

V406

Beugung am Spalt

Samuel Haefs

samuel.haefs@tu-dortmund.de

Max Koch

max.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 09.06.2020

Abgabe: 30.06.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemein	3
2.2	Beugung am Parallelspalt	3
2.3	Beugung am Doppelspalt	5
2.4	Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation	5
3	Durchführung	6
4	Auswertung	6
4.1	Einzelspalt	6
4.2	Doppelspalt	9
5	Diskussion	11
5.1	Einzelspalt	11
5.2	Doppelspalt	11
	Literatur	11

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist die Untersuchung verschiedener Beugungsfiguren. Dazu wird Licht zuerst durch einen Einfachspalt gelenkt und danach durch einen Doppelspalt.

2 Theorie

2.1 Allgemein

Trifft Licht auf einen Spalt oder ein kleines undurchlässiges Hinderniss, so weicht das Bild von den Gesetzen der geometrischen Optik ab. Dies wird als Beugung des Lichtes bezeichnet. Wird die Ausbreitung von Licht als klassische Welle beschrieben, so kann die Beugung erklärt werden. Dabei wird der Teilchencharakter des Lichts vernachlässigt.

2.2 Beugung am Parallelschlalt

Um die Beugung am Spalt zu untersuchen wird entweder die Fresnelsche oder die Fraunhofersche Lichtbeugung verwendet. Bei der Fresnelschen Näherung wird von einem geringen Abstand zwischen Lichtquelle - Spalt und Spalt - Beobachtungspunkt P ausgegangen. Also interferieren Lichtstrahlen im Punkt P .

Ist die Lichtquelle weit vom Spalt entfernt, so kann die Fraunhofersche Näherung verwendet werden. Es wird außerdem angenommen, dass sich der Beobachtungspunkt P im unendlichen befindet. Das hat zur Folge, dass alle Strahlen die in P interferieren unter den gleichen Winkel φ gebeugt werden. In Abb. 1 ist die Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung schematisch skizziert. Ab hier wird nur die Fraunhofersche Beugung betrachtet.

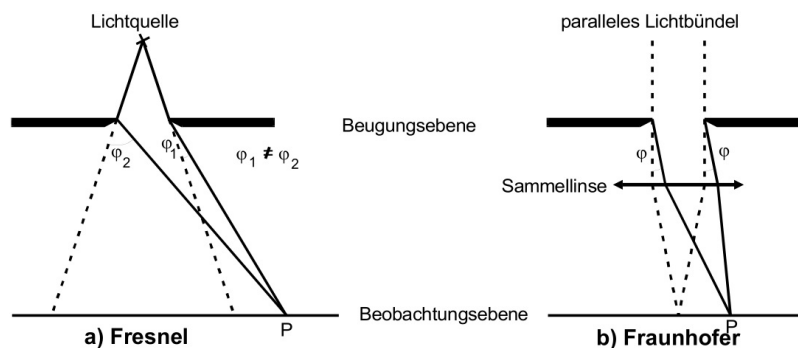


Abbildung 1: Die Fresnelsche (a) und Fraunhofersche Beugung (b) an einem Spalt.
[1, S. 2]

Das erste Beugungsobjekt ist ein Spalt mit der Breite b und einer Länge $l \gg b$. Das Licht wird also näherungsweise nur in einer Dimension begrenzt. Die einfallende Welle hat die Feldstärke

$$A(z, t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda})}$$

pro Längeneinheit der Wellenfront aus z-Richtung. In dem Versuch wird als Lichtquelle ein Laser verwendet. Die Entfernung zum Beobachtungspunkt P ist groß zur Spaltbreite b .

Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront eine Elementarwelle aussendet. Diese haben die Form einer Kugelwelle und interferieren miteinander und erzeugen eine neue Wellenfront. Die Wellenfront entspricht der Einhüllenden der Elementarwellen. Trifft Licht also durch den Spalt, so kann es sich nicht nur in die ursprüngliche Richtung ausbreiten, sondern sendet von jedem Punkt der Spaltöffnung eine Kugelwelle aus. Zwei Strahlenbündel haben einen Phasenunterschied von

$$\delta = \frac{2\pi x \sin(\varphi)}{\lambda}. \quad (1)$$

Die Breite x zwischen den Strahlenbündel sind infinitesimal klein und es kann über die gesamte Spaltbreite integriert werden:

