

Durchführung: 17.01.2017  
Abgabe: 24.01.2017

---

## PRAKTIKUMSPROTOKOLL V106

# GEKOPPELTE PENDEL

Anneke Reinold<sup>1</sup>,  
Vanessa Sulaiman<sup>2</sup>

---

---

<sup>1</sup>anneke.reinold@tu-dortmund.de

<sup>2</sup>vanessa.sulaiman@tu-dortmund.de

# 1 Einleitung

Es werden Schwingungen von gekoppelten Fadenpendeln bei verschiedenen Anfangsbedingungen betrachtet. Dazu werden Schwingungsdauer und Schwebungsdauer gemessen.

## 2 Theorie

Für ein einzelnes Pendel mit Fadenlänge  $l$  und Masse  $m$  lässt sich die Bewegungsgleichung aus der wirkenden Gewichtskraft  $\vec{F} = m\vec{a}$  und dem Drehmoment  $M = D_p\phi$  aufstellen, wobei  $D_p$  die Winkelrichtgröße des Pendels ist. Mit der Kleinwinkelnäherung  $\sin\theta \approx \theta$  und dem Trägheitsmoment  $J$  ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\phi} + D_p\phi = 0. \quad (1)$$

Ihre Lösung ist eine harmonische Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Für zwei mit einer Feder gekoppelte Fadenpendel gelten dann die gekoppelten Differentialgleichungen

$$J\ddot{\phi}_1 + D_p\phi_1 = D_F(\phi_2 - \phi_1) \quad (2)$$

$$J\ddot{\phi}_2 + D_p\phi_2 = D_F(\phi_1 - \phi_2), \quad (3)$$

da auf beide Pendel jeweils das zusätzliche Drehmoment  $M_1 = -M_2 = D_F(\phi_2 - \phi_1)$  wirkt. Die beiden Gleichungen können entkoppelt und als Überlagerung von zwei Eigenschwingungen dargestellt werden, sodass die Lösungen der entstehenden Bewegungsgleichungen erneut harmonische Schwingungen sind. Diese haben die Frequenzen  $\omega_1, \omega_2$  und die Auslenkwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ .

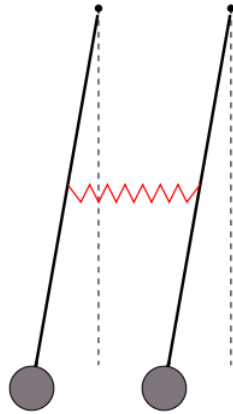
Es werden im folgenden drei verschiedene Fälle mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen betrachtet.

Bei der gleichphasigen Schwingung werden beide Pendel in die gleiche Richtung um den gleichen Winkel ausgelenkt, die Anfangsbedingung lautet also  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Hierbei spielt die Kopplung keine Rolle. Beide Pendel schwingen wie einzelne Fadenpendel mit der Frequenz

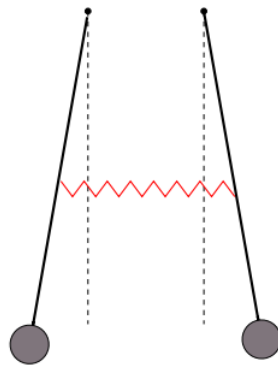
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4)$$

Bei der gegenphasigen Schwingung werden die beiden Pendel ebenfalls um den gleichen Winkel ausgelenkt, jedoch in gegensätzliche Richtungen, es gilt also  $\alpha_1 = -\alpha_2$ . Die Feder wirkt auf beide Pendel mit der gleichen Kraft, sodass sie symmetrisch mit der Frequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g + 2K}{l}} \quad (5)$$



