V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Christopher Krause
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 05.12.2017 Abgabe: 12.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Zeitkonstante eines RC-Kreises ermittelt. Zudem wird die Phasenverschiebung von Kondensatorspannung und Generatorspannung, sowie die Amplitude der Kondensatorspannung, in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht. Die Nutzung eines RC-Kreises als Integrator wird unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt.

2 Theorie

Relaxationserscheinungen beschreiben die nicht-oszillatorische Rückkehr eines Systems in seine Ausgangslage, wenn es aus dieser entfernt wird. Die Änderungsgeschwindigkeit der betrachteten Größe A zu dem Zeitpunkt t ist meist proportional zur Abweichung von A von dem Endzustand $A(\infty)$. Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = c[A(t) - A(\infty)]. \tag{1}$$

Daraus folgt für A:

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct} \tag{2}$$

c ist kleiner Null. Das Relaxationsverhalten eines Kondensators beschreibt einen exponentiellen Vorgang.

2.1 Auf- und Entladevorgang eines Kondensators

Ein Kondensator mit der Kapazität C und der Ladung Q hat zwischen den Kondensatorplatten die Spannung:

$$U_c = \frac{Q}{C} \tag{3}$$

Mit dem ohmschen Gesetz folgt für den Strom durch den Widerstand R:

$$I = \frac{U_C}{R}. \tag{4}$$

In einem Zeitintervall dt ändert sich die Ladung auf den Kondensator platten um $-I\mathrm{d}t$. Mit Gleichung (3) und (4) folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q(t) \tag{5}$$

Die DGL beschreibt den zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators. Dieser entlädt sich nach unendlich langer Zeit und für die Ladung ergibt sich:

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6}$$

Für den Aufladevorgang gilt entsprechend:

$$Q(t) = CU_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{7}$$

U_0 ist die Spannung der angeschlossenen Spannungsquelle und RC die Zeitkonstante, welche beschreibt wie schnell Q gegen den Endzustand strebt.

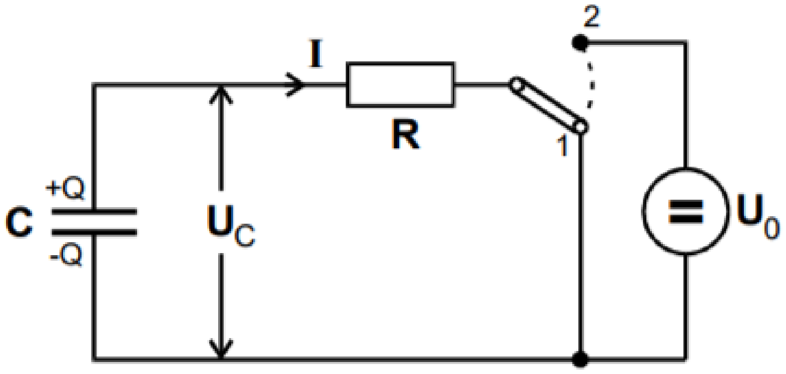

Abbildung 1: Auf- und Entladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand [1]

2.2 Relaxationsphänomene bei periodisch auftretenden Auslenkungen

Liegt an einem RC-Kreis eine Wechselspannung $U(t) = U_0\cos(\omega t)$ an ist diese für $\omega \ll \frac{1}{RC}$ ungefähr gleich der Kondensatorspannung. Für größere Frequenzen entsteht eine Phasenverschiebung φ zwischen Auf- und Entladung des Kondensators über den Widerstand und der Generatorspannung. Die Amplitude A der Kondensatorspannung nimmt ab.

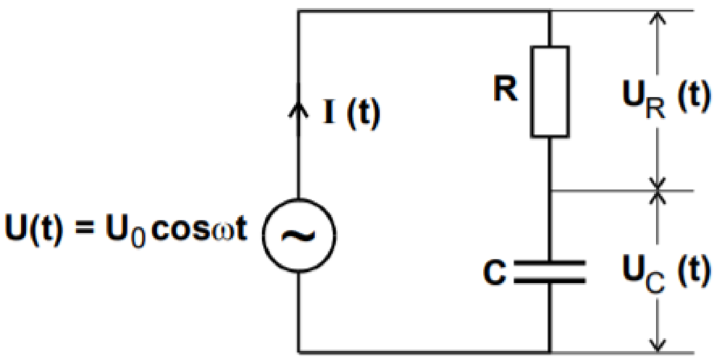

Abbildung 2: Wechselspannung in einem RC-Kreis [1]

