

V 602

## **Röntgenemission und -absorption**

Philip Jaletzky  
philip.jaletzky@udo.edu

Matthias Maile  
matthias.maile@udo.edu

Durchführung: 11.05.2021

Abgabe: 18.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Erzeugung von Röntgenstrahlung . . . . .	3
1.2	Bragg'sche Bedingung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
2.1	Überprüfung der Bragg-Bedingung . . . . .	4
2.2	Analyse eines Emissionsspektrums . . . . .	4
2.3	Analyse der Absorptionsspektren . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Vorbereitung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Überprüfung der Bragg Bedingung . . . . .	5
4.2	Emissionsspektrum . . . . .	7
4.3	Absorptionsspektren . . . . .	9
4.4	Moseley'sches Gesetz . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

## Zielsetzung

In diesem Versuch sollen verschiedene Emissions- und Absorptionsspektren untersucht werden.

## 1 Theorie

### 1.1 Erzeugung von Röntgenstrahlung

Für die Erzeugung von Röntgenstrahlung wird eine Röntgenröhre benutzt, ein evakuierter Glaskolben mit einer Elektronen emitierenden Glühkathode und einer Anode. Wegen einer elektrischen Spannung  $U$  zwischen Kathode und Anode werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt. Trifft ein Elektron auf die Anode, so wird es abgebremst und emittiert seine Energie in Form eines Photons. Da das Elektron nicht eine bestimmte Energie abgeben muss, entsteht ein kontinuierliches Spektrum. Die maximale Energie bzw. die minimale Wellenlänge eines Bremsphotons folgt aus dem Fall, dass die gesamte Potentialdifferenz  $E = e_0 U$  in Photonenenergie  $E = h\nu$  umgesetzt wird. Gleichsetzen liefert die minimale Wellenlänge

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e_0 U}. \quad (1)$$

Eine alternative Erzeugung folgt aus Ionisierungen in der Anode. Dabei werden innere Elektronenschalen frei und Elektronen aus höheren Energieniveaus können diese “auffüllen“, wobei die Energiedifferenz  $h\nu = E_m - E_n$  als Röntgenquant ausgesendet wird. Wegen den diskreten Energieniveaus im Atom sind auch die Energieübergänge diskretisiert, wodurch das Spektrum nicht mehr kontinuierlich ist, sondern aus Emissionslinien besteht. Die Linien werden mit  $K_\alpha, K_\beta, L_\alpha, \dots$  bezeichnet. Der lateinische Buchstabe bezeichnet die Zielschale des Übergangs, der Griechische das Ursprungsniveau.

Weil bei größeren Atomen die inneren Elektronen den Kern abschirmen, wird die Coulomb Anziehung durch den Kern verringert. Für das äußere Elektron folgt dann

$$E_n = -R_\infty z_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

mit der effektiven Kernladung  $z_{\text{eff}} = z - \sigma$ , die die Abschirmung der Elektronen in der Abschirmkonstante  $\sigma$  beachtet. Bei der  $K_\alpha$ -Linie folgt dann die Energie

$$E_{K_\alpha} = R_\infty (z - \sigma_1)^2 \frac{1}{1^2} - R_\infty (z - \sigma_2)^2 \frac{1}{2^2}. \quad (3)$$

Die äußeren Elektronen besitzen aufgrund von Bahndrehimpuls und Spin nicht exakt die gleiche Bindungsenergie und erzeugen eine Feinstruktur (Aufteilung in eng beieinander liegende Linien); diese ist mit der verwendeten Apparatur jedoch nicht auflösbar.

Der Absorptionskoeffizient ist dabei von der Photonenenergie abhängig. Im Energiespektrum unter 1 MeV sind Compton- und Photoeffekt die dominanten Prozesse. Grundsätzlich nimmt der Absorptionskoeffizient mit zunehmender Photonenenergie ab, steigt aber sprunghaft wenn die Photonenenergie die Bindungsenergie eines inneren Elektrons

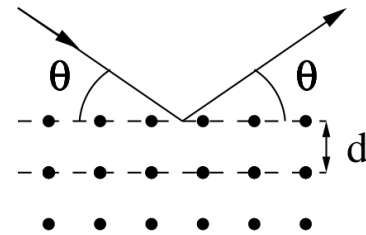
übersteigt. Dadurch entstehen im Spektrum sogenannte Absorptionskanten, deren Energie  $h\nu = E_n - E_\infty$  ziemlich genau der Bindungsenergie des Elektrons entsprechen. Entsprechend der Schale werden die Unstetigkeiten K-, L-, ... Absorptionskanten bezeichnet.

## 1.2 Bragg'sche Bedingung

Für die experimentelle Bestimmung der Photonenergie bzw. der Wellenlänge  $\lambda$  wird die Bragg'sche Reflexion verwendet. Fällt die Röntgenstrahlung auf ein dreidimensionales Gitter, z.B. auf einen Lithiumfluoridkristall, werden die Photonen gebeugt. Aus dem Gangunterschied folgt Interferenz; den Fall konstruktiver Interferenz bezeichnet man mit dem Glanzwinkel  $\theta$ . Mit der Gitterkonstanten  $d$  lässt sich die Bragg'sche Bedingung

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (4)$$

mit der Beugungsordnung  $n$  herleiten.  $d$  ist offensichtlich Materialabhängig, für den verwendeten LiF-Kristall gilt  $d_{\text{LiF}} = 201,4 \text{ pm}$ .



