

Versuch 408

Geometrische Optik

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 26.04.16

Abgabe: 03.05.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlage	3
2.1	Verfahren nach Bessel	5
2.2	Verfahren nach Abbe	6
3	Fehlerrechnung	6
3.1	Mittelwert	7
4	Aufbau und Durchführung	7
4.1	Aufbau und Durchführung um das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung zu verifizieren	7
4.2	Bestimmung der Brennweite einer Linse nach dem Bessel-Verfahren	8
4.3	Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach Abbe	8
5	Auswertung	8
5.1	Verifizieren der Linsengleichung	8
5.2	Bestimmung einer bekannten sowie unbekannten Brennweite	9
5.3	Verfahren nach Bessel	9
5.4	Verfahren nach Abbe	12
6	Diskussion	14
	Literatur	15

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es die Brennweite f von verschiedenen Linsen mit zwei Methoden zu bestimmen. Dazu wird zunächst das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung verifiziert. Zusätzlich wird die chromatische Abberation untersucht.

2 Theoretische Grundlage

Die in der geometrischen Optik verwendeten Linsen werden in zwei Gruppen eingeteilt:

1. Sammellinsen, siehe Abbildung (1) oberes Bild (dünne Linse) und unteres Bild (dicke Linse). Durch die konvexe Wölbung der Sammellinse wird paralleles Licht im so genannten Brennpunkt gebündelt. "Die Brennweite f und die Bildweite b sind bei Sammellinsen positiv und es entsteht ein reelles Bild" ([1], TU Dortmund, Versuch 408, S.1, 14.05.16).

2. Zerstreuungslinsen, siehe Abbildung (1) mittleres Bild (dünne Linse). Sie unterscheidet sich von der Sammellinse durch ihre konkave Wölbung, wodurch das Licht gestreut wird. "Bei einer Zerstreuungslinse sind [die] Brennweite f und [die] Bildweite b negativ und es entsteht ein virtuelles Bild" ([1], TU Dortmund, Versuch 408, S.1, 14.05.16).

Gemeinsamkeiten der beiden Linsenarten:

- Linsen bestehen im allgemeinen aus einem Material welches einen höheren Brechungsindex als Luft aufweist.
- Sammel- und Zerstreuungslinsen können in dünne und dicke Linsen eingeteilt werden:
 - Für dünne Linsen gilt, dass die Brechung auf die Mittelebene reduziert wird.
 - Anders als bei den dünnen Linsen muss für dicke Linsen eine zweite Hauptebene eingeführt werden, an welcher der Lichtstrahl gebrochen wird.
- Um das Bild zu konstruieren welches nach der Brechung entsteht werden drei Strahlen verwendet (Folgende Auflistung ist entommen aus [1], TU Dortmund, Versuch 408, S.1, 14.05.16):
 - **Der Parallelstrahl** [P] verläuft vom Gegenstand parallel zur optischen Achse und wird an der Mittelebene bzw. Hauptebene der Linse gebrochen und wird zum Brennpunktstrahl.
 - **Der Mittelpunktstrahl** [M] geht durch die Mitte der Linse und ändert seine Richtung nicht.
 - **Der Brennpunktstrahl** [B] geht durch den Brennpunkt der Linse, bevor er an der Mittelebene bzw. Hauptebene gebrochen wird und zum Parallelstrahl wird.

