V206

Die Wärmepumpe

Jannis Speer
jannis.speer@tu-dortmund.de

Kevin Talits
kevin.talits@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.12.17 Abgabe: 09.01.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung **3**

2 Theorie **3**
2.1 Güteziffer 3
2.2 Massendurchsatz 3
2.3 Mechanische Kompressorleistung N_{mech} 4

3 Aufbau **4**

4 Durchführung **6**

5 Auswertung **7**
5.1 verwendete Software und Fehlerrechnung 7
5.2 Messdaten und Systemgrößen 7
5.3 Bestimmung der Güteziffer 8
5.4 Bestimmung des Massendurchsatzes 10
5.5 Bestimmung der mechansichen Kompressorleistung und Wirkungsgrad . . 11

6 Diskussion **12**

Literatur **13**

1 Zielsetzung

Es soll der Transport von Wärmeenergie entgegen der Richtung des Wärmeflusses untersucht werden. Zur Untersuchung der Qualität werden Merkmale wie Güteziffer und Massendurchsatz bestimmt.

2 Theorie

Zur Umkehr des Wärmeflusses vom kälteren in ein wärmeres Reservoir benötigt es weitere Energie, zum Beispiel in Form von mechanischer Arbeit. Diese wird von der Wärmepumpe geleistet.

2.1 Güteziffer

Das Verhältnis zwischen tranportierter Wärmeenergie Q_{trans} und zu verrichtender Arbeit A:

$$\nu = \frac{Q_{\text{trans}}}{A} \overset{2}{\Rightarrow} \nu_{id} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \tag{1}$$

wird durch die Güteziffer bezeichnet. Dessen Legitimation ergibt sich aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Für realitätsgebundene Berechnungen folgt aus der Irreversibilität der ablaufenden Prozesse, dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und der Annahme, dass sich bei der Wärmeübertragung die Temperaturen der Reservoirs nicht ändern:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \tag{2}$$

Somit ist der Arbeitsaufwand der Pumpe geringer für kleinere Temperaturdifferenzen der beiden Reservoirs. Die reale Güteziffer lässt sich aus dem Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ für ein Zeitintervall dt bestimmen. Daraus berechnet sich die Wärmemenge $\frac{dQ_1}{dt}$ zu:

$$\frac{dQ_1}{dt} = (m_1 c_w + m_k c_k)\frac{dT_1}{dt} \tag{3}$$

Mit $m_1 c_w$ für die Wärmekapazität des Wasser in Reservoir 1 und $m_k c_k$ die Wärmekapazität der Kupferschlange und des Eimers. Somit folgt für die Güteziffer :

$$\nu = \frac{dQ_1}{dtN} \overset{3}{\Rightarrow} \nu = (m_1 c_w + m_k c_k)\frac{dT_1}{dt} \cdot \frac{1}{N} \tag{4}$$

mit N := gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors.

2.2 Massendurchsatz

Der Massendurchsatz berechnet sich nach [1] über den Differentialquotienten über:

$$\frac{dQ_2}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k)\frac{dT_2}{dt} \tag{5}$$

und

$$\frac{dQ_2}{dt} = L\frac{dm}{dt} \tag{6}$$

mit Gl. 5 und 6 zu:

$$(m_2c_w + m_kc_k)\frac{dT_2}{dt} = L\frac{dm}{dt} \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = (m_2c_w + m_kc_k)\frac{dT_2}{dt \cdot L} \tag{7}$$

mit bekannter Verdampfungswärme L.

2.3 Mechanische Kompressorleistung N_{mech}

Für die Arbeit A_m gilt bei Verringerung des Gasvolumens von $V_a$undV_b:

$$A_m = -\int_{V_a}^{V_b} pdV \tag{8}$$

Aus der adiabatischen Kompression des Kompressors, also eine Zustandsänderung ohne Wärmeverluste an die Umgebung, folgt mit der Poissonschen Gleichung und $N_{\text{mech}} = \frac{dA_m}{dt}$:

$$N_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b\sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right)\frac{dV_a}{dt} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b\sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right)\frac{1}{\rho}\frac{dm}{dt} \tag{9}$$

mit der Dichte ρ des Gases und dem Druck p_a. ist das Verhältnis der Molwärmen C_p und C_V.

