

V101

# Das Trägheitsmoment

Jan Lukas Schubert  
jan-lukas.schubert@tu-dortmund.de

Jan Lukas Späh  
janlukas.spah@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.10.17

Abgabe: 08.11.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1	Bestimmung der Apparatekonstanten . . . . .	7
5.1.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße . . . . .	7
5.1.2	Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse . . . . .	8
5.2	Bestimmung der Trägheitsmomente zweier Körper . . . . .	10
5.2.1	Bestimmung des Trägheitsmoments eines Zylinders . . . . .	10
5.2.2	Bestimmung des Trägheitsmoments einer Kugel . . . . .	11
5.3	Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe . . . . .	11
5.3.1	Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe in der ersten Stellung	12
5.3.2	Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe in der zweiten Stellung	13
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>16</b>

# 1 Ziel

In diesem Versuch soll das Trägheitsmoment zweier verschiedener einfacher Körper und einer Modellpuppe in zwei verschiedenen Körperhaltungen bestimmt werden und somit der Steinersche Satz experimentell nachvollzogen werden. Die Messergebnisse sollen mit den theoretisch berechneten Werten der Körper bzw. den zu erwartenden Werten des Modells der Puppe verglichen werden.

## 2 Theorie

Um Rotationsbewegungen angemessen zu beschreiben, sollten zunächst Begriffe eingeführt werden, die in Analogie zu den Begriffen der Translation stehen.

Die Trägheit eines Körpers gegen eine translatorische Beschleunigung  $\mathbf{a}$ <sup>1</sup> durch eine Kraft  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  ist in der klassischen Mechanik die Masse  $m$  eines Körpers<sup>2</sup>. Diese Rolle spielt bei Rotationsbewegungen der Trägheitstensor, der sich in einfacher Betrachtung bei Drehung um eine fest vorgegebene Achse auf das skalare Trägheitsmoment  $I$  reduziert.

Das Trägheitsmoment  $I$  errechnet sich hierbei durch

$$I = \int r_{\perp}^2 dm, \quad (1)$$

wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Das Integral ist hierbei als Volumenintegral über den Körper zu verstehen. Verläuft die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers, so muss nach dem Satz von Steiner noch ein Summand hinzu addiert werden:

$$I = I_s + m\mathbf{a}^2. \quad (2)$$

Dabei ist  $m$  die Masse des Körpers,  $I_s$  das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers und  $a$  der Abstand der realen Drehachse zu dieser. Mithilfe dieses Satzes lassen sich die Trägheitsmomente komplexer Körper einfach berechnen, indem der Körper in mehrere einfacher zu berechnende Körper aufgeteilt wird und deren Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse berechnet und anschließend aufaddiert werden.

Wirkt auf den drehbaren Körper eine Kraft  $\mathbf{F}$  im Abstand  $\mathbf{r}$  und somit ein äußeres Drehmoment der Größe  $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$ , so wird er um einen Winkel  $\phi$  ausgelenkt, bis sich ein Gleichgewicht zwischen innerem Drehmoment, das durch die Spiralfeder erzeugt wird, und äußerem Drehmoment einstellt. Für das innere Drehmoment ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{M} = D\phi. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Im Folgenden werden vektorielle Größen fett gedruckt. Sind diese Größen in einem anderen Zusammenhang nicht fett gedruckt, so ist der Betrag des Vektors gemeint.

<sup>2</sup>Im folgenden wird  $\frac{dm}{dt} = 0$  vorausgesetzt, sodass  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$  gilt.

Dabei ist  $\phi$  der Winkel der Auslenkung und  $D$  die Winkelrichtgröße. Diese stellt ein Analogon zur Federkonstante bei translatorischen Bewegungen dar. Zeigt die wirkende Kraft  $\mathbf{F}$  in Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{e}$  in Polarkoordinaten und steht somit senkrecht zum Hebelarm  $\mathbf{r}$ , so ergibt sich die Winkelrichtgröße zu

$$D = \frac{Fr}{\phi}. \quad (4)$$

Wird der Körper nun losgelassen, verschwindet das äußere Drehmoment. Das innere rücktreibende Drehmoment sorgt dafür, dass der Körper harmonisch schwingt. Für die Schwingungsdauer  $T$  ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (5)$$