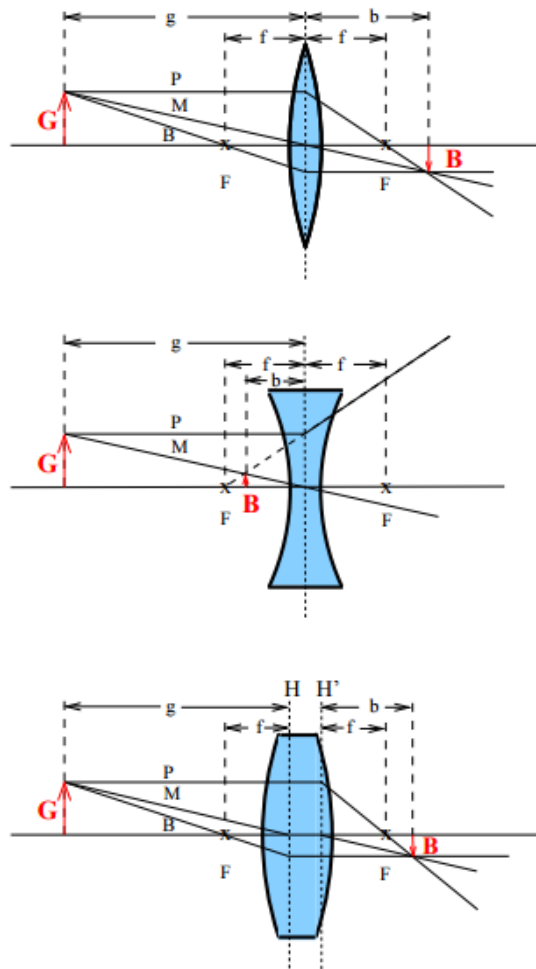


Abbildung 1: Bildkonstruktion für drei ausgewählte Linsen. [1, S. 1]

Das Abbildungsgesetz folgt aus der Abbildung (1) und den Strahlensätzen

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} . \quad (1)$$

Folgende Bedeutung steckt hinter den Parametern:

- V : Abbildungsmaßstab
- B : Bildgröße
- G : Gegenstandsgröße
- b : Bildweite
- g : Gegenstandsweite

Das Verhältnis zwischen B und G ist gleich dem Verhältnis von b und g , wobei dieses Verhältnis V darstellt.

Die Linsengleichung für dünne Linsen kann aus der Bildkonstruktion und dem Abbildungsgesetz hergeleitet werden

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} . \quad (2)$$

Für dicke Linsen kann die Brechung nicht mehr auf eine Mittelebene reduziert werden. Wie die Abbildung (1) unten zeigt, muss die Mittelebene gegen zwei Hauptebenen H und H' ausgetauscht werden.

Bei der Gleichung (2) handelt es sich um eine Näherung, welche nur gilt solange es um achsennahe Lichtstrahlen geht. Durch achsenferne Strahlen können Abbildungsfehler auftreten, wodurch das Bild unscharf abgebildet wird. Das Bild wird wieder scharf, indem mit einer Irisblende die achsenfernen Strahlen ausgeblendet werden.

Da der Brechungsindex von der Wellenlänge des eintreffenden Lichtes abhängt, wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes. Dieses Phänomen wird chromatische Aberration genannt.

2.1 Verfahren nach Bessel

Die Brennweite einer Linse wird nach dem Bessel-Verfahren bestimmt, indem der Abstand zwischen Gegenstand und Bild konstant gehalten wird und zwei Linsenpositionen gesucht werden, bei denen das Bild scharf abgebildet wird (vgl. [1], TU Dortmund, Versuch 408, S.3, 14.05.16).

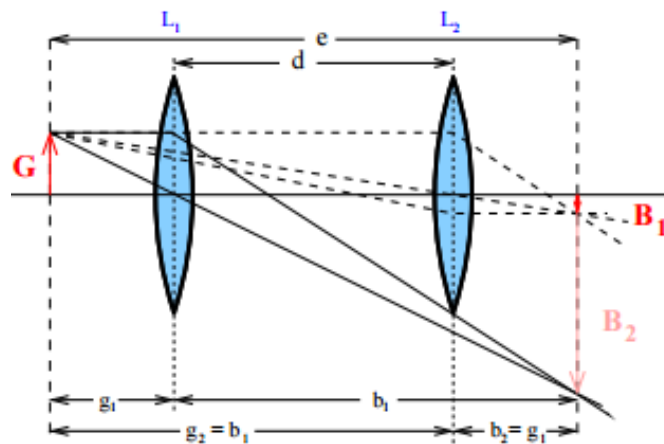


Abbildung 2: Schematische Darstellung für das Verfahren von Bessel. [1, S. 4]

Aus Abbildung (2) ist zu erkennen, dass der Abstand e zwischen Gegenstand G und Bild B gleich

$$e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2$$

ist und dass der Linsenabstand d mit

$$d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2$$

berechnet wird. Durch Einsetzen lässt sich die Brennweite der Linse zu

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (3)$$

bestimmen.