3 Aufbau

Eine Wärmepumpe kann schematisch wie folgt dargestellt werden: Für die Wärmepumpe wird ein reales Gas benutzt, welches während des Verdampfens Wärme aufnimmt und bei der Kondensation abgibt. Dies ist die Phasenumwandlungsenergie einer transportablen Energie des Gases. Für eine ideal arbeitende Pumpe sollte das Gas eine möglichst hohe Kondensationswärme besitzen. Der Kompressor K sorgt für eine adiabatische Kompression und einen Kreislauf. Das Druckventil D lässt druckreguliert das Gas durchströmen. Dort liegt ein Druckunterschied zwischen den beiden Reservoiren vor. Das Transportmedium mit dem Druck p_b und der Temperatur T_1 ist flüssig, während es auf der anderen Seite bei p_a mit der Temperatur T_2 gasförmig ist. Wenn sich das Drosselventil D öffnet, entzieht es dem Wasser in Reservoir 2 die Verdampfungswärme L. Somit ist das Reservoir 2, das kältere, wärmespendende Gefäß ist. Das Gas strömt durch den Kompressor K, wird komprimiert und erwärmt sich somit. Dadurch steigt der Druck im Reservoir p_a , bis sich das Gas verflüssigt und somit Wärme an das Gefäß abgibt. Mittels weiterer Apparaturen, wie dem Reiniger R werden Blasen durch die Entfernung von Gasresten entfernt, oder der Steuervorrichtung S, welche das Drossenventil D reguliert. Dadurch wird sichergestellt, dass nur Gase in den Kompressor gelangen.

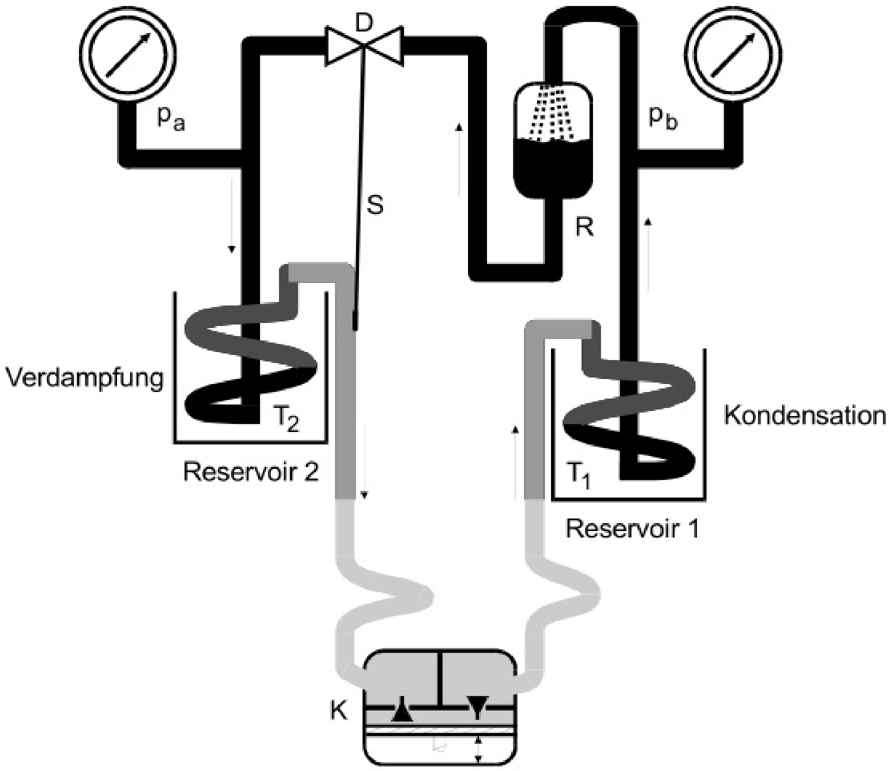

Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau einer Wärmepumpe. [1]

