

D206

Die Wärmepumpe

Philip Jaletzky
philip.jaletzky@udo.edu

Matthias Maile
matthias.maile@udo.edu

Durchführung: 03.11.2020

Abgabe: 17.11.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	3
1.1. Das Prinzip der Wärmepumpe	3
1.2. Die Arbeitsweise der Wärmepumpe	4
1.3. Die Bestimmung der Kenngrößen einer realen Wärmepumpe	5
1.3.1. Bestimmung der realen Güteziffer	6
1.3.2. Bestimmung des Massendurchsatzes	7
1.3.3. Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung N_{mech}	7
2. Durchführung	8
3. Auswertung	8
4. Diskussion	13
Literatur	14
A. Anhang	15

1. Theorie

In diesem Versuch untersuchen wir den Energietransport zwischen zwei Wärmereservoirien, mit dem Ziel die Kenngrößen der eingesetzten Wärmepumpe zu ermitteln.

1.1. Das Prinzip der Wärmepumpe

Aus Beobachtung von Prozessen in der Natur kann man sagen, dass Wärmeenergie immer vom heißeren zum kälteren Körper fließt. Durch externe (mechanische) Arbeit kann man diesen Fluß jedoch umkehren.

Dabei nimmt nach dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre das wärmere Reservoir die Wärmeenergie Q_1 auf, welche sich aus der vom kälteren Reservoir entnommenen Wärmemenge Q_2 , sowie der aufgewandten Arbeit A zusammen:

$$Q_1 = Q_2 + A \quad (1)$$

Davon ausgehend lässt sich die Güteziffer der Wärmepumpe als der Quotient von abgegebener Wärme und aufgewandter Arbeit definieren:

$$\nu = \frac{Q_1}{A} \quad (2)$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich dabei eine weitere Beziehung herleiten: Ändert sich die Temperatur zwischen den Reservoirien nicht, so besagt dieser, dass die Summe der sogenannten reduzierten Wärmemengen $\int \frac{dQ}{T}$ verschwindet. Dies bedeutet für uns

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (3)$$

Dabei muss jedoch beachtet werden, dass (3) nur für ideale reversible Prozesse gilt. Dies kann von der technischen Realisierung der Wärmepumpe natürlich nicht erreicht werden. Für den realistischen, irreversiblen Fall gilt die Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0. \quad (4)$$

Aus den Formeln 1 und 3 folgt für Q_1 :

$$Q_1 = A + \frac{T_2}{T_1} Q_1 \quad (5)$$

Damit gilt für die in 2 definierte Güteziffer einer idealen Wärmepumpe:

$$\nu_{\text{id}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (6)$$

Beziehungsweise für die Güte einer realen Wärmepumpe gilt

$$\nu_{\text{real}} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (7)$$

Mit 7 lässt sich auch erkennen, dass die Wärmepumpe am effizientesten arbeitet, wenn die Temperaturdifferenz zwischen den Reservoirien $|T_1 - T_2|$ niedrig ist.

1.2. Die Arbeitsweise der Wärmepumpe

Die Wärmeenergie wird bei der Wärmepumpe mit einem Gas transportiert, welches beim Verdunsten Wärme aus Reservoir 2 aufnimmt und beim Kondensieren an Reservoir 1 abgibt.

Da der Transport aus der Phasenumwandlungsenergie des Gases resultiert, sollte man ein Gas mit einer möglichst hohen Kondensationswärme benutzen.