**Abbildung 1:** Ein Gitter mit Gitterkonstanten  $d$  und Röntgenstrahl im Winkel  $\theta$ . [5]

## 2 Durchführung

Für die nachfolgenden Versuche wird immer der gleiche Versuchsaufbau verwendet. Dieser besteht hauptsächlich aus einer Kupfer-Röntgenröhre, einem LiF-Kristall und einem Geiger-Müller-Zählrohr. Die Durchführung kann automatisch stattfinden; es müssen jedoch verschiedene Parameter eingestellt werden. Die Beschleunigungsspannung soll bei  $U_B = 35 \text{ kV}$  liegen, der Emissionsstrom bei  $I = 1 \text{ mA}$ . Zuletzt muss überprüft werden, ob Blende und LiF-Kristall in den Halterungen stecken und die Blende waagrecht ausgerichtet ist.

### 2.1 Überprüfung der Bragg-Bedingung

Für die Überprüfung der Bragg-Bedingung wird der Kristall auf einen konstanten Kristallwinkel von  $\theta = 14^\circ$  eingestellt. Das Zählrohr soll im Bereich zwischen  $26^\circ$  und  $30^\circ$  mit einem Winkelzuwachs von  $\Delta\alpha = 0,1^\circ$  die Röntgenstrahlung messen, mit einer Integrationszeit von  $\Delta t = 5 \text{ s}$ .

### 2.2 Analyse eines Emissionsspektrums

Es soll die erste Beugungsordnung ( $n = 1$ ) gemessen werden, dazu soll das Zählrohr im Bereich  $8^\circ \leq \theta \leq 25^\circ$  mit  $\Delta\alpha = 0,1^\circ$  die Strahlung messen. Als Integrationszeit werden hier  $\Delta t = 10 \text{ s}$  eingestellt.

### 2.3 Analyse der Absorptionsspektren

Im letzten Teil sollen sechs verschiedene Absorber (z.B. Zink, Gallium, ...) vor das Zählrohr gesetzt werden und in einem geeigneten Intervall für  $\theta$  in  $0.1^\circ$ -Schritten gemessen werden. Die Integrationszeit für diesen Versuchsteil ist  $\Delta t = 20$  s.

## 3 Vorbereitung

Zur Vorbereitung sollten die Energien, bei denen die  $\text{Cu-}K_\alpha$  und  $\text{Cu-}K_\beta$  erwartet werden, ermittelt werden. Diese liegen bei  $E_{K_\alpha} = 8,06$  keV und  $E_{K_\beta} = 8,92$  keV [2]. Mit der dadraus abgeleiteten Wellenlänge folgt aus Gleichung 4 die Glanzwinkel  $\theta_{K_\alpha} = 22,39^\circ$  und  $\theta_{K_\beta} = 20,13^\circ$ . Ferner sollte der Glanzwinkel zu verschiedenen Elementen ermittelt werden. Dieser kann mit Gleichung 4, den gegebenen Literaturwerten zur K-Kante  $E_K^{\text{Lit}}$  [3] und der Gitterkonstante  $d = 201,4$  pm berechnet werden mit

$$\theta_{\text{glanz}} = \arcsin \left( \frac{h \cdot c}{E \cdot 2d} \right). \quad (5)$$

Daraus folgen die Werte die in der Tabelle 1 aufgeführt sind.

**Tabelle 1:** Literaturwerte und daraus errechnete Größen verschiedener Elemente

	$Z$	$E_K^{\text{Lit}} / \text{keV}$	$\theta_{\text{glanz}}^{\text{Lit}} / ^\circ$	$\sigma_k$
Zn	30	9,65	18.60042993	3,56
Ge	32	11,10	16.09910447	3,68
Br	35	13,47	13.20934876	3,85
Rb	37	15,2	11.68329037	3,95
Sr	38	16,10	11.02175704	4,01
Zr	40	17,99	9.851577763	4,11

## 4 Auswertung

In diesem Abschnitt werden die Messdaten ausgewertet, um die Bragg Bedingung zu überprüfen, um das Emissionspektrum der Kupferröhre zu bestimmen und um die Absorptionsspektren von Brom, Gallium, Rubidium, Strontium und Zink zu bestimmen.