Um die frequenzabhängige Amplitude und Phasenverschiebung zu ermitteln wird der Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)) \tag{8}$$

gewählt. Mit dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz, Gleichung (3) und $\mathrm{d}Q = -I\mathrm{d}t$ folgt:

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich:

$$U_0\cos(\omega t) = -A\omega RC\sin(\omega t + \varphi) + A(\omega)\cos(\omega t + \varphi) \tag{10}$$

Gleichung (10) muss für alle t erfüllt sein und aus $\omega t = \frac{\pi}{2}$ folgt:

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \tag{11}$$

Für die Phasenverschiebung und die Amplitude lässt sich daraus herleiten:

$$\sin(\varphi) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{12}$$

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{13}$$

Die Gleichungen zeigen, dass für kleine Frequenzen die Phasenverschiebung gegen Null und die Amplitude gegen U_0 geht. Für größere Frequenzen wird Phasenverschiebung und die Amplitude wird kleiner.

2.3 RC-Kreis als Integrator

Der RC-Kreis kann unter bestimmten Voraussetzungen eine Spannung, gemäß Abbildung 2, integrieren. Die Kondensatorspannung U_C ist für hinreichend große Frequenzen $\omega \gg \frac{1}{RC}$ proportional zu $\int U(t)\,\mathrm{d}t$.

Mit $|U_C| << |I(t)R|$ und $|U_C| << |U|$ gilt:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t U(t')\,\mathrm{d}t' \tag{14}$$

3 Durchführung

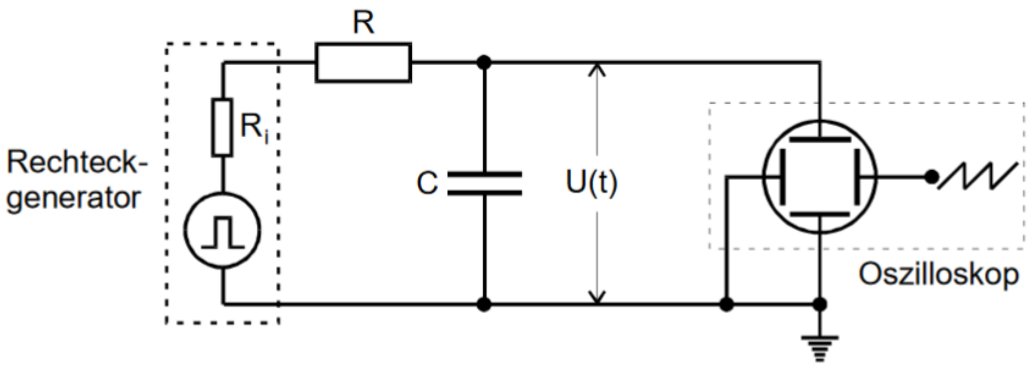

Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Kondensatorspannung. [1]

Mithilfe eines Funktionsgenerators wird eine Rechteckspannung auf einen RC-Kreis gegeben. Die Spannung am Kondensator wird, wie in Abbildung 3 zu erkennen, mit einem Oszilloskop abgegriffen und auf dem Bildschirm ausgegeben. Die Frequenz des Eingangssignals wird so lange variiert, bis die Auf- und Entladungsvorgänge auf dem Bildschirm deutlich erkennbar sind. Daraus wird mit der Cursor-Funktion des Oszilloskops die Kondensatorspannung zu verschiedenen Zeitpunkten ermittelt.

Zur Messung der Amplitude der Kondensatorspannung bei periodischer Anregung wird das Signal auf eine Sinusspannung umgeschaltet. Ihre Amplitude wird mit dem Oszilloskop bestimmt. Anschließend wird die Frequenz am Funktionsgenerator stückweise erhöht und die entsprechende Amplitude der Spannung am Kondensator jeweils am Oszilloskop gemessen. Dies wird über drei Zehnerpotenzen der Frequenz fortgeführt.