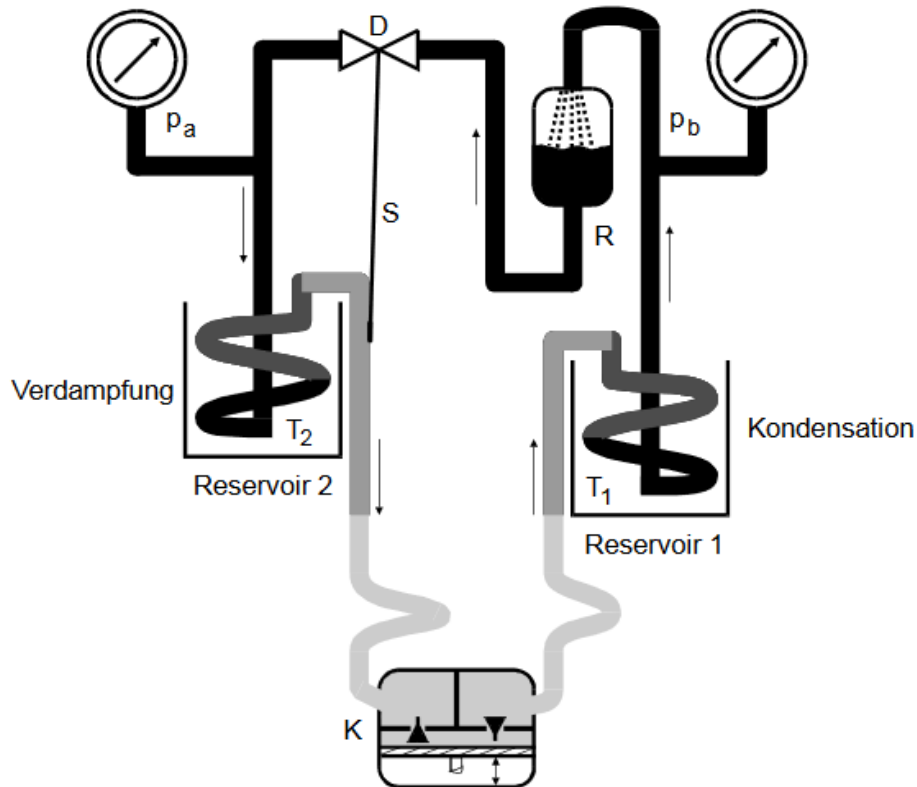


Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau einer Wärmepumpe
[1]

Abbildung 1 zeigt den schematischen Aufbau. Die Wärmepumpe beruht auf einem Kreislauf, der durch den Kompressor K aufrecht erhalten wird:

$$\text{Kompressor} \rightarrow \text{Reservoir 1} \rightarrow \text{Drosselventil} \rightarrow \text{Reservoir 2} \rightarrow \text{Kompressor} \rightarrow \dots \quad (8)$$

Für den Betrieb der Wärmepumpe soll nun das Gas bei T_1 und p_b flüssig und bei T_2 und p_a gasförmig sein.

Dabei durchläuft das Transportmedium folgende Stationen:

1. Das Gas strömt vom Kompressor durch Reservoir 1 und kondensiert. Dabei gibt es an Res. 1 die Kondensationswärme ab, wodurch Reservoir 1 sich langfristig erwärmt.

2. Das nun flüssige Gas fließt durch das Drosselventil D, welches einen Druckunterschied $p_b - p_a > 0$ erzeugt.
3. Das Flüssiggas strömt in Reservoir 2 und wird gassförmig. Die Verdunstung entzieht dabei dem Res. 2 Wärmeenergie, wodurch es abkühlt.
4. Das Gas wird vom Kompressor nahezu adiabatisch komprimiert.

Für den störungsfreien Betrieb kommen noch weitere Bauteile zum Einsatz, welche jedoch nichts zum Thermischen Prozess beitragen:

- Der Reiniger (In Abbildung 1 als “R“ gekennzeichnet), welcher sicherstellt, dass das Flüssiggas keine Luftblasen enthält.
- Die Steuervorrichtung “S“, die sicherstellt, dass keine Flüssigkeitsreste in den Kompressor gelangen, da dieser sonst kaputt gehen würde.

1.3. Die Bestimmung der Kenngrößen einer realen Wärmepumpe

Bei diesem Versuch interessieren wir uns für

- die Güteziffer ν
- den Massendurchsatz $\frac{dm}{dt}$
- und den Wirkungsgrad des Kompressors N_{mech} .

