V106

Gekoppelte Pendel

Theodor Zies
theodor.zies@tu-dortmund.de

Tom Troska
tom.troska@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.01.2022

Abgabe: 25.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Zielsetzung

In diesem Versuch werden zwei gekoppelte Pendel untersucht. Ziel ist es, die Schwingungs- und Schwebungsdauern T und T_S, sowie die Kopplungskonstante κ zu bestimmen. Dafür werden gleichsinnige, gegensinnige und gekoppelte Schwingungen betrachtet.

2. Theorie

Wird ein Fadelpendel der Länge l in dem Gravitationsfeld der Erde um einen kleinen Winkel φ ausgelenkt, so ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung x aus der Ruhelage. Hierbei handelt es sich somit um eine harmonische Schwingung die mit der Diffenentialgleichung für den harmonischen Oszillator beschrieben werden kann. Die rücktreibende Kraft bewirkt ein Drehmoment $M = D_\mathrm{P}\varphi$, wobei D_P hierbei die Winkelrichtgröße des Pendels ist. Die Diffenentialgleichung der Bewegung des Pendels lautet dann:

$$J\ddot{\varphi} + D_\mathrm{P}\varphi = 0$$

Die Größe J ist hier das Trägheitsmoment des Pendels. Die Kreisfrequenz ω und die Schwingungsdauer T folgen dann als

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Werden nun zwei identische Pendel miteinander über eine Feder gekoppelt, lässt sich das System weiterhin in geschlossener Form mit zwei gekoppelten Diffenentialgleichungen beschreiben. Hier wirken aufgrund der Kopplung die Drehmomente $M_1 = D_\mathrm{F}(\varphi_2 - \varphi_1)$ und $M_2 = -M_1$:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + D_\mathrm{P}\varphi_1 &= D_\mathrm{F}(\varphi_2 - \varphi_1) \\ J\ddot{\varphi}_2 + D_\mathrm{P}\varphi_2 &= D_\mathrm{F}(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Im Folgenden werden drei verschiedene Schwingungsarten, die durch jeweils andere Anfangsbedingungen gegeben sind, betrachtet. Die Winkel α_1 und α_2 sind hierbei die Auslenkungen aus der Ruhelage der Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich die Pedel in Ruhe, sodass darüber hinaus $\dot{\alpha}_1(t = 0) = \dot{\alpha}_2(t = 0) = 0$ gilt.

1. Fall: Gleichsinnige Schwingung ($\alpha_1 = \alpha_2$)
Werden die gekoppelten und identischen Pendel um denselben Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ ausgelenkt, wird die Kopplungsfeder weder gestreckt, noch gestaucht. Aus diesem Grund sind die

Schwingungsfrequenz und -dauer dieselben wie die der einzelnen Pendel:

$$
\begin{aligned}
\omega_+ &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
T_+ &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

<u>2. Fall:</u> Gegensinnige Schwingung ($\alpha_1 = -\alpha_2$)
In dem Fall, dass die beiden Pendel um denselben Winkel in unterschiedliche Richtungen, also $\alpha_1 = -\alpha_2$, ausgelenkt werden, bewirkt die Kopplung durch die Feder eine jeweils gleich große und entgegengesetzte Kraft auf die Pendel. Die Pendel schwingen symmetrisch zur Achse zwischen den Pendeln mit der Frequenz und Periodendauer von

$$
\begin{aligned}
\omega_- &= \sqrt{\frac{g + 2K}{l}} \\
T_- &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + 2K}}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

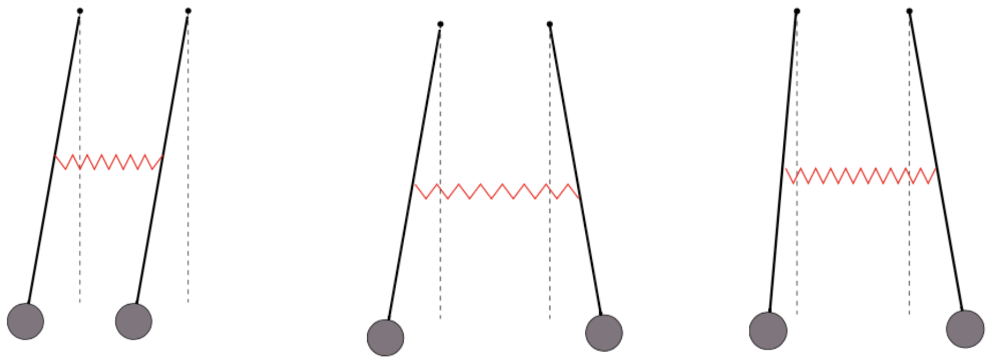
Aufgrund der Kopplung ist nun auch die Federkonstante K eine Abhängigkeit.