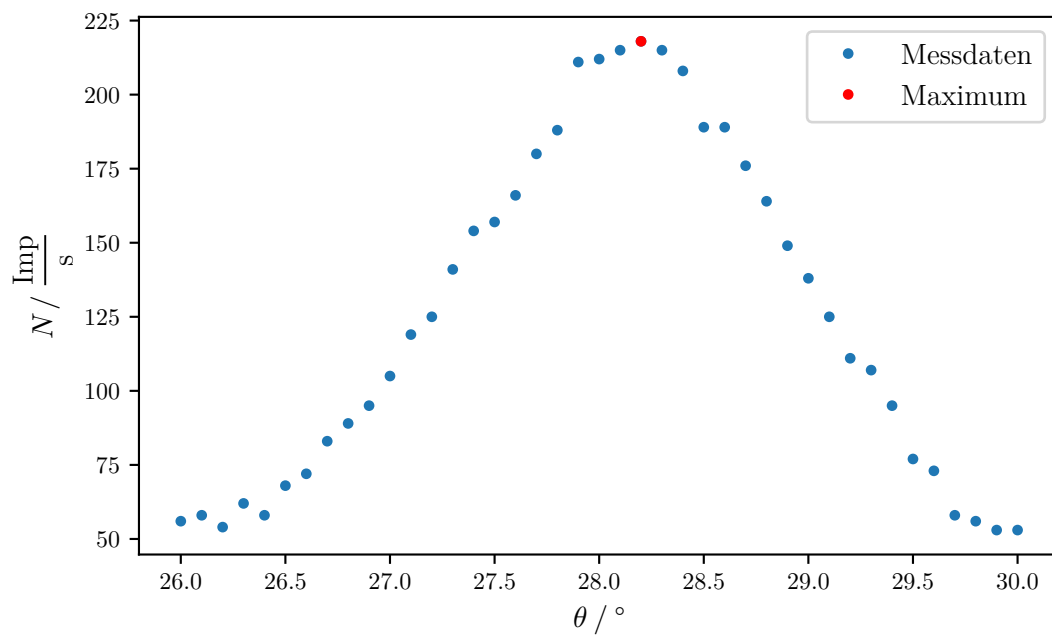
### 4.1 Überprüfung der Bragg Bedingung

Für die Überprüfung der Bragg Bedingung werden die in Abbildung 2 aufgelisteten Daten verwendet.

$\theta[^\circ]$	N[Imp]	$\theta[^\circ]$	N[Imp]	$\theta[^\circ]$	N[Imp]	$\theta[^\circ]$	N[Imp]
26.0	56.0	27.0	105.0	28.0	212.0	29.0	138.0
26.1	58.0	27.1	119.0	28.1	215.0	29.1	125.0
26.2	54.0	27.2	125.0	28.2	218.0	29.2	111.0
26.3	62.0	27.3	141.0	28.3	215.0	29.3	107.0
26.4	58.0	27.4	154.0	28.4	208.0	29.4	95.0
26.5	68.0	27.5	157.0	28.5	189.0	29.5	77.0
26.6	72.0	27.6	166.0	28.6	189.0	29.6	73.0
26.7	83.0	27.7	180.0	28.7	176.0	29.7	58.0
26.8	89.0	27.8	188.0	28.8	164.0	29.8	56.0
26.9	95.0	27.9	211.0	28.9	149.0	29.9	53.0
						30.0	53.0

**Abbildung 2:** Messdaten, Bragg Bedingung [4]

In Abbildung 3 werden die pro Sekunde aufgenommenen Impulse in Abhängigkeit des Winkels dargestellt. Das gesuchte Maximum ist farblich markiert.



**Abbildung 3:** Impulse pro Sekunde in Abhängigkeit des Winkels zur Überprüfung der Bragg Bedingung

Das Maximum der Messdaten liegt bei  $N = 218 \text{ Imp/s}$  mit dem Winkel  $\theta = 28,2^\circ$ . Der theoretische Glanzwinkel für die Anordnung mit dem LiF-Kristall beträgt  $28^\circ$ . Die Abweichung des Messwertes vom Theoriewert beträgt somit  $\Delta\theta = 0,2^\circ$  bzw.  $\Delta\theta_{rel} = 0,72\%$ .

## 4.2 Emissionsspektrum

Mit den im Theorie-Teil erläuterten Formeln lassen sich  $E_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$  und  $\theta_{\text{Grenz}}$  berechnen. Die Beschleunigungsspannung beträgt  $U = 35 \text{ kV}$ . Die minimale Wellenlänge  $\lambda_{\min}$  wird nach Gleichung 1 berechnet, die maximale Energie ergibt sich aus  $E = e_0 U$  und der Grenzwinkel kann mit Gleichung 4 berechnet werden. Diese Werte lassen sich nicht aus den Messdaten bestimmen, da die Messung nur für einen Winkelbereich von  $8\text{-}25^\circ$  vorgenommen wurde. Ein Einsetzen der bekannten Werte in diese Gleichungen ergibt:

$$E_{\max} = 35 \text{ keV} \quad (6)$$

$$\lambda_{\min} = 354,486 \text{ nm} \quad (7)$$

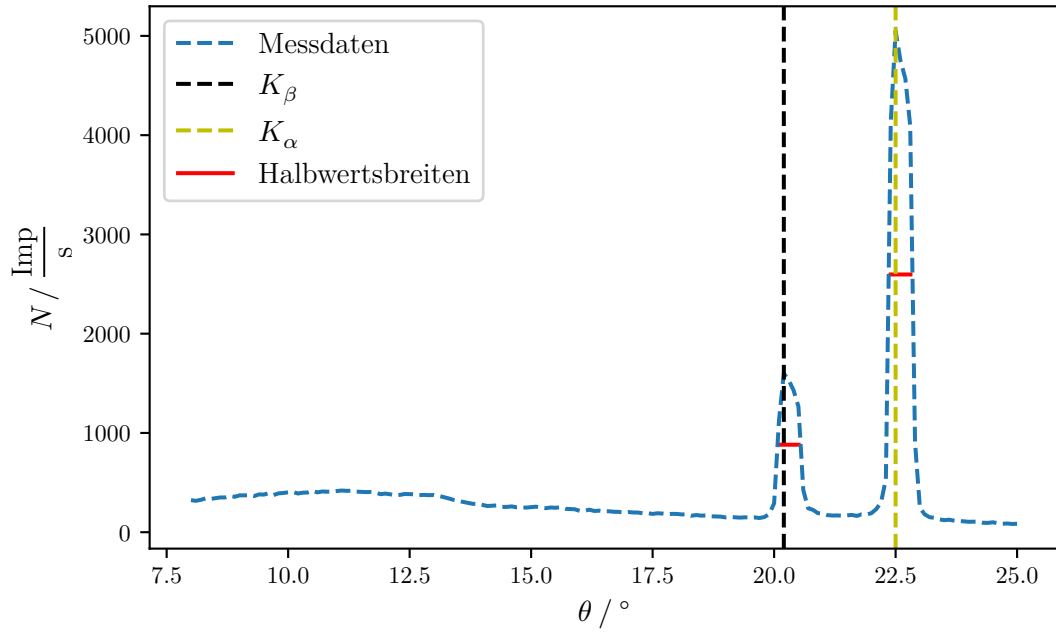
$$\theta_{\text{Grenz}} = 5,049^\circ \quad (8)$$

In Abbildung 4 sind die Messdaten zum Emissionsspektrum der genutzten Kupferröhre dargestellt. Dazu sind die  $K_\alpha$ - und  $K_\beta$ -Linie zu sehen, die bei

$$\theta_{K_\alpha} = 22,5^\circ$$

$$\theta_{K_\beta} = 20,2^\circ$$

liegen.



**Abbildung 4:** Emissionsspektrum der genutzten Kupferröhre, dargestellt sind die Messdaten, die  $K_\alpha$ – und die  $K_\beta$ –Linie sowie die Halbwertsbreiten.

Zu den ermittelten Winkeln ergeben sich nach Gleichung 4 bzw. Gleichung 5 folgende Energien für die  $K_\alpha$ – und die  $K_\beta$ –Linie:

$$\theta_\alpha = 22.5^\circ \qquad \theta_\beta = 20.2^\circ \qquad (9)$$

$$E_\alpha = 8.05 \text{ keV} \qquad E_\beta = 8.92 \text{ keV} \qquad (10)$$

$$(11)$$

Die Halbwertsbreiten geben die Breiten der charakteristischen Linien bei der Hälfte der jeweiligen Peakintensität an (siehe auch Abbildung 4). Diese Breiten können beispielsweise mit dem Python-Modul `scipy` aus den gegebenen Daten berechnet werden. So ergibt sich für die Halbwertsbreiten:

$$\Delta\theta_{K_\alpha} = 0,490^\circ \qquad (12)$$

$$\Delta\theta_{K_\beta} = 0,476^\circ . \qquad (13)$$

Mit diesen Winkeln können die entsprechenden Energien berechnet werden:

$$\Delta E_{K_\alpha} = 0,165 \text{ keV} \qquad (14)$$

$$\Delta E_{K_\beta} = 0,2 \text{ keV} . \qquad (15)$$

Das Auflösungsvermögen kann nach der Formel

$$A = \frac{E_K}{\Delta E_{\text{FWHM}}}$$



berechnet werden, sodass sich die Werte

$$\begin{aligned} A_{K_\alpha} &= 48,6 \\ A_{K_\beta} &= 44,6 \end{aligned}$$

ergeben.

Für die Bestimmung der materialspezifischen Abschirmungskonstanten werden weitere Formeln für die Energien benötigt. Im Theorie-Teil wird bereits erläutert, wie die Energien für das äußere Elektron und die  $K_\alpha$ -Linie mit Gleichung 2 und Gleichung 3 berechnet werden können. Für die  $K_\beta$ -Linie kann die Energie nach

$$E_{K,\beta} = R_\infty \left( \frac{1}{n} \right)^2 \cdot (z - \sigma_1)^2 - R_\infty \left( \frac{1}{l} \right)^2 \cdot (z - \sigma_3)^2 \quad (16)$$

berechnet werden. Bei der  $K_\beta$ -Linie gilt hier  $n=1$  und  $l=3$ . Dabei ist  $R_\infty$  die Rydberg-Energie,  $E_{K,\text{abs}}$  ist 8,98 keV[3] und für die Kernladungszahl  $Z_{\text{Kupfer}}$  gilt  $Z_{\text{Kupfer}} = 29$ . Aus diesen Gleichungen lassen sich die materialspezifischen Abschirmungskonstanten für Kupfer zu

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 3.3 \\ \sigma_2 &= 12.4 \\ \sigma_3 &= 22.4 \end{aligned}$$

berechnen.