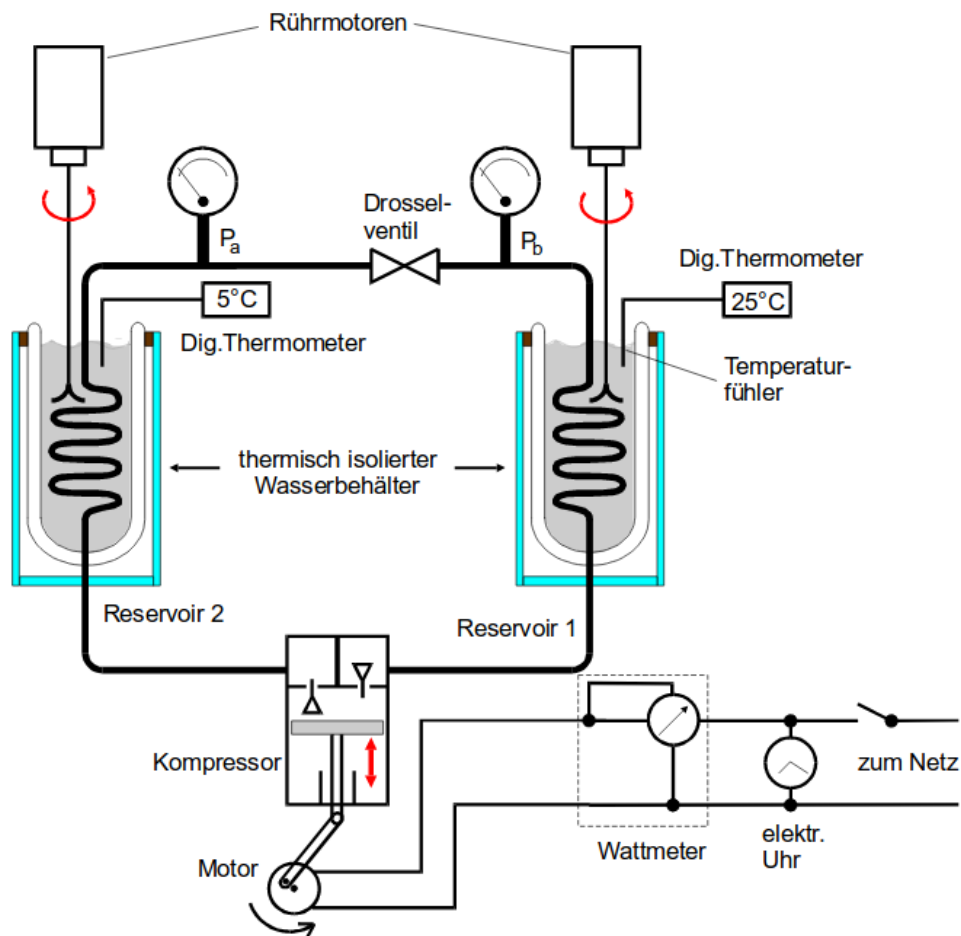


Abbildung 2: Schematische Darstellung der kompletten Messaperatur.

[1]

Der in Abbildung 2 beschriebene Aufbau ermöglicht uns die elektrische Leistungsaufnahme des Kompressors, die Temperaturverläufe in den Reservoiren T_i , die Drücke p_b und p_a (jeweils vor und hinter dem Drosselventil) in Abhängigkeit von der Zeit zu messen.

Die Reservoirs wurden hierbei durch zwei isolierte Eimer mit einer genau definierten Menge Wasser realisiert; um zuverlässige Temperaturwerte zu erhalten werden diese ständig umgerührt.

Wenn es gelingt, die Temperaturverläufe als Funktionen der Zeit, also $T_1 = T_1(t)$ und $T_2 = T_2(t)$ aufzustellen, können im nachfolgenden Teil die Differenzenquotienten durch die entsprechenden Differentialquotienten ersetzt werden.

1.3.1. Bestimmung der realen Gütezyiffer

Aus 7 wissen wir bereits, dass die Gütezyiffer der Quotient aus gewonnener Wärme Q_1 und aufgewandter Arbeit A ist.

Für diese Wärmemenge müssen wir zunächst aus der Messreihe $T_1(t)$ für ein geeignetes Intervall den Differenzenquotienten $\Delta T_1/\Delta t$ bilden. Aus diesem ergibt sich dann

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t}, \quad (9)$$

wobei $m_1 c_w$ der Wärmekapazität des Wassers im Reservoir 1 und $m_k c_k$ der Wärmekapazität der Kupferschlange im Eimer entsprechen. Daraus ergibt sich dann die Güteziffer

$$\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t \cdot N} \quad (10)$$

Mit N für die durchschnittliche Kompressorleistung im Zeitintervall Δt .

