

V355

Gekoppelte Schwingungen

Patrick Schmidt patrick7.schmidt@tu-dortmund.de

Michael Windau michael.windau@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.12.2016

Abgabe: 10.01.2017

1 Theorie

Bei gekoppelten Schwingssystemen wie z.B. dem gekoppelten Pendel ist ein stetiger Energieaustausch zwischen den Bestandteilen zu beobachten (z.B. die verbundenen Pendel). Dieser Energieaustausch ist zeitabhängig und wird (ohne Dämpfung) unaufhörlich fortgesetzt. In diesem Versuch werden wir uns auf gekoppelte Schwingkreise beschränken.

1.1 Gekoppelte Schwingkreise

Ein gekoppelter Schwingkreis, wie in Abbildung 1 dargestellt, besteht aus Kondensatoren C und Spulen L . Hier werden zwei identische Schwingkreise mithilfe einer Kapazität verbunden.

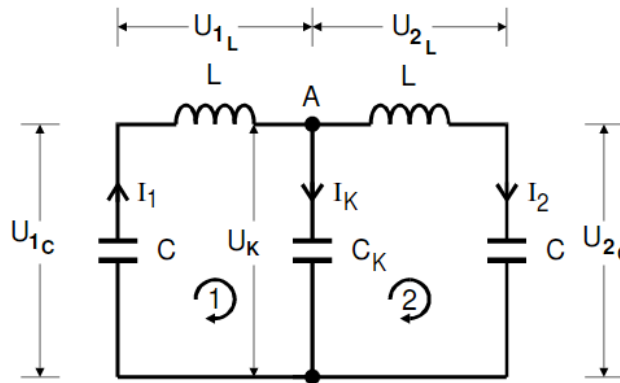


Abbildung 1: Schaltplan zweier gekoppelter Schwingkreise [1]

Am Knotenpunkt A wirkt durch die *KirchhoffschenGesetze*

$$I_1 = I_K + I_2 \quad (1)$$

und für Masche 1

$$U_C + U_L + U_K = 0 \quad (2)$$

Dabei gilt für die Spannungen $U_L = L\dot{I}$ und $U_C = \frac{1}{C} \int I dt$. Für beide Maschen ergeben sich daraus die jeweiligen Differentialgleichungen:

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 0 \quad (3)$$

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 0 \quad (4)$$

Durch geeignetes Addieren und Subtrahieren ergeben sich die Differenzialgleichungen

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (5)$$

$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K} \right) (I_1 - I_2) = 0 \quad (6)$$

, die durch die Gleichungen

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1,0} + I_{2,0}) \cos \left(\frac{t}{\sqrt{LC}} \right) \quad (7)$$

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1,0} - I_{2,0}) \cos \left(\frac{t}{\sqrt{L \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K} \right)^{-1}}} \right) \quad (8)$$

gelöst werden. Um die Ströme I_1 und I_2 zu erhalten, werden die Lösungen 7 und 8 addiert bzw. subtrahiert. Dies ergibt dann:

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (9)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (10)$$

Wobei

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad \nu^- = \frac{1}{\sqrt{L \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K} \right)^{-1}}} \quad (11)$$

die *Fundamentalschwingungen* des Systes darstellen. Dies bedeutet, dass wenn zu Beginn beide Schwingkreise gleich stark ausgelenkt werden ($I_{1,0} = I_{2,0}$), schwingen die Schwingkreise gleichphasig und das gesamte System mit der Frequenz ν^+ schwingt. Wenn die Amplituden der Schwingkreise allerdings gleichstark aber gegenphasig ausgelenkt werden ($I_{1,0} = -I_{2,0}$), so so schwingt das System mit der Frequenz ν^- . Es tritt eine

sogenannte *Schwebung* auf, wenn nur einer der beiden Schwingkreise zu Beginn ausgelenkt wird (z.B. $I_{1,0} = 0$). Dabei bezeichnet $\nu^- - \nu^+$ die *Schwebungsfrequenz*, die die Änderung der Amplitude der Schwingung darstellt.

$$I_1 = I_{1,0} \cos\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad (12)$$

$$I_2 = I_{2,0} \cos\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ + \nu^-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad (13)$$

Dieses Phänomen ist in Abbildung 2 zu sehen.