4 Durchführung

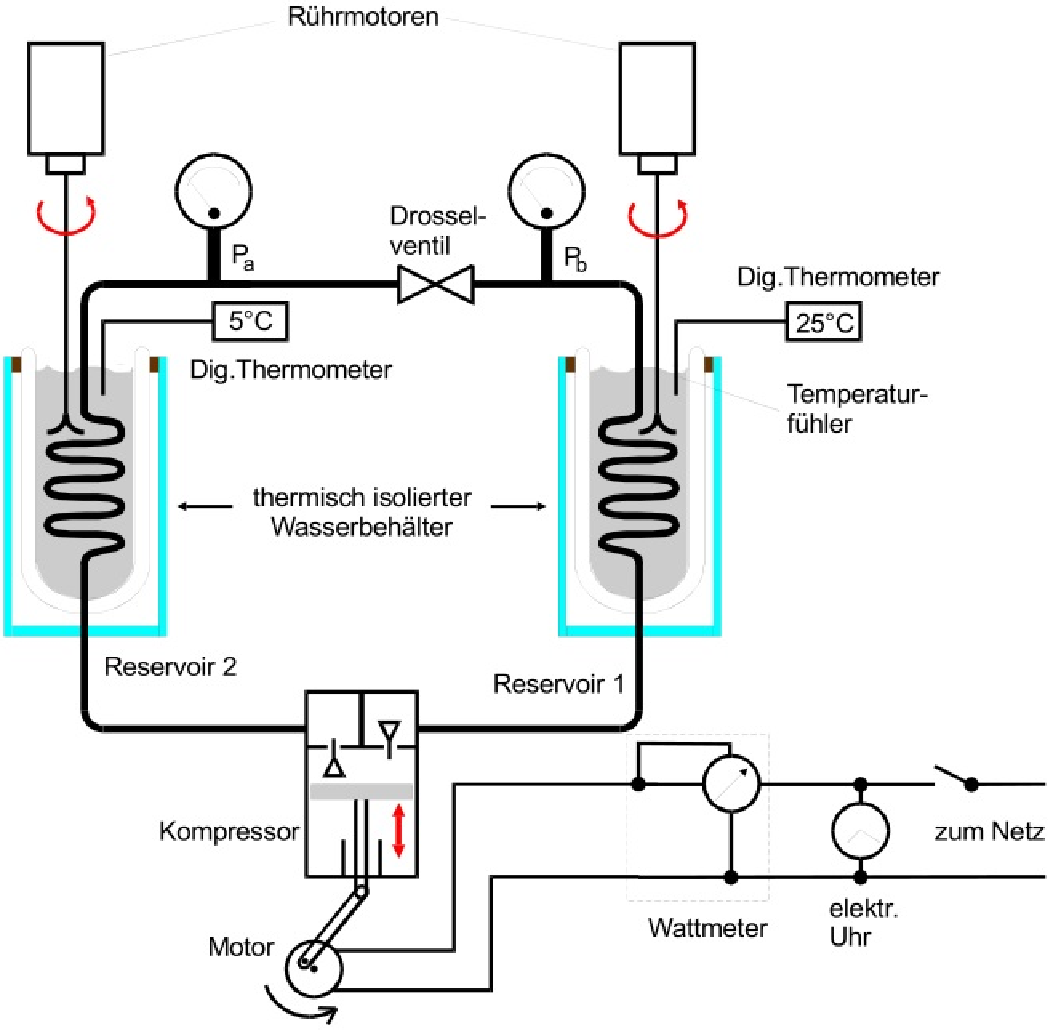

Abbildung 2: Apparatur zur Messreihe. [1]