1.3.2. Bestimmung des Massendurchsatzes

Wie eben für $T_1(t)$ nimmt man ebenfalls den Differenzenquotienten zu $T_2(t)$. Daraus ergibt sich dann die pro Zeiteinheit aus Reservoir 2 entnommene Wärmemenge:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \quad (11)$$

Da für die Wärmeentnahme das Transportmedium verdampft und dabei pro Zeit- und Masseneinheit die Verdampfungswärme L benötigt wird, gilt der Massendurchsatz

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{L} \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} \quad (12)$$

wenn L bekannt ist.

1.3.3. Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung N_{mech}

Um ein Gasvolumen V_a auf den Wert V_b zu verringern, verrichtet der Kompressor die Arbeit

$$A_m = - \int_{V_a}^{V_b} p \, dV. \quad (13)$$

Als gute Näherung nehmen wir nun an, dass die Kompression adiabatisch erfolgt. Dann gilt für den Zusammenhang zwischen Druck und Volumen die bekannte Poissonsche Gleichung

$$p_a V_a^\kappa = p_b V_b^\kappa = p V^\kappa \quad (14)$$

Dann erhalten wir für A_m

$$A_m = -p_a V_a^\kappa \int_{V_a}^{V_b} V^{-\kappa} \, dV \quad (15)$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1} p_a V_a^\kappa (V_b^{-\kappa+1} - V_a^{-\kappa+1}) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b^{-\frac{1}{\kappa}} \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) V_a \quad (17)$$

und für N_{mech}

$$N_{\text{mech}} = \frac{\Delta A_m}{\Delta t} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b^{-\kappa} \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{\Delta V_a}{\Delta t} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b^{-\kappa} \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (20)$$

Hierbei steht ρ für die Dichte des Transportmediums im gasförmigen Zustand, also bei $p = p_a$. Mit der idealen Gasgleichung lässt sich ρ aus dem Literaturwert für ρ_0 unter Normalbedingungen errechnen.

2. Durchführung

Die in Unterabschnitt 1.3 beschriebenen Reservoirs werden, mit einem Messkolben genau abgemessen, mit Wasser befüllt.

Danach werden einmal pro Minute die Temperaturen der Reservoirs T_i , die Drücke p_i sowie die Leistungsaufnahme des Kompressors notiert. Die Messung wird durchgeführt, bis T_1 ungefähr 50°C erreicht hat.

3. Auswertung

a) Darstellung der Temperaturverläufe

Im ersten Schritt der Auswertung des Versuches wurden die gemessenen Temperaturverläufe graphisch dargestellt. In Abbildung 3 wurden die Daten in einem Zeit-Temperatur Diagramm geplottet. Die zur Verfügung gestellten Messdaten sind in einer Tabelle im Anhang zu finden.

