und Bild fest hält und die zwei Linsenpositionen ermittelt, für die das Bild scharf abgebildet wird. Bei diesen symmetrischen Linsenstellungen sind die Bild- und Gegenstandsweiten vertauschbar:

$$b_1 = g_2$$

und

$$b_2 = g_1$$

Mit dem Abstand $e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2$ zwischen Objekt und Bild, sowie dem Abstand $d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2$ zwischen den beiden Linsen ergibt sich für die Brennweite folgende Gleichung:

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (4)$$

Der Zusammenhang der Größen ist in Abbildung 2 dargestellt.

2.2 Methode von Abbe

Bei der Methode von Abbe wird die Brennweite aus dem Abbildungsmaßstab V berechnet. Hierfür wird ein Linsensystem aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse konstruiert. Dies ist in Abbildung 3 dargestellt. Da es sich um ein Linsensystem handelt, müssen die Linsen wie dicke Linsen behandelt werden. Die Größen g und b müssen in Relation zu den Hauptebenen H und H' gemessen werden. Diese Hauptebenen sind allerdings unbekannt, man muss sich einen beliebigen Punkt A wählen und von dort die Größen g' und b' messen. Es ergeben sich dann für die Brennweite und die Lage der Hauptebenen folgende Gleichungen:

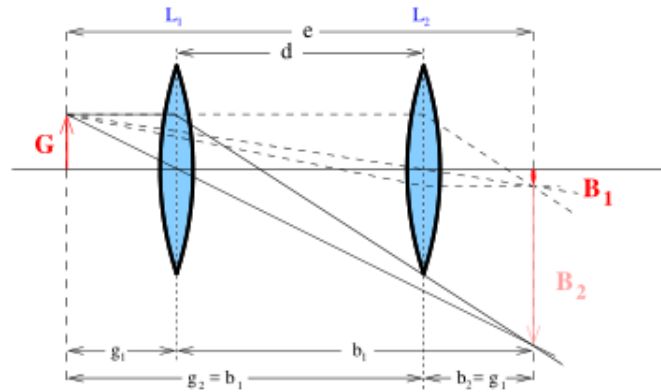


Abbildung 2: Darstellung der verwendeten Größen der Methode nach Bessel, entnommen der Versuchsanleitung [1, S. 4]

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (5)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (6)$$

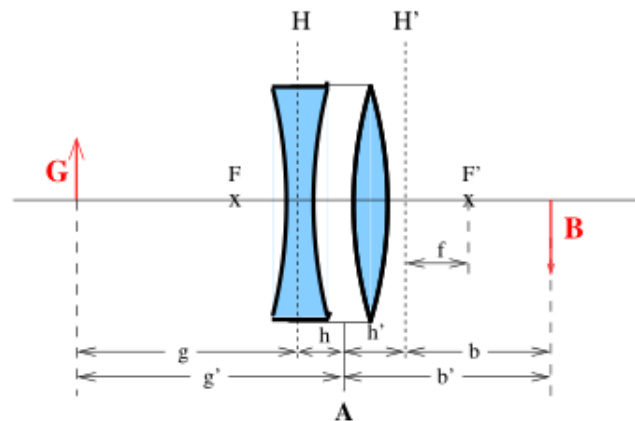


Abbildung 3: Darstellung des Linsensystems, welches für die Brennweitenbestimmung nach Abbe genutzt wird, entnommen der Versuchsanleitung [1, S. 5]

