

V101

Das Trägheitsmoment

David Venker

david.venker@tu-dortmund.de

Nico Guth

nico.guth@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.19

Abgabe: 17.12.19

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
3	Durchführung	5
4	Auswertung	7
4.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße der Drillachse	7
4.2	Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse	8
4.3	Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Zylinder	10
4.3.1	Zylinder um seine Symmetrieachse drehend	10
4.3.2	Zylinder um seine Querachse drehend	11
4.4	Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe in zwei Stellungen	12
4.4.1	Puppe mit angelegten Armen und Beinen	13
4.4.2	Puppe mit ausgestreckten Armen und Beinen	14
5	Diskussion	14
	Literatur	15

1 Zielsetzung

Ziel dieses Experimentes ist es, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen.

2 Theorie

Wenn eine Masse m bewegt wird, muss zunächst die Trägheit dieser Masse überwunden werden. Das Trägheitsmoment I ist dabei äquivalent bei einer Drehbewegung, eine Trägheit, die überwunden werden muss, bevor ein Körper rotiert werden kann. Dabei ist das Trägheitsmoment einer Punktmasse

$$I = m \cdot r^2. \quad (1)$$

Dabei ist m die Masse der Punktmasse und r der senkrechte Abstand zur Rotationsachse. Weiterhin können die Trägheitsmomente von verschiedenen Masselementen zu

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \quad (2)$$

addiert werden. Äquivalent dazu kann das Trägheitsmoment infinitesimaler Massen über

$$I = \int r^2 dm \quad (3)$$

bestimmt werden. Bei bekannter Dichte ρ und dem Volumen V kann Gleichung 2 und über den Zusammenhang

$$m = \rho \cdot V, \quad (4)$$

in die Form

$$I = \int r^2 \cdot \rho dV \quad (5)$$

gebracht werden. Mit Gleichung 5 kann beispielsweise das Trägheitsmoment eines Zylinders, wie in Abbildung 1 dargestellt, berechnet werden.

Ein Körper hat immer einen Schwerpunkt m_S , durch den drei Schwerpunktsachsen gelegt werden können. Sind die Trägheitsmomente dieser Achsen bekannt, können die Trägheitsmomente aller zu ihnen parallelen Achsen durch den Satz von Steiner bestimmt werden. Dafür müssen die Masse m des Körpers, der senkrechte Abstand r der beiden Achsen und der Schwerpunktsträgheitsmoment I_S bekannt sein. Es ergibt sich der Zusammenhang

$$I = I_S + m \cdot r^2. \quad (6)$$

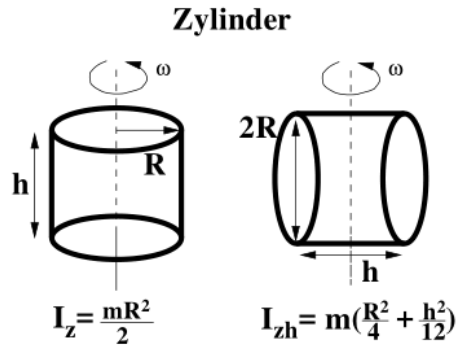


Abbildung 1: Trägheitsmoment eines Zylinders um zwei seiner Hauptachsen [1]

Wird ein drehbarer Körper mit einer Kraft F im Abstand r von der Drehachse ausgelenkt, wirkt auf ihn ein Drehmoment

$$M = F \times r. \quad (7)$$

Sollte das System schwingungsfähig sein, und wird um den Winkel φ ausgelenkt, wirkt das rücktreibende Drehmoment, hier durch eine Feder, der Drehung entgegen. Die daraus resultierende harmonische Schwingung mit der Periodendauer T ist dann

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (8)$$

Das Trägheitsmoment I setzt sich aus der Trägheit des rotierenden Objektes I und der Eigenträgheit der Drillachse I_D zusammen. D wird als Winkelrichtgröße bezeichnet und ist über den Zusammenhang

$$M = F \cdot r = D \cdot \varphi \quad (9)$$

definiert.