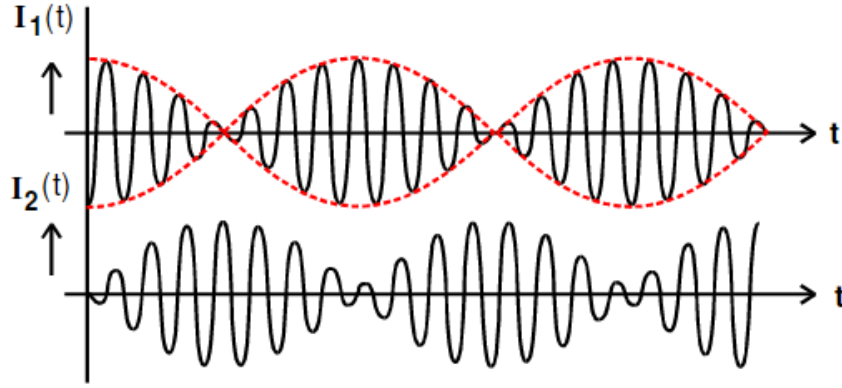


Abbildung 2: Zeitlicher Verlauf der Stromstärken I_1 und I_2 [1]

1.2 Frequenzabhängigkeit des Stroms

Wird ein gekoppelter Schwingkreis mit einer Sinusspannung angeregt, folgt anhand der Kirchhoffschen Maschenregel

$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{z}_C + \mathfrak{z}_L + Z_{C_K} + Z_R)\mathfrak{I}_1 - Z_{C_K}\mathfrak{I}_2 \quad (14)$$

$$0 = (\mathfrak{z}_C + \mathfrak{z}_L + Z_{C_K} + Z_R)\mathfrak{I}_2 - Z_{C_K}\mathfrak{I}_1 \quad (15)$$

Durch Einsetzen der geordneten Impedanzen ($\mathfrak{z}_C = \frac{1}{iwC}$, $\mathfrak{z}_L = iwL$ und $\mathfrak{z}_R = R$), dem Umformen von Gleichung 15 und einsetzen in Gleichung 14 erhält man für \mathfrak{I}_2

$$\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{U} \frac{\frac{1}{iw}}{\left(iwL + \frac{1}{iwC_K} + \frac{1}{iwC_K} + R\right)^2 + \frac{1}{w^2C_K^2}} \quad (16)$$

$$\Rightarrow |\mathfrak{I}_2| = |\mathfrak{U}| \frac{1}{\sqrt{4w^2C_K^2R^2Z(w)^2 + \left(\frac{1}{C_K} - wC_KZ(w)^2 + wR^2C_K\right)^2}} \quad (17)$$

wobei

$$Z(w) = wL - \frac{1}{w\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K}\right)^{-1}} \quad (18)$$

Setzt man für die Frequenz w die Fundamentalschwingungen ein, so wird \mathfrak{I}_2 maximal und es gilt:

$$|\mathfrak{I}_2(w^+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2C_K^2}{LC}}} \quad (19)$$

$$|\mathfrak{I}_2(w^-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2C_K^2}{LC}\left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}} \quad (20)$$

2 Durchführung

2.1 Justierung

Zuerst wird die in Abbildung 3 gezeigte Schaltung aufgebaut.

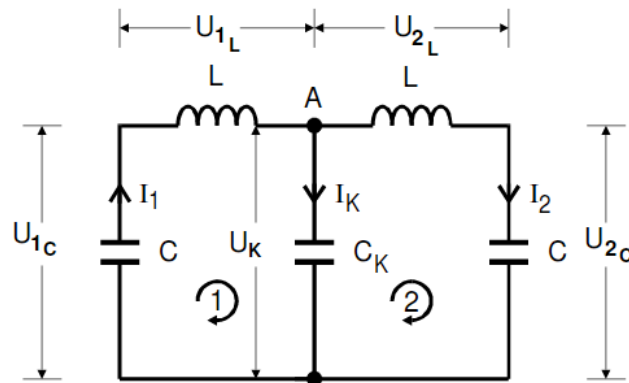


Abbildung 3: Schaltung zur Bestimmung und Einstellung der Resonanzfrequenz [1]

Um die beiden Schwingkreise aufeinander abzustimmen, muss zunächst die Resonanzfrequenz eines der Schwingkreise bestimmt werden. Die genaue Resonanzfrequenz befindet sich dort, wo die Spannung und der Strom sich in Phase befinden. Uns soll hier die Frequenz verwendet, in der reichen, an der der Strom maximal wird. Wenn dies der Fall ist, erscheint eine Gerade als Lissajour-Figur. Um beide Schwingkreise nun aufeinander abzustimmen, wird der zweite genauso aufgebaut wie der erste Schwingkreis und auf die selbe Frequenz mithilfe des Koppelkondensators eingestellt.