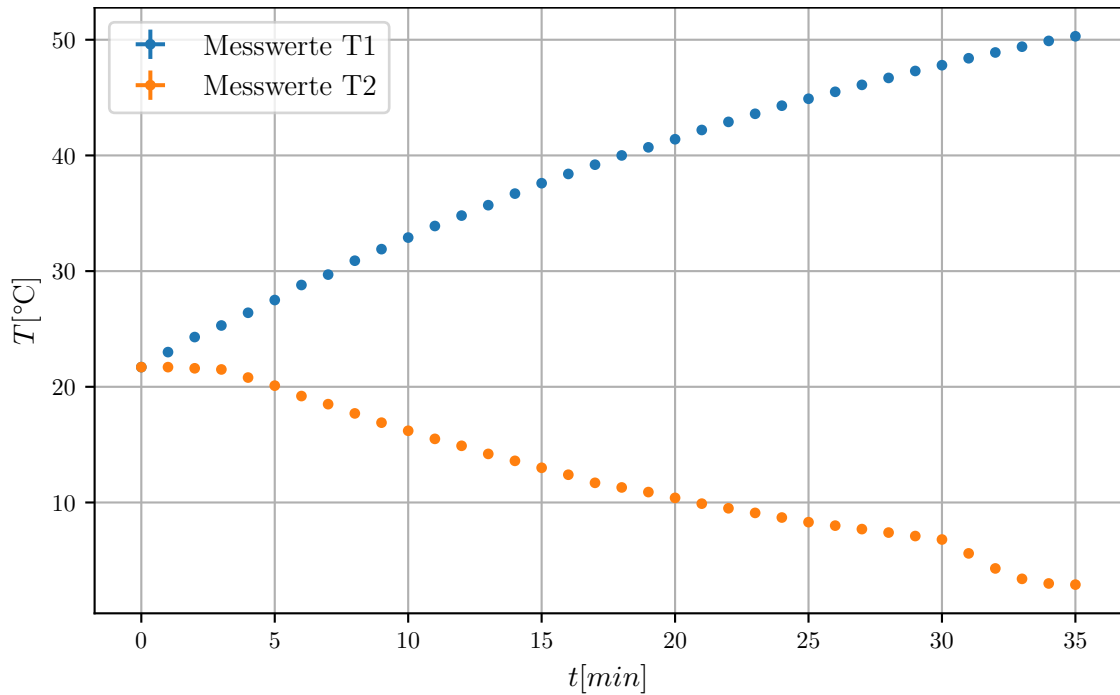


Abbildung 3: Gemessene Temperaturverläufe

b) Nicht-lineare Ausgleichsrechnung

Als nächstes wurden die Messdaten durch die Funktion $T(t) = A \cdot t^2 + B \cdot t + C$ approximiert. Mit der CurveFit Funktion und Fehlerrechnung in Python wurden dazu folgende Parameter ermittelt:

Für T1:

$$A_1 = (-0,011\,610 \pm 0,000\,151) \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}^2}$$

$$B_1 = (1,216\,790 \pm 0,005\,466) \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$$

$$C_1 = (21,820\,081 \pm 0,041\,345) ^{\circ}\text{C}$$

Für T2:

$$A_2 = (0,003\,438 \pm 0,000\,962) \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}^2}$$

$$B_2 = (-0,672\,523 \pm 0,034\,819) \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$$

$$C_2 = (22,720\,187 \pm 0,263\,361) ^{\circ}\text{C}$$

In Abbildung 4 sind die gefitteten Funktionen zusammen mit den Messdaten zu sehen .