3 Durchführung

Eine Drillachse wird wie in Abbildung 2 aufgebaut.

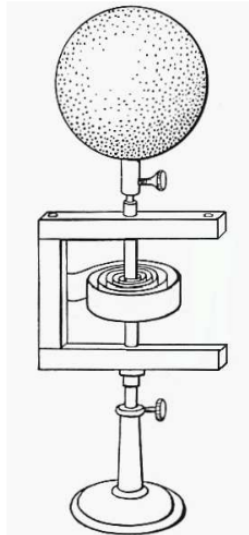


Abbildung 2: Darstellung einer Drillachse für das beschriebene Experiment [1]

Zunächst wird die Winkelrichtgröße D bestimmt. Dafür wird eine Federwaage und eine annähernd masselose Stange verwendet. Die Stange wird auf der Drillachse fixiert und die Federwaage in die Stange eingehakt. Der Abstand von der Rotationsachse bis zum Punkt, an dem die Federwaage eingehakt ist, wird gemessen. Nun wird das System um einen Winkel φ ausgelenkt. An der Federwaage wird eine Kraft F abgelesen und in Abhängigkeit von φ notiert. Diese Messung wird mindestens zehn mal für verschiedene Auslenkungen durchgeführt. Aus dem Zusammenhang Gleichung 9 lässt sich D bestimmen.

Für die Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D der Drillachse wird erneut eine als masselos anzunehmende Stange verwendet, sowie zwei Gewichte. Diese Gewichte werden in einem Abstand a von der Rotationsachse an der Stange befestigt und um einen kleinen Winkel φ ins Schwingen gebracht. Daraus lässt sich mit einer Stoppuhr die Periodendauer T bestimmen. Diese Messung wird für mindestens zehn verschiedene Abstände a wiederholt.

Im eigentlichen Versuch wird jetzt das Trägheitsmoment zwei verschiedener Körper experimentell bestimmt. Dafür werden alle verwendeten Körper ausgemessen und ihre Masse m bestimmt. Dann wird je ein Körper auf der Drillachse befestigt. Das Vorgehen ist ähnlich wie zuvor. Der Körper wird für kleine Winkel φ ausgelenkt und zum Schwingen gebracht. Mit einer Stoppuhr wird die Periodendauer T mindestens fünf mal bestimmt. Dieser Vorgang wird für insgesamt zwei verschiedene Körper durchgeführt.

Im letzten Versuchsteil werden erneut zwei Trägheitsmomente bestimmt. Dafür wird eine Puppe verwendet. Diese wird in zwei verschiedene Stellungen gebracht, siehe Abbildung 3 und Abbildung 4. Durch das oben beschriebene Verfahren wird das entsprechende Trägheitsmoment I dieser Stellung bestimmt. Die Puppe wird wieder zum Schwingen gebracht, wobei die Periodendauer T mit einer Stoppuhr gemessen wird. Außerdem wird die Puppe mit Zylindern angenähert und die Durchmesser und die Längen dieser Zylinder werden vermessen bzw. abgeschätzt.

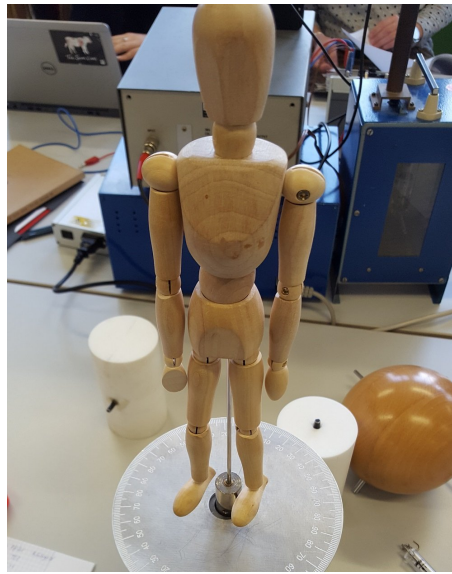


Abbildung 3: Darstellung der verwendeten Puppe in Stellung 1 [1]