wobei  $I$  das gesamte Trägheitsmoment darstellt. Wird das gesamte Trägheitsmoment  $I$  nun in die einzelnen Trägheitsmomente  $I_D$  der Drillachse und  $I_K$  des Körpers aufgeteilt und nach  $I_K$  umgestellt, so ergibt sich für das Trägheitsmoment des Körpers

$$I_K = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_D. \quad (6)$$

Für die im Versuch verwendeten Körper ergeben sich aus (1) und (2) folgende Formeln für das Trägheitsmoment:

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (7)$$

$$I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (8)$$

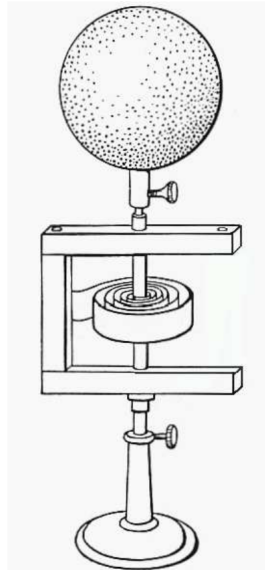
$$I_{\text{Puppe1}} = I_K + I_R + 2\left(I_A + m_A(R_R + R_A)^2\right) + 2\left(I_B + m_B\left(\frac{h_B}{2}\right)^2\right) \quad (9)$$

$$I_{\text{Puppe2}} = I_K + I_R + 2\left(I_A + m_A\left(R_R + \frac{h_A}{2}\right)^2\right) + 2\left(I_B + m_B\left(\frac{h_B}{2}\right)^2\right) \quad (10)$$

Dabei ist  $I_{\text{Puppe1}}$  das gesamte Trägheitsmoment der Puppe in der ersten Haltung und  $I_{\text{Puppe2}}$  das gesamte Trägheitsmoment der Puppe in der zweiten Körperhaltung.  $I_K$  ist das Trägheitsmoment des Kopfes,  $I_R$  das Trägheitsmoment des Rumpfes,  $I_A$  das Trägheitsmoment eines Armes und  $I_B$  das Trägheitsmoment eines Beines.  $R_R$  und  $R_A$  sind die zugehörigen Radien,  $h_A$  und  $h_B$  die zugehörigen Höhen und  $m_A$  und  $m_B$  die zugehörigen Massen. Die quadrierten Summanden folgen aus der Geometrie der Puppe. Zudem ist zu beachten, dass  $I_{\text{Arm}}$  in (9) und (10) unterschiedliche Werte annimmt, da die Arme um verschiedene Achsen gedreht werden. Die Masse  $m$  des jeweiligen Körperteils kann über  $m = \rho V$  bestimmt werden, wobei  $\rho$  die Dichte des Materials und  $V$  das Volumen des jeweiligen Körperteils ist.

### 3 Durchführung

Zur Bestimmung der Trägheitsmomente der verschiedenen Körper müssen zunächst die Apparaturkonstanten, also die Winkelrichtgröße  $D$  und das Trägheitsmoment der Drillachse  $I_D$ , bestimmt werden.



**Abbildung 1:** Aufbau der Apparatur, hier mit eingespannter Kugel [1]

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße wird ein Stab in die Apparatur eingeschraubt und um verschiedene Winkel  $\phi$  ausgelenkt. Mit einer Federwaage wird die im Abstand  $r$  wirkende rücktreibende Kraft gemessen. Dabei muss darauf geachtet werden, dass der Auslenkungswinkel nicht größer als  $360^\circ$  ist, um inelastische Verformungen der Spiralfeder zu vermeiden, und darauf, dass die Kraft immer in Richtung des Einheitsvektors  $e$  gemessen wird, da ansonsten der Zusammenhang aus (4) nicht mehr gilt. Die Messung wird für zehn verschiedene Winkel  $\phi$  durchgeführt.

