V106

Gekoppelte Pendel

Philip Jaletzky
philip.jaletzky@udo.edu

Matthias Maile
matthias.maile@udo.edu

Durchführung: 08.06.2021

Abgabe: 15.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

Zielsetzung

In diesem Versuch sollen verschiedene Phänomene, die bei gekoppelten Pendeln auftreten, untersucht werden. Im Fokus steht dabei die Schwebung.

1 Theorie

Wichtige Kenngrößen beim Pendel sind die Fadenlänge l und Masse m. Wird das Pendel ausgelenkt, so sorgt die Gewichtskraft mit ihrer tangentialen Komponente für ein Drehmoment $M = D_p \cdot \phi$, wobei ϕ der Auslenkwinkel und D_p die Winkelrichtgröße des Pendels sind. Bei kleinen Winkeln ($\phi \leq 10°$) folgt aus der linearen Taylorentwicklung die Näherung $\sin(\phi) \approx \phi$. Damit lässt sich die Bewegungsgleichung des Pendels

$$J \cdot \ddot{\phi} + D_p \phi = 0 \tag{1}$$

aufstellen, mit dem Trägheitsmoment J. Diese DGL wird durch eine harmonische Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{2}$$

Bemerkenswert ist dabei die Tatsache, dass ω komplett unabhängig von Pendelmasse und dem Auslenkwinkel ϕ ist.
In diesem Versuch sollen gezielt gekoppelte Pendel betrachtet werden; die Kopplung wird hier durch eine Feder realisiert. Diese sorgt für ein zusätzliches Drehmoment $M_1 = D_F(\phi_2 - \phi_1)$ aufs erste bzw. $M_2 = D_F(\phi_1 - \phi_2)$ auf das zweite Pendel. Aus Gleichung 1 folgt ein System gekoppelter Differentialgleichung

$$J\ddot{\phi}_1 + D\phi_1 = D_F(\phi_2 - \phi_1), \tag{3}$$
$$J\ddot{\phi}_2 + D\phi_2 = D_F(\phi_1 - \phi_2). \tag{4}$$

Durch eine Variablensubstitution können diese entkoppelt werden und als zwei unabhängige, harmonische Schwingungen dargestellt werden. Die Frequenzen dieser zwei Schwingungen werden mit ω_1 und ω_2 bezeichnet, die Auslenkwinkel der Pendel α_i. Abhängig von den Anfangsbedingungen $\alpha(t = 0)$ und $\dot{\alpha}(t = 0)$ können dabei drei Schwingungsarten auftreten, welche in Abbildung 1 dargestellt sind.

- **Gleichsinnige Schwingung:** $\alpha_1 = \alpha_2$
  Im Fall gleicher Auslenkung übt die Feder keine Kraft aus. Die Schwingungsfrequenz ist daher unverändert $\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Die Schwingungsdauer folgt dann mit

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

- **Gegensinnige Schwingung:** $\alpha_1 = -\alpha_2$
  Der zweite Sonderfall ist der Fall entgegengesetzter Schwingung. Da die Feder jetzt die rücktreibende Kraft unterstützt, liegt hier eine höhere Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}$$

  vor, mit der Kopplungskonstante K, welcher von der Feder abhängt. Damit folgt die Schwingungsdauer

$$T_{-} = \frac{2\pi}{\omega_{-}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + 2K}}. \tag{6}$$

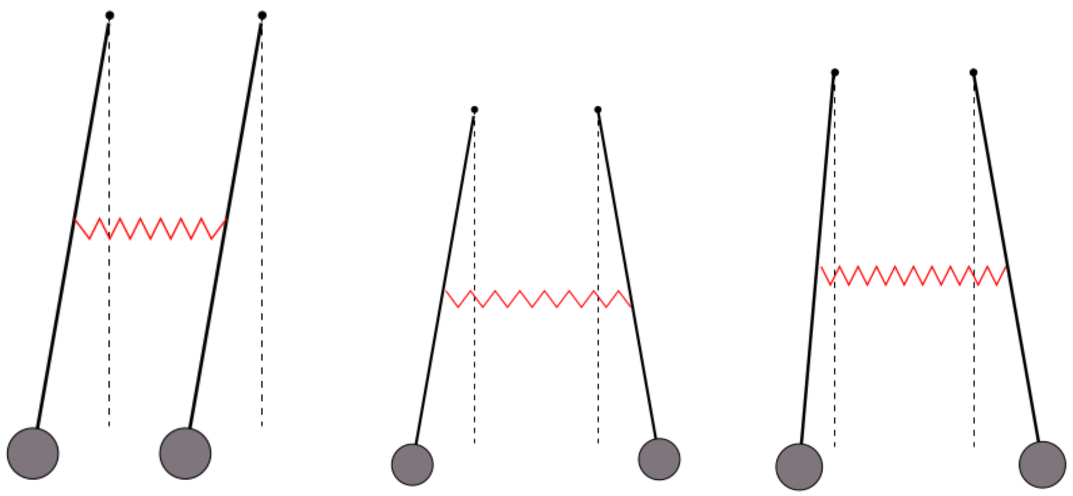
- **Gekoppelte Schwingung:** $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$
  Zuletzt wird der Fall der gekoppelten Schwingung betrachtet. Hier wird ein Pendel in Ruhelage gelassen und das zweite um α_2 ausgelenkt. Die Energie, welche anfangs in nur einem Pendel vorliegt, wird langsam auf das Zweite übertragen und wandert dann periodisch zwischen beiden hin und her. Dieses Phänomen wird als *Schwebung* bezeichnet und hat Periodendauer und Frequenz