2.2 Verfahren nach Abbe

Ein weiteres Verfahren zur Bestimmung der Brennweite ist das Abbe-Verfahren. Zusätzlich zur Brennweite wird die Lage der Hauptebenen H und H' aus dem Abbildungsgesetz (siehe Gl. (1)) ermittelt. Wie in Abbildung (3) zu erkennen ist, werden dazu die Bild- und Gegenstandsweiten b' und g' bezüglich eines beliebigen Punktes A gemessen.

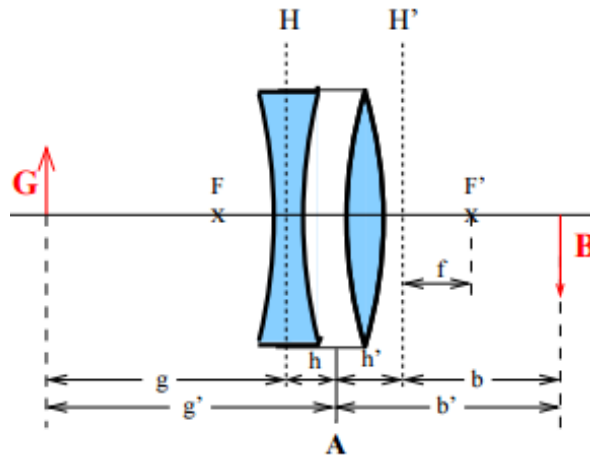


Abbildung 3: Schematische Darstellung für das Verfahren nach Abbe. [1, S. 5]

Aus den Gleichungen

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (4)$$

und

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (5)$$

ergeben sich dann die Brennweite f und die Lage der Hauptebenen. In den beiden obenstehenden Gleichungen ist V der Abbildungsmaßstab und h und h' sind die Hilfsebenen.

3 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

3.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (6)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (7)$$

4 Aufbau und Durchführung

4.1 Aufbau und Durchführung um das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung zu verifizieren

Um das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung zu verifizieren wird eine optische Bank benötigt, an deren einem Ende sich eine Halogenlampe befindet und am anderen Ende ein Schirm. Dazwischen wird ein Gegenstand "Perl L" und eine Sammellinse mit bekannter Brennweite f positioniert. Der Gegenstand steht zwischen der Halogenlampe und der Sammellinse. Die Position des Schirms wird solange geändert bis der Gegenstand als scharfes Bild erscheint. Die Gegenstandsweite g wird dabei nicht verändert. Nachdem das Wertepaar (g_i, b_i) aufgeschrieben wurde, wird die Versuchsreihe mit neun weiteren Gegenstandsweiten fortgesetzt. Zum Schluss werden alle Wertepaare in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Die Gegenstandsweiten g_i werden auf die x-Achse aufgetragen und die Bildweiten b_i auf die y-Achse. Nun werden die einzelnen Wertepaare durch Geraden verbunden und der Schnittpunkt A aller Geraden entspricht der Brennweite f (siehe Abbildung (4)).

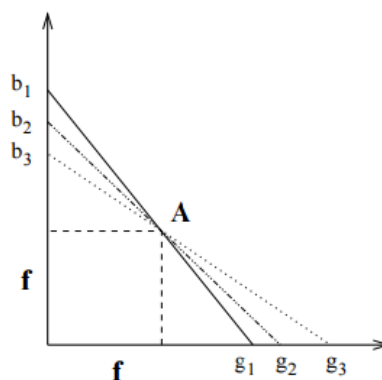


Abbildung 4: Die Wertepaare (g_i, b_i) aufgetragen. [1, S. 3]

4.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach dem Bessel-Verfahren

Der Versuchsaufbau zur Bestimmung der Brennweite einer Linse nach dem Bessel-Verfahren ist identisch mit dem Aufbau aus dem Kapitel (4.1).