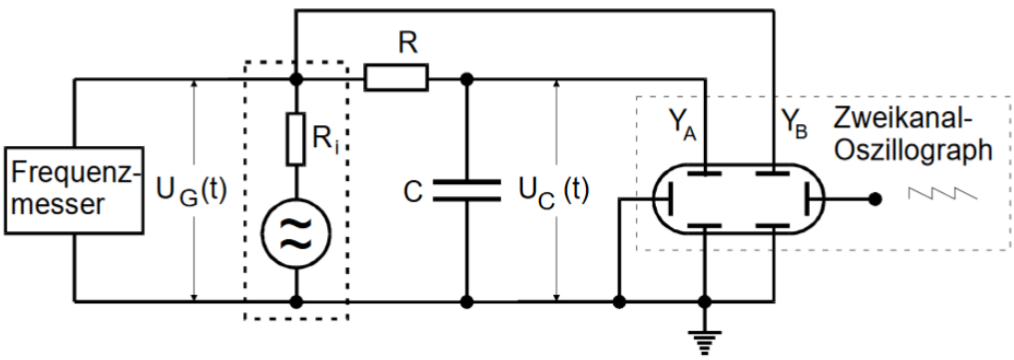

Abbildung 4: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung der Spannungen. [1]

Um die Phasenverschiebung der Eingangs- und Kondensatorspannung zu messen, lässt man beide Spannungen gegen die Zeit auf dem Bildschirm des Oszilloskops ausgeben (siehe Abbildung 4). Die Frequenz der Eingangsspannung wird wieder stückweise erhöht. Dabei wird die zeitliche Differenz der Maxima der angezeigten Spannungen (a) sowie die Periodendauer der Eingangsspannung (b) gemessen (siehe Abbildung 5). Auch hier wird die Frequenz über drei Zehnerpotenzen hinweg erhöht. Die Phasenverschiebung beträgt dabei:

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 360 \tag{15}$$

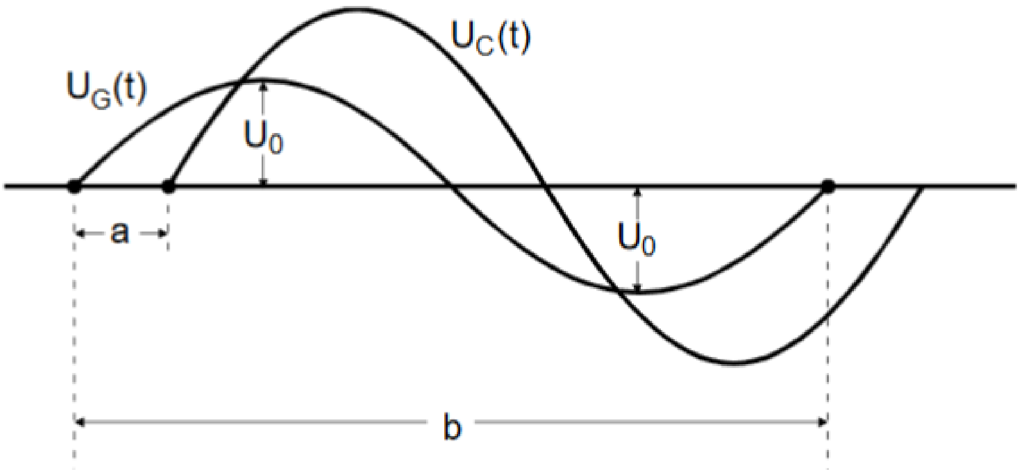

Abbildung 5: Berechnung der Phasenverschiebung. [1]

Anschließend wird die Frequenz auf einen großen Wert gegenüber der Zeitkonstante des Relaxationsvorgangs eingestellt und erneut werden beide Spannungen auf dem Bildschirm ausgegeben. Die Eingangsspannung wird nacheinander auf eine Rechteck-, Dreieck- und Sinusspannung geschaltet und jeweils ein Thermodruck erstellt.

4 Auswertung

4.1 Entladevorgang des Kondensators

In Tabelle 1 sind die gemessenen Spannungen, bei dem Entladevorgang des Kondensators, zu den jeweiligen Zeitpunkten dargestellt. Zudem ist der Bruch $\frac{U}{U_0}$ tabelliert, welcher für weitere Rechnungen nötig ist. Die Generatorpannung beträgt dabei $U_0 = 3.30\text{V}$.