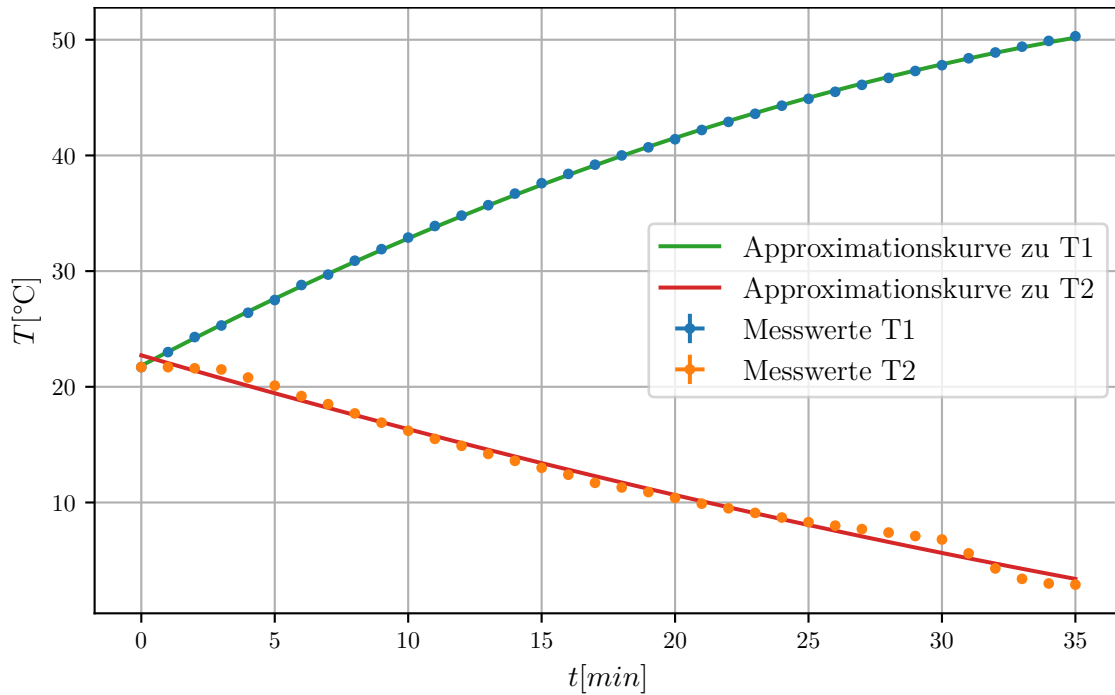


Abbildung 4: Nichtlineare Approximation der Temperaturverläufe

c) Bestimmung der Differentialquotienten

Im nächsten Schritt sollten zu 4 verschiedenen Temperaturen die Differentialquotienten dT_1/dt und dT_2/dt bestimmt werden. Dazu wurden die ermittelten Approximationsfunktionen differenziert. Im Allgemeinen ergibt die Differenzierung die Funktion $T'(t) = 2A \cdot t + B$. Im Speziellen ergeben sich also die Funktionen:

$$T_1' = -0.024 \cdot t + 1.217$$

$$T_2' = 0.006 \cdot t - 0.673$$

Die berechneten Werte für die Differentialquotienten für vier Temperaturen sind in Tabelle 1 aufgelistet. Hier wurden die Fehlerwerte aus den Fehlern der einzelnen Parameter nach

$$\Delta \frac{dT}{dt} = \sqrt{(2t \cdot \Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$$

berechnet. Gewählt wurden die Temperaturen bei 8, 16, 24 und 32 Minuten.

Tabelle 1: Differentialquotienten

t [min]	T_1 [°C]	T_2 [°C]	$\frac{dT_1}{dt}$ [°C/min]	$\frac{dT_2}{dt}$ [°C/min]
8	30.9	17.7	1.025 ± 0.006	-0.625 ± 0.038
16	38.4	12.4	0.833 ± 0.007	-0.577 ± 0.046
24	44.3	8.7	0.641 ± 0.009	-0.529 ± 0.058
32	48.9	4.3	0.449 ± 0.011	-0.481 ± 0.071

d) Bestimmung der Güteziffern

Aus den errechneten Werten für die Differentialquotienten kann nun die Güteziffer der benutzten Wärmepumpe ermittelt werden. Anschließend wird dieses Ergebnis mit der Güteziffer einer idealen Wärmepumpe verglichen. Im Theorieteil wurde bereits beschrieben, dass die reale Güteziffer nach den Gleichungen (9) und (10) bestimmt werden kann.

Dabei ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers $c_w = 4,187 \text{ J/(g K)}$, die Masse des Wassers $m_1 = 4 \text{ kg}$ und die Wärmekapazität der Kupferschlangen ist gegeben als $c_k m_k = 750 \text{ J/K}$. Die ideale Güteziffer wurde hier nach Gleichung (6) bestimmt. In Tabelle 2 wurden die so errechneten Werte für die reale Güteziffer ν und die ideale Güteziffer ν_{id} angegeben. Zur besseren Vergleichbarkeit wurde außerdem das Verhältnis der beiden Werte aufgelistet.

Tabelle 2: Güteziffern

t [min]	ν	ν_{id}	$\frac{\nu_{id}}{\nu}$
8	2.49 ± 0.02	23.03	9.2
16	2.02 ± 0.02	11.98	5.9
24	1.56 ± 0.03	8.92	5.7
32	1.09 ± 0.04	7.22	6.6

An der Tabelle ist direkt zu erkennen, dass die ermittelten Werte für ν und ν_{id} stark voneinander abweichen. So ist ν_{id} für die betrachteten Werte zwischen 5.7 und 9.2 mal so hoch wie ν .

e) Bestimmung des Massendurchsatzes

Wie in 1.3.2. beschrieben kann der Massendurchsatz mit den Formeln (11) und (12) ermittelt werden. Die Masse des zweiten Reservoirs ist dabei gegeben als $m_2 = m_1 = 4 \text{ kg}$. Zusätzlich wird für die Bestimmung des Massendurchsatzes die Verdampfungswärme L benötigt. Diese Verdampfungswärme L eines Stoffes kann man aus seiner Dampfdruck-Kurve gewinnen. Dazu muss eine Ausgleichsrechnung zu der zugehörigen Dampfdruck-Kurve durchgeführt werden. Hier wurde eine lineare Ausgleichsrechnung zu den Werten $\ln(p_2)$ und $1/T_2$ durchgeführt. Die Messdaten und die Ausgleichsgerade wurden in

Abbildung 5 dargestellt.