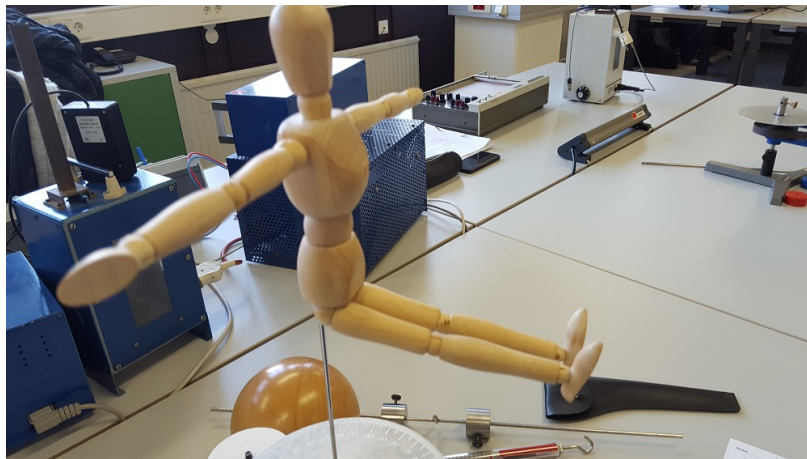


Abbildung 4: Darstellung der verwendeten Puppe in Stellung 2 [1]

4 Auswertung

Zunächst muss die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse bestimmt werden.

Mit diesen Werten können dann über Gleichung 8 die Trägheitsmomente der verwendeten Körper bestimmt werden. Folgende Körper wurden bei diesem Versuch untersucht:

1. Zylinder mit Drehachse entlang der Symmetrieachse
2. Zylinder mit Drehachse entlang der Querachse
3. Holzpuppe mit angelegten Armen und Beinen
4. Holzpuppe mit ausgestreckten Armen und Beinen

Zur Fehlerfortpflanzung wird

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_i} \right| \Delta x_i \quad (10)$$

bzw. die Python Bibliothek Uncertainties verwendet.[2]

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße der Drillachse

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D wurde die rücktreibende Kraft F im Abstand $R = 28,7 \text{ cm}$ zur Drehachse in Abhängigkeit der Auslenkung φ gemessen. Hiermit kann nun das rücktreibende Drehmoment $M = R \cdot F$ berechnet werden. Diese Werte sind in Tabelle 1 aufgelistet und in Abbildung 5 dargestellt.

$\varphi / ^\circ$	φ / rad	F / N	$M / \text{N m}$
30	0,52	0,05	0,014
60	1,05	0,09	0,026
90	1,57	0,13	0,037
120	2,09	0,17	0,049
150	2,62	0,22	0,063
180	3,14	0,26	0,075
210	3,67	0,31	0,089
240	4,19	0,34	0,098
270	4,71	0,39	0,112
300	5,24	0,43	0,123

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße: Auslenkung φ , Kraft F und Drehmoment $M = R \cdot F$