Zuerst sind Anfangsdrücke, Temperaturen, sowie die spezifische Wärmekapazität des Kupfers aufzunehmen. Danach werden die Behälter mit je 3 Liter Wasser befüllt und die Rührmotoren eingeschaltet. Dann wird der Kompressor angeschaltet und es werden fortan im Minutentakt die Messdaten der Mano- und Thermometer, sowie die Zeit und Leistungsaufnahme des Kompressors notiert. Diese Messreihe wird fortgeführt bis beim zu eritzenden Reservoir eine Temperatur von 50°C erreicht wird. Für die Auswertung sind nun die Güteziffer, der Massendurchsatz und die mechanische Kompressorleistung zu bestimmen.

5 Auswertung

5.1 verwendete Software und Fehlerrechnung

Für die Auswertung werden neben NumPy[5] mehrere Python Pakete benutzt. Plots werden mit Matplotlib[2] erstellt und Ausgleichsgeraden mit SciPy[3]. Fehlerbehaftete Größen werden mit Uncertainties[4] berechnet, das die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

Alle Mittelwerte werden mit folgender Formel berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Der zugehörige Fehler berechnet sich mit:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

5.2 Messdaten und Systemgrößen

Für die Auswertung werden folgende Messwerte verwendet, die aus [1] entnommen werden. Auf die Drücke wird noch 1 Bar addiert. Das Volumen der Reservoire ist jeweils 3 Liter und die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist $c_w = 4.182 \cdot 10^3$ J/(kgK). Die Kupferleitungen der Wärmepumpe haben einen $c_k m_k$-Wert von 660 J/K. Außerdem werden in späteren Abschnitten noch einige Stoffeigenschaften des Transportgases Dichloridflourmethan (Cl_2F_2C) benötigt.

$$\rho_0 = 5,51\,\mathrm{g/l} \text{ bei } T_0 = 0\,^\circ\mathrm{C} \text{ und } p_0 = 1\,\mathrm{Bar}$$
$$\text{molare Masse: } M_{\mathrm{Gas}} = 0,12091\,\mathrm{kg/mol}$$

Tabelle 1: Temperaturen der Reservoire, Drücke in den Leitungen, Kompressorleistung.

t (min)	T_1 (°C)	T_2 (°C)	p_a (Bar)	p_b (Bar)	P (w)
1	20.9	19.7	1.4	5.8	170
2	21.8	19.6	1.8	6.4	180
3	23.8	18.5	1.9	7.0	187
4	26.4	17.0	2.1	7.5	195
5	28.8	15.4	2.2	8.0	203
6	31.3	13.6	2.2	8.5	205
7	33.6	11.8	2.2	9.0	208
8	35.7	10.2	2.2	9.4	210
9	37.7	8.6	2.2	9.8	210
10	39.7	7.0	2.2	10.2	212
11	41.5	5.5	2.2	10.6	212
12	43.2	4.0	2.2	11.0	210
13	44.9	2.7	2.2	11.5	212
14	46.5	1.4	2.2	12.0	214
15	48.1	0.7	2.2	12.3	215
16	49.5	0.1	2.3	12.7	214
17	50.9	-0.2	2.2	13.0	214

5.3 Bestimmung der Güteziffer

Für die gemessenen Temperaturen (siehe Tabelle 1) wird eine Ausgleichsrechnung (siehe Abb. 3) mit folgender Gleichung durchgeführt.

$$T(t) = At^2 + Bt + C$$

T_1 wird mit folgenden Parametern approximiert:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-9 \pm 1) \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \\ B_1 &= (0{,}042 \pm 0{,}002)\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \\ C_1 &= (290{,}3 \pm 0{,}4)\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Für T_2 liefert die Ausgleichsrechnung:

$$\begin{aligned} A_2 &= (6 \pm 2) \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \\ B_2 &= (-0{,}030 \pm 0{,}003)\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \\ C_2 &= (296{,}2 \pm 0{,}6)\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