**Abbildung 1:** Gleichphasige Schwingung.[1]



**Abbildung 2:** Gegenphasige Schwingung.[1]

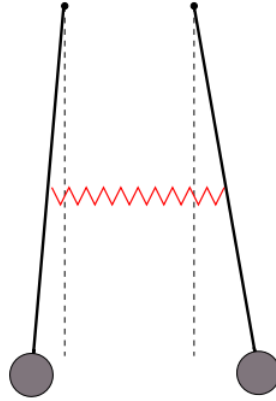
schwingen, wobei  $K$  die Kopplungskonstante der Feder ist. Die Schwingungsdauer ergibt sich jeweils aus

$$T_{\pm} = \frac{2\pi}{\omega_{\pm}}. \quad (6)$$

Zuletzt wird noch der Fall betrachtet, dass ein Pendel sich in Ruhe befindet, während das andere ausgelenkt wird, also  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ . Zu Beginn der Schwingung schwingt nur das ausgelenkte Pendel, wobei es durch die Kopplung nach und nach seine gesamte Energie an das andere Pendel überträgt, welches anschließend die Energie wieder zurück zum ersten Pendel überträgt. Dies wird Schwebung genannt. Die Schwebungsfrequenz und -dauer sind

$$\omega_S = \omega_- - \omega_+ \quad (7)$$

$$T_S = \frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-}. \quad (8)$$



**Abbildung 3:** Gekoppelte Schwingung.[1]

Die Kopplungskonstante berechnet sich dann nach

$$\kappa = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}. \quad (9)$$

### 3 Aufbau und Durchführung

Es werden Stabpendel mit reibungsarmer Aufhängung und verschiebbaren Massen, sodass verschiedene Pendellängen eingestellt werden können, verwendet. Mit einer Stoppuhr werden die Zeiten gemessen.

Zunächst werden bei beiden Pendeln die gleichen Längen eingestellt und ohne Kopplung die Schwingungsdauern für 5 Schwingungen 10 Mal gemessen. Wenn die Schwingungsdauern nicht übereinstimmen, müssen die Pendellängen nachjustiert werden. Nun werden die Pendel mit der Feder verbunden und ebenfalls für 5 Schwingungen mehrfach die Schwingungsdauern für die gleichphasige und für die gegenphasige Schwingung gemessen. Zuletzt werden die Schwingungsdauer und die Schwebungsdauer bei der gekoppelten Schwingung gemessen.

Die gesamte Messung wird für eine weitere Pendellänge durchgeführt.

### 4 Auswertung

Es wird der Mittelwert immer durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (10)$$

und dessen Standardabweichung durch

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (11)$$

berechnet. Die Fehlerfortpflanzung nach Gauß wird durch

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \dots} \quad (12)$$

bestimmt. Begonnen mit der Auswertung der Messdaten für die Justierung der beiden Pendellängen wird die Abweichung der Ergebnisse für die mittlere Schwingungsdauer  $\bar{T}$  der ersten Pendellänge (Tabelle 2) und der zweiten Pendellänge (Tabelle 6) überprüft, wobei sich geringe Abweichungen ergeben und die Messergebnisse der einen im Fehlerbereich der anderen liegen. Für die weiteren Berechnungen wurde eine Pendellänge von

$$l_1 = (0,391 \pm 0,002) \text{ m für das erste Pendel und}$$

$$l_{21} = (0,497 \pm 0,002) \text{ m,}$$

$$l_{22} = (0,499 \pm 0,002) \text{ m für die beiden Pendellängen der zweiten Messung gemessen.}$$

Im Folgenden werden jeweils beide Werte für die unterschiedlichen Pendellängen bei der zweiten Messreihe ausgerechnet und davon nur der Mittelwert angegeben.

Zur Auswertung des Versuchs werden die in Tabelle 1 genannten Größen für jede der beiden Pendellängen nach ebenso dort genannten Formeln errechnet.

**Tabelle 1:** Zur weiteren Berechnung verwendete Formeln.

$$\begin{aligned} \omega_{+ \text{ exp}} &= \frac{2\pi}{\bar{T}_-} \\ \omega_{- \text{ exp}} &= \frac{2\pi}{\bar{T}_+} \\ \omega_{+ \text{ theo}} &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega_{- \text{ theo}} &= \sqrt{\frac{\omega_{+ \text{ theo}}^2 (1+\kappa)}{1-\kappa}} \\ \kappa &= \frac{\bar{T}_+^2 - \bar{T}_-^2}{\bar{T}_+^2 + \bar{T}_-^2} \\ T_{\text{S theo}} &= \frac{\bar{T}_+ \bar{T}_-}{\bar{T}_+ - \bar{T}_-} \\ \omega_{\text{S exp}} &= \omega_{- \text{ exp}} - \omega_{+ \text{ exp}} \\ \omega_{\text{S theo}} &= \omega_{- \text{ theo}} - \omega_{+ \text{ theo}} \\ K &= \frac{l \omega_{- \text{ theo}}^2 g}{2} \end{aligned}$$

Es folgen die Messwerte der beiden Messreihen in Tabellen. Zur weiteren Berechnung wurde der Mittelwert der jeweiligen Periodendauer angegeben.