Tabelle 1: Gemessene Spannungen bei dem Entladen eines Kondensators

$t/\left(10^{-3}\mathrm{s}\right)$	U_C/V	$\ln\frac{U_C}{U_0}$
0.5	2.36	-0.33
1.0	1.62	-0.71
1.5	1.08	-1.11
2.0	0.72	-1.51
2.5	0.48	-1.90
3.0	0.32	-2.30
3.5	0.18	-3.00
4.0	0.12	-3.22
4.5	0.06	-3.91
5.0	0.04	-4.61

Aus Gleichung (6) folgt:

$$\ln\frac{U}{U_0} = -\frac{1}{RC}t. \tag{16}$$

Der Logarithmus von $\frac{U}{U_0}$ wird gegen die Zeit aufgetragen und es wird eine lineare Regression durchgeführt.

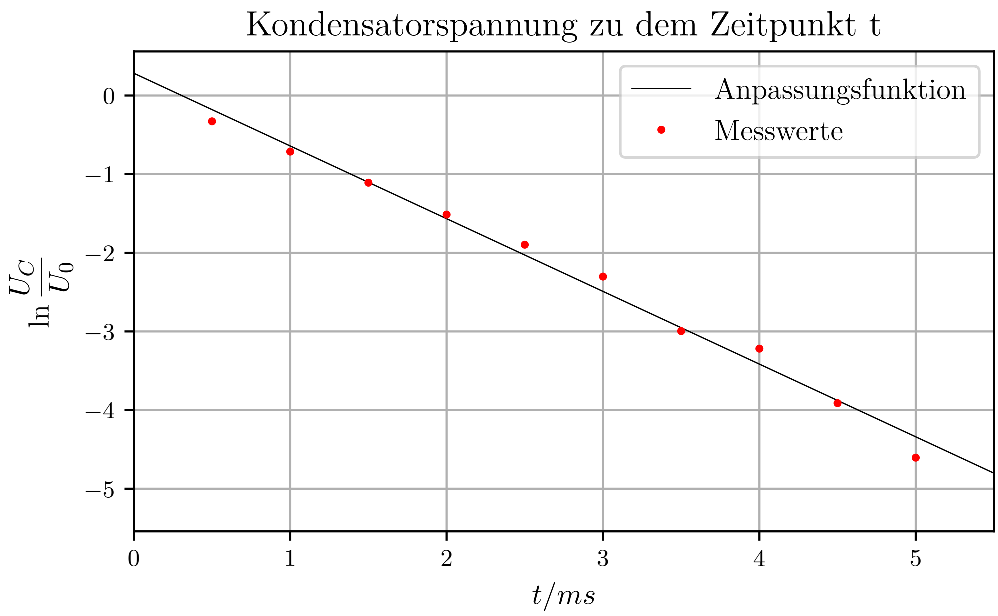

Abbildung 6: Logarithmus der Kondensatorspannung zu dem Zeitpunkt t

Die Gerade kann durch die Gleichung $y = -\frac{1}{m}x + b$ beschrieben werden. Für die Parameter ergeben sich:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{m} =& RC = (1.08 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}\text{s} \\
b =& (0.28 \pm 0.11)
\end{aligned}
$$

Die jeweiligen Fehler von RC und b wird mit Python berechnet.

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante mit frequenzabhängiger Amplitude und Phasenverschiebung

In Tabelle 2 ist die Amplitude A und Phasenverschiebung für verschiedene Frequenzen f dargestellt. Zudem ist der Abstand der Nulldurchgänge a tabelliert. Die Generatorspannung beträgt $U_0 = 3.60\text{V}$.

Tabelle 2: Gemessene Amplituden und Phasenverschiebungen der Kondensatorspannung

f/Hz	A/V	$a/\left(10^{-3}\text{s}\right)$	$\varphi/°$
30	3.40	1.00	10.80
70	3.00	1.20	30.24
100	2.68	1.20	43.20
300	1.24	0.60	64.80
700	0.56	0.31	78.12
1000	0.40	0.22	79.20
2000	0.20	0.12	86.40
3000	0.13	0.08	86.40
4000	0.10	0.06	86.40
5000	0.08	0.05	90.00

Die Phasenverschiebung wird mit Gleichung (15) berechnet.