3 Durchführung

3.1 Messung der Gegenstands- und Bildweite

Zunächst werden auf einer optischen Bank eine Halogenlampe, ein Gegenstand, in diesem Fall ein "Perl L", die zu vermessende Sammellinse sowie ein Schirm befestigt. Dabei

sollten alle Instrumente auf der selben Höhe und nicht gegeneinander verdreht eingestellt sein. Die Position des Gegenstandes wird nun auf der Längenskala der optischen Bank abgelesen und notiert. Nun wird die Halogenlampe eingeschaltet. Auf dem Schirm hinter der Linse ist nun ein Bild zu sehen. Der Schirm wird nun so lange verschoben, bis das Bild scharf ist. Dann werden die Position des Schirmes sowie der Linse notiert. Dieser Vorgang wird dann für neun andere Linsenpositionen wiederholt. Dies wird einmal für eine Linse mit bekannter Brennweite und einmal für eine Wasserlinse mit unbekannter Brennweite durchgeführt. Bei der Linse mit der bekannten Brennweite wird zusätzlich noch die Größe der Abbildung auf dem Schirm mit einem Lineal gemessen und notiert.

3.2 Methode nach Bessel

Bei der Methode nach Bessel wird der Gegenstand, sowie der Schirm auf einer festen Position montiert und die jeweiligen Positionen notiert. Dabei ist darauf zu achten, dass der Abstand zwischen Schirm und Gegenstand mindestens vier mal so groß wie die Brennweite der zu vermessenden Sammellinse ist. Die Sammellinse wird zwischen Gegenstand und Schirm montiert. Nun wird die Linse verschoben, bis auf dem Schirm ein scharfes Bild erkennbar ist und die zugehörige Position notiert. Danach wird die Linse weiter verschoben, bis an einer anderen Stelle ein scharfes Bild sichtbar wird. Diese Position wird auch notiert. Dann wird der Vorgang für neun andere Abstände zwischen Gegenstand und Schirm wiederholt. Danach wird ein Rotfilter hinter dem Gegenstand angebracht und die vorherige Messmethode für fünf Abstände zwischen Gegenstand und Schirm angewandt. Dies wird dann nochmal mit einem Blaufilter durchgeführt.

3.3 Methode nach Abbe

Bei dieser Methode wird wieder ein fester Abstand zwischen Gegenstand und Schirm eingestellt. Diesmal wird jedoch vor der Sammellinse noch eine Zerstreuungslinse mit einer zur Sammellinse inversen Brennweite angebracht. Die beiden Linsen befinden sich dabei so nah aneinander wie möglich. Nun werden für zehn verschiedene Positionen des Linsensystems jeweils die Größe der Abbildung auf dem Schirm gemessen und die Datenpaare notiert. Dabei ist zu beachten, dass die Position des Linsensystems die Position eines Referenzpunktes ist, welcher nicht unbedingt in der Hauptebene einer der beiden Linsen liegt.

4 Auswertung

4.1 Messung der Gegenstands- und Bild-weite bei bekannter Brennweite

Die Messwerte für die Bestimmung der Brennweite mittels Messen der Gegenstands- und Bild-weite sind in Tabelle 1 aufgetragen. Hierbei wurden nicht die Größen g und b direkt gemessen, sondern die Position der optischen Elemente und die Bildgröße B . Die Position des Perl L ist für jeden Versuch mit 20 cm gemessen worden. Die Gegenstandsgröße G des Perl L beträgt laut Hersteller 3 cm.

Tabelle 1: Messwerte für die Linse mit bekannter Brennweite

Pos d. Linse / cm	Pos d. Schirms / cm	B / cm
25	48.55	12.3
26	45.70	10.8
27	41.40	6.8
28	38.70	4.3
29	38.20	3.4
30	38.30	2.8
31	38.40	2.3
32	39.15	2.0
33	39.65	1.8
34	39.75	1.6

Um die Brennweite der Linse berechnen zu können, wird die Linsengleichung (3) verwendet. Der Mittelwert wird mittels Numpy nach folgender Formel berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (7)$$

Der Fehler des Mittelwertes nach dieser mittels uncertainties:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (8)$$