4.1 Messdaten der ersten Pendellänge

Tabelle 2: Messung und Überprüfung der Schwingungsdauern.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T} / \text{s}$	$\frac{\bar{T}}{5} / \text{s}$
$T1 / \text{s}$	6,56	6,60	6,66	6,61	6,60	6,64	6,67	6,69	6,67	6,55	$6,625 \pm 0,015$	$1,325 \pm 0,003$
$T2 / \text{s}$	6,52	6,53	6,60	6,56	6,55	6,60	6,61	6,55	6,53	6,30	$6,535 \pm 0,028$	$1,307 \pm 0,006$

Tabelle 3: Messung gleichphasige Schwingung  $T_+$ .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T}_+ / \text{s}$	$\frac{\bar{T}_+}{5} / \text{s}$
$T_+ / \text{s}$	6,32	6,50	6,41	6,36	6,44	6,31	6,44	6,47	6,23	6,24	$6,372 \pm 0,030$	$1,274 \pm 0,008$

Tabelle 4: Messung gegenphasige Schwingung  $T_-$ .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T}_- / \text{s}$	$\frac{\bar{T}_-}{5} / \text{s}$
$T_- / \text{s}$	5,33	5,84	6,06	6,00	6,18	6,04	6,20	5,93	5,91	5,87	$5,936 \pm 0,078$	$1,187 \pm 0,016$

Tabelle 5: Messung Schwebung.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T} / \text{s}$	$\frac{\bar{T}}{5} / \text{s}$
$5T / \text{s}$	6,20	6,63	6,50	6,58	6,38	6,46	6,32	6,47	6,41	6,49	$6,444 \pm 0,039$	$1,288 \pm 0,008$
$T_S / \text{s}$	18,70	21,03	19,27	21,76	22,00	19,64	20,04	19,27	20,64	19,84	$20,216 \pm 0,350$	

4.2 Messdaten der zweiten Pendellänge

Tabelle 6: Messung und Überprüfung der Schwingungsdauern.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T} / \text{s}$	$\frac{\bar{T}}{5} / \text{s}$
$T1 / \text{s}$	7,12	7,23	7,18	7,26	7,13	7,12	7,13	7,12	7,20	7,15	$7,164 \pm 0,016$	$1,433 \pm 0,004$
$T2 / \text{s}$	7,16	7,15	7,10	7,20	7,10	7,15	7,24	6,96	7,01	7,24	$7,131 \pm 0,029$	$1,426 \pm 0,006$

Tabelle 7: Messung gleichphasige Schwingung  $T_+$ .

$\infty$	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T}_+ / \text{s}$	$\frac{\bar{T}_+}{5} / \text{s}$
	$T_+ / \text{s}$	7,16	6,96	6,93	7,07	7,33	7,21	7,00	7,06	7,09	7,20	$7,101 \pm 0,041$	$1,420 \pm 0,008$

Tabelle 8: Messung gegenphasige Schwingung  $T_-$ .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T}_- / \text{s}$	$\frac{\bar{T}_-}{5} / \text{s}$
$T_- / \text{s}$	6,67	6,50	6,60	6,52	6,40	6,69	6,43	6,55	6,52	6,47	$6,535 \pm 0,030$	$1,307 \pm 0,006$



**Tabelle 9:** Messung Schwebung.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{T} / \text{s}$	$\frac{\bar{T}}{5} / \text{s}$
$5T / \text{s}$	6,70	6,75	7,12	6,78	6,47	6,86	6,92	6,80	6,93	7,06	$6,839 \pm 0,061$	$1,368 \pm 0,012$
$T_S / \text{s}$	24,40	25,66	26,38	25,26	25,86	26,41	26,12	26,23	26,41	25,868	$25,873 \pm 0,200$	