<u>3. Fall:</u> Gekoppelte Schwingung ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$)
Wird nur ein Pendel ausgelenkt, während sich das andere in seiner Ruhelage befindet, wird die Energie des ausgelenkten Pendels über die Feder übertragen. Zunächst beginnt das Pendel langsam zu schwingen, wobei die Auslenkung weiter zunimmt, bis das andere Pendel vollständig in Ruhe ist. Diese Prozess wiederholt sich immer wieder und wird als *Schwebung* bezeichnet. Die Schwebungsdauer T_S ist der Zeitraum zwischen zwei Ruhelagen eines Pendels:

$$
\begin{aligned}
\omega_\mathrm{S} &= \omega_+ - \omega_- \\
T_\mathrm{S} &= \frac{T_+ \cdot T_.}{T_+ - T_-}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Somit lässt sich die zu erwartende Schwbungsdauer aus den Schwingungsdauern der gleich- und gegensinnigen Schwingungen bestimmen. Um das Maß der Kopplung der Pendel anzugeben, wird die Kopplungskonstante κ eingeführt:

$$
\kappa = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}
\tag{5}
$$



(a) gleichsinnig **(b)** gegensinnig **(c)** gekoppelt

Abbildung 1: Schematische Veranschaulichung der drei Schwingungsarten. [1]

3. Durchführung

Für den gesamten Versuch wird ein Aufbau verwendet, bei dem zwei parallel zueinander hängende Pendel verwendet werden. Diese Pendel können über eine einhängbare Feder gekoppelt werden. Außerdem ist die Länge der Pendel einstellbar. Die Durchführung lässt sich grob in vier Teile gliedern, in denen jeweils immer die *5-fache Periodendauer* einer bestimmten Pendelkonstellation gemessen.
Der vollständige Ablauf wird für *2 verschiedene Pendellängen* durchgeführt.

3.1. Messung der Periodendauer der einzelnen Pendel

Zu Beginn werden die Pendel auf dieselbe Länge l eingestellt, die Kopplungsfeder wird gegebenenfalls entfernt und es wird *10-mal* die *5-fache Periodendauer* bestimmt, indem das Pendel um einen kleinen Winkel α ausgelenkt wird und die Zeit zwischen den Ruhelagen gemessen wird. Dies wird für beide Pendel durchgeführt.

3.2. Messung der Periodendauer der gleichsinnigen Schwingung

Die Pendel werden nun gekoppelt, indem die Feder in die dafür vorgesehenen Löcher an den Pendelstangen eingehängt wird. Nun werden die Pendel beide in dieselbe Richtung um denselben Winkel α ausgelenkt und es wird erneut die *5-fache Periodendauer* gemessen. Auch dies wird insgesamt *10-mal* erledigt.

3.3. Messung der Periodendauer der gegensinnigen Schwingung

Die immer noch gekoppelten Pendel werden in entgegengesetzte Richtungen um denselben Winkel α ausgelenkt und die *5-fache Periodendauer* wird *10-mal* gemessen.

3.4. Messung der Schwebungsdauer

Eins der Pendel wird um einen kleinen Winkel α ausgelenkt, während das andere in seiner Ruhelage verweilt. Die Schwbungsdauer T_S wird ermittelt, indem die Zeit gemessen wird, die zwischen dem völligen Stillstand eines Pendels bis zum nächsten völligen Stillstand desselben Pendels vergeht. Darüber hinaus wird auch die *5-fache Periodendauer* der einzelnen Schwingungen gemessen. Die gesamte Prozedur wird *10-mal* durchgeführt.

4. Auswertung

Die Versuchsergebnisse der beiden Pendellängen werden getrennt ausgewertet.

4.1. Kurzes Pendel

Zuerst werden die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der einzelnen Pendel ausgewertet. Dabei wurde die Zeit jeweils für fünf Perioden gemessen, die Messwerte dazu stehen in Tabelle 1.

Tabelle 1: Messwerte für die Schwingungsdauern der einzelnen Pendel.