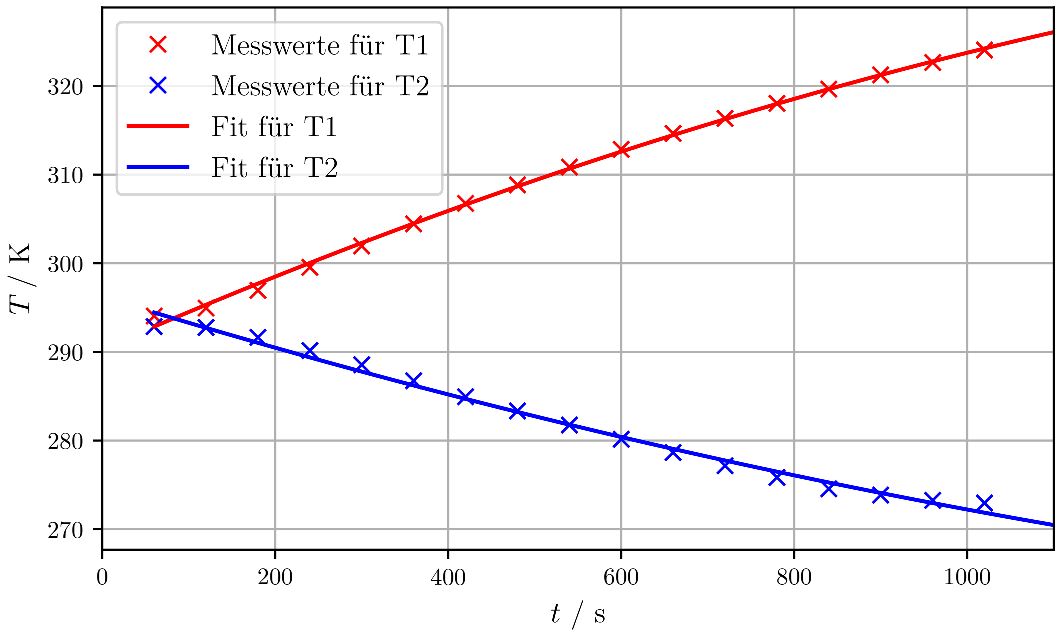

Abbildung 3: Temperaturverläufe während der Messung.

Mit Hilfe dieser Paramter lassen sich nun Differentialquotienten berechnen, die die Temperaturänderung zu bestimmten Zeiten beschreiben.

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = 2At + B$$

Der entsprechende Gaußsche Fehler berechnet sich mit:

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \sqrt{4t^2(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} \tag{10}$$

In den Tabellen 2 und 3 sind für vier verschiedene Zeiten bzw. Temperaturen Differentialquotienten berechnet.

Tabelle 2: Differentialquotienten für T_1.

t (s)	T_1 (K)	dT_1/t (K/s)	Fehler (K/s)
180	296,95	0,039	0,002
360	304,45	0,036	0,002
540	310,85	0,032	0,002
720	316,35	0,029	0,003

Tabelle 3: Differentialquotienten für T_2.

t (s)	T_2 (K)	dT_2/t (K/s)	Fehler (K/s)
180	291,65	-0,028	0,003
360	286,75	-0,026	0,003
540	281,75	-0,024	0,004
720	277,15	-0,021	0,004

Mit Gleichung (4) kann nun die Güteziffer ν bestimmt werden, indem die entsprechenden Größen aus Kapitel 5.2 und die Differentialquotienten für T_1 aus Tabelle 2 eingesetzt werden. Der dazugehörige Fehler folgt aus dem Fehler der Differentialquotienten:

$$\Delta\nu = \frac{1}{N}(m_1 c_w + m_k c_k)\Delta\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\right) \tag{11}$$

Die Theoriewerte der Gütezifffer ν_{ideal} werden mit Gleichung (1) berechnet. Auf die deutliche Abweichung zwischen Theorie und Praxis wird später in der Diskussion eingegangen.