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \int_0^b e^{i(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta)} dx \quad (2)$$

$$= A_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda})} \cdot e^{\frac{\pi i b \sin \varphi}{\lambda}} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \cdot \sin\left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}\right) \quad (3)$$

Die ersten beiden Exponentialfunktionen sind für die Intensitätsmessung unwichtig und Gleichung (3) kann zu

$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin \mu}{\mu} \quad \text{mit } \mu = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \quad (4)$$

vereinfacht werden. Die Funktion ist in Abb. 2 dargestellt. Die Nullstellen liegen bei $\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b}$ für $n = 1, 2, \dots$. Die Amplitude kann durch die hohe Lichtfrequenz nicht

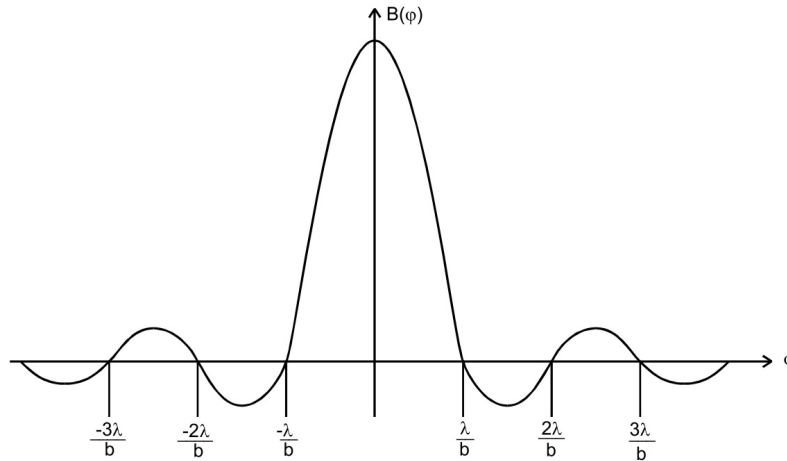


Abbildung 2: Die Funktion (3) der Amplitude an einem Parallelschlitz gebeugten Ebenwelle graphisch dargestellt. [1, S. 4]

direkt gemessen werden. Daher wird die zeitlich gemittelte Intensität mithilfe von

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \quad (5)$$

ausgewertet. Die Beugungsfigur (5) kann nicht negativ werden. D.h. die Nulldurchgänge stellen die Minima dar. Die dazwischenliegenden Maxima nehmen mit dem Quadrat des Beugungswinkel ab.

2.3 Beugung am Doppelspalt

Fällt Licht durch einen Doppelspalt (siehe Abb. 3), so kann die Beugungsverteilung als Überlagerung zweier Einfachspalte mit der Breite b und dem Abstand s behandelt werden. Die Intensitätsverteilung des Beugungsbildes ist durch

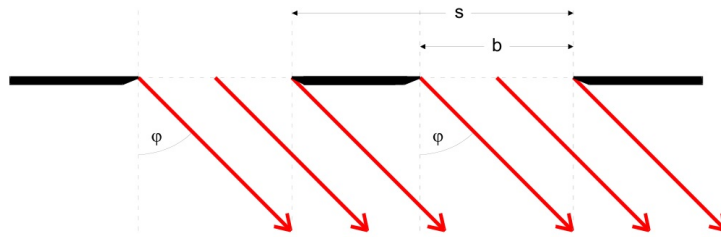


Abbildung 3: Beugung an einem Doppelspalt schematisch dargestellt. [1, S. 5]

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \quad (6)$$

gegeben. Die Funktion der Beugungsfigur setzt sich aus der Beugungsfigur eines Einfachspalts und einem \cos^2 -Term zusammen. Zusätzlich zu den Nullstellen des Einfachspalts existieren weitere Intensitätsminima:

$$\varphi(k) = \arcsin \left(\frac{2k+1}{2s} \right) \cdot \lambda \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots$$

2.4 Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation

Das Beugungsbild $B(\varphi)$ (6) kann als Fourier-Transformierte der einfallenden Welle interpretiert werden. Die Fouriertransformation ist allgemein wie folgt definiert:

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \quad (7)$$

Die Aperturfunktion $f(x)$ beschreibt die Gestalt des Spalts und hat hier die Form

$$f(x) = \begin{cases} A_0, & 0 \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (8)$$