### 4.3 Absorptionsspektren

Im Folgenden werden die Absorptionsspektren 5 verschiedener Absorber untersucht. In Abbildung 5 bis Abbildung 9 sind die gemessenen Zählraten pro Sekunde  $N$  in Abhängigkeit der Winkel  $\theta$  für Brom, Gallium, Rubidium, Strontium und Zink dargestellt. Dazu sind in jeder der Abbildungen die Absorptionskanten eingezeichnet, die einen nahezu linear verlaufenden Abschnitt der Kurve darstellen. Außerdem ist die Mitte dieser Absorptionskanten hervorgehoben, die bei einem bestimmten Winkel  $\theta_K$  liegen. Aus diesen Winkeln kann die Absorptionsenergie wieder über die Bragg-Bedingung (Gleichung 4) bestimmt werden. Die Abschirmungskonstanten  $\sigma_K$  können über

$$\sigma_K = Z - \left( \frac{E_K}{R_\infty} - \frac{\alpha^2 Z^4}{4} \right)^{0.5} \quad (17)$$

berechnet werden, dabei ist  $\alpha$  die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

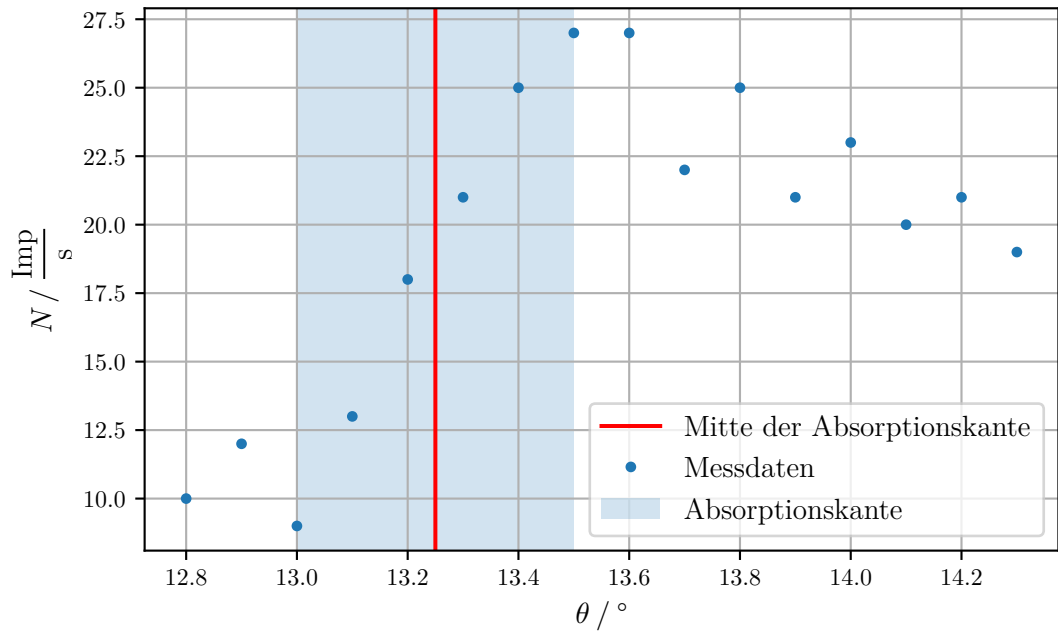


Abbildung 5: Brom

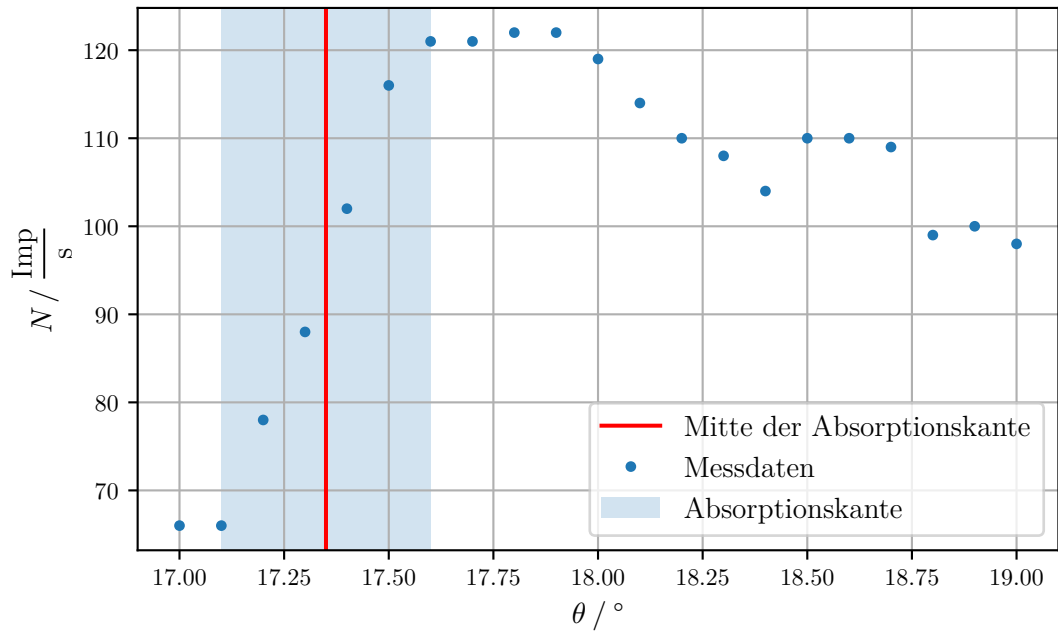


Abbildung 6: Gallium

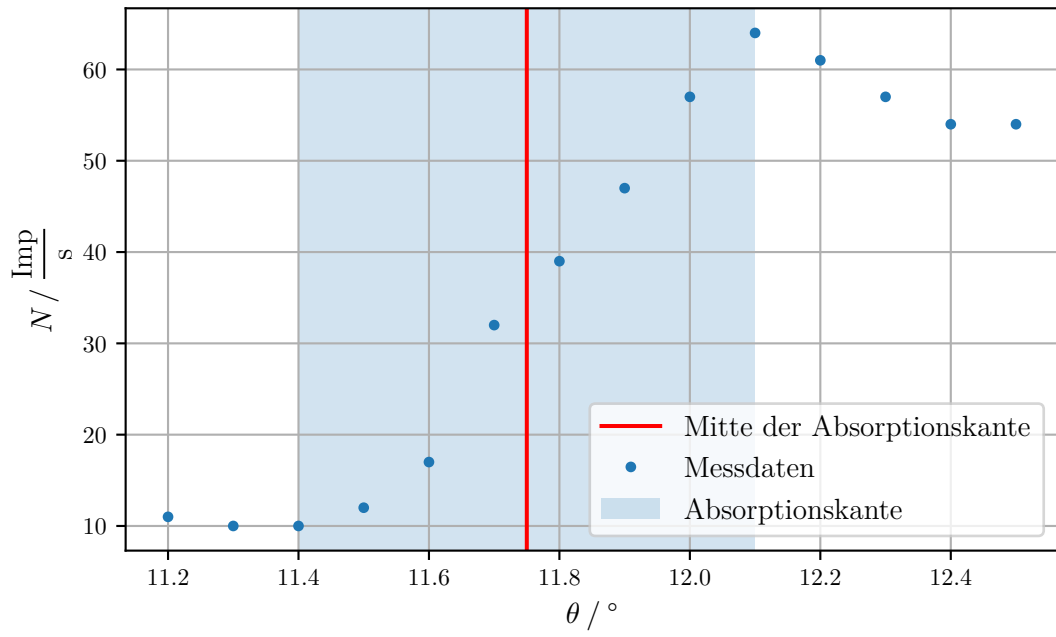


Abbildung 7: Rubidium

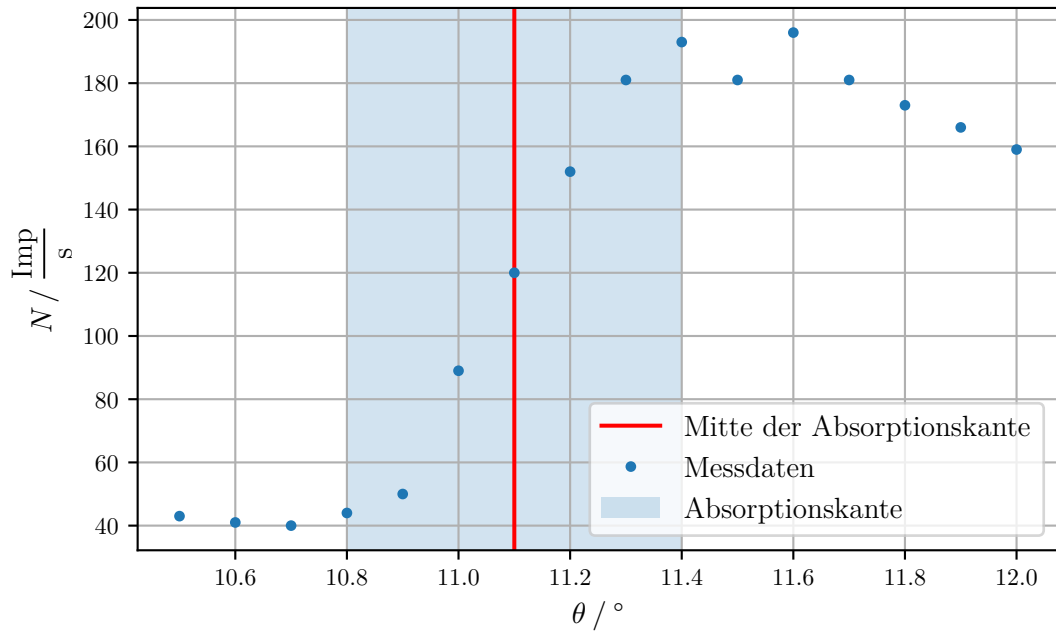


Abbildung 8: Strontium

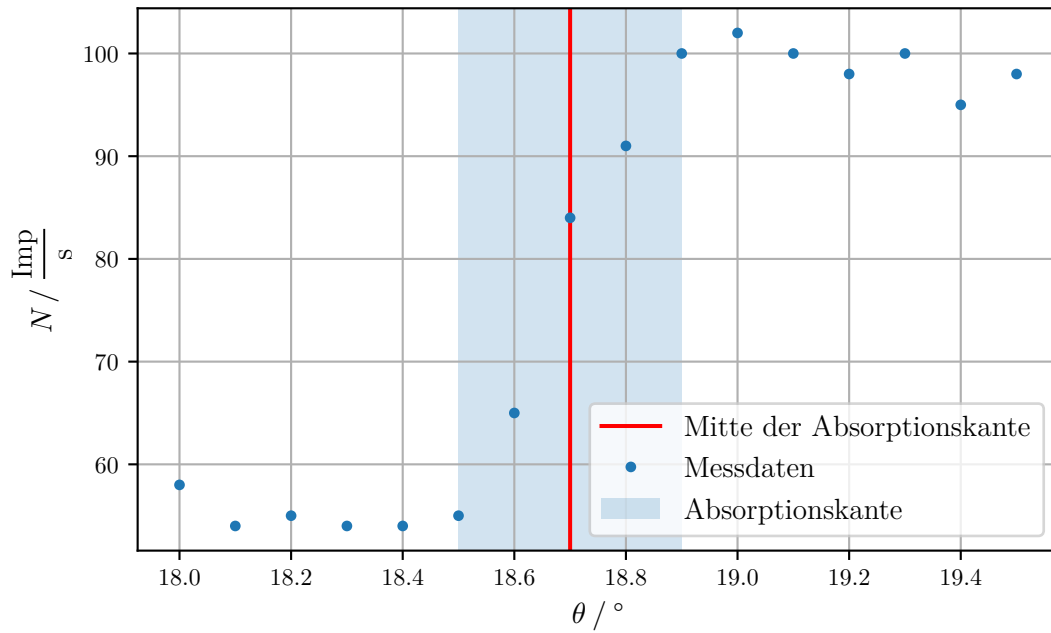


Abbildung 9: Zink