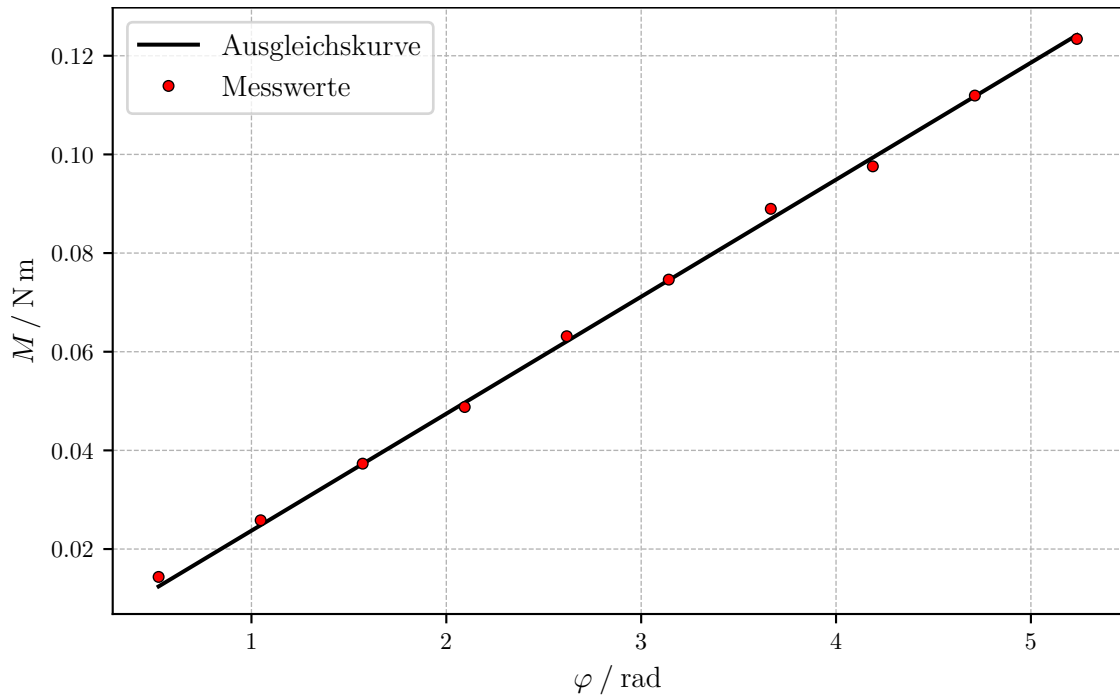


Abbildung 5: Plot des rücktreibenden Drehmoments M in Abhängigkeit der Auslenkung φ aus Tabelle 1 mit dazugehöriger Ausgleichsgerade

Um nun die Winkelrichtgröße aus Gleichung 9 bestimmen zu können, wurde eine Ausgleichsrechnung mit

$$M = a \cdot \varphi \quad (11)$$

mithilfe der Python Bibliothek SciPy ausgeführt.[3] Dadurch ergibt sich der Parameter $a = (0,0237 \pm 0,0001) \text{ N m}$. Nach Gleichung 9 ergibt sich also die Winkelrichtgröße

$$D = a = (0,0237 \pm 0,0001) \text{ N m}. \quad (12)$$

4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D wurden zwei zylinderförmige Massen $m = 222,9 \text{ g}$ in verschiedenen Abständen a zur Drehachse befestigt und die Periodendauer T wurde bei einer Initialauslenkung von $\varphi = 10^\circ$ gemessen.

Die Massen werden hier als Punktmassen angenommen. Gemessen wurden hierbei allerdings die Abstände von der Drehachse bis zum Anfang des Zylinders. Also lässt sich der gesuchte Abstand mit $a = a_{\text{gemessen}} + L/2$ berechnen, wobei $L = 3,0 \text{ cm}$ die Länge des Zylinders ist.

Diese Werte sind in Tabelle 2 aufgelistet und in Abbildung 6 dargestellt.

$a_{\text{gemessen}} / \text{cm}$	a / cm	T / s	a^2 / cm^2	T^2 / s^2
26,9	28,4	7,50	806,6	56,25
25,0	26,5	7,15	702,2	51,12
23,0	24,5	6,58	600,2	43,30
21,0	22,5	6,35	506,2	40,32
19,0	20,5	5,80	420,2	33,64
17,0	18,5	5,32	342,2	28,30
15,0	16,5	4,60	272,2	21,16
13,0	14,5	4,15	210,3	17,22
9,0	10,5	3,32	110,2	11,02
4,0	5,5	2,60	30,2	6,76

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments: Abstände a_{gemessen} und a , Periodendauer T sowie die geplotteten Werte a^2 und T^2