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse werden an den zuvor eingespannten Stab zwei gleich große Massen im jeweils gleichen Abstand  $r$  von der Drehachse gehängt. Danach wird die Stange aus ihrer Ruhelage um einen kleinen Winkel  $\phi$  ausgelenkt und die Schwingungsdauer bestimmt. Dabei wird bereits bei der Messung über zwei Periodendauern gemittelt. Die Messung wird für zehn verschiedene Abstände  $r$  der Massen von der Drehachse durchgeführt. Zum Schluss werden noch die Massen der beiden Gewichte bestimmt.

Im Anschluss daran sollen die Trägheitsmomente zweier Körper, hier das einer Kugel und das eines Zylinders, bestimmt werden. Dafür wird zunächst der jeweilige Körper in die Apparatur eingespannt und anschließend die Schwingungsdauer bei einer Auslenkung zwischen etwa  $60^\circ$  und  $100^\circ$  gemessen. Bei der Messung wird hier bereits über drei

Periodendauern gemittelt. Je nach Verteilung der Messwerte wird die Messung mehr oder weniger oft wiederholt. Bei kleinen Abweichungen genügen bereits wenige Messungen, bei größeren Abweichungen werden entsprechend mehr benötigt. Am Ende müssen noch die geometrischen Abmessungen der Körper mithilfe einer Schieblehre, sowie die Massen der Körper bestimmt werden.

Für die Puppe soll das Trägheitsmoment in zwei verschiedenen Körperhaltungen bestimmt werden. Als erste Körperhaltung wurden angelegte Arme und um einen Winkel von  $90^\circ$  nach vorne und hinten abgespreizte Beine gewählt. Die Puppe wird in die Apparatur eingespannt und erneut wird die Periodendauer bei einer Auslenkung zwischen  $60^\circ$  und  $100^\circ$  über drei Periodendauern gemittelt gemessen. Auch hier wird die Messung je nach Bedarf unterschiedlich häufig wiederholt. Daraufhin wird die Puppe in eine andere Körperhaltung gebracht. Hier wurden jeweils rechtwinklig nach vorne und hinten abgespreizte Beine, sowie rechtwinklig zu den Seiten ausgestreckte Arme gewählt. Bei der Messung wird genau so verfahren wie bei der anderen Körperhaltung.

## 4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Stichprobe von  $N$  Werten wird durch

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \quad (11)$$

berechnet. Die empirische Standardabweichung dieser Stichprobe ist durch

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

gegeben. Ist  $f$  eine Funktion, die von unsicheren Variablen  $x_i$  mit Standardabweichungen  $\sigma_i$  abhängt, so ist die Unsicherheit von  $f$

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2}. \quad (13)$$

Diese Formel bezeichnet man als "Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz".

Bei einer linearen Regression folgt eine Ausgleichsgerade

$$y(x) = ax + b \quad (14)$$

mit der Steigung  $a$  und dem Ordinatenabschnitt  $b$ . Liegen Fehler in  $y$ -Richtung und nur in  $y$ -Richtung vor, dann sind die Parameter  $a$  und  $b$  selbst unsicher und ergeben sich zu

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (15)$$

$$b = \frac{\bar{y} - \bar{x}^2 - \overline{xy} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (16)$$

Wenn im Folgenden Mittelwerte, Standardabweichungen und Fehler von Funktionen unsicherer Größen berechnet werden, so werden stets die obigen Formeln verwendet. Lineare Regressionen werden mit IPython 5.3.0 in Python 3.6.1 durchgeführt.

## 5 Auswertung

### 5.1 Bestimmung der Apparatkonstanten

Im Folgenden werden die Winkelrichtgröße  $D$  der Spiralfeder und das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  der Drillachse aus den aufgenommenen Messwerten berechnet.

#### 5.1.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Die Messwerte, die zur Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D$  herangezogen werden, sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Bei der Messung wurde die Federwaage in dem konstanten Abstand  $r = 9,1 \text{ cm}$  angesetzt.

**Tabelle 1:** Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße

$\varphi/\text{grad}$	$F/\text{N}$
60	0.19
60	0.19
90	0.31
90	0.29
120	0.41
120	0.41
150	0.60
150	0.61
180	0.73
180	0.75
210	0.89
210	0.88
240	1.01
240	1.02
270	1.13
270	1.19
300	1.39
300	1.31
330	1.43
330	1.44

Werden diese Messwerte gemittelt und in (4) eingesetzt, ergibt sich für die Winkelrichtgröße

$$D = (0,0207 \pm 0,0024) \text{ N m}, \quad (17)$$

wobei die relative Unsicherheit 11,6% ist.