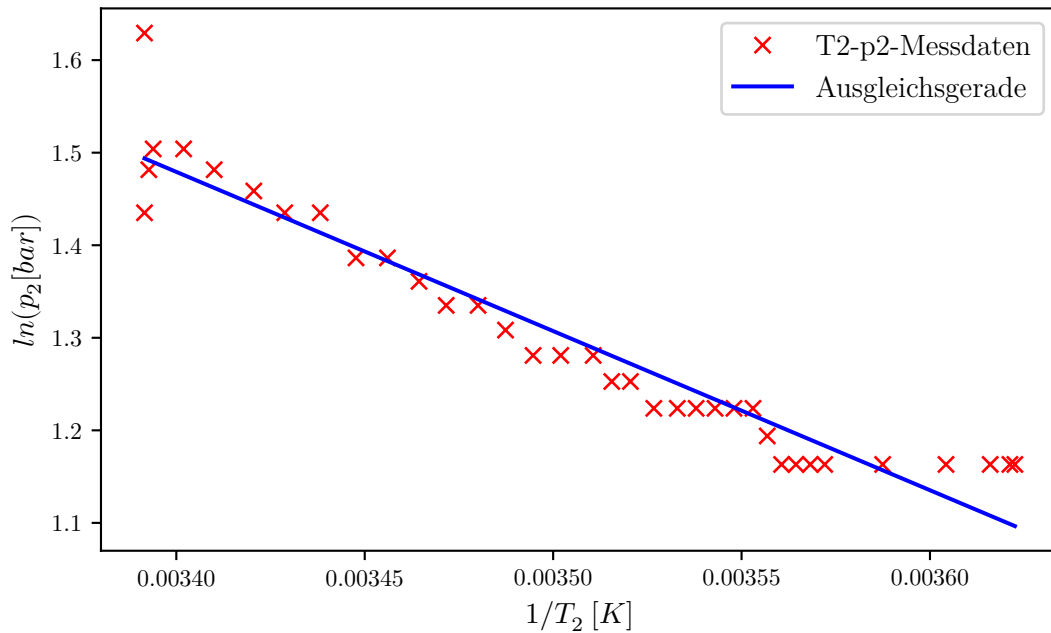


Abbildung 5: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Verdampfungswärme

Als Parameter der Ausgleichsgeraden ($ax+b$) ergeben sich $a = -1719.830 \pm 88.369$ und $b = 7.327 \pm 0.310$. Nach $L_{\text{reg}} = -a \cdot R$, mit $R = 8,314\,462\,1 \text{ J}/(\text{mol K})$ als der universellen Gaskonstanten lässt sich L also bestimmen:

$$L = (14\,300 \pm 734) \frac{\text{J}}{\text{mol}}$$

Umgerechnet in Gramm mit der molaren Masse von Dichlordifluormethan $M = 120,91 \text{ g/mol}$ ergibt sich:

$$L = (118 \pm 6) \frac{\text{J}}{\text{g}}$$

Mit den bereits bestimmten Differentialquotienten lassen sich nun die Massendurchsätze nach den Formeln (11) und (12) berechnen. Im Folgenden wurden die Massendurchsätze zu den verschiedenen Zeiten aufgelistet:

$t [min]$	$\frac{\Delta m}{\Delta t} [\frac{g}{min}]$
8	-92.68 ± 4.8
16	-85.56 ± 4.2
24	-78.44 ± 3.6
32	-71.33 ± 3.6