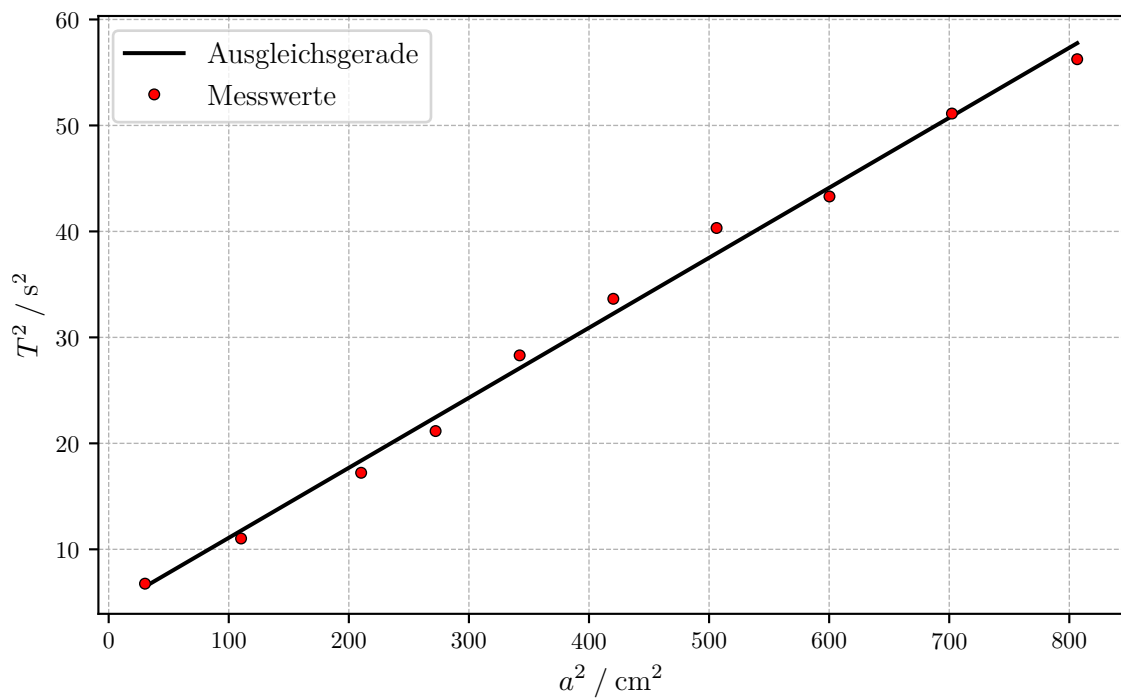


Abbildung 6: Plot der Quadratperiodendauer T^2 in Abhängigkeit des Quadratabstands a^2 aus Tabelle 2 mit dazugehöriger Ausgleichsgerade

Um nun aus den gemessenen Werten das Eigenträgheitsmoment der Drillachse auszurechnen kann Gleichung 8 verwendet werden. Hierbei ist $I = I_D + 2I_m$ mit dem Trägheitsmoment $I_m = ma^2$ der zusätzlich angehangenen Massen. Somit ergibt sich die Gleichung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + 2ma^2}{D}}. \quad (13)$$

Also wird eine Ausgleichsrechnung mit

$$T^2 = p_1 \cdot a^2 + p_2 \quad (14)$$

mithilfe von SciPy ausgeführt.[3] Dabei ergeben sich die Parameter $p_1 = (660 \pm 18) \text{ s}^2/\text{m}^2$ und $p_2 = (4,48 \pm 0,86) \text{ s}^2$.

Nach vergleichen der Gleichung 14 mit Gleichung 13 lässt sich das Eigenträgheitsmoment mit

$$I_D = \frac{D}{(2\pi)^2} p_2 \quad (15)$$

berechnen. Somit ergibt sich

$$I_D = (0,0026 \pm 0,0005) \text{ kg m}^2. \quad (16)$$

4.3 Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Zylinder

Es wurde von zwei Zylindern, die jeweils von der zuvor vermessenen Drillachse zum Schwingen gebracht wurden, die Periodendauer T der Schwingung mehrmals gemessen. Diese Periodendauern werden über

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (17)$$

gemittelt. Und über

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (18)$$

wird der entsprechende Fehler des Mittelwerts berechnet. Durch diese gemittelte Periodendauer wird im Folgenden über Gleichung 8 das Trägheitsmoment bestimmt.