Es ergibt sich folglich für die Brennweite:

$$f = (4,45 \pm 0,06) \text{ cm}$$

Dies wird mit der Herstellerangabe von 50 mm verglichen. Es ergibt sich ein Fehler von 10 %. Die Messgenauigkeit wird durch den folgenden Plot überprüft. Hierbei werden die Wertepaare für g_i, b_i aufgetragen. Bei hoher Genauigkeit sollten sich alle Geraden in einem Punkt schneiden. Die x und y Koordinate dieses Punktes stellt dann die Brennweite dar. Da die Graphen für $g = 5 \text{ cm}, 13 \text{ cm}, 14 \text{ cm}$ zu stark abweichen werden diese für diese Berechnung vernachlässigt. Durch Ablesen aus dem Graphen wird der Schnittpunkt der Geraden zu (4.97, 4.19) bestimmt. Die Brennweite beträgt dann $f = 4,97 \text{ cm}$ oder $f = 4,19 \text{ cm}$. Die durch die x-Koordinate bestimmte Brennweite weicht um 0.6 % von den Herstellerangaben ab, die durch die y-Koordinate bestimmte jedoch um 16.2 %. Der Mittelwert der beiden liegt bei $f = 4,58 \text{ cm}$ und weicht um 8.4 % ab. Desweiteren wird noch das Abbildungsgesetz (1) überprüft. Dafür wird der Abbildungsmaßstab einmal durch die gemessenen b und g bestimmt, und einmal durch die Bild- und Gegenstandsgröße B und G. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 2.

Tabelle 2: Vergleich der Abbildungsmaßstäbe

$V(b, g)$	$V(B, G)$	<i>Relative Abweichung</i> / %
4.71	4.10	14.88
3.28	3.60	9.00
2.06	2.27	9.25
1.34	1.43	6.72
1.02	1.13	10.78
0.83	0.93	12.05
0.67	0.77	14.93
0.60	0.67	11.66
0.51	0.60	17.65
0.41	0.53	29.27