Tabelle 4: gemessene und ideale Güteziffer.

t (s)	T_1 (K)	ν	Fehler	ν_{ideal}	relative Abweichung von ν_{ideal}
180	296,95	2,8	0,1	56,0	95,00 %
360	304,45	2,3	0,1	17,2	86,63 %
540	310,85	2,0	0,1	10,7	81,31 %
720	316,35	1,9	0,1	8,1	76,54 %

5.4 Bestimmung des Massendurchsatzes

Zur Bestimmung des Massendurchsatzes wird zunächst über eine lineare Ausgleichsrechnung die Verdampfunswärme berechnet. Dafür werden der Druck p_b und die Temperatur T_1 in einer Dampfdruck-Kurve (siehe Abb. 4) mit $p_0 = 1$ Bar und der allgemeinen Gaskonstante R aufgetragen.

$$\ln\frac{p_b}{p_o} = -\frac{L}{R}\cdot\frac{1}{T_1}$$

Für die Ausgleichsgerade $g(T_1) = m\cdot T_1 + n$ ergeben sich folgende Parameter:

$$m = (-2111 \pm 54)\,\mathrm{K}$$
$$n = 9,2 \pm 0,2$$

Die Verdampfunswärme L beträgt dann:

$$L = -R\cdot m = (1{,}76 \pm 0{,}04)\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}$$

Der Fehler von L berechnet sich mit:

$$\Delta L = R \cdot \Delta m \tag{12}$$

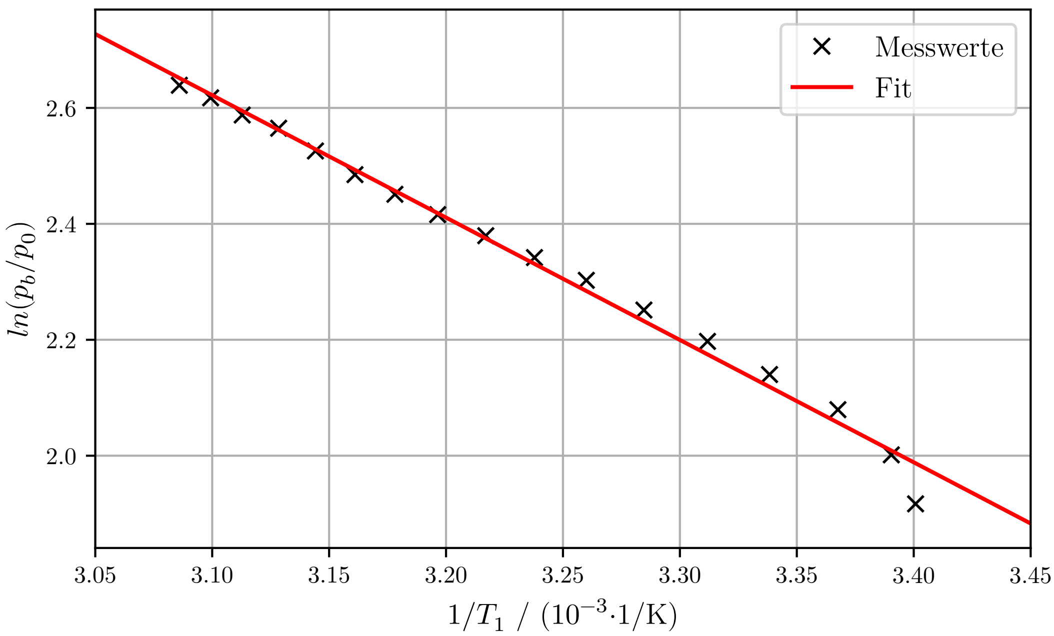

Abbildung 4: Dampfdruck-Kurve des Transportgases.