### 5.1.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Zuerst werden aus der Periodendauer  $T$  der Schwingung der Massen und ihrem Abstand  $r$  von der Drehachse ihre Quadrate gebildet, um eine lineare Regression von  $T^2$  gegen  $r^2$  zu bilden. Das ist möglich, da nach der Schwingungsgleichung (5) und  $I = I_D + 2\overline{m}r^2$  durch Anwendung des Steiner'schen Satzes (2)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(I_D + \overline{m}r^2) \propto r^2 \quad (18)$$

gilt. Hierbei ist

$$\overline{m} = \frac{m_1 + m_2}{2} = 227,45 \text{ g} \quad (19)$$



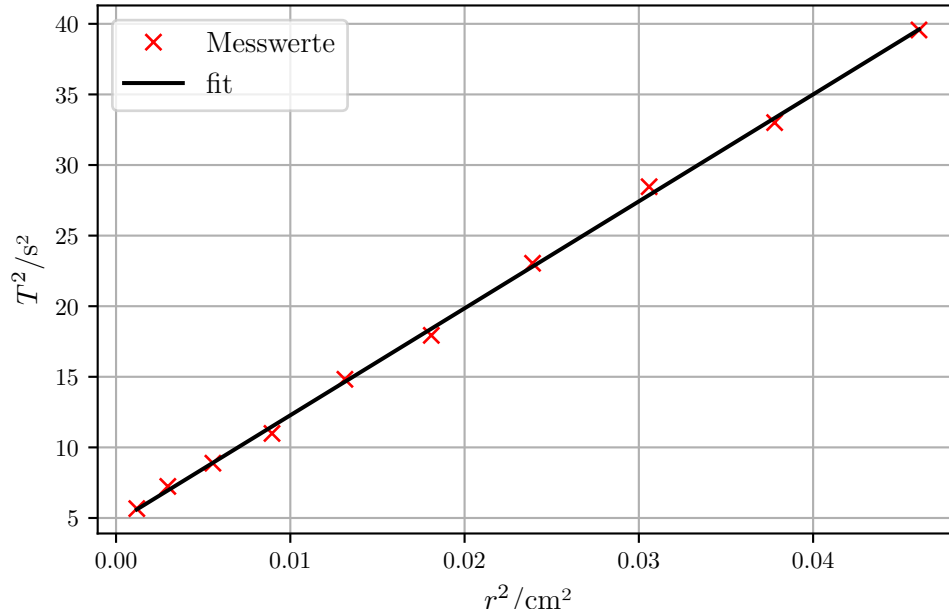
der Mittelwert der angehängten Massen, sodass (18) kompakt geschrieben werden kann.  $r$  ist der Abstand bis zum Schwerpunktes der als Punktmassen angenommenen Zylinder, der sich nach

$$r = r_{\text{bis Zylinder}} + \frac{h_{\text{Zylinder}}}{2} \quad (20)$$

mit  $h_{\text{Zylinder}} = 2,98 \text{ cm}$  berechnet. Die lineare Regression der Werte aus Tabelle 2 ist in Abbildung 2 zu sehen.

**Tabelle 2:** Messdaten zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

$r/\text{cm}$	$T/\text{s}$	$r^2/\text{cm}^2$	$T^2/\text{s}^2$
1.96	2.38	3.84	5.66
3.96	2.69	15.68	7.24
5.97	2.98	35.58	8.88
7.97	3.31	63.52	10.99
9.97	3.85	99.40	14.82
11.96	4.24	143.04	17.94
13.97	4.80	195.16	23.04
16.00	5.33	256.00	28.46
17.95	5.75	322.21	33.01
19.98	6.29	399.00	39.56



**Abbildung 2:** Graph von  $T^2$  gegen  $r^2$  und Fit

Die Regressionsgerade folgt der allgemeinen Geradengleichung

$$T^2(r^2) = ar^2 + b. \quad (21)$$

Die Regressionsparameter  $a$  und  $b$  ergeben sich hierbei zu

$$a = (757,48 \pm 7,97) \text{ s}^2/\text{m}^2, \quad (22)$$

$$b = (4,70 \pm 0,19) \text{ s}^2. \quad (23)$$

Durch Kombination von (21) mit (18) folgt für das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  der Drillachse

$$I_D = \frac{2b\overline{m}}{a} = (2,82 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (24)$$

mit einer relativen Unsicherheit von 4,3%.