Tabelle 3: Massendurchsätze

f) Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung

Nun sollte die mechanische Leistung des Kompressors, die dieser abgibt, wenn er zwischen den Drücken p_1 und p_2 arbeitet, für die 4 bereits betrachteten Temperaturen berechnet werden. In Abschnitt 1.3.3 wurde beschrieben wie die mechanische Kompressorleistung N_{mech} mit Gleichung 20 berechnet werden kann. Dazu muss ρ aus der idealen Gasgleichung und den zur Verfügung gestellten Daten für $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$ ($\rho_0 = 5,51 \text{ g/l}$ bei $T = 0^\circ\text{C}$ und $p = 1 \text{ Bar}$, $\kappa = 1,14$) bestimmt werden. Zur Bestimmung von ρ ergibt sich in unserem Versuch:

$$\rho = \frac{p_2 \cdot \rho_0 \cdot T_0}{p_0 \cdot T_2}.$$

Aus den beschriebenen Gleichungen und dem bereits berechneten Massendurchsatz lässt sich dann die mechanische Kompressorleistung zu folgenden Werten bestimmen:

Tabelle 4: Mechanische Kompressorleistung

$t [min]$	$\rho [\text{g/L}]$	$N_{\text{mech}} [10^{-3} \text{ W}]$
8	21.73	-5.01 ± 0.13
16	18.97	-10.02 ± 0.16
24	18.16	-14.09 ± 0.17
32	17.36	-17.15 ± 0.16

4. Diskussion

Bei der Auswertung des Wärmepumpen-Versuchs war auffällig, dass die ermittelten Güteziffern für die Wärmepumpe stark von den berechneten theoretischen idealen Werten abwichen. Da wir den Versuch nicht selber vor Ort durchgeführt haben, konnten wir nicht direkt prüfen, ob es offensichtliche Mängel gab, die zu diesem Ergebnis führten. Allerdings ist zu beachten, dass eine reale Wärmepumpe nie exakt den idealen Wert für ihre Güteziffer erreichen kann. Dazu wurden in dem Versuch analoge Manometer und eine analoge Leistungsanzeige zum Ablesen der Werte genutzt, was bereits zu erheblichen Fehlern beim Ablesen der Werte geführt haben könnte. Außerdem kann ein zunehmender Verschleiß der genutzten Geräte nicht ausgeschlossen werden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchanleitung zu Versuch 206*. 2014.

A. Anhang

t [min]	T_1 [$^{\circ}C$]	p_1^* [bar]	T_2 [$^{\circ}C$]	p_2^* [bar]	N[W]
0	21.7	4.0	21.7	4.1	120
1	23.0	5.0	21.7	3.2	120
2	24.3	5.5	21.6	3.4	120
3	25.3	6.0	21.5	3.5	120
4	26.4	6.0	20.8	3.5	120
5	27.5	6.0	20.1	3.4	120
6	28.8	6.5	19.2	3.3	120
7	29.7	6.5	18.5	3.2	120
8	30.9	7.0	17.7	3.2	120
9	31.9	7.0	16.9	3.0	120
10	32.9	7.0	16.2	3.0	120
11	33.9	7.5	15.5	2.9	120
12	34.8	7.5	14.9	2.8	120
13	35.7	8.0	14.2	2.8	120
14	36.7	8.0	13.6	2.7	120
15	37.6	8.0	13.0	2.6	120
16	38.4	8.5	12.4	2.6	120
17	39.2	8.5	11.7	2.6	120
18	40.0	9.0	11.3	2.5	120
19	40.7	9.0	10.9	2.5	120
20	41.4	9.0	10.4	2.4	120
21	42.2	9.0	9.9	2.4	120
22	42.9	9.5	9.5	2.4	120
23	43.6	9.5	9.1	2.4	120
24	44.3	10.0	8.7	2.4	120
25	44.9	10.0	8.3	2.4	120
26	45.5	10.0	8.0	2.3	120
27	46.1	10.0	7.7	2.2	122
28	46.7	10.5	7.4	2.2	122
29	47.3	10.5	7.1	2.2	122
30	47.8	10.75	6.8	2.2	122
31	48.4	11.0	5.6	2.2	122
32	48.9	11.0	4.3	2.2	122
33	49.4	11.0	3.4	2.2	122
34	49.9	11.0	3.0	2.2	122
35	50.3	11.0	2.9	2.2	122

Abbildung 6: Zur Verfügung gestellte Messdaten