4.3.1 Zylinder um seine Symmetrieachse drehend

Die Mittelwertbildung der Werte aus Tabelle 3 ergibt eine Periodendauer

$$T = (0,88 \pm 0,02) \text{ s}. \quad (19)$$

$T_{\text{gemessen}} / \text{s}$									
0,73	0,92	0,87	0,78	0,93	0,96	0,89	0,96	0,89	0,87

Tabelle 3: Gemessene Periodendauern des Zylinders, welcher um seine Symmetrieachse dreht

Daraus ergibt sich mit Gleichung 8 das Trägheitsmoment

$$I_{\text{gemessen}} = (-0,0022 \pm 0,0005) \text{ kg m}^2. \quad (20)$$

Diese errechnete Größe ist jedoch nicht sinnvoll, da ein negatives Trägheitsmoment nicht physikalisch zu erklären ist.

Auf die Ursachen der Bestimmung dieses offensichtlich fehlerhaften Trägheitsmoments wird näher in der Diskussion eingegangen.

Um die berechnete Größe vergleichen zu können wird außerdem mithilfe der gemessenen Masse $m = 1119,3 \text{ g}$ und dem Durchmesser $d = 7,495 \text{ cm}$ des Zylinders das theoretische Trägheitsmoment über

$$I_{\text{Theorie}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (21)$$

bestimmt. (siehe Abbildung 1) Damit ergibt sich der Theoriewert

$$I_{\text{Theorie}} = 0,00079 \text{ kg m}^2. \quad (22)$$

4.3.2 Zylinder um seine Querachse drehend

$T_{\text{gemessen}} / \text{s}$									
2,36	2,03	2,04	2,06	2,16	2,23	2,13	2,20	2,18	2,16

Tabelle 4: gemessene Periodendauern des Zylinders, welcher um seine Querachse dreht

Die Mittelwertsbildung der Werte aus Tabelle 4 ergibt eine Periodendauer

$$T = (2,15 \pm 0,03) \text{ s}. \quad (23)$$

Daraus ergibt sich mit Gleichung 8 das Trägheitsmoment

$$I_{\text{gemessen}} = (0,0001 \pm 0,0005) \text{ kg m}^2. \quad (24)$$

Auch hier lässt sich ein nicht sinnvolles Ergebnis beobachten, da der berechnete Fehler größer ist als das berechnete Trägheitsmoment.

Um die berechnete Größe vergleichen zu können wird außerdem mithilfe der gemessenen Masse $m = 1546,6 \text{ g}$, dem Durchmesser $d = 8,00 \text{ cm}$ und der Länge $l = 13,93 \text{ cm}$ des Zylinders das theoretische Trägheitsmoment über

$$I_{\text{Theorie}} = \frac{1}{4}m \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ml^2 \quad (25)$$

bestimmt. (siehe Abbildung 1) Damit ergibt sich der Theoriewert

$$I_{\text{Theorie}} = 0,0031 \text{ kg m}^2. \quad (26)$$

4.4 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe in zwei Stellungen

Es wurde eine Holzpuppe in zwei verschiedenen Stellungen, wie in Unterabschnitt 4.4 beschrieben, zum Schwingen gebracht. Durch die Periodendauer dieser Schwingung kann das jeweilige Trägheitsmoment bestimmt werden.

Um Theoriewerte für das Trägheitsmoment der Puppe berechnen zu können wurde diese zunächst vermessen. Die Messergebnisse sind in Tabelle 5 aufgelistet. Hierbei wurden alle Körperteile als Zylinder angenähert.