Die Spannungsamplitude $\frac{A}{U_0}$ wird gegen f aufgetragen. Es wird eine nicht-lineare Regression durchgeführt.

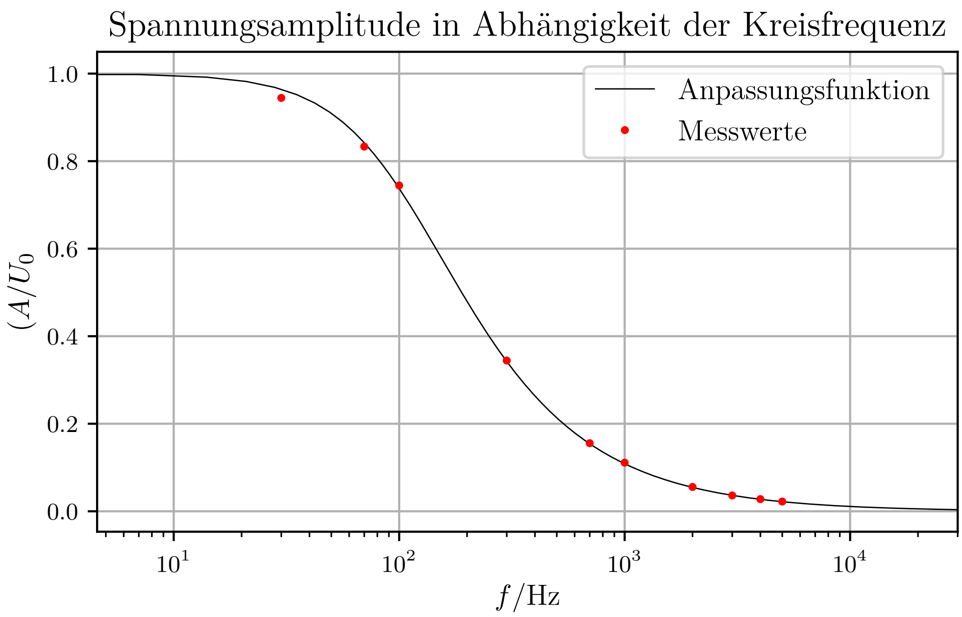

Abbildung 7: Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Als Ausgleichsfunktion wird $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2(2\pi f)^2}}$ verwendet, welche auf Gleichung (13) zurückzuführen ist. Der Parameter c beträgt:

$$c = RC = (1{,}46 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}.$$

Der Fehler von c wird mit Python berechnet.

Die Zeitkonstante wird nun mithilfe der Phasenverschiebung bestimmt. Die Phasenverschiebung wird gegen den Logarithmus der Frequenz aufgetragen. Eine nicht lineare Regression wird gemäß der Gleichung (11) durchgeführt. Die Ausgleichsfunktion lautet $f(\omega) = \arctan(d \cdot \omega)$. Das Minuszeichen in der Funktion wird weggelassen, da das Oszilloskop den Betrag der Phasenverschiebung anzeigt.