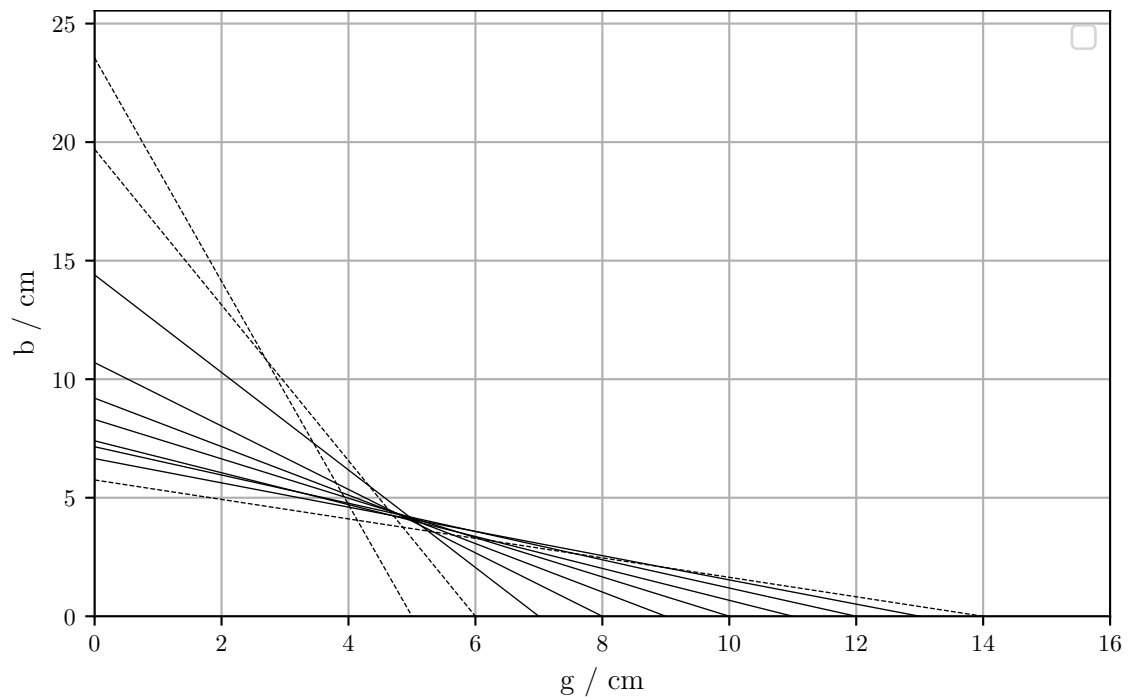


Abbildung 4: Überprüfen der Messgenauigkeit der Linse mit bekannter Brennweite

4.2 Messung der Gegenstands- und Bildweite bei unbekannter Brennweite

Für die Messung der Brennweite einer Linse mit unbekannter Brennweite wird eine Wasserlinse verwendet. Die Messungen erfolgen analog. Die Messwerte für die Positionen der optischen Elemente sind in Tabelle 3 dargestellt. Das Perl L befindet sich erneut bei 20 cm.

Tabelle 3: Messwerte für die Linse mit unbekannter Brennweite

Pos d. Linse / cm	Pos d. Schirms / cm
30.0	45.90
30.5	45.65
31.0	45.00
31.5	44.60
32.0	44.40
32.5	44.40
33.0	44.55
33.5	44.70
34.0	44.90
34.5	45.20

Die Brennweite wird erneut mit der Linsengleichung (3) ermittelt. Der Mittelwert nach Gleichung (7) und dessen Fehler nach Gleichung (8). Es ergibt sich folglich für die Brennweite:

$$f = (6,134 \pm 0,010) \text{ cm}$$

Da bei der Wasserlinse keine Herstellerangabe überprüft werden kann, muss die Messgenauigkeit einzig mithilfe des Plotes 5 überprüft werden. Hier wird erneut der Schnittpunkt der einzelnen Geraden ermittelt. Die Koordinaten des Schnittpunktes entsprechen jeweils der Brennweite. Der Schnittpunkt wurde wieder durch Ablesen aus dem Graphen zu (6.17, 6.17) bestimmt. Somit ergibt sich für beide Koordinaten übereinstimmend eine Brennweite von $f = 6,17 \text{ cm}$. Diese weicht um 5.9 % von der zuvor bestimmten Brennweite ab.