Auch hier lassen sich aus den K-Kanten die materialspezifischen Konstanten bestimmen.

**Tabelle 2:** Messwerte für Zink zu: Energieübergang  $E_K$ , Bragg-Winkel  $\theta_K$  und Abschirmzahl  $\sigma_K$

	Z	$E_K / \text{keV}$	$\theta_K / ^\circ$	$\sigma_K$
Ga	31	10.32	17.35	3.68
Br	35	13.43	13.25	3.90
Rb	37	15.12	11.75	4.05
Sr	38	15.99	11.1	4.13
Zn	30	9.60	18.7	3.6

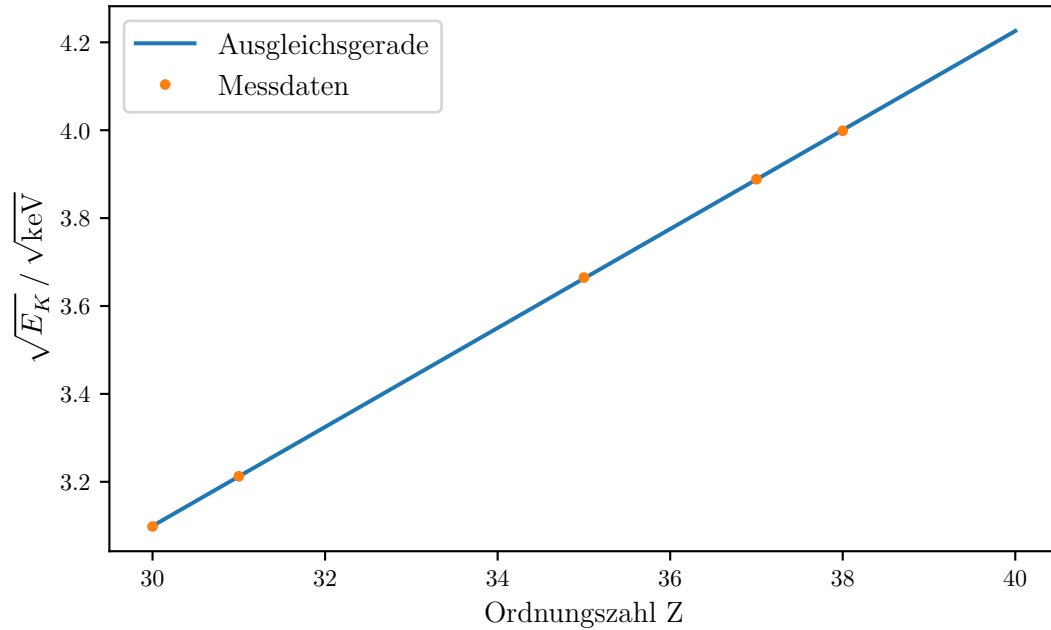
#### 4.4 Moseley'sches Gesetz

Mit den erhaltenen Messpaaren aus Energie  $E_K$  und den Ordnungszahlen  $Z$  (siehe Tabelle 2) wird nun das Moseley'sche Gesetz überprüft. Dazu wird eine Geradengleichung für  $\sqrt{E_K}$  und  $Z$  berechnet:

$$E_K = Rh(z - \sigma)^2 \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{E_K} = \underbrace{\sqrt{Rh}}_a \cdot z - \underbrace{\sqrt{Rh}\sigma_k}_b \quad (19)$$

In Abbildung 10 sind die ermittelten Werte und die entsprechende Ausgleichsgerade dargestellt.



**Abbildung 10:**  $\sqrt{E_K}$  in Abhängigkeit von der Ordnungszahl Z mit Ausgleichsgeraden

Eine lineare Ausgleichsrechnung ergibt für die Parameter der Geraden:

$$a = 0,113 \sqrt{\text{keV}}$$

$$b = -0,279 \sqrt{\text{keV}}$$

Nach Gleichung 19 ergibt sich dann für die Rydbergenergie:

$$Rh = a^2 = 12,769 \text{ eV}$$

Demnach beträgt die Rydbergfrequenz:

$$R = 3,09 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

## 5 Diskussion

Im ersten Teil der Versuchsauswertung wurde die Bragg-Bedingung überprüft (Unterabschnitt 4.1). Dabei wurde eine Abweichung vom Theorie-Wert von  $\Delta\theta = 0,2^\circ$  bzw.  $\Delta\theta_{rel} = 0,72\%$  ermittelt, was im akzeptablen Fehlerereich liegt.

Die Ergebnisse aus dem zweiten Auswertungsteil sind besonders nah an den recherchierten Literaturwerten. So weicht das gemessene Ergebnis für die Energie der  $K_\alpha$ –Linie nur um  $\Delta E_\alpha = 0.01 \text{ keV}$  vom recherchierten Literaturwert (siehe Abschnitt 3) ab. Für die  $K_\beta$ –Linie stimmt das gemessene Ergebnis sogar mit dem recherchierten Literaturwert überein, also  $\Delta E_\beta = 0$ . Es konnten also sehr gute Messwerte aufgenommen werden. Im dritten Teil der Auswertung wurden die Absorptionsspektren einiger Absorber untersucht. Die Messabweichungen für Zink ergeben sich mit den recherchierten Literaturwerten aus Tabelle 1 zu:

$$\begin{array}{ll} \Delta E = 0,05 \text{ keV} & \Delta E_{\text{rel}} = 0,52\% \\ \Delta \theta = 0.1^\circ & \Delta \theta_{\text{rel}} = 0.54\% \\ \Delta \sigma = 0.04 & \Delta \sigma_{\text{rel}} = 1,12\% \end{array}$$

Für die Abschirmkonstanten der weiteren Absorber ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \Delta \sigma_{\text{Gallium}} = 0 \\ \Delta \sigma_{\text{Brom}} = 0.05 \\ \Delta \sigma_{\text{Rubidium}} = 0.1 \\ \Delta \sigma_{\text{Strontium}} = 0.12 \end{array}$$

Auch hier sind die Abweichungen also gering und in einem tolerablen Fehlerbereich. Im letzten Teil der Auswertung wurde die Rydbergkonstante aus den Messwerten und dem moseleyschen Gesetz zu  $R = 3,09 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  bestimmt. Im Vergleich zum Literaturwert,  $R_{\text{Lit}} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  [1], erhält man eine Abweichung von  $\Delta R = 0,02 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  bzw.  $\Delta R = 0.61\%$ . Somit konnte auch für die Rydbergkonstante experimentell ein Wert ermittelt werden der sehr nah am Literaturwert liegt.

## Literatur

- [1] Hans Joachim Eichler, Heinz-Detlef Kronfeldt und Jürgen Sahm. *Das neue Physikalische Grundpraktikum*. 2016, S. 372.
- [2] *Energien der K-Linien Kupfer*. 2021. URL: [https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p6/p6354\\_d.pdf](https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p6/p6354_d.pdf) (besucht am 04.05.2021).
- [3] *Literaturwerte der K-Kanten*. 2021. URL: <https://wissen.science-and-fun.de/tabellen-fur-spektroskopiker/wellenlaengen-und-anregungsenergien-von-k-und-l-absorptionskanten/> (besucht am 04.05.2021).
- [4] *Messdaten und Hinweise zum Versuch Roentgenemission und -absorption*. Fakultät Phyik, TU Dortmund.
- [5] *Versuchsanleitung, V602: Röntgenemission und -absorption*. Fakultät Phyik, TU Dortmund.