Dies muss zu jeder Messung neu durchgeführt werden, da sich die Frequenz während des Versuchs leicht verschiebt.

2.2 Messvorgang

2.2.1 Energieaustausch zwischen den Schwingkreisen

Es wird Schaltung wie in Abbildung 4 aufgebaut.

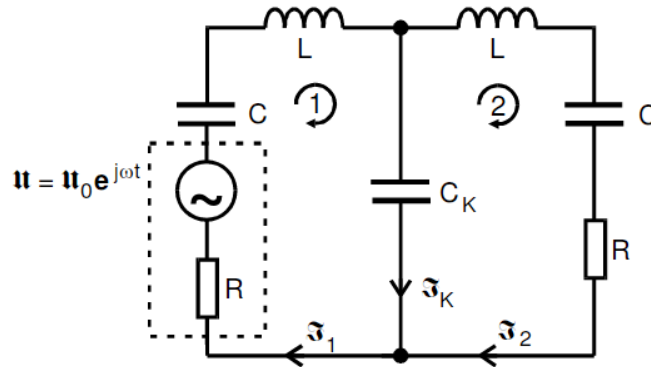


Abbildung 4: Schaltung zur Untersuchung von Schwebungsvorgängen [1]

Um die Schwingkreise zum schwingen zu bringen wird zuerst einen Rechtsimpuls an den linken Schwingkreis angelegt und damit angeregt. Nun lässt sich auf dem angeschlossenen Oszilloskop ein Spannungsabfall in Form einer Schwebung erkennen. Das Verhältnis zwischen Schwebungs- und Schwingungsfrequenz wird nun durch die Anzahl der Schwingungsmaxima in einer einzelnen Schwebungsperiode bestimmt. Der gesuchte Zusammenhang dieses Verhältnisses zu dem Koppelkondensator wird daraufhin zwischen $C_{K,min} = 0,99 \text{ nF}$ und $C_{K,max} = 12 \text{ nF}$ des Koppelkondensators untersucht.

2.2.2 Ermittlung der Fundamentalschwingungen

Bei der unveränderte Schaltung 4 wird nun ein Sinusimpuls auf den linken Schwingkreis gegeben. Nun wird die Generatorspannung auf dem Oszilloskop als Ablenkung in x-Richtung angesehen und es entwickeln sich wie schon bei der Justierung Lissajous-Figuren. Um nun die Fundamentalschwingungen zu ermitteln, werden die Frequenzen gesucht, die als Lissajous-Figur eine Gerade wiedergeben. Dabei stellt die untere Fundamentalschwingung eine Gerade der Form $f(x) = mx + b$ dar, wobei die obere eine gerade der Form $f(x) = -mx + b$ darstellt. Dies wird nun für verschiedenen Kapazitäten des Potenziometers wiederholt.

2.2.3 Bestimmung der Fundamentalschwingungen auf einem Frequenzband

Es wird die Schaltung 4 verwendet und ein Sinusimpuls in den Schwingkreis gegeben. Das betrachtete Frequenzband läuft von 1 Hz bis 135 Hz und wird auf dem Monitor des Oszilloskops der Sweep des Frequenzbandes in 1s durchlaufen. Es werden zwei Peaks sichtbar, wobei die Peaks die Fundamentalschwingungen (ν^+ und ν^-) darstellen. Dies wird für jede der wählbaren Kapazitäten des Koppelkondensators C_K wiederholt.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden Kapitel beruhen alle Fehler in den Messungen auf selbst geschätzten Ablesefehlern. Wird eine Rechnung mit fehlerbehafteten Werten durchgeführt, errechnet sich der daraus entstehende Fehler der Rechnung über die gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

Die Fehler der Rechnungen im folgenden Kapitel werden mit Python errechnet und durchgeführt.

4 Auswertung

Zur Durchführung des Versuches wird die Schaltung 2 verwendet. In dieser ist ein Kondensator mit der Kapazität C, sowie eine Spule mit der Induktivität L und der Kapazität C_{sp} angeschlossen. Zudem ist ein Kondensator, zur Kopplung der Schwingkreise, mit einer verstellbaren Kapazität C_k vorhanden.

$$L = 32.351 \text{ mH}$$

$$C = 0.8015 \text{ nF}$$

$$C_{\text{sp}} = 0.037 \text{ nF}$$

Für eine erste Messung der Resonanzfrequenz ν^+ , wird diese mittels Oszilloskop bei dem Strommaximum gesucht und eingestellt.

$$\nu_0^+ = 35.6 \text{ kHz.}$$

Für eine Überprüfung mit Theoriewerten, werden diese direkt aus der bekannten Kapazität des Kondensators sowie der Induktivität der Spule bestimmt. So gilt für die Theoriewerte der Fundamentalschwingungen ν_t^+ und ν_t^- :

$$\nu_t^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (21)$$

$$\nu_t^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k})^{-1}}} \quad (22)$$

Wie zu erkennen, hängt ν^+ nicht von C_k und somit nicht von dem verstellbaren Koppelkondensator ab.