$5 \cdot T_1$ / s	$5 \cdot T_2$ / s
7,27	7,06
7,21	7,27
7,20	7,28
7,14	7,33
7,26	7,07
7,26	7,33
7,25	7,31
7,21	7,26
7,33	7,25
7,20	7,26

Aus diesen Werten wird der Mittelwert mitsamt seinem Fehler bestimmt. Die dafür verwendeten Formeln lauten:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} T_\mathrm{k} \tag{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (T_\mathrm{k} - \bar{T})^2} \tag{7}$$

$$\Delta\bar{T} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

Es ergeben sich daraus die Mittelwerte:

$$\bar{T}_1 = (1{,}446 \pm 0{,}003)\,\mathrm{s}$$
$$\bar{T}_2 = (1{,}448 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}$$

Mit den Fehlertoleranzen lassen sich die beiden Werte vereinen. Daher können die Pendel als identisch angenommen werden, und somit nun deren Verhalten bei Kopplung untersucht werden.
Die Messwerte für die gleichphasige und gegenphasige Schwingung der Pendel sind in Tabelle 2 festgehalten.

Tabelle 2: Messwerte für die Schwingungsdauern der gleichsinnigen und gegensinnigen Schwingung bei kurzer Pendellänge $l = 50\,\mathrm{cm}$.

$5 \cdot T_+$ / s	$5 \cdot T_-$ / s
7,02	7,09
7,41	7,08
7,29	7,09
7,22	7,15
7,28	6,83
7,48	7,08
7,34	7,28
7,15	6,98
7,35	7,22
7,15	7,09

Mithilfe von (6), (7) und (8) wird zuerst der Mittelwert der gleichphasigen Schwingung berechnet zu:

$$\bar{T}_{+,\mathrm{exp}} = (1{,}454 \pm 0{,}009)\,\mathrm{s}$$

Dieses Messergebnis wird im folgenden mit dem Theoriewert verglichen. Dieser entspricht genau der Schwingungsdauer eines einzelnen Pendels (2):

$$\bar{T}_{+,\mathrm{theorie}} = 1{,}418\,\mathrm{s}$$

Als Nächstes wird analog zur gleichphasigen Schwingung der Mittelwert der gegenphasigen Schwingung berechnet.

$$\bar{T}_{-,\mathrm{exp}} = (1{,}418 \pm 0{,}008)\,\mathrm{s}$$

Um hier den theoretischen Wert bestimmen zu können, muss die Kopplungskonstante κ bekannt sein. Da hierfür kein theortischer Wert existiert, wird die Konstante durch die experiementellen Ergebnisse mit (5) ermittelt.

$$\kappa = (0{,}025 \pm 0{,}008)$$

Die Messunsicherheit von κ wird über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta\kappa = \sqrt{(\Delta\bar{T}_+)^2 \cdot \left(\frac{4\bar{T}_+\bar{T}_-^2}{(\bar{T}_+^2 + \bar{T}_-^2)^2}\right)^2 + (\Delta\bar{T}_-)^2 \cdot \left(\frac{-4\bar{T}_-\bar{T}_+^2}{(\bar{T}_+^2 + \bar{T}_-^2)^2}\right)^2}.$$

Damit kann nun der theoretische Wert für die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung mithilfe von (3) bestimmt werden. Der Fehler davon wird berechnet über:

$$\Delta\bar{T}_- = \Delta\kappa \cdot 2\pi\sqrt{\left(\frac{l}{g + 2\kappa}\right)^2}$$

$$\bar{T}_{-,\text{theorie}} = (1{,}414 \pm 0{,}001)\,\text{s}$$

Im letzten Teil der Auswertung wird die Schwebungsdauer betrachtet. Die Messwerte hierfür finden sich in Tabelle 3.

Tabelle 3: Messwerte für die Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung und der Schwebungsdauer bei kurzer Pendellänge $l = 50\,\text{cm}$.

$5 \cdot T$ / s	T_S / s
8,02	35,97
8,12	35,84
8,38	35,78
8,00	36,62
8,14	35,25
7,95	36,65
8,07	36,53
8,13	35,88
8,13	36,12

Wieder werden die Mittelwerte der gemessenen Zeiten berechnet zu:

$$\bar{T}_{\text{Schwingung,exp}} = (1{,}621 \pm 0{,}008)\,\text{s}$$
$$\bar{T}_{\text{Schwebung,exp}} = (36{,}07 \pm 0{,}15)\,\text{s}$$

Abschließend wird für die Schwebungsdauer mit (4) ein theoretischer Wert berechnet.

$$\bar{T}_{\text{Schwebung,theorie}} = (57 \pm 19)\,\text{s}$$

Auch hier wird der Fehler über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta\bar{T}_{\text{Schwebung}} = \Delta\bar{T}_{-,\text{theorie}} \cdot \left(\frac{\bar{T}_+^2}{(\bar{T}_+ - \bar{T}_-)^2}\right). \tag{9}$$

4.2. Langes Pendel

Die Auswertung für das lange Pendel ist vollständig analog zum kurzen Pendel. Da alle Formeln identisch verwendet werden, folgen hier nur die Ergebnisse.
Die individuellen Schwingungsdauern der Pendel finden sich in Tabelle 4.