$$T_S = \frac{T_{+} \cdot T_{-}}{T_{+} - T_{-}} \quad \text{und} \quad \omega_S = \omega_{+} - \omega_{-}. \tag{7}$$

  Damit kann dann auch die Kopplungskonstante

$$K = \frac{\omega_{-}^2 - \omega_{+}^2}{\omega_{-}^2 + \omega_{+}^2} = \frac{T_{+}^2 - T_{-}^2}{T_{+}^2 + T_{-}^2} \tag{8}$$

  bestimmt werden.



(a) Gleichsinnige Schwingung. **(b)** Gegensinnige Schwingung. **(c)** Gekoppelte Schwingung.

Abbildung 1: Die drei charakteristischen Schwingsarten grafisch dargestellt. [1]

2 Durchführung

Im Folgenden soll auf die Durchführung der Messung eingegangen werden. Die gesamte Messreihe wird dabei mit zwei verschiedenen Pendellängen durchgeführt. Für beide Pendellängen sollen folgende Werte bestimmt werden:

- Die Schwingungsdauern der einzelnen Pendel frei schwingend T_i,
- Die Schwingungsdauer T_+ der gleichphasigen Schwingung,
- $T\_$ für gegenphasige Schwingung,
- Schwingungsdauer T und Schwebungsdauer T_S für die gekoppelte Schwingung.

Damit erfolgt die Messung in vier Schritten:

1. **Messung der Schwingungsdauern T_i und T_+:**
   Zunächst wird die Feder entnommen und die Pendel werden jeweils gemäß Kleinwinkelnäherung um $\alpha < 10°$ ausgelenkt. Für jedes Pendel werden zweimal zehn Messwerte zur Periodendauer der Schwingung (von jedem Experimentierenden je zehn) aufgenommen.
   Da gemäß Gleichung 5 $T_+ = T_i$ gilt, kann die Messung des Falls gleichsinniger Schwingung ausgelassen werden.
   Da eine Periodendauer sehr kurz sein kann, bietet es sich an, mehrere Perioden aufzuzeichnen und die Zeit entsprechend zu dividieren.

2. **Messung von $T\_$:**
   Die Feder wird zwischen die Pendel gespannt, die Höhe der Feder ist dabei egal. Danach werden die Pendel so ausgelenkt, dass die Winkel entgegengesetzt zueinander sind ($\alpha_1 = -\alpha_2$). Dabei muss dadrauf geachtet werden, dass die Pendel sich in der Mitte nicht treffen. Auch hier werden von beiden Experimentierenden je zehn Messwerte der Periodendauer aufgenommen. Auch hier bietet sich der Trick, mehrere Intervalle aufzunehmen, an.

3. **Messung der Schwebungssdauer T_S:**
   Für diese Messung muss ein Pendel ausgelenkt werden, während sich das Andere in Ruhelage befinden soll. Als Anfang und Ende einer Periode kann hier der Stillstand eines Pendels gewählt werden. Die Messung erfolgt in Analogie zu der zuvor beschriebenen. Hier genügen jedoch fünf Messwerte pro Studierender.

4. **Messung der Schwingungsdauer beim Fall gekoppelter Schwingung T:**
   Wie in Punkt 1 ohne Kopplung, wird hier jetzt die Schwingung eines Pendels bei einer gekoppelten Schwingung betrachtet. Dabei muss innerhalb eines Schwebungsintervalls die Periodendauer gemessen werden. Wenn möglich, kann auch hier mit mehreren Intervallen gearbeitet werden. Wie in den ersten beiden Messungen sollen hier auch zweimal zehn Messwerte aufgenommen werden.