Vergleicht man die zuerst gemessene und eingestellte Resonanzfrequenz mit ihrem errechneten Theoriewert

$$\nu_t^+ = 35.88 \text{ kHz,}$$

lässt sich lediglich eine prozentuale Abweichung ($|a - b| / a$) von 0,7% erkennen.

Als nächstes lässt sich die Anzahl n der zu zählenden Schwingungsmaxima, welche das Frequenzverhältnis zwischen Schwingungs- und Schwebefrequenz angeben, ebenfalls mit Theoriewerten vergleichen. Diese lassen sich aus den zuvor berechneten Fundamentalschwingungen bestimmen.

$$n_t = \frac{1}{2} \frac{(\nu_t^+ + \nu_t^-)}{(\nu_t^- - \nu_t^+)} \quad (23)$$

Da die Schwingung ν^- von der Kapazität C_k des Koppelkondensators abhängt, ist auch das Frequenzverhältnis n von dieser abhängig. Wie zu erkennen, wird dies von den experimentell gemessenen Daten bestätigt.

Tabelle 1: Vergleich des Frequenzverhältnisses zwischen den experimentell und theoretisch bestimmten Werten

C_k/nF	n	n_t	ν_t^+	ν_t^-	$a/\%$
2.19	3 ± 2	3.86	35.88	46.55	28.81
2.86	4 ± 2	4.75	35.88	44.32	18.77
4.74	8 ± 2	7.22	35.88	41.22	9.71
6.86	9 ± 2	10.00	35.88	39.66	11.10
8.18	10 ± 2	11.72	35.88	39.08	17.25
9.99	13 ± 2	14.09	35.88	38.52	8.40
12.0	19 ± 2	16.72	35.88	38.09	12.01

In Tabelle 1 wird die Abweichung der gemessenen Daten zu den theoretischen Werten in Prozenten angegeben. Diese Abweichung ist zu teilen relativ hoch, so dass der letzte Theoriewert nicht einmal im angegebenen Messfehlerintervall liegt.

Als nächstes werden die Fundamentalfrequenzen mittels Lissajou-Figuren bei verschiedenen C_k zwischen 0.997 nF und 12 nF bestimmt. Sie werden mit den ermittelten Theoriewerten verglichen, und es wird zu jeweils der ν^+ und der ν^- Frequenz eine prozentuale Abweichung aufgestellt.

Tabelle 2: Vergleich der Fundamentalfrequenzen zwischen den experimentell und theoretisch bestimmten Werten

C_k/nF	ν_1^+	ν_1^-	ν_t^+	ν_t^-	$a^+/\%$	$a^-/\%$
0.99	35.71 ± 1	56.18 ± 2	35.88	56.25	0.47	0.13
2.19	35.71 ± 1	46.51 ± 2	35.88	46.55	0.47	0.08
2.86	35.71 ± 1	44.05 ± 2	35.88	44.32	0.47	0.62
4.74	35.71 ± 1	41.15 ± 2	35.88	41.22	0.47	0.17
6.86	35.71 ± 1	39.53 ± 2	35.88	39.66	0.47	0.33
8.18	35.71 ± 1	38.91 ± 2	35.88	39.08	0.47	0.44
9.99	35.71 ± 1	38.46 ± 2	35.88	38.52	0.47	0.16
12.0	35.71 ± 1	37.74 ± 2	35.88	38.09	0.47	0.94

Auch hier zeigen die experimentellen Daten erneut, dass ν^+ nicht von C_k abhängt. Die prozentualen Abweichungen a^+ und a^- gehen jeweils in keinem Wert über ein Prozent und fallen sogar einmal unter 0.1%. Dies lässt auf eine äußerst genaue Messung mit guten Messgeräten schließen.