## 5.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zweier Körper

Es sollten die Trägheitsmomente zweier Körper experimentell bestimmt und mit dem theoretisch berechneten Wert verglichen werden. Es wurde ein massiver Zylinder und eine recht leichte Kugel ausgewählt.

### 5.2.1 Bestimmung des Trägheitsmoments eines Zylinders

Die Abmessungen des untersuchten Zylinders sind  $h_z = 13,99 \text{ cm}$  und  $d_z = 10 \text{ cm}$ , seine Masse  $m_z = 2,3959 \text{ kg}$ . Die gemessenen Periodendauern sind in 3 zusammengefasst.

**Tabelle 3:** Periodendauern der Rotation des Zylinders

$3T_z/\text{s}$	$T_z/\text{s}$
6.73	2.24
6.72	2.24
6.80	2.27
6.73	2.24
6.73	2.24

Durch ihre Mittelung auf  $T_z = (2,25 \pm 0,01) \text{ s}$  und (6) lässt sich

$$I_{z,\text{exp}} = \frac{DT_z^2}{4\pi^2} - I_D = (-0,18 \pm 0,33) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (25)$$

berechnen. Der theoretisch berechnete Wert für das Trägheitsmoment eines Zylinders bei Rotation um die Symmetrieachse ist nach (8)

$$I_{z,\text{theo}} = 2,99 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (26)$$

Es ist auffällig, dass eine Berechnung nach (5) zu einem konsistenteren Wert von  $(2,64 \pm 0,33) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  mit einem relativen Fehler zum Theoriewert von 11.7% führt. Diese alternative Berechnung bedeutet anschaulich eine Vernachlässigung des Eigenträgheitsmoments  $I_D$  der Drillachse.

### 5.2.2 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Kugel

Der Durchmesser der untersuchten Kugel beträgt  $d_k = (13,724 \pm 0,014) \text{ cm}$ , ist also nur minimal fehlerbehaftet. Die Masse der Kugel wurde bestimmt zu  $m_k = 812,5 \text{ g}$ . Die Messwerte der Periodendauern finden sich in Tabelle 4, ihr Mittelwert ist hier  $T_k = (1,69 \pm 0,02) \text{ s}$ .

**Tabelle 4:** Periodendauern der Rotation der Kugel

$3T_k/\text{s}$	$T_k/\text{s}$
5.03	1.68
5.06	1.69
5.09	1.70
5.09	1.70
5.24	1.75
5.01	1.67
5.12	1.71
5.13	1.71
4.96	1.65
5.07	1.69

Wird erneut (6) verwendet, ergibt sich

$$I_{k,\text{exp}} = \frac{DT_k^2}{4\pi^2} - I_D = (-1,32 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (27)$$

Für das Trägheitsmoment der Kugel gemäß (7) folgt

$$I_{k,\text{theo}} = (1,530 \pm 0,003) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (28)$$

Wird stattdessen der experimentelle Wert mit (5) berechnet, ergibt dieser sich zu  $(1,50 \pm 0,18) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  mit einem relativen Fehler von 1,96%.

### 5.3 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Modellpuppe

Zuletzt ist das Trägheitsmoment einer Modellpuppe in zwei verschiedenen Körperhaltungen experimentell zu bestimmen und mit theoretischen Berechnungen zu vergleichen. Die Körperhaltungen sind dabei in Kapitel 3 beschrieben. Um Massen berechnen zu

können, wurde für das Holz Ahorn mit einer Dichte von  $\rho = 650 \text{ kg/m}^3$  [2] angenommen. Zusammen mit der Dichte lassen sich die Trägheitsmomente der Puppen in verschiedenen Körperhaltungen berechnen, wenn ihre Maße bekannt sind. Dabei bezeichnet  $d$  den Durchmesser,  $h$  die Höhe eines Körperteils, siehe dazu auch die Erklärungen bei (9) und (10).