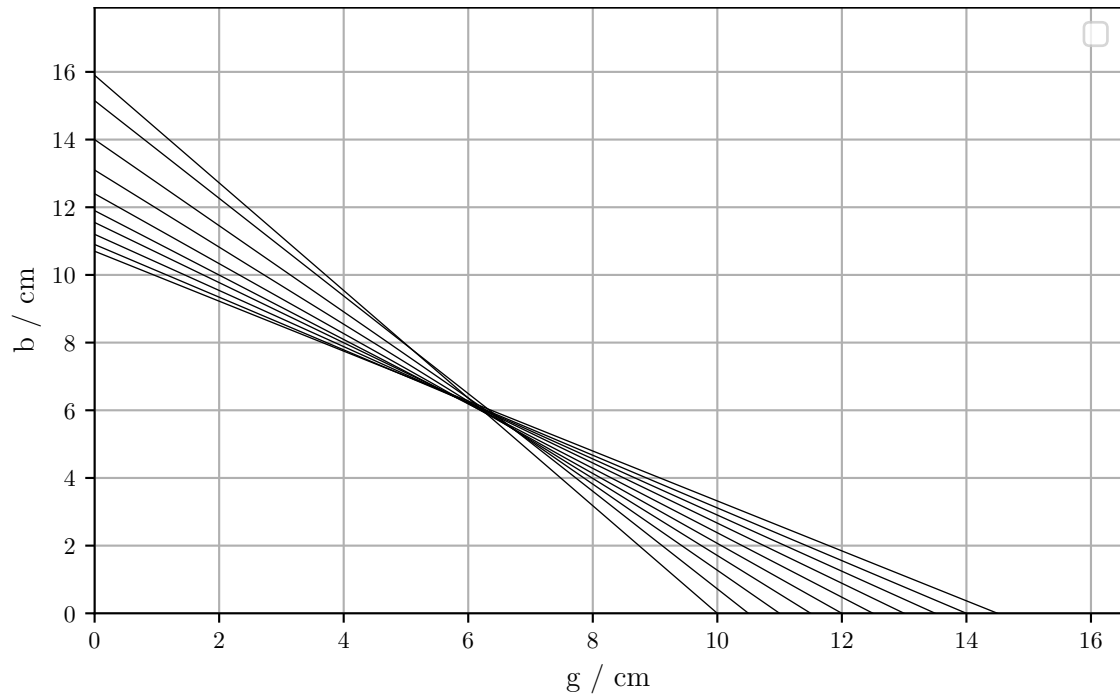


Abbildung 5: Überprüfen der Messgenauigkeit der Wasserlinse

4.3 Methode nach Bessel

Wie in Abschnitt 3.2 der Durchführung beschrieben wird bei der Messung nach Bessel der Abstand zwischen Schirm und Perl variiert. Dieser Abstand wird mit e bezeichnet. Dieser Abstand ist die Differenz zwischen der Position des Schirmes p_0 und des Gegenstandes. Ferner werden die zwei Positionen der Linsen festgehalten, für die das Bild bei gegebenem Abstand e scharf ist. Diese werden mit p_1 und p_2 bezeichnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 dargestellt.

Die Besselsche Methode erfordert die Nutzung der Gleichung (4). Wendet man dies für alle Abstände an, erhält man folgende Werte, die in Tabelle 7 aufgetragen sind:

Mittelt man diese Werte zunächst für f_1 und anschließend für f_2 , so erhält man die Mittelwerte nach Gleichung (7) und deren Fehler nach Gleichung (8). Anschließend werden noch einmal alle Brennweiten gemittelt und zu einer Brennweite zusammengefasst.

$$f_1 = (10,24 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$f_2 = (9,67 \pm 0,03) \text{ cm}$$

$$f = (9,95 \pm 0,07) \text{ cm}$$

Vergleicht man diesen Wert mit den Herstellerangaben von $f = 100 \text{ mm}$, so sieht man, dass die gemessene Brennweite sehr nah an der Herstellerangabe dran ist. Es ergibt sich ein Fehler von lediglich 0,5 %.

Tabelle 4: Messwerte für die Besselsche Methode

p_0 / cm	p_1 / cm	p_2 / cm
65	35.1	51.3
70	34.1	57.2
75	33.3	62.4
80	33.0	68.0
85	32.8	73.0
90	32.5	78.2
95	32.2	83.6
100	32.0	88.7
105	32.2	93.8
110	32.2	99.0

Tabelle 5: Brennweiten nach Bessel

e / cm	f_1 / cm	f_2 / cm
45	10,03	9,53
50	10,12	9,52
55	10,08	9,71
60	10,18	9,60
65	10,28	9,78
70	10,27	9,81
75	10,22	9,67
80	10,20	9,70
85	10,45	9,72
90	10,55	9,66

4.4 Chromatische Abberation und Bessel

Der Aufbau nach Bessel wird nun für einen roten und blauen Filter reproduziert. An dem Prozess ändert sich im Vergleich zu vorher nichts, es wird lediglich jeweils ein roter und ein blauer Filter hinter dem Perl L montiert. Die Positionen der Linsen sind jeweils mit $p_{1,rot}$ und $p_{2,rot}$, bzw. mit $p_{1,blau}$ und $p_{2,blau}$ gekennzeichnet. Die Messwerte sind in Tabelle 6 zusammengefasst.