Tabelle 4: Messwerte für die Schwingungsdauern der einzelnen Pendel bei langer Pendellänge $l = 100\,\mathrm{cm}$.

$5 \cdot T_1$ / s	$5 \cdot T_2$ / s
9,76	9,95
9,86	9,76
9,96	9,82
9,83	9,92
9,90	9,89
9,89	9,86
10,02	9,87
9,80	9,82
9,79	10,08
9,82	9,75

Gemittelt ergeben sich folgende Werte:

$$\bar{T}_1 = (1{,}973 \pm 0{,}005)\,\mathrm{s}$$
$$\bar{T}_2 = (1{,}974 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}.$$

Wie in 4.1 liegen die Mittelwerte innerhalb ihrer gegenseitigen Fehlertoleranzen und die Pendel können als identisch angenommen werden.
Für die gleichphasige und gegenphasige Schwingung sind die Messwerte in Tabelle 5 festgehalten.

Tabelle 5: Messwerte für die Schwingungsdauern der gleichsinnigen und gegensinnigen Schwingung beilanger Pendellänge $l = 100\,\mathrm{cm}$.

$5 \cdot T_+$ / s	$5 \cdot T_-$ / s
9,80	8,58
9,92	8,64
9,89	8,51
9,82	8,78
9,89	8,64
10,01	8,65
9,82	8,70
9,94	8,64
9,88	8,58
9,82	8,90

Die Ergebnisse für deren Mittelwerte, die neue Kopplungskonstante κ und die Theoriewerte lauten:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{+,\text{exp}} &= (1{,}976 \pm 0{,}004)\,\text{s} \\
\bar{T}_{+,\text{theorie}} &= 2{,}006\,\text{s} \\
\bar{T}_{-,\text{exp}} &= (1{,}732 \pm 0{,}007)\,\text{s} \\
\kappa &= (0{,}131 \pm 0{,}004) \\
\bar{T}_{-,\text{theorie}} &= (1{,}9799 \pm 0{,}0008)\,\text{s}
\end{aligned}$$

Zuletzt wird wieder die Schwebungsdauer untersucht, die Messwerte finden sich in Tabelle 6.

Tabelle 6: Messwerte für die Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung und der Schwebungsdauer bei langer Pendellänge $l = 100\,\text{cm}$.

$5 \cdot T$ / s	T_S / s
8,20	14,88
8,24	13,91
8,40	14,12
8,33	13,82
8,39	14,42
8,47	14,93
8,72	14,24
8,53	14,90
8,52	14,64
8,92	14,42

Hier ergeben sich die Mittelwerte:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{\text{Schwingung,exp}} &= (1{,}694 \pm 0{,}014)\,\text{s} \\
\bar{T}_{\text{Schwebung,exp}} &= (14{,}43 \pm 0{,}13)\,\text{s}.
\end{aligned}$$

Der Theoriewert bestimmt sich für das lange Pendel zu:

$$\bar{T}_{\text{Schwebung,theorie}} = (14{,}1 \pm 0{,}5)\,\text{s}.$$

5. Diskussion

5.1. Kurzes Pendel

Die Messwerte der Periodendauern der einzelnen Pendel T_1 und T_2, sowie der Messwert der gleichsinnigen Schwingung, ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\bar{T}_{1,\mathrm{exp}} &= (1{,}446 \pm 0{,}003)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{2,\mathrm{exp}} &= (1{,}448 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{+,\mathrm{exp}} &= (1{,}454 \pm 0{,}009)\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

und liegen damit innerhalb der Messunsicherheiten voneinander. Daher kann an dieser Stelle davon ausgegangen werden, dass die Pendel eine nahezu identische Länge haben. Werden diese Werte allerdings mit dem Theoriewert für ein Pendel der Länge $l = 50\,\mathrm{cm}$ verglichen, fällt auf, dass für alle drei Messwerte der Theoriewert

$$\bar{T}_{\mathrm{theorie}} = 1{,}418\,\mathrm{s}$$

nicht im Bereich der Messunsicherheiten liegt. Dennoch ist die relative Abweichung von rund 2 % so gering, dass eventuelle Messfehler der Länge der Pendel dies erklären könnten. Die Werte aus Theorie und Experiement für die gegenphasige Schwingung lauten

$$\begin{aligned}\bar{T}_{-,\mathrm{exp}} &= (1{,}418 \pm 0{,}008)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{-,\mathrm{theorie}} &= (1{,}414 \pm 0{,}001)\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

und sind somit auch innerhalb der Messunsicherheiten kongruent.
Für die Schwebungsdauer werden die Werte