Zu Beginn wird ein fester Abstand e zwischen dem Gegenstand und dem Schirm gewählt und die Linse an die Halogenlampe gestellt. Nun soll die Linse in Richtung des Schirms bewegt werden, bis ein scharfes Bild zu erkennen ist und es wird das Wertepaar (g_1, b_1) aufgeschrieben. Wenn bei gleichem Versuchsaufbau die Linse weiter in Richtung des Schirms bewegt wird, ergibt sich ein zweites Mal ein scharfes Bild. Das Wertepaar wird als (g_2, b_2) notiert und die Versuchsreihe für neun weitere Abstände e wiederholt.

Um die chromatische Abberation zu untersuchen, werden für jeweils fünf Abstände e , ein roter und ein blauer Filter vor den Gegenstand gesetzt. Die Messung läuft analog zu oben beschriebenen Bessel-Verfahren.

4.3 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach Abbe

Für diesen Versuchsaufbau werden auf der optischen Bank die Halogenlampe, der Gegenstand, eine Zerstreuungslinse, eine Sammellinse und der Schirm in eben dieser Reihenfolge aufgebaut. Der Abstand zwischen den beiden Linsen muss für die gesamte Messung konstant gehalten werden. Nun wird das Linsensystem verschoben, bis ein scharfes Bild auf dem Schirm zu erkennen ist. Die Bild- und Gegenstandsweiten b' und g' werden zu einem Referenzpunkt A gemessen. Für die Messungen wird der Referenzpunkt A auf die Mittelebene der Sammellinse gelegt. Zusätzlich werden die Bild- und Gegenstandsgrößen B und G gemessen. Diese Messung wird für neun weitere Gegenstandsweiten durchgeführt.

5 Auswertung

5.1 Verifizieren der Linsengleichung

Um das Abbildungsgesetz sowie die Linsengleichung (Gleichungen (1) und (2)) zu verifizieren sind die dafür relevanten Messwerte in Tabelle 1 aufgetragen. Die Gegenstandsgröße des Perl L beträgt

$$G = 3.0 \cdot 10^{-2} \text{ m} . \quad (8)$$

Die Vergrößerungen werden entsprechen $V_1 = \frac{b}{g}$ und $V_2 = \frac{B}{G}$ berechnet und deren relative Messabweichung in der Tabelle 1 aufgelistet. Die Brennweite zu den Bildweiten b sowie Gegenstandsweiten G werden mittels der Linsengleichung (Gleichung (2)) berechnet und ebenfalls in der Tabelle aufgelistet. Das Abbildungsgesetz wurde durch die Messung bestätigt, da die Werte einen Fehler von durchschnittlich 3.5 % aufweisen. Dies liegt innerhalb des Toleranzbereichs der Messunsicherheit bei den Versuchen im Praktikum. Die Linsengleichung ist ebenso verifiziert worden da die durchschnittliche Brennweite einen Fehler von 2% aufweist gegenüber der Herstellerangabe von

$$f_{\text{Hersteller}} = 1.0 \cdot 10^{-1} \text{ m} . \quad (9)$$

$g/10^{-2}$ m	$b/10^{-2}$ m	$B/10^{-3}$ m	$f/10^{-2}$ m	V_1	V_2	$\left \frac{V_1-V_2}{V_1}\right /\%$
25.0	15.6	2.0	10.4	0.62	0.66	6.6
24.0	16.4	2.0	10.2	0.68	0.66	3.0
23.0	16.8	2.2	10.3	0.73	0.73	0.0
22.0	17.6	2.3	10.2	0.80	0.77	3.8
21.0	18.4	2.7	10.2	0.88	0.90	2.3
20.0	19.3	2.7	10.2	0.97	0.90	7.2
19.0	20.5	3.1	10.1	1.08	1.03	4.7
18.0	21.4	3.4	10.2	1.18	1.13	4.2
17.0	23.1	4.2	10.2	1.35	1.40	3.7
16.0	25.1	4.7	10.2	1.56	1.57	0.6
15.0	29.2	5.7	10.1	1.94	1.90	2.1
(Mittelwert \pm Fehler des Mittelwertes)			(10.2 ± 0.1)	(3.5 ± 0.7)		