Tabelle 6: Messwerte für die Besselsche Methode

p_0 / cm	$p_{1,rot} / \text{cm}$	$p_{2,rot} / \text{cm}$	$p_{1,blau} / \text{cm}$	$p_{2,blau} / \text{cm}$
70	34.00	56.75	34.10	56.80
75	33.60	62.70	33.65	62.50
80	33.15	68.00	53.30	67.90
85	32.85	73.35	32.90	73.10
90	32.65	78.40	32.65	78.25

Auch hier wird die Gleichung (4) verwendet. Es ergeben sich dann folgende Werte, die in Tabelle 7 aufgetragen sind:

Tabelle 7: Brennweiten nach Bessel für farbige Filter

e / cm	$f_{1,rot} / \text{cm}$	$f_{2,rot} / \text{cm}$	$f_{1,blau} / \text{cm}$	$f_{2,blau} / \text{cm}$
50	10,08	9,74	10,12	9,72
55	10,24	9,55	10,26	9,66
60	10,27	9,60	14,82	9,66
65	10,31	9,56	10,34	9,72
70	10,36	9,68	10,36	9,78

Mittelt man diese Werte zunächst für $f_{1,rot}$, $f_{2,rot}$, $f_{1,blau}$ und $f_{2,blau}$, so erhält man die Mittelwerte nach Gleichung (7) und deren Fehler nach Gleichung (8). Anschließend werden noch einmal die farblich entsprechenden Brennweiten gemittelt und zu einer Brennweite zusammengefasst.

$$f_{1,rot} = (10,25 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$f_{2,rot} = (9,63 \pm 0,04) \text{ cm}$$

$$f_{rot} = (9,94 \pm 0,11) \text{ cm}$$

$$f_{1,blau} = (11,20 \pm 0,90) \text{ cm}$$

$$f_{2,blau} = (9,70 \pm 0,02) \text{ cm}$$

$$f_{blau} = (10,4 \pm 0,5) \text{ cm}$$

4.5 Methode nach Abbe

Die gemessenen Bildgrößen und Referenzpunktpositionen befinden sich in Tabelle 8. Der Abstand zwischen Gegenstand und Schirm wurde auf 35 cm eingestellt. Aus den

Tabelle 8: Messwerte für die Abbesche Methode

p_A / cm	B / cm
28	4.9
29	5.3
30	4.3
31	3.7
32	3.2
33	3.8
34	2.4
35	2.1
36	1.9
37	1.7

Positionen des Gegenstandes und des Referenzpunktes des Linsensystems lassen sich nun g' und b' bestimmen. Der Abbildungsmaßstab V wird mittels Gleichung (1) und der gemessenen Bildgröße B sowie der bekannten Gegenstandsgröße bestimmt. Die so ermittelten Werte befinden sich in Tabelle 9.

Tabelle 9: Gegenstandsweite, Bildweite und Abbukdungsmaßstab der Abbe Methode

g' / cm	b' / cm	V
8	27	1,63
9	26	1,77
10	25	1,43
11	24	1,23
12	23	1,07
13	22	1,27
14	21	0,80
15	20	0,70
16	19	0,63
17	18	0,57

Nun werden die Gleichungen (5) und (6) mittels Scipy mit

$$y = ax + b$$

linear gefittet, indem g' gegen $1 + 1/V$ und b' gegen $1 + V$ aufgetragen wird. Die so entstandenen Plots sind in den Abbildungen 6 und 7 zu sehen. Bei (5) und (6) entspricht