Nach einsetzen der Apertfunktion (8) in die Fouriertransformation (7) und anschließendem umformen, ergibt sich

$$g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} e^{\frac{i\xi b}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\xi b}{2}\right). \quad (9)$$

Wird

$$\xi = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}$$

gesetzt, so ergibt sich die zuvor berechnete Beugungsfigur (3). Das Huygenssche Prinzip wird also durch die Fouriertransformation mathematisch beschrieben. Die Fouriertransformation ist rückführbar, daher kann aus der Amplitudenfunktion die Gestalt des beugenden Objektes $f(x)$ ermittelt werden.

3 Durchführung

Zuerst wird das Beugungsbild eines einzelnen Spaltes aufgenommen. Dazu wird der Detektor in der Mittelstellung des Messverschiebereiters fixiert. Die Spaltblende wird so justiert, dass das Hauptmaxima im Beugungsbild auf den Detektorspalt trifft und die Nebenmaxima links und rechts vom Detektor die gleiche Intensität aufweisen. Im Anschluss wird die Intensität $I(\xi)$ in Abhängigkeit der Detektorstellung ξ aufgenommen. Es werden 50 Messwerte auf einem Verschiebeweg von insgesamt 50 mm aufgenommen. Das Messintervall $\Delta\xi$ wird dabei kleiner umso näher man dem Maximum kommt. Zur Auswertung wird $I(\varphi)$ benötigt und kann nach trigonometrischen Beziehungen bestimmt werden

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\xi - \xi_0}{L}. \quad (10)$$

Dabei ist L der Abstand zwischen Beugungsobjekt und Detektorblende und ξ_0 die Detektorstellung für die Richtung des ungebeugten Strahls. Zusätzlich wird noch die Breite b vom Beugungsspalt abgelesen und notiert.

Analog zum Einzelspalt wird die Intensitätsverteilung des Doppelspalts aufgenommen. Zuletzt wird wieder die Spaltbreite b und zusätzlich der Abstand zwischen den Spalten g notiert.

4 Auswertung

4.1 Einzelspalt

Die aufgenommenen Messwerte zum Einzelspalt sind in der Tabelle 1 zu finden. Zunächst wird die Position des Intensitätsmessgeräts x in den Winkel ϕ umgerechnet. Dafür wird x zunächst um $x_0 = 25,75$ mm verschoben. Daraufhin wird eine Kleinwinkelnäherung

$$\phi \approx \tan \phi = \frac{x - x_0}{L}$$

durchgeführt. Die Größe $L = 0,85$ m entspricht hierbei dem Abstand von Spalt zum Schirm. Außerdem wird der Dunkelstrom I_{dun} von dem gemessenen Strom I subtrahiert,

da der Dunkelstrom nicht in die Auswertung mit einfließen soll. Nun wird eine Ausgleichsrechnung mit der Gleichung 5 durchgeführt. Die Parameter A_0 und b werden mithilfe des Python Paket scipy [3] berechnet. Sie entsprechen den Werten

$$A_0 = 8,154 \cdot 10^{-6}$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\pi b} = 1,683 \text{ mm}.$$

Durch den Fitparameter kann nun die Spaltbreite b bestimmt werden, sie beträgt $b = 0.1197 \text{ mm}$. Die Funktionen der Ausgleichsrechnung wird zusammen mit den Messwerten sowie dem theoretischen Verlauf in Abbildung 4 dargestellt. Zur Erstellung der Plots werden die Python Pakete numpy [4] und matplotlib [2] genutzt.