Tabelle 1: Messwerte und berechnete Größen zur Verifizierung des Abbildungsgesetzes und Linsengleichung

5.2 Bestimmung einer bekannten sowie unbekannten Brennweite

Die Brennweite der bekannten Linse wurde bereits im vorherigen Kapitel mit Hilfe der Linsengleichung bestimmt. Zusätzlich wird die Brennweite mit Hilfe eines Plots bestimmt. Dafür werden die Gegenstandsweiten auf die y-Achse des Koordinatensystems aufgetragen und mit den entsprechenden Bildweiten, welche auf der x-Achse aufgetragen sind, verbunden. Aus dem Schnittpunkt der Geraden lässt sich die Brennweite der Linse ablesen. Aus Abbildung 5 wird die Brennweite

$$f_{\text{abgelesen}} = (9.8 \pm 0.4)10^{-2} \text{ m} \quad (10)$$

abgelesen. Die Messung wird für eine Linse mit unbekannter Brechkraft wiederholt. Die Messdaten und die Brennweiten sind in Tabelle 2 aufgetragen. Aus dem Diagramm 6 lässt sich eine Brennweite von

$$f_{\text{unbekannt}} = (11.9 \pm 2.3)10^{-2} \text{ m} \quad (11)$$

ablesen.

5.3 Verfahren nach Bessel

Die entsprechenden Messdaten zu dem Versuch sind in Tabelle 3 zu finden. Dabei wird die Brennweite nach Formel (3) berechnet, wobei der Abstand $d = g - b$ und die Gegenstandsweite als $g = e - b$ dementsprechend definiert sind. Aus der Mittelung der einzelnen Messwerte ergibt sich durch das Bessel-Verfahren eine experimentell bestimmte Brennweite für weißes Licht von

$$f_{\text{exp}} = (9.73 \pm 0.13)10^{-2} \text{ m} . \quad (12)$$

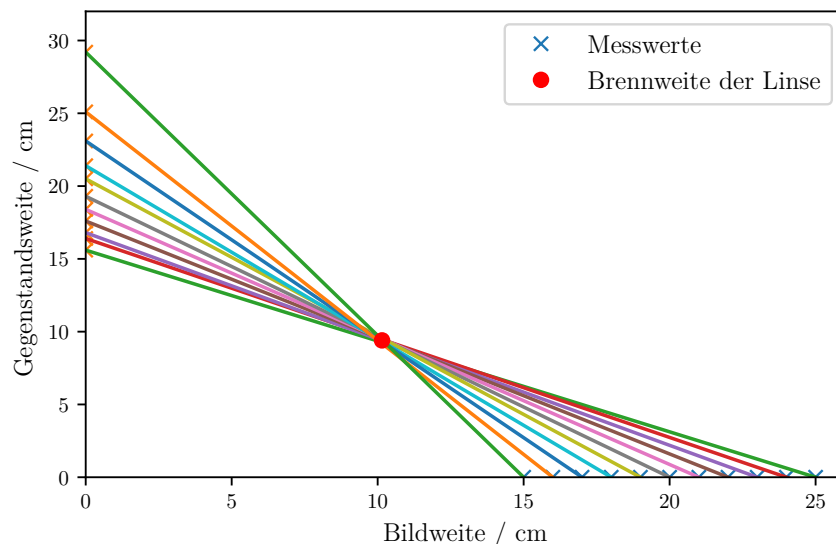


Abbildung 5: Brennweite einer bekannten Linse

$b/10^{-2}$ m	$g/10^{-2}$ m	$f/10^{-2}$ m
40.0	15.0	9.2
39.0	15.1	9.2
38.0	15.3	9.2
37.0	15.5	9.2
36.0	15.8	9.1
35.0	16.3	9.0
34.0	16.6	9.0
33.0	17.0	9.0
32.0	17.5	8.9
31.0	17.8	8.8
30.0	18.4	8.8
(Mittelwert \pm Fehler des Mittelwertes)		(9.0 \pm 0.1)