Außerdem wurden die Massen der einzelnen Körperteile berechnet. Hier wurde davon ausgegangen, dass die Puppe aus Tannenholz ist, welches eine Dichte von $\rho = 430 \text{ kg/m}^3$ aufweist. [4] Mithilfe dieser Dichte, der Gleichung 4 und der Gleichung vom Volumen

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l \quad (27)$$

wurden die jeweiligen Massen berechnet.

Das jeweilige Trägheitsmoment bei Rotation um den Schwerpunkt wurde wie in Abbildung 1 berechnet.

Körperteil	d / cm	l / cm	m / g	$I_1 / \text{kg m}^2$	$I_2 / \text{kg m}^2$
Kopf	3,0	6,0	18,2	$2,05 \cdot 10^{-6}$	
Torso	4,0	10,0	54,0	$10,8 \cdot 10^{-6}$	
Arm	1,3	13,7	7,8	$0,165 \cdot 10^{-6}$	$12,3 \cdot 10^{-6}$
Bein	1,5	14,5	11,0	$0,310 \cdot 10^{-6}$	$19,5 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5: Messergebnisse des Vermessens der einzelnen Körperteile der Puppe: Durchmesser d , Länge l , Masse m , Trägheitsmoment der jeweiligen Stellung I_1, I_2

Im Folgenden wird aus den gemessenen Periodendauern das jeweilige Trägheitsmoment bestimmt.

$T_{\text{gemessen}} / \text{s}$									
1,93	1,95	1,93	1,75	1,72	1,76	1,95	1,83	1,95	1,72

Tabelle 6: gemessene 5-fache Periodendauer der schwingenden Puppe mit angelegten Armen und Beinen

4.4.1 Puppe mit angelegten Armen und Beinen

Aus den Werten in Tabelle 6 wird die gemittelte 5-fache Periodendauer

$$\bar{T}_{\text{gemessen}} = (1,85 \pm 0,03) \text{ s} \quad (28)$$

bestimmt. Hieraus lässt sich die Periodendauer

$$T = (0,370 \pm 0,007) \text{ s} \quad (29)$$

berechnen.

Mithilfe dieser Periodendauer und Gleichung 8 berechnet sich das Trägheitsmoment

$$I_{1,\text{gemessen}} = (-0,0026 \pm 0,0005) \text{ kg m}^2. \quad (30)$$

Auch hier ist diese Größe offensichtlich nicht sinnvoll. Näheres dazu in der Diskussion.

Um die experimentell bestimmte Größe mit einem Theoriewert vergleichen zu können, wird mit den Werten aus Tabelle 5 das theoretische Trägheitsmoment der Puppe in dieser Stellung bestimmt.

Da Trägheitsmomente als Addition der Trägheitsmomente der einzelnen Körper beschrieben werden können, wird nun nach Gleichung 6 das Trägheitsmoment über

$$\begin{aligned} I_{1,\text{Theorie}} &= I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Torso}} \\ &+ 2 \left(I_{1,\text{Arm}} + m_{\text{Arm}} \left(\frac{d_{\text{Torso}}}{2} + \frac{d_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \right) \\ &+ 2 \left(I_{1,\text{Bein}} + m_{\text{Bein}} \left(\frac{d_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (31)$$

berechnet. Damit ergibt sich der Theoriewert

$$I_{1,\text{Theorie}} = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2. \quad (32)$$

$T_{\text{gemessen}} / \text{s}$									
1,72	1,73	1,81	1,72	1,78	1,76	1,81	1,87	1,72	1,84

Tabelle 7: gemessene 2-fache Periodendauer der schwingenden Puppe mit ausgestreckten Armen und Beinen

4.4.2 Puppe mit ausgestreckten Armen und Beinen

Aus den Werten in Tabelle 6 wird die gemittelte 2-fache Periodendauer

$$\bar{T}_{\text{gemessen}} = (1,78 \pm 0,02) \text{ s} \quad (33)$$

bestimmt. Hieraus lässt sich die Periodendauer

$$T = (0,888 \pm 0,009) \text{ s} \quad (34)$$

berechnen.