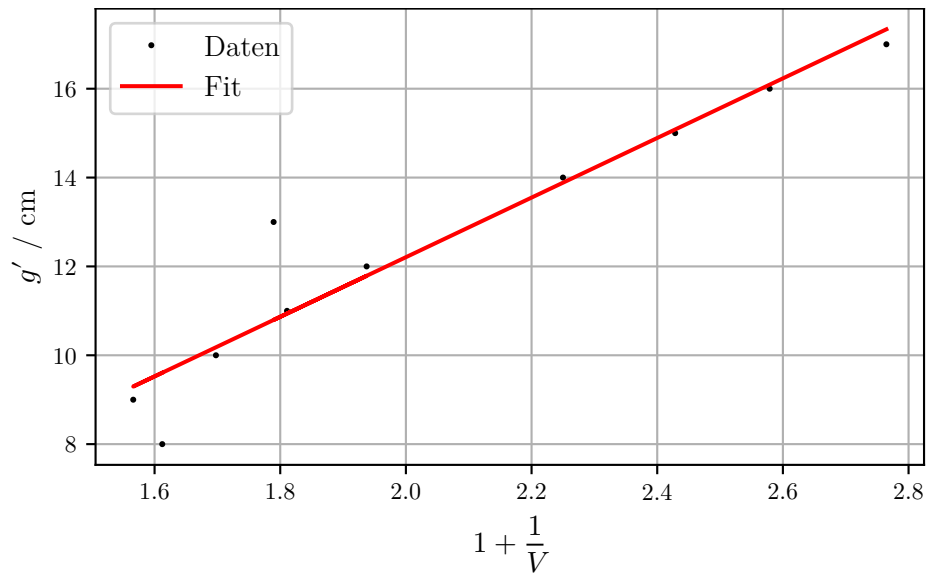


Abbildung 6: Lineare Regression für die Abbe Methode.

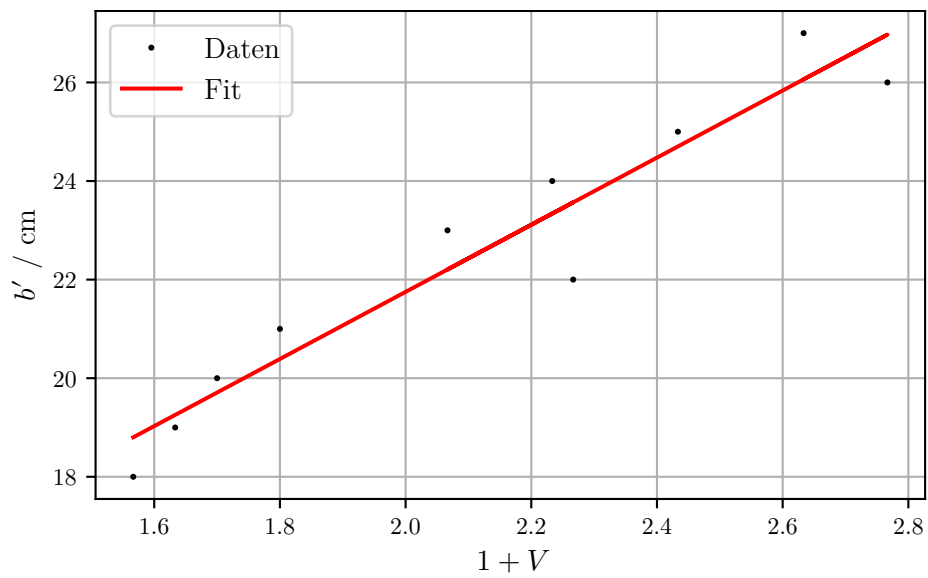


Abbildung 7: Lineare Regression für die Abbe Methode.

der Parameter a der Brennweite der Sammellinse. Der Parameter b entspricht bei der ersten Gleichung dem Abstand h zwischen der ersten Hauptebene und dem Referenzpunkt, bei der zweiten Gleichung entspricht b dem Abstand h' zwischen der zweiten Hauptebene und dem Referenzpunkt. So wurden die Brennweiten und Abstände der Hauptebenen zu

$$\begin{aligned}f_{g'} &= (6,71 \pm 0,76) \text{ cm} \\f_{b'} &= (6,81 \pm 0,71) \text{ cm} \\h &= (-1,21 \pm 1,59) \text{ cm} \\h' &= (8,14 \pm 1,52) \text{ cm}\end{aligned}$$

bestimmt. Die aus $f_{g'}$ und $f_{b'}$ mittels (7) und (8) errechnete mittlere Brennweite beträgt $f_{\text{Abbe}} = (6,8 \pm 0,5) \text{ cm}$. Die Brennweiten der verwendeten Sammel- und Zerstreuungslinse betragen laut Herstellerangabe $\pm 10 \text{ cm}$. Somit ergibt sich eine relative Abweichung von 32%.