Tabelle 2: Gemessene Bild-, Gegenstandsweite und errechnete Brennweite einer unbekannten Linse

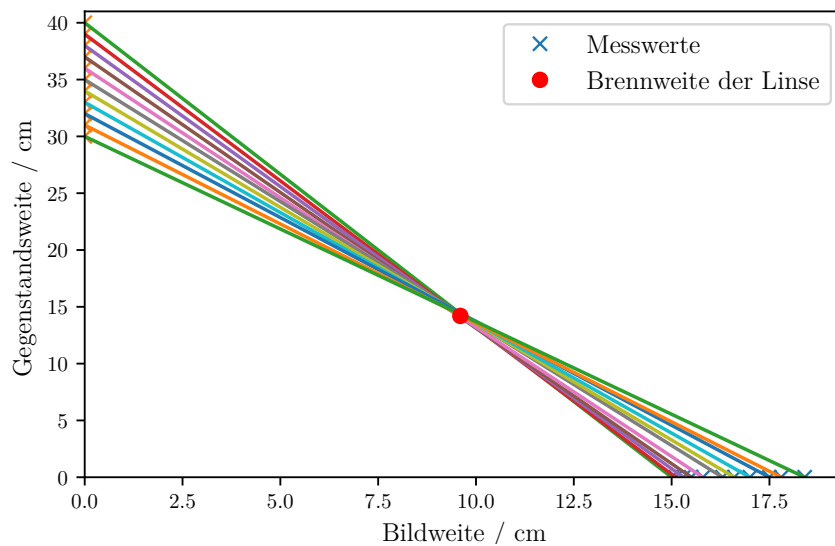


Abbildung 6: Brennweite einer unbekannten Linse

$e / 10^{-2} \text{ m}$	g_1 / m	g_2 / m	$f_1 / 10^{-2} \text{ m}$	$f_2 / 10^{-2} \text{ m}$
100.0	11.5	89.3	10.18	9.56
97.5	11.5	86.9	10.14	9.45
95.0	11.6	84.4	10.18	9.42
92.5	11.6	81.6	10.15	9.62
90.0	11.7	79.1	10.18	9.58
87.5	11.7	76.5	10.14	8.62
85.0	11.8	75.1	10.16	7.75
82.5	11.9	73.6	10.18	9.94
80.0	11.9	68.9	10.13	9.56
77.5	12.1	66.4	10.21	9.51
			10.17 ± 0.01	9.30 ± 0.17

Tabelle 3: Brennweite von weißem Licht

Wenn der Fehler aus den Zwischensummen der einzelnen Brennweiten f_1 und f_2 genommen wird beträgt er

$$\overline{\Delta f_{\text{exp}}} = 0.43 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (13)$$

Für den Versuch wurde eine Linse mit einer Brennweite von

$$f_{\text{Hersteller}} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (14)$$

verwendet. Anschließend wird die Brechkraft von farbigem Licht bestimmt. Dazu wird zunächst ein roter und anschließend ein blauer Farbfilter vor die Lampe gespannt. Aus

e / m	$g_{\text{rot}}/10^{-2} \text{ m}$	$b_{\text{rot}}/10^{-2} \text{ m}$	$f_{\text{rot}}/10^{-2} \text{ m}$	$g_{\text{blau}}/10^{-2} \text{ m}$	$b_{\text{blau}}/10^{-2} \text{ m}$	$f_{\text{blau}}/10^{-2} \text{ m}$
100	89.3	10.7	9.56	89.3	10.7	9.56
90	79.1	10.9	9.58	79.3	10.7	9.43
80	68.8	11.2	9.63	69.0	11.0	9.49
70	58.5	11.5	9.61	58.6	11.4	9.54
60	48.0	12.0	9.60	48.4	11.6	9.42