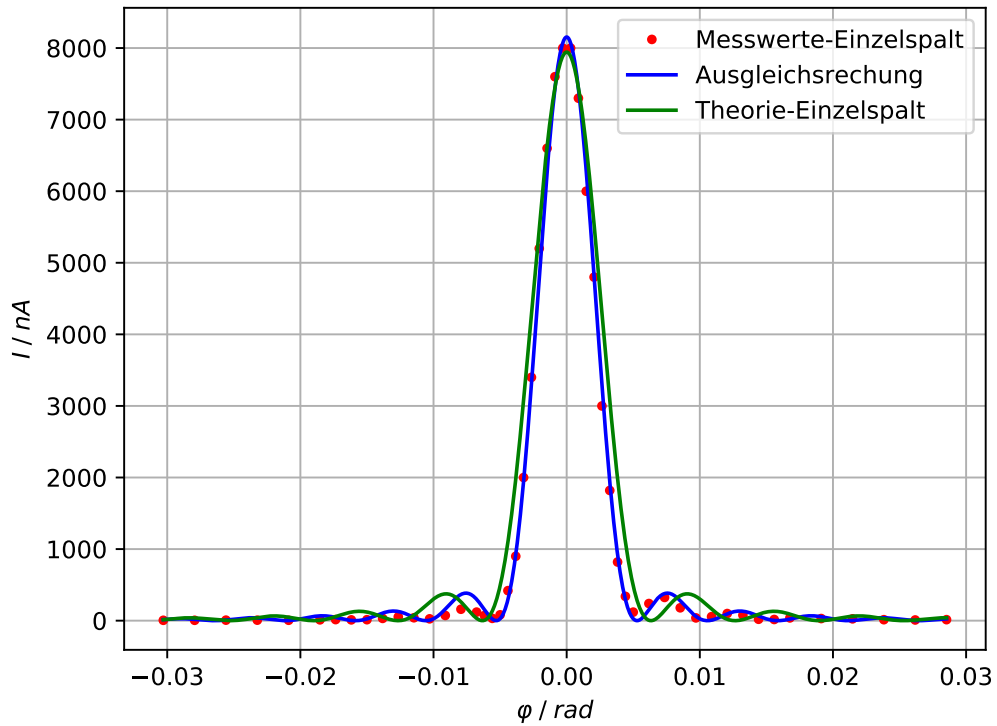


Abbildung 4: Die Messwerte in Abhängigkeit von ϕ , sowie der theoretische Verlauf und die durch eine Ausgleichsrechnung bestimmte Funktion.

x / mm	I_{dun} / nA	I / A	x / mm	I_{dun} / nA	I / A
0.0	0.40	5.5	25.5	0.66	8000.0
2.0	0.50	5.6	26.0	0.58	8000.0
4.0	0.52	7.8	26.5	0.56	7300.0
6.0	0.52	7.5	27.0	0.55	6000.0
8.0	0.50	6.1	27.5	0.52	4800.0
10.0	0.56	12.0	28.0	0.56	3000.0
11.0	0.50	15.5	28.5	0.55	1820.0
12.0	0.52	11.5	29.0	0.57	820.0
13.0	0.50	14.1	29.5	0.56	340.0
14.0	0.52	32.1	30.0	0.58	120.0
15.0	0.54	54.0	31.0	0.56	240.0
16.0	0.46	41.1	32.0	0.54	325.0
17.0	0.52	26.0	33.0	0.54	180.0
18.0	0.50	73.5	34.0	0.50	39.0
19.0	0.50	160.0	35.0	0.52	56.5
20.0	0.50	120.0	36.0	0.49	100.0
20.5	0.42	72.0	37.0	0.50	78.0
21.0	0.40	32.5	38.0	0.50	20.0
21.5	0.44	82.0	39.0	0.50	17.0
22.0	0.48	420.0	40.0	0.54	39.0
22.5	0.44	900.0	42.0	0.48	30.0
23.0	0.44	2000.0	44.0	0.48	26.0
23.5	0.48	3400.0	46.0	0.46	14.0
24.0	0.54	5200.0	48.0	0.44	10.0
24.5	0.54	6600.0	50.0	0.46	14.5
25.0	0.60	7600.0			

Tabelle 1: Der gemessene Dunkelstrom I_{dun} und Strom I bezüglich der Position x des Intensitätsmessgeräts beim Einzelspalt.