**Tabelle 5:** Maße der Puppe

$d_K/\text{cm}$	$h_A/\text{cm}$	$d_A/\text{cm}$	$d_R/\text{cm}$	$h_R/\text{cm}$	$h_B/\text{cm}$	$d_B/\text{cm}$
3.10	14	1.43	3.60	9.76	15.38	1.68

### 5.3.1 Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe in der ersten Stellung

Die Messreihe findet sich in Tabelle 6.

**Tabelle 6:** Periodendauern der Rotation der Puppe in erster Haltung

$3T_{p1}/\text{s}$	$T_{p1}/\text{s}$
2.30	0.77
2.36	0.79
2.38	0.79
2.40	0.80
2.29	0.76
2.30	0.77
2.40	0.80
2.38	0.79
2.33	0.78
2.32	0.77

Daraus ergibt sich nach Mittelung der Periodendauern  $T_{p1} = (0,78 \pm 0,01) \text{ s}$ . Wird dieser Wert in (6) eingesetzt, ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$I_{p1,\text{exp}} = \frac{DT_{p1}^2}{4\pi^2} - I_D = (-2,50 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (29)$$

In Kapitel 2 wurde bereits in (9) die Formel für den theoretischen Wert des Trägheitsmoments angegeben. Werden nun die in Tabelle 5 angegebenen Werte eingesetzt, folgt für das modellierte Trägheitsmoment der Puppe in der ersten Haltung

$$I_{p1,\text{theo}} = 0,58 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (30)$$

Wird das Eigenträgheitsmoment der Drillachse vernachlässigt, so folgt ein Wert von  $(0,32 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  für das Trägheitsmoment der Puppe mit einer Abweichung von

97,6%. Auf eine Angabe einer Abweichung zum negativen experimentellen Wert wird verzichtet, da ein negatives Trägheitsmoment ohnehin physikalisch nicht sinnvoll ist.

### 5.3.2 Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe in der zweiten Stellung

Die gemittelte Periodendauer der Rotation der zweiten Puppe lässt sich aus Tabelle 7 errechnen zu  $T_{p2} = (0,96 \pm 0,01)$  s.

**Tabelle 7:** Periodendauern der Rotation der Puppe in zweiter Haltung

$3T_{p2}/s$	$T_{p2}/s$
2.93	0.98
2.83	0.94
2.86	0.95
2.90	0.97
2.86	0.95
2.87	0.96
2.90	0.97
2.83	0.94
2.84	0.95
2.83	0.94

Schlussendlich folgt für das Trägheitsmoment in der zweiten Haltung nach Einsetzen der gemittelten Periodendauer in (6)

$$I_{p2,exp} = \frac{DT_{p2}^2}{4\pi^2} - I_D = (-2,35 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (31)$$

Der theoretische Wert ergibt sich dann nach Einsetzen in (9) für den theoretischen Wert

$$I_{p2,theo} = 0,64 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (32)$$

Wird der empirische Wert nach (5) berechnet, sodass das Eigenträgheitsmoment der Drillachse als 0 angenommen wird, so folgt ein Wert von  $(0,48 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  für das Trägheitsmoment der Puppe mit einer Abweichung von 98,3%. Auf eine Angabe einer Abweichung zum negativen Wert wird erneut verzichtet.