Tabelle 4: Brennweite von rotem und blauem Licht

Tabelle 4 ergibt sich für rotes Licht eine Brennweite von

$$f_{\text{rot}} = (9.60 \pm 0.01) 10^{-2} \text{ m} \quad (15)$$

und für blaues Licht eine Brennweite von

$$f_{\text{blau}} = (9.49 \pm 0.03) 10^{-2} \text{ m} . \quad (16)$$

5.4 Verfahren nach Abbe

Es sollen die Hauptebene und die Brennweite mit Hilfe der Formeln (4) und (5) bestimmt werden. Es wird eine Zerstreuungslinse und Fokussierlinse jeweils von

$$f_{\text{Hersteller}} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (17)$$

Brennweite im Abstand von

$$d = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (18)$$

verwendet. Die Gegenstandsgröße des Objektes beträgt

$$G = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} . \quad (19)$$

Die Messwerte sind in Tabelle 5 aufgetragen. Es wird zunächst eine lineare Regression entsprechend Gleichung (4) durchgeführt und die Fitparameter f_g und h ermittelt. Anhand derer wird aus der Steigung des Graphens und den Schnittpunkten mit der Achse die Hauptebenen und die Brennweiten berechnet. Der Fit durch die Messwerte ist in Abbildung 7 zu sehen. Der Fit der Form von Gleichung (5) ergibt die Brennweiten und

$g / 10^{-2} \text{ m}$	$b / 10^{-2} \text{ m}$	$B / 10^{-2} \text{ m}$	V
104.4	15.6	14.8	4.93
99.0	16.0	13.5	4.50
93.7	16.3	12.5	4.17
88.3	16.7	11.5	3.83
82.7	17.3	10.2	3.40
77.0	18.0	9.1	3.03
71.5	18.5	8.3	2.77
65.5	19.5	7.1	2.37
59.4	20.6	6.2	2.07
52.0	23.0	4.8	1.60

Tabelle 5: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite mittels Abbemethode