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\mathrm{Schwebung,exp}} &= (36{,}07 \pm 0{,}15)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{\mathrm{Schwebung,theorie}} &= (57 \pm 19)\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

ermittelt. Die große Messunsicherheit des Theoriewertes liegt darin begründet, dass hier zur Berechnung fehlerbehaftete, experiementelle Größen verwendet werden müssen. Auch die große relative Abweichung von etwa 37 % lässt sich hiermit begründen.

5.2. Langes Pendel

Für die Messwerte der einzeln schwingenden Pendel und der gleichphasigen Schwingung ergibt sich auch hier eine Übereinstimmung.

$$\begin{aligned}\bar{T}_{1,\mathrm{exp}} &= (1{,}973 \pm 0{,}005)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{2,\mathrm{exp}} &= (1{,}974 \pm 0{,}006)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{+,\mathrm{exp}} &= (1{,}976 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}\\ \bar{T}_{+,\mathrm{theorie}} &= 2{,}006\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Ebenso wie für die kurzen Pendel ergibt sich eine relative Abweichung zum Theoriewert von jeweils etwa 2 %.
Der relative Fehler für die gegenphasige Schwingung liegt bei rund 12,5 % und ist damit vergleichsweise groß.

$$\bar{T}_{-,\text{exp}} = (1{,}732 \pm 0{,}007)\,\text{s}$$
$$\bar{T}_{-,\text{theorie}} = (1{,}9799 \pm 0{,}0008)\,\text{s}$$

Die Abweichung lässt sich damit erklären, dass hier die experimentellen Fehler der Kopplungskonstanten κ erneut starken Einfluss auf den Theoriewert haben.
Für die gekoppelte Schwingung zeigt es sich, dass die experiementelle Schwebungsdauer mit der theoretischen vereinbar ist.

$$\bar{T}_{\text{Schwebung,exp}} = (14{,}43 \pm 0{,}13)\,\text{s}$$
$$\bar{T}_{\text{Schwebung,theorie}} = (14{,}1 \pm 0{,}5)\,\text{s}$$

Literatur

[1] *Versuch V106: Gekoppelte Pendel*. TU Dortmund, Fakultät Physik.

A. Anhang

A.1. Originaldaten

106 - Gekoppelte Pendel

$l = 50\,cm$, ungekoppelt

alles 5 Schwingungsdauern, außer T_s

1. Pendel	2. Pendel
7,27	7,06
7,21	7,27
7,20	7,28
7,14	7,33
7,26	7,07
7,26	7,33
7,25	7,31
7,21	7,26
7,33	7,25
7,20	7,26

gleichphasig	gegenphasig	gekoppelte T	T_s
7,02	7,05	8,02	35,97
7,41	7,08	8,12	35,84
7,29	7,05	8,38	35,78
7,22	7,15	8,00	36,62
7,28	6,83	8,14	35,25
7,48	7,08	7,95	36,65
7,34	7,28	8,07	36,53
7,15	6,98	~~8,14~~	~~3~~
7,35	7,22	8,13	35,88
7,15	7,09	8,13	36,12

1. Pendel	2. Pendel	$l = 100cm$ ungekoppelt
9,76	9,95	
9,86	9,76	
9,96	9,82	
9,83	9,92	
9,90	9,89	
9,89	9,86	
10,02	9,87	
9,80	9,82	
9,79	10,08	
9,82	9,75	

gleichphasig	gegenphasig	gekoppelt T	gekoppelt T_s
9,80	8,58		
9,92	8,64	8,2	14,88
9,89	8,51	8,24	13,91
9,82	8,78	8,40	14,12
9,89	8,64	8,33	13,82
10,01	8,65	8,39	14,42
9,82	8,70	8,47	14,93
9,94	8,64	8,72	14,24
9,88	8,58	8,53	14,90
9,82	8,9	8,52	14,64
		8,92	14,42