Der Massendurchsatz kann nun mit Gleichung (7) errechnet werden und der dazugehörige Fehler mit folgender Gleichung:

$$\Delta \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \right) = M_{\mathrm{Gas}} \frac{1}{L} (m_2 c_w + m_k c_k) \Delta \left(\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} \right) \tag{13}$$

Da die Verdampfunswärme pro Mol berechnet wird, wird zunächst die zeitliche Änderung der Stoffmenge n_{Gas} bestimmt.

Durch Multiplikation mit der molaren Masse des Transportgases (siehe Kapitel 5.2) wird der Massendurchsatz berechnet.

5.5 Bestimmung der mechansichen Kompressorleistung und Wirkungsgrad

Um die Kompressorleistung zu berechnen, ist es notwendig, die Dichte des Transportgases ρ zu kennen. Diese kann aus der idealen Gasgleichung bestimmt werden.

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0 p_a}{T_2 p_0} \tag{14}$$

Tabelle 5: Massendurchsatz.

t (s)	$\mathrm{d}n_{\mathrm{Gas}}/\mathrm{d}t$ (mol/s)	Fehler (mol/s)	$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ (kg/s)	Fehler (kg/s)
180	-0,021	0,002	-0,0025	0,0003
360	-0,020	0,002	-0,0023	0,0003
540	-0,018	0,003	-0,0021	0,0003
720	-0,016	0.003	-0,0019	0,0004

Aus Kapitel 5.2 ist ρ_0 bekannt und aus Kapitel 5.4 der Massendurchsatz. Nach [1] soll das Verhältnis der Molwärmen $\kappa = 1,14$ sein. Mit diesen Angaben kann nun aus Gleichung (9) die Kompressorleistung berechnet werden.

$$\Delta N_{\mathrm{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right)\frac{1}{\rho}\Delta\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right) \tag{15}$$

Tabelle 6: mechansiche Kompressorleistung.

t (s)	N_{mech} (W)	Fehler (W)
180	46	5
360	45	5
540	46	7
720	45	9

Der Wirkungsgrad ist der Quotient aus mechansicher Kompressorleistung N_{mech} und der aufgebrachten elektrischen Leistung P.

Tabelle 7: Wirkungsgrad.

t (s)	N_{mech}/P	Fehler
180	24,8 %	2,5 %
360	22,1 %	2,7 %
540	22,0 %	3,3 %
720	21,0 %	4,0 %

6 Diskussion

Wie in der Auswertung bereits festgestellt, weicht die berechnete Güteziffer deutlich von der idealen Güteziffer ab. Die größte Abweichung beträgt $95,00\,\%$ und die kleinste $76,54\,\%$ (siehe Tabelle 4). Auch der Wirkunsgrad der Wärmepumpe ist relativ niedrig und liegt nur zwischen $24,8\,\%$ und $21\,\%$ (siehe Tabelle 7). Als Ursache für dieses Ergebnis kommt zum einen der Aufbau in Betracht. Die Leitungen sind nicht optimal isoliert, insbesondere zwischen den Reservoiren und Umgebung kann ein freier Wärmeaustausch stattfinden. Die Eimer werden durch die Deckel nicht geschlossen und die Umgebungsluft kann in die Eimer eindrigen. Der Wärmeaustausch zwischen Transportgas und Wasser funktioniert nur bedingt. Ein Rührmotor funktionierte während der Messung nicht. Weitere Gründe für den Unterschied zwischen Theorie und Realität sind die vereinfachenden Annahmen, die in der Theorie getroffen werden. Zur Berechnung der Güteziffer wird angenommen, dass der Prozess reversibel sei und der Kompressor adiabatisch arbeite. In der Praxis ist dies nicht realisierbar, da es zum Beispiel durch Reibung zu Engergieverlusten kommt. Außerdem wird bei der Berechnung der mechanischen Kompressorleistung die ideale Gasgleichung herangezogen, obwohl das Transportgas kein ideales Gas ist.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zu V206, Die Wärmepumpe.* URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V206.pdf`.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python.* Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.