5 Diskussion

Die ermittelten Ergebnisse lauten:

$$\begin{aligned}f_{1,\text{analytisch}} &= (4,45 \pm 0,06) \text{ cm} & f_{1,\text{Hersteller}} &= 5 \text{ cm} \\&\Rightarrow \text{Abweichung} = 10 \% \\f_{1,\text{grafisch}} &= 4,58 \text{ cm} & f_{1,\text{Hersteller}} &= 5 \text{ cm} \\&\Rightarrow \text{Abweichung} = 8,4 \% \\f_{\text{Wasser,analytisch}} &= (6,134 \pm 0,010) \text{ cm} & f_{\text{Wasser,grafisch}} &= 6,17 \text{ cm} \\&\Rightarrow \text{Abweichung} = 5,9 \% \\f_{2,\text{Bessel}} &= (9,95 \pm 0,07) \text{ cm} & f_{2,\text{Hersteller}} &= 10 \text{ cm} \\&\Rightarrow \text{Abweichung} = 0,5 \% \\f_{2,\text{Bessel, rot}} &= (9,94 \pm 0,11) \text{ cm} & f_{2,\text{Bessel,blau}} &= (10,4 \pm 0,5) \text{ cm} \\f_{2,\text{Abbe}} &= (6,8 \pm 0,5) \text{ cm} & f_{2,\text{Hersteller}} &= 10 \text{ cm} \\&\Rightarrow \text{Abweichung} = 32 \%\end{aligned}$$

Bei der ersten, direkten Messung sind sowohl das analytische als auch das grafische Ergebnis hinreichend genau. Jedoch ist bei der grafischen Methode ersichtlich, dass wahrscheinlich ein Fehler bei der Bestimmung der Bildweite passiert ist. Dies lässt sich aus der Tatsache folgern, dass in Abbildung 4 der Schnittpunkt der Geraden auf der x-Achse, auf welcher g aufgetragen ist, sehr nah an der Herstellerangabe ist, jedoch auf der y-Achse eine größere Abweichung zeigt. Bei einer genauen Messung sollte die x- und y-Koordinate des Schnittpunktes gleich sein, da beide die Brennweite darstellen. Der Fehler bei der Bildweite ist wahrscheinlich der sehr subjektiven Betrachtung eines "scharfen" Bildes geschuldet. Bei der Wasserlinse gibt es keine Herstellerangabe, da aber

der Schnittpunkt der Geraden in Abbildung 5 die selbe x- und y-Koordinate hat, kann auf eine hohe Messgenauigkeit geschlossen werden und die Brennweite mit hinreichender Genauigkeit zu den oben angegebenen Werten bestimmt werden. Dies bestätigt sich ebenfalls durch die geringe Abweichung zwischen dem analytisch und grafisch bestimmten Ergebnis. Die Bessel Methode liefert ein sehr genaues Messergebnis für die Brennweite der Linse. Bei der Messung der chromatischen Abberation jedoch ist die Brennweite für blaues Licht größer als die für rotes Licht, was den Gesetzen der Optik widerspricht. Da beide Brennweiten jedoch sehr nah aneinander liegen, ist es sehr wahrscheinlich, dass die Messgenauigkeit nicht ausreichend war um diese kleinen Unterschiede aufzulösen. Die Abbe Methode liefert das am stärksten Abweichende Ergebnis für die Brennweite der Linse. Dies geht vermutlich auf Messfehler bei der Bestimmung der Bildgröße zurück, welche mit einem per Hand gehaltenem Lineal durchgeführt wurde und deshalb einen großen Ablesefehler generiert. Zur genauen Überprüfung der Messmethode nach Abbe müsste die Messung erneut mit einer genaueren Messapparatur durchgeführt werden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch V408: Geometrische Optik*. 2018.