3 Auswertung

In diesem Abschnitt werden nacheinander die Messdaten zur gleichsinnigen, zur gegensinnigen und zur gekoppelten Schwingung ausgewertet.
Dabei werden einige Mittelwerte aus den Messwerten mit der Formel

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} T_{\mathrm{i}} \tag{9}$$

berechnet.
Die Standardabweichung der Mittelwerte wird nach

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (T_i - \bar{T})^2}{n}} \tag{10}$$

berechnet. Die beiden Formeln beziehen sich jeweils auf n Messwerte.

3.1 Gleichsinnige Schwingung

In Tabelle 1 sind die Messwerte für die gleichsinnige Schwingung aufgelistet. Diese Messwerte geben immer die Dauer von 3 Schwingungsperioden an, da die Messung über einen längeren Zeitraum weniger fehleranfällig ist. Die Werte T_1 und T_2 sind jeweils, für 2 unterschiedliche Pendellängen, die Werte für das rechte und das linke Pendel. Bei der gleichsinnigen Schwingung werden die Mittelwerte und Standardabweichungen dann aus den kombinierten Werten von T_1 und T_2 gebildet.

Tabelle 1: Messwerte und Schwingungsdauern für die gleichsinnige Schwingung, jeweils für 3 Schwingungsperioden.

Pendellänge l[m]	0,28		0,76	
	$T_1[s]$	$T_2[s]$	$T_1[s]$	$T_2[s]$
	3,49	3,49	4,96	4,91
	3,55	3,7	5,4	5,24
	3,73	3,39	5,16	5,2
	3,6	3,7	5,33	5,25
	3,72	3,73	5,21	5,17
	3,62	3,71	5,3	5,3
	3,51	3,63	4,82	5,04
	3,81	3,57	5,59	5,32
	3,72	3,68	5,49	6,54
	3,2	3,61	5,16	5,19
	3,59	3,36	4,9	5,31
	3,75	3,69	5,61	5,19
	3,84	3,65	5,31	5,2
	3,58	3,58	5,33	5,23
	3,4	3,73	5,14	5,34
	3,98	3,69	5,19	5,27
	3,52	3,59	5,27	5,07
	3,71	3,49	5,25	5,13
	3,51	3,45	5,42	5,35
	3,64	3,99	5,2	5,03
Mittelwert $\bar{T}_+[s]$	3,62		5,26	
Standardabweichung des Mittelwerts $\sigma_{T_+}[s]$	0,15		0,26	

Bezogen auf eine Schwingungsperiode ergeben sich für die gleichsinnige Schwingung also

$$T_{1,+} = (1.21 \pm 0.050)\text{s} \tag{11}$$

und

$$T_{2,+} = (1.75 \pm 0.087)\text{s}. \tag{12}$$

Zusätzlich lassen sich nach Gleichung 5 für die beiden Schwingungdauern die Theoriewerte

$$T_{1,+,\text{th}} = 1.06\text{s} \tag{13}$$

und

$$T_{2,+,\text{th}} = 1.75\text{s} \tag{14}$$

bestimmen.

3.2 Gegensinnige Schwingung

Analog zu dem Vorgehen bei der gleichsinnigen Schwingung sind die Messwerte, Mittelwerte und Standardabweichungen zur gegensinnigen Schwingung in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Messwerte und Schwingungsdauern für die gegensinnige Schwingung, jeweils für 3 Schwingungsperioden.

Pendellänge l[m]	0,28	0,76
	T_-[s]	
	2,19	4,43
	2,99	4,92
	2,52	4,88
	2,81	4,78
	2,57	4,93
	2,76	4,63
	2,66	5,35
	2,89	4,45
	2,62	4,96
	2,67	4,65
	2,82	4,87
	2,4	5,17
	2,75	4,91
	2,62	4,78
	2,47	4,76
	2,67	4,84
	2,34	4,78
	2,5	4,7
	2,72	4,85
	2,76	4,72
Mittelwert $\bar{T}_-[s]$	2,64	4,82
Standardabweichung des Mittelwerts $\sigma_{T_-}[s]$	0,19	0,21

Bezogen auf eine Schwingungsperiode ergeben sich für die gegensinnige Schwingung also

$$T_{1,-} = (0,88 \pm 0,063)\text{s} \tag{15}$$

und

$$T_{2,-} = (1,61 \pm 0,07)\text{s}. \tag{16}$$

Mit den ermittelten Werten kann nun nach Gleichung 8 die Kopplungskonstante K bestimmt werden. Für das $0.28m$ Pendel ergibt sich

$$K_1 = \frac{1.21^2 - 0.88^2}{1.21^2 + 0.88^2} = 0.31 \tag{17}$$

und für das $0.76m$ Pendel erhält man:

$$K_2 = \frac{1.75^2 - 1.61^2}{1.75^2 + 1.61^2} = 0.083 \tag{18}$$

Nach Gleichung 6 können nun die theoretischen Werte für $T\_$ bestimmt werden. Man erhält:

$$T_{1,-,\mathrm{th}} = 1.03\mathrm{s} \tag{19}$$

und

$$T_{2,-,\mathrm{th}} = 1.73\mathrm{s} \tag{20}$$

3.3 Gekoppelte Schwingung

Die Messwerte, Schwingungsdauern und Schwebungsdauern für die gekoppelte Schwingung sind in Tabelle 3 aufgeführt. Die Werte für die Schwingungsdauern beziehen sich wieder auf 3 Schwingungsperioden, während sich die Schwebungsperioden auf eine Periode der Schwebung beziehen.

Tabelle 3: Schwingungsdauern T und Schwebungsdauern T_S der gekoppelten Schwingung.

Pendellänge l[m]	0,28		0,76	
	T[s]	T_S[s]	T[s]	T_S[s]
	2,41	3,48	4,69	19,18
	3,81	3,85	6,74	20,34
	3,04	4,73	5,19	20,05
	3,57	4,01	4,64	21,22
	3,65	4,33	5,52	19,31
	3,4	4,1	5,14	20,2
	3,8	3,3	5,15	20,75
	2,58	3,91	5,08	20,64
	2,82	3,7	4,97	19,61
	4,1	4,02	5,3	19,93
	3,45		4,57	
	3,53		5,44	
	3,12		4,81	
	2,52		4,73	
	3,44		5,01	
	3,55		5,54	
	3,7		4,74	
	3,13		4,64	
	3,34		5,3	
	3,52		5,1	
Mittelwert [s]	3,32	3,94	5,12	20,12
Standardabweichung des Mittelwerts [s]	0,45	0,39	0,47	0,61

Mit den berechneten Werten für T_+ und T_- lassen sich nun nach Gleichung 7 die theoretischen Werte

$$T_{S,1,\mathrm{th}} = 36.393\mathrm{s} \tag{21}$$

$$T_{S,2,\mathrm{th}} = 151.375\mathrm{s} \tag{22}$$

für die Schwebungsdauern der beiden Pendel berechnen.

4 Diskussion

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des Versuchs rekapituliert. Die prozentualen Abweichungen werden dabei nach

$$\Delta x = |\frac{x_{\mathrm{exp}} - x_{\mathrm{th}}}{x_{\mathrm{th}}} \cdot 100\,\%|$$

berechnet.
In Unterabschnitt 3.1 wird die Schwingungsdauer für die gleichsinnige Schwingung einmal als Mittelwert der gemessenen Werte und einmal theoretisch über die Gravitationskonstante und die Pendellänge berechnet. Hier haben sich geringe bis praktisch keine Abweichungen zwischen den beiden Werten ergeben. Die Abweichungen betragen $\Delta T_{+,1} = 14,1\%$ und $\Delta T_{+,2} = 0\%$.
Im Weiteren wurde in Unterabschnitt 3.2 die gegensinnige Schwingung untersucht. Auch hier wird die Schwingungsdauer der Schwingung einmal als Mittelwert der Messwerte und einmal theoretisch mit Hilfe der Kopplungskonstanten berechnet. Dabei ergeben sich die Abweichungen $\Delta T_{-,1} = 14,56\%$ und $\Delta T_{-,2} = 6.94\%$. Auch für die gegensinnige Schwingung konnten also Werte mit geringen Abweichungen, die im Bereich üblicher Messungenauigkeiten liegen, ermittelt werden.
Im letzten Abschnitt der Auswertung wurden Schwebungsperioden für die gekoppelte Schwingung ermittelt. Die Abweichungen der Messwerte von den berechneten Werten ist hier höher. So ergeben sich die Abweichungen $\Delta T_{S,1} = 89,17\%$ und $\Delta T_{S,2} = 86.71\%$. Die hohe Messungenauigkeit bei der Bestimmung der Schwebungsperioden kann teilweise damit erklärt werden, dass es deutlich schwieriger ist eine Schwebung, als eine gewöhnliche Schwingung, mit dem bloßen Auge genau zu erkennen. Dazu kommt, dass die Zeiten mit einem Handy gestoppt wurden, welches per Hand bedient wurde, was zu recht hohen Messungenauigkeiten führen kann, da die Stoppuhr auf dem Handy und das Pendel gleichzeitig beobachtet werden müssen. Dazu kommt, dass bei der Bestimmung der Schwebungsperioden jeweils nur eine Periode gemessen wurde, was ungenauer ist als beispielsweise 3 Perioden, wie bei den Schwingungsdauern, zu messen.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 106: Gekoppelte Pendel.*