## 6 Diskussion

Die Methode der Bestimmung des Trägheitsmoments durch Messung der Schwingungsdauer der Figur auf einer mit einer Spiralfeder verbundenen Drillachse ist als ungenau zu bewerten. Die Werte für den Zylinder und die Kugel sind mit  $I_{\text{Zylinder}} = (-0,18 \pm 0,33) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  und  $I_{\text{Kugel}} = (-1,32 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  negativ. Dies deutet auf einen Fehler bei der Messung hin, da Trägheitsmomente positive Werte haben. Der Fehler entsteht hierbei vermutlich bei der Messung des Trägheitsmomentes der Drillachse, das am Ende von jedem gemessenen Trägheitsmoment subtrahiert werden muss. Wie in der Auswertung bereits angemerkt, ergeben sich ohne diese Subtraktion konsistentere Werte. Ungenauigkeiten entstehen hierbei dadurch, dass die Stange als masselos und die aufgesteckten Gewichte als Punktmassen angenommen werden. Zudem ist die Schwingungsdauer bei diesem Versuch im Vergleich zu den anderen Schwingungsdauern relativ groß, sodass hier der Umkehrpunkt der Pendelbewegung nicht genau bestimmt werden kann, was zu weiteren Ungenauigkeiten führt. Desweiteren sind die Massen der angehängten Gewichte leicht unterschiedlich, sodass die Drehachse nicht genau durch den Schwerpunkt des Systems geht.

Ein weiterer Faktor, der für die starke Abweichungen der Ergebnisse von den Theoriewerten verantwortlich sein könnte, ist die Messung des Direktionsmomentes der Drillachse. Zum Einen kann es hier zu Ungenauigkeiten dadurch kommen, dass der Kraftmesser nicht genau in Winkelrichtung zeigt, und zum Anderen dadurch, dass kein perfekt linearer Zusammenhang zwischen Auslenkung und Kraft besteht.

Die Messergebnisse für die Trägheitsmomente der Puppe weichen in beiden Haltungen mit  $I_{\text{p1,exp}} = (-2,50 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  und  $I_{\text{p2,exp}} = (-2,35 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  sehr stark von den theoretischen Erwartungswerten  $I_{\text{p1,theo}} = 0,58 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  und  $I_{\text{p2,theo}} = 0,64 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$  ab. Selbst bei Annahme eines verschwindenden Eigenträgheitsmoments der Drillachse sind die Abweichungen noch groß.

Ein möglicher Grund dafür ist das Entstehen systematischer Fehler dadurch, dass die Puppe während der Messung nicht immer in der gleichen Position bleibt. Die ausgestreckten Körperteile der Puppe sacken während des Messvorgangs geringfügig ab, sodass sie sich nicht perfekt um ihre in der Theorie angenommene Achse drehen.

Desweiteren stand die Puppe während des gesamten Versuchs leicht schief. Eine Messung mit angelegten Armen und Beinen war gar nicht möglich, da die Puppe so nicht stabil rotierte. Während des gesamten Versuchs rotierte die Puppe also nicht genau um eine Achse durch ihren Schwerpunkt, sondern um eine leicht zu dieser verschobenen Achse. Somit sind auch hierfür die theoretischen Annahmen für die Drehachsen nicht genau.

Eine weitere Unsicherheit bei der Berechnung des Theoriewertes stellt die Dichte des Materials der Puppe dar. Farblich weist das Holz eine starke Ähnlichkeit zu Ahornholz auf, andere Holzarten sind jedoch auch nicht auszuschließen.

Im Allgemeinen ist der theoretische Erwartungswert bei dieser Methode sehr ungenau, da die Puppe als aus einer Kugel, einem Zylinder als Rumpf, zwei Zylindern als Arme und zwei Zylindern als Beine zusammengesetzt angenommen wird. In der Realität ist jedoch die Form deutlich komplexer. Zudem ergeben sich, wenn die Masse über das Volumen und die Dichte bestimmt wird, für die einzelnen Körperteile starke Abhängigkeiten vom Radius von  $r^5$  für den Kopf und  $r^4$  für die restlichen Körperteile. Eine geringfügige Änderung des Radiuses kann also enorme Änderungen in dem berechneten Theoriewert hervorrufen. Da die gemessenen Durchmesser nur geschätzte Mittelwerte für das jeweilige Körperteil sind, entstehen hier bereits bei der Berechnung der Theoriewerte sehr große systematische Fehler.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 101: Das Trägheitsmoment*. [Online; aufgerufen am 24.10.2017]. 2017. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf>.
- [2] Arche Naturwaren. *Ahorn*. [Online; aufgerufen am 01.11.2017]. c.2005-2017. URL: <http://www.arche-naturwaren.de/glossar/ahorn/>.