Mithilfe dieser Periodendauer und Gleichung 8 berechnet sich das Trägheitsmoment

$$I_{2,\text{gemessen}} = (-0,0022 \pm 0,0005) \text{ kg m}^2. \quad (35)$$

Auch hier ist diese Größe offensichtlich nicht sinnvoll. Näheres dazu in der Diskussion.

Wie oben begründet lässt sich das theoretische Trägheitsmoment der Puppe mit ausgestreckten Armen und Beinen mit

$$\begin{aligned} I_{2,\text{Theorie}} &= I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Torso}} \\ &+ 2 \left(I_{2,\text{Arm}} + m_{\text{Arm}} \left(\frac{d_{\text{Torso}}}{2} + \frac{l_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \right) \\ &+ 2 \left(I_{\text{Bein}} + m_{\text{Bein}} \left(\left(\frac{l_{\text{Bein}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{d_{\text{Bein}}}{2} \right)^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (36)$$

berechnen. Wobei für den Abstand von Drehachse zum Schwerpunkt des Beins der Satz von Pythagoras verwendet wurde.

Damit ergibt sich das Trägheitsmoment

$$I_{2,\text{Theorie}} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2. \quad (37)$$

5 Diskussion

Die Messung der Eigenschaften der Drillachse ergeben die Winkelrichtgröße

$$D = (0,0237 \pm 0,0001) \text{ N m} \quad (38)$$

und das Eigenträgheitsmoment

$$I_D = (0,0026 \pm 0,0005) \text{ kg m}^2. \quad (39)$$

Damit haben sich die Werte in Tabelle 8 ergeben.

Körper	$I_{\text{gemessen}} / \text{kg m}^2$	$I_{\text{Theorie}} / \text{kg m}^2$	$\Delta I / \text{kg m}^2$
Zylinder (Symmetrieachse)	-0,0022	0,000 790	0,0030
Zylinder (Querachse)	0,0001	0,003 100	0,0030
Puppe (Stellung 1)	-0,0026	0,000 026	0,0026
Puppe (Stellung 2)	-0,0022	0,000 310	0,0025

Tabelle 8: Ergebnisse der Trägheitsmomentbestimmung mit Theoriewert und Abweichung vom Theoriewert ΔI , wobei die Ergebnisse der gemessenen Werte jeweils einen Fehler von $\pm 0,0005 \text{ kg m}^2$ aufweisen

Die Ergebnisse aus den gemessenen Periodendauern scheinen nicht sinnvoll zu sein, da diese sehr gering und teilweise sogar negativ sind. Dies lässt sich nur teilweise erklären.

Die wahrscheinlichste Ursache dieser fehlerhaften Trägheitsmomente scheint eine falsche Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse zu sein. Dabei wurden nämlich die angehangenen Massen als Punktmassen und die Stange als masselos angenommen. Dies trägt anscheinend zu einem zu großen Eigenträgheitsmoment bei.

Wenn man in Tabelle 8 die Abweichungen ΔI betrachtet fällt eine Ähnlichkeit dieser Werte auf, welche nach Gleichung 8 auf ein zu großes Eigenträgheitsmoment I_D hinweist.

Auch ohne diese fehlerhafte Bestimmung würden sich vermutlich relativ große Fehler aufzeigen, da eine genaue Bestimmung der Periodendauern mit der verwendeten Stoppuhr nicht möglich war.

Allerdings ist das berechnete Trägheitsmoment der Puppe in Stellung 2 größer als in Stellung 1. Dies entspricht den Erwartungen, da sich ein größeres Trägheitsmoment ergibt, wenn die Massen weiter von der Drehachse entfernt sind.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 101 Das Trägheitsmoment*. 2019.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Talu. *Holzarten erkennen – Übersicht mit 33 Weich- und Hartholzarten*. URL: <https://www.talu.de/holzarten-erkennen-uebersicht/> (besucht am 15.12.2019).