### 4.3 Länge 1

Für die berechneten Werte mit den Formeln für die erste Messreihe aus Tabelle 1 ergibt sich:

$$\omega_{+ \text{ exp}} = (4,95 \pm 0,01) \text{ Hz}$$

$$\omega_{+ \text{ theo}} = (5,01 \pm 0,01) \text{ Hz}$$

$$\omega_{- \text{ exp}} = (5,28 \pm 0,01) \text{ Hz}$$

$$\omega_{- \text{ theo}} = (5,38 \pm 0,08) \text{ Hz}$$

$$\kappa = 0,071 \pm 0,015$$

$$T_{\text{S theo}} = (10,70 \pm 2,40) \text{ s}$$

$$T_{\text{S exp}} = (20,22 \pm 0,35) \text{ s}$$

$$\omega_{\text{S exp}} = (0,33 \pm 0,00) \text{ Hz}$$

$$\omega_{\text{S theo}} = (0,37 \pm 0,06) \text{ Hz}$$

### 4.4 Länge 2

Für die zweite Messreihe folgt:

$$\omega_{+ \text{ exp}} = (4,42 \pm 0,02) \text{ Hz}$$

$$\omega_{+ \text{ theo}} = (4,44 \pm 0,02) \text{ Hz}$$

$$\omega_{- \text{ exp}} = (4,80 \pm 0,02) \text{ Hz}$$

$$\omega_{- \text{ theo}} = (4,77 \pm 0,08) \text{ Hz}$$

$$\kappa = 0,083 \pm 0,007$$

$$T_{\text{S theo}} = (11,20 \pm 1,00) \text{ s}$$

$$T_{\text{S exp}} = (25,87 \pm 0,20) \text{ s}$$

$$\omega_{\text{S exp}} = (0,38 \pm 0,00) \text{ Hz}$$

$$\omega_{\text{S theo}} = (0,33 \pm 0,06) \text{ Hz}$$

## 5 Diskussion

Bei Betrachtung der errechneten Werte für die erste Messreihe mit der kürzeren Pendellänge ist anzumerken, dass die experimentellen Werte für  $\omega_+$  und  $\omega_-$  kleiner sind als die theoretischen. Leichte Abweichungen für die gleichsinnige und für die gegensinnige Schwingung können darauf zurück geführt werden, dass die Messung mit Stoppuhren durchgeführt wurden, sodass Ungenauigkeiten bei der Reaktionsgeschwindigkeit und der Verzögerung der Uhr aufgetreten sind. Auch erfolgte diese per Augenmaß, sodass nicht davon ausgegangen werden kann, dass immer genau am Ende einer Schwingungsperiode gestoppt wurde. Während des Schwingungsvorgangs schwingten die Pendel nicht 2-dimensional, sodass hieraus weitere Ungenauigkeiten resultierten.

Bei dem Wert für den Kopplungsgrad  $\kappa$  mit  $\kappa = 0,071 \pm 0,015$  fällt der relativ hohe Fehler auf. Dies kann wie schon oben erwähnt auf die Messungenauigkeiten zurück geführt werden.  $\kappa$  wurde aus den experimentell gemessenen Schwingungsdauern errechnet und für die Berechnung von  $\omega_{\text{theo}}$  eingesetzt. Somit kann angezweifelt werden, ob der Theoriewert wirklich als exakt angenommen werden kann, da die Messunsicherheiten dort auch eingeflossen sind. Des Weiteren fällt die hohe Abweichung vom experimentell bestimmten zum theoretischen Wert von  $T_S$  auf. Hier ist es wieder darauf zurück zu führen, dass die Messunsicherheiten eine große Auswirkung haben. Dies hat alles Auswirkung, gerade auf den Theoriewert, der Schwebungsfrequenz  $\omega_S$ . Im Vergleich zu der zweiten Messreihe wird auch hier dieselbe Tendenz aufgewiesen. Es lassen sich hinzufügend einige Fehler darauf zurückführen, dass die Pendellängen, anders als bei der ersten Messung als unterschiedlich gemessen wurden, und der angegebene errechnete Wert immer der Mittelwert der beiden ist, insofern die Länge  $l$  relevant ist.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 106*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/GekoppeltePendel.pdf> (besucht am 24.12.2016).