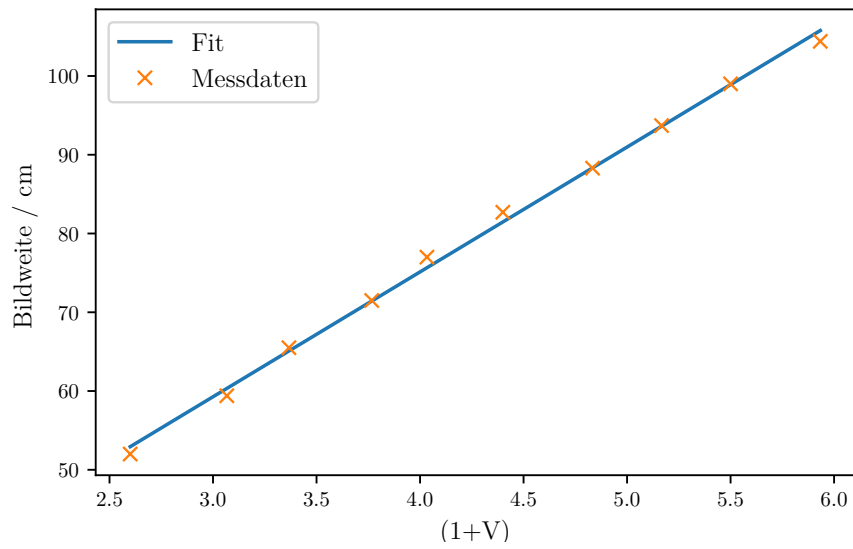


Abbildung 7: Bildweiten Fit

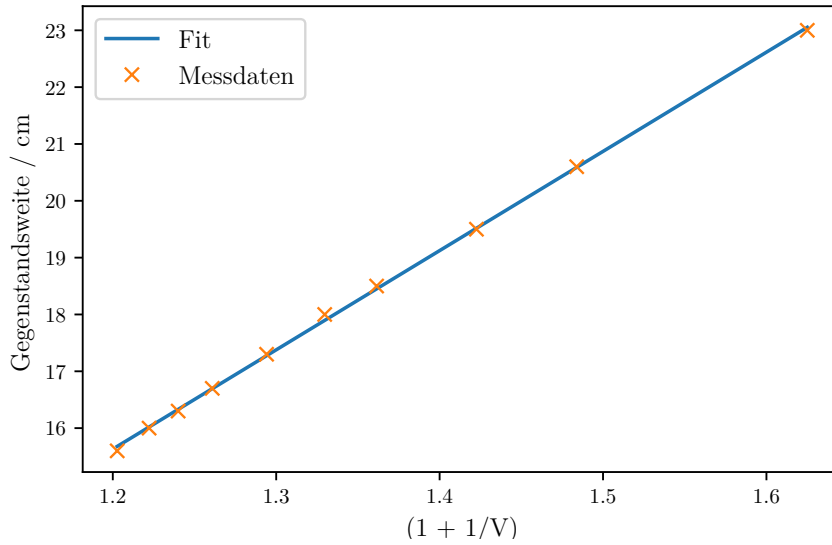


Abbildung 8: Gegenstandsweiten Fit

die Lage der Hauptebenen

$$f_g = (15.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad (20)$$

$$f_b = (17.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad (21)$$

$$h = (11 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad (22)$$

$$h' = (-5.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-2} \text{ m}. \quad (23)$$

Die theoretische Brennweite des Systems berechnet sich aus der Modifikation von Formel (2) um einen Korrekturfaktor zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (24)$$

$$f = 16.6 \cdot 10^{-2} \text{ m}. \quad (25)$$

6 Diskussion

Generell ist die Bestimmung eines scharfen Bildes recht subjektiv. Es kann nicht immer ein eindeutiger Punkt gefunden werden, sondern eher ein ganzer Bereich wo das Bild scharf zu sein scheint. Daher wurde versucht die Schärfe an bestimmten Merkmalen an der Gestalt des Bildes reproduzierbar zu machen. Die Linsengleichung scheint als bestätigt da die Werte lediglich um 3.5 % von den Theoretischen abweichen und dies im Rahmen der Messunsicherheit dieses Versuches aufgrund des oben gennante Problems liegt. Die Bekannte Linse wurde mit einem Messfehler von 2 % bestimmt, was als gelungene Messung eingestuft werden kann. Die mittels der Besselmethode bestimmte Brennweite

0	Zu Messende Größe	Ermittelter Wert	Relative Abweichung vom Theoriewert
1	Verifizierung des Abbildungsgesetz		$(3.5 \pm 0.7) \%$
2	Verifizierung der Linsengleichung	$f_{\text{exp}} = (10.2 \pm 0.1) \text{ cm}$	2 %
3	Besselmethode		
3.1	Brennweite weißes Licht	$f_{\text{weiß}} = (9.7 \pm 0.1) \text{ cm}$	3 %
3.2	Brennweite rotes Licht	$f_{\text{rot}} = (9.60 \pm 0.01) \text{ cm}$	/
3.3	Brennweite blaues Licht	$f_{\text{blau}} = (9.49 \pm 0.03) \text{ cm}$	/
4	Abbemethode		
4.1	Brennweite über Gegenstandsweite	$f_{\text{G}} = (15.9 \pm 0.3) \text{ cm}$	4 %
4.2	Brennweite über Bildweite	$f_{\text{B}} = (17.5 \pm 0.1) \text{ cm}$	5 %

Tabelle 6: Überblick der errechneten Größen und ihrer relativen Abweichung vom Theorie Wert

für weißes Licht beträgt 9.7 cm. Dies entspricht einer relativen Abweichung von 3 % von der Herstellerangabe. Des weiteren wird ermittelt das die Brechkraft der Linse bei rotem Licht geringer als die vom Blauen ist. Die mittels Abbemethode ermittelten Brennweiten weichen um bis zu 5 % von dem Theorie wert ab. Werden die beiden ermittelten Messwerte zuerst gemittelt, ist die Messunsicherheit kleiner als 1 % .

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 408, Geometrische Optik*. <http://129.217.224.2/HOME-PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V408.pdf>, 2016.