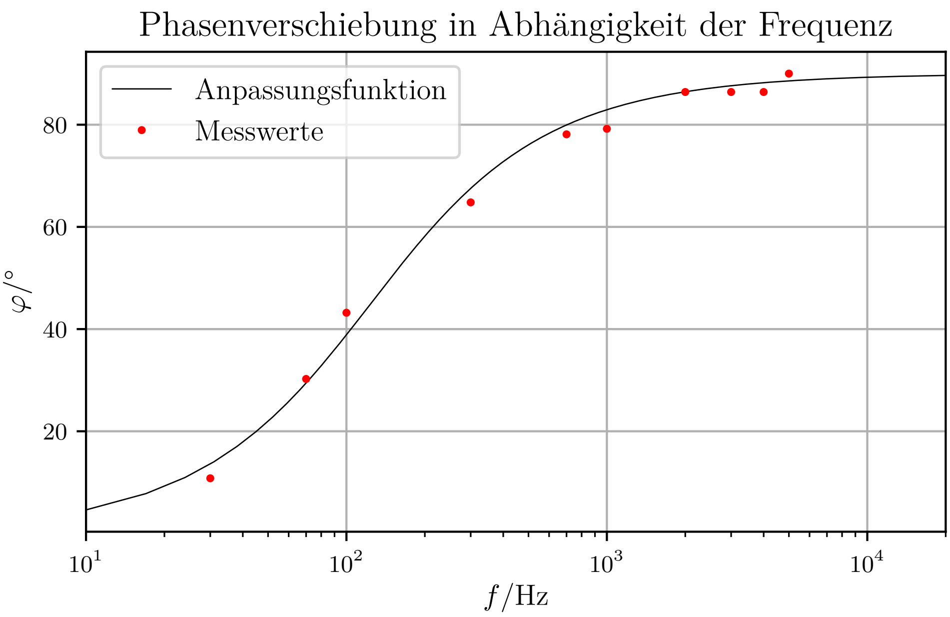

Abbildung 8: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz

Der Parameter d beträgt:

$$d = RC = (1{,}28 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

Der Fehler von d wird mit Python berechnet.

Die Spannungsamplitude $\frac{A}{U_0}$ wird gegen φ in einem Polarplot aufgetragen.

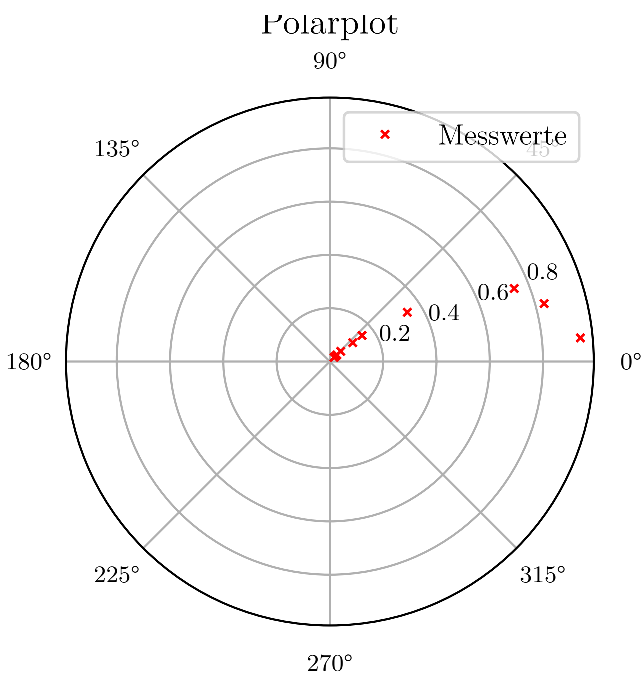

Abbildung 9: Polarplot von Amplitude und Phasenverschiebung.

Die Theoriekurve kann aus den Gleichungen (11),(12) und (13) berechnet werden. Es gilt:

$$\frac{A}{U_0} = cos(\varphi) \tag{17}$$

4.3 Nutzung des RC-Kreises als Integrator

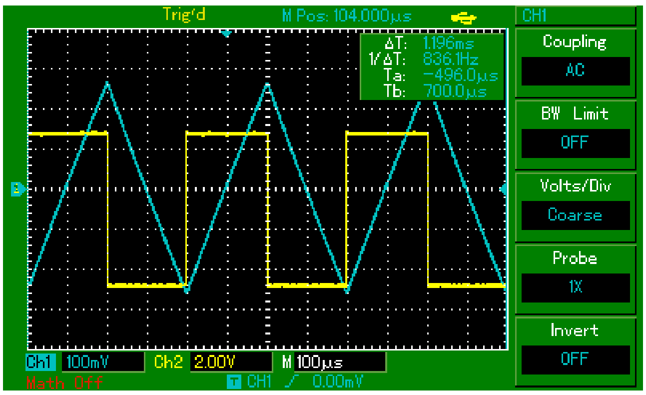

Abbildung 10: Eingang: Rechteckspannung

Bei einer Rechteckspannung ergibt sich eine Dreieckspannung als integrierte Spannung.

$$f(x) = \begin{cases} a & 0 < x < b \\ -a & \text{b} < x < 2b \end{cases}$$

Integriert:

$$F(x) = \begin{cases} a \cdot x & 0 < x < b \\ -a \cdot x & \text{b} < x < 2b \end{cases}$$