Zum Schluss des Versuches, wird ein Frequenzspektrum von $a = 12,22$ bis $d = 72,73$ kHz, in einem Sweep untersucht. Dieses läuft periodisch in einer Sekunde und besitzt zwei Peaks an den Punkten der Fundamentalfrequenzen. Es wird der zeitliche Abstand der Peaks zum Start der Periode gemessen.

Tabelle 3: Zeitlicher Abstand zwischen den Peaks des Frequenzbandes zum Anfang der Periode.

C_k/nF	Peak 1/ms	Peak 2/ms
0.99	360 ± 20	684 ± 20
2.19	360 ± 20	536 ± 20
2.86	368 ± 20	500 ± 20
4.74	364 ± 20	448 ± 20
6.86	364 ± 20	424 ± 20
8.18	364 ± 20	408 ± 20
9.99	368 ± 20	408 ± 20
12.0	380 ± 20	408 ± 20

In Tabelle 3 sind die zu den Fundamentalfrequenzen gehörigen Peaks im Sweep zu sehen. Wird die hohe Messunsicherheit beim ablesen in Betracht gezogen, könnte es sich bei dem ersten Peak um eine konstante Zahl halten. Dies wäre bei der ν^+ Frequenz auch zu erwarten.

Da das gemessene Frequenzspektrum periodisch eine Sekunde läuft, lässt sich mittels folgender Formel, und den Spektrumsgrenzen a und d , die gesuchten Frequenzen auf dem Sweep bestimmen:

$$f = a + t \cdot (d - a) \quad (24)$$

In Tabelle 4 sind die umgerechneten Fundamentalfrequenzen aus den Peaks, im Vergleich zu den Theoriewerten und die daraus folgenden prozentualen Abweichungen aufgelistet.

Tabelle 4: Vergleich der Fundamentalfrequenzen zwischen den Theoriewerten und der experimentellen Messung mittels Sweep

C_k/nF	ν_2^+	ν_2^-	ν_t^+	ν_t^-	$a^+/\%$	$a^-/\%$
0.99	34.00 ± 1.90	53.61 ± 1.93	35.88	56.25	5.53	4.94
2.19	34.00 ± 1.90	44.65 ± 1.86	35.88	46.55	5.53	4.24
2.86	34.48 ± 1.89	42.47 ± 1.86	35.88	44.32	4.05	4.35
4.74	34.24 ± 1.90	39.32 ± 1.86	35.88	41.22	4.78	4.81
6.86	34.24 ± 1.90	37.87 ± 1.87	35.88	39.66	4.78	4.71
8.18	34.24 ± 1.90	36.90 ± 1.88	35.88	39.08	4.78	5.88
9.99	34.48 ± 1.89	36.90 ± 1.88	35.88	38.52	4.05	4.37
12.0	35.21 ± 1.89	36.90 ± 1.88	35.88	38.09	1.90	3.22

Die aufgelisteten Theoriewerte liegen alle im Fehlerbereich der errechneten Frequenzen. Dennoch lässt sich an den prozentualen Abweichungen erkennen, dass es in der ν^+ , sowie in der ν^- Messung zu größeren Abweichungen kommt.

5 Diskussion

Zuerst wurde die Resonanzfrequenz für den Schwingkreis eingestellt. Diese liegt, trotz der groben einmaligen Messung, sehr genau (0,7% Abweichung) am gemessenen Theoriewert.

Das Ablesen der Schwingungsmaxima stellte ein Problem dar, da diese gegen Ende der Schwingung sehr gestaucht und ungenau wurden. Aus diesem Grund kommt es zu größeren Abweichungen zu den Theoriewerten, so beitzte der erste Wert eine Abweichung von fast 30%. Bemerkbar ist auch beim letzten Wert, dass der Theoriewert nicht mehr im Fehlerintervall des Messwertes liegt.

Die Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Lissajou-Figuren, ließ sich dagegen sehr genau durchführen. Dies lässt sich an den verschwindend geringen Abweichungen erkennen, wobei keine der Abweichungen über 1% ging. Bei einem Wert lag die Abweichung sogar unter 0,1%. Die vorsichtshalber groß gewählte Fehlergrenze wurde dabei in keinem Wert überschritten.

Bei der Messung an dem Frequenzspektrum, stellte sich das ablesen der Frequenzen als äußerst unsicher dar. Dies führte zu einer großen Ablesefehler-Grenze, und größeren Abweichungen vom Theoriewert. Aufgrund der hohen Fehlergrenzen liegt jeder Theoriewert im Fehlerintervall, der aus den Messwerten errechneter, Frequenzen.

6 Literatur

[1] TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Versuch V355, Gekoppelte Schwingkreise. 2016