4.2 Doppelspalt

Die Messwerte zum Interferenzmuster des Doppelspalts befinden sich in Tabelle 2. Auch hier wird der Dunkelstrom I_{dun} vom Strom I subtrahiert. ϕ wird wieder durch eine Kleinwinkelnäherung bestimmt. Bei der Berechnung des Winkels wird $x_0 = 26\text{mm}$ gewählt, sodass das Maximum bei $\phi = 0$ liegt. Der Abstand zwischen Blende und Schirm beträgt $L = 85\text{cm}$. Nun wird wie zuvor beim Einzelspalt, auch für den Doppelspalt eine Ausgleichsrechnung durchgeführt. Diese wird mithilfe der Gleichung 6 angefertigt. Die Fitparameter

$$p_1 = \frac{\lambda}{\pi b} = 0.00241$$
$$p_2 = \pi \frac{s}{\lambda} = 160.23067$$

werden mit dem Python Paket scipy [3] bestimmt. Der theoretische Verlauf, die Fit-Funktion und die Messwerte sind in Abbildung 5 zusammengetragen. Aus den Fitpa-

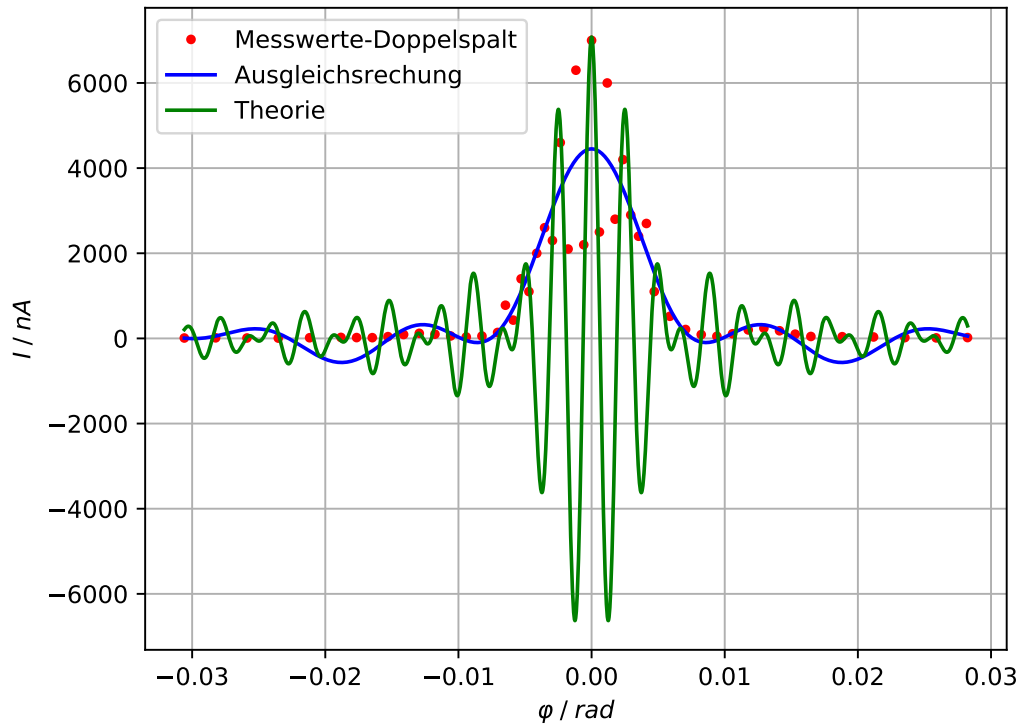


Abbildung 5: Die Messwerte in Abhängigkeit von ϕ , sowie der theoretische Verlauf und die durch eine Ausgleichsrechnung bestimmte Funktion.

rametern ergibt sich für die Breite des Spaltes b und der Abstand der beiden Spalten zueinander g

$$b = 0.82515\text{mm}$$

$$g = -0.79287\text{mm}.$$

Der Abstand g lässt sich durch $g = \frac{p_2\lambda}{\pi} - b$ berechnen.