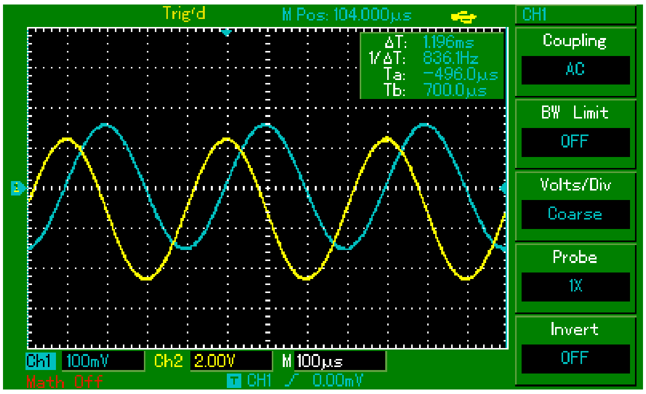

Abbildung 11: Eingang: Sinusspannung

Bei einer Sinusspannung ergibt sich eine Cosinusspannung als integrierte Spannung.

$$f(x) = a \cdot sin(x)$$

Integriert:

$$F(x) = -a \cdot cos(x)$$

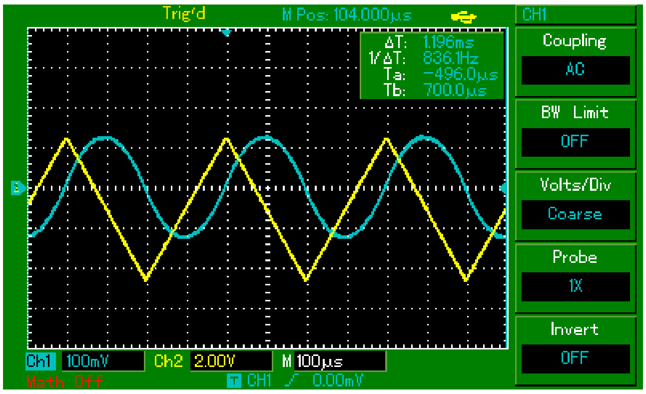

Abbildung 12: Eingang: Dreieckspannung

Bei einer Dreieckspannung ergibt sich eine quadratische Funktion als integrierte Spannung.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x & 0 < x < b \\ -a \cdot x & \text{b} < x < 2b \end{cases}$$

Integriert:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} \cdot x^2 & 0 < x < b \\ -\frac{a}{2} \cdot x^2 & \text{b} < x < 2b \end{cases}$$

5 Diskussion

Die Zeitkonstanten die mit der frequenzabhängigen Amplitude und Phasenverschiebung berechnet werden, weichen mit 12.3% signifikant von einander ab. Die mit dem Entladevorgang ermittelte Zeitkonstante ist ungefähr so groß wie die Zeitkonstante die mit der Phasenverschiebung ermittelt wird. Daraus wird geschlossen, dass die Zeitkonstante, welche mit der Amplitude berechnet wird, systematischen Fehlern unterliegt. Die Messwerte des Polarplots weichen deutlich von der Theoriekurve ab. Daraus wird geschlossen, da auch hier die Amplituden verwendet werden, weist dies ebenfalls auf Fehler in der Messung der Spannungsamplituden. Für so große Abweichungen, sind anhand der Anzahl an Messwerten, statistische Fehler als primäre Fehlerquelle auszuschließen. Der Generatorinnenwiderstand ist eine systematische Fehlerquelle, welche die gemessenen Amplituden verfälscht.

Bei der Nutzung des RC-Kreises als Integrator ergeben sich die Spannungsformen wie erwartet. Sie entsprechen den theoretisch errechneten Funktionen. Aus einer Rechteckspannung ergibt sich eine Dreieckspannung, aus einer Sinusspannung eine Cosinusspannung und aus einer Dreieckspannung eine quadratische Spannung. Dies ist auch auf den erstellten Thermodrucken zu erkennen. Dabei ist die Amplitude der Kondensatorspannung aufgrund der hohen Frequenz wesentlich geringer als die der Eingangsspannung. Der RC-Kreis ist also gut als Integrator geeignet.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung des Versuchs V353, Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017.