x / mm	I_{dun} / nA	I / A	x / mm	I_{dun} / nA	I / A
0.0	0.38	10.0	25.5	0.41	2200.0
2.0	0.42	14.0	26.0	0.40	7000.0
4.0	0.46	9.8	26.5	0.40	2500.0
6.0	0.40	7.8	27.0	0.44	6000.0
8.0	0.42	16.0	27.5	0.44	2800.0
10.0	0.44	24.0	28.0	0.40	4200.0
11.0	0.42	20.0	28.5	0.44	2900.0
12.0	0.38	18.0	29.0	0.42	2400.0
13.0	0.40	42.0	29.5	0.44	2700.0
14.0	0.42	92.0	30.0	0.46	1100.0
15.0	0.44	120.0	31.0	0.44	520.0
16.0	0.42	100.0	32.0	0.40	210.0
17.0	0.42	58.0	33.0	0.46	90.0
18.0	0.42	34.0	34.0	0.38	50.0
19.0	0.42	56.0	35.0	0.44	110.0
20.0	0.40	140.0	36.0	0.38	200.0
20.5	0.44	780.0	37.0	0.41	240.0
21.0	0.44	430.0	38.0	0.40	180.0
21.5	0.42	1400.0	39.0	0.40	100.0
22.0	0.44	1100.0	40.0	0.40	46.0
22.5	0.46	2000.0	42.0	0.38	41.0
23.0	0.42	2600.0	44.0	0.34	34.0
23.5	0.42	2300.0	46.0	0.39	19.0
24.0	0.40	4600.0	48.0	0.44	13.0
24.5	0.44	2100.0	50.0	0.42	20.0
25.0	0.44	6300.0			

Tabelle 2: Der gemessene Dunkelstrom I_{dun} und Strom I bezüglich der Position x des Intensitätsmessgeräts beim Doppelspalt.

5 Diskussion

5.1 Einzelspalt

Die Funktion der Ausgleichsrechnung im Bereich des zentralen Maximums stimmt sehr gut mit den Messwerten und dem theoretischem Verlauf überein. Allerdings gibt es besonders in den Bereichen niedriger Intensitäten Abweichungen von der Theorie- und der Ausgleichskurve. Zudem fällt auf, dass die Maxima des Ausgleichs-Fits und der Theoriekurve, abgesehen vom zentralen Maximum, leicht versetzt sind. Dazu ist anzumerken, dass der Versuchsaufbau nicht ausreichend stabil war und so schon kleine Bewegungen am Tisch oder den Geräten, das Interferenzmuster verschoben haben könnten. Zudem war der Raum in dem das Experiment aufgebaut war zwar abgedunkelt, allerdings kam es dennoch zu Helligkeitsschwankungen, wenn zum Beispiel die Tür geöffnet wurde oder ein Handy-Bildschirm angegangen ist. Es war eine kleine Leselampe neben dem Versuchsaufbau, auch diese hat die gemessene Intensität besonders in den niedrigen Bereichen beeinflusst. So weicht die Spaltenbreite b_{exp} um $\Delta b = 0,0303 \text{ mm}$ von der tatsächlichen Spaltenbreite b_{re} ab.

$$\begin{aligned}b_{\text{exp}} &= 0,1197 \text{ mm} \\b_{\text{re}} &= 0,15 \text{ mm}\end{aligned}$$

5.2 Doppelspalt

Im Bereich des zentralen Maximums der Intensität, des Beugungsmusters am Doppelspalt kam es zu starker Streuung der Messwerte. Dadurch liegt der Fit der Ausgleichsrechnung nur bedingt in den Messwerten und stimmt nur an einigen Stellen mit dem theoretischen Verlauf überein. Dennoch ist in den Messwerten ein zentrales Maximum gut zu erkennen und auch die Maxima direkt neben dem zentralen Maximum sind erkennbar. Die Streuung der Messwerte im Bereich des Maximums ist mit wie beim Einzelspalt mit der unzureichenden Stabilität des Aufbaus zu begründen. Es ist anzunehmen, dass durch leichte Stöße am Tisch oder dem Aufbau, der Laser während der Messung verrutscht ist und so das Beugungsbild verfälscht wurde. So ist auch die starke Abweichung von $\Delta b = 0.72515 \text{ mm}$ der experimentell bestimmten Spaltenbreite b_{exp} von der tatsächlichen Spaltenbreite b_{re} zu begründen.

$$\begin{aligned}b_{\text{exp}} &= 0,82515 \text{ mm} \\b_{\text{re}} &= 0,1 \text{ mm}\end{aligned}$$

Zudem ist der berechnete Abstand zwischen den beiden Spalten $g_{\text{exp}} = -0.79287 \text{ mm}$ negativ, was physikalisch nicht möglich ist. Ein möglicher Grund ist eine falsche Justierung des Lasers, sodass dieser nicht mit gleicher Intensität auf beide Spalten trifft. Der tatsächliche Spaltenabstand beträgt $g_{\text{re}} = 0,4 \text{ mm}$.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V406 - Beugung am Spalt*. 2014.

- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.