

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Ann-Sophie Schubert
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 01.12.2015

Abgabe: 08.12.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	4
2	Theorie	4
2.1	Allgemeine Relaxationsgleichung	4
2.2	Relaxationsphänomene unter Einfluss periodischer Auslenkungen	5
2.3	Der RC-Kreis als Integrator	6
3	Durchführung	6
3.1	Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Gliedes	6
3.2	Kondensatorspannung und Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz	8
3.3	Der RC-Kreis als Integrator	8
4	Auswertung	8
4.1	Auf- und Entladevorgang	8
4.2	Schwingungsverhalten	11
4.3	Integrator	12
4.4	Messdaten	12
5	Diskussion	15
	Literatur	15

1 Ziel

Im folgenden Versuch gilt es, die Zeitkonstante eines RC-Gliedes zu bestimmen. Außerdem sollen die Amplitude der Kondensatorspannung sowie die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt werden. Weiterhin soll gezeigt werden, dass ein RC-Kreis Spannungen integrieren kann.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Kehrt ein System nicht oszillatorisch in seinen Ausgangszustand, aus welchem es zuvor entfernt wurde, zurück, wird dies durch Relaxationsvorgänge beschrieben. Die zu betrachtende Größe A besitzt eine Änderungsgeschwindigkeit, welche proportional zu der Abweichung von A zu ihrem asymptotisch erreichbaren Endzustand $A(\infty)$ ist.

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

Integriert man diese Gleichung vom Zeitpunkt 0 bis zu einem Zeitpunkt t , folgt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct} \quad (2)$$

mit $c > 0$, da A beschränkt sein muss.

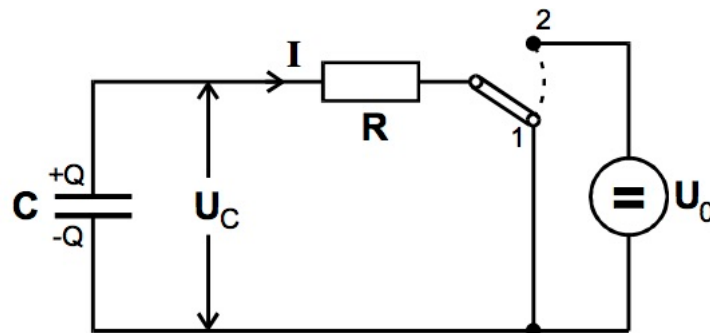


Abbildung 1: Schaltung eines RC-Kreises, Entladung (Stellung 1) und Aufladung (Stellung 2). [1].

Zunächst wird der Entladevorgang betrachtet. Auf dem Kondensator mit der Kapazität C befindet sich die Ladung Q . Für die Spannung zwischen den Kondensatorplatten gilt

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (3)$$

Außerdem gilt das ohmsche Gesetz

$$U = R \cdot I \quad (4)$$

sowie $dQ = Idt$. Damit ergibt sich eine Differentialgleichung analog zu 1 mit der Randbedingung $Q(\infty) = 0$, dessen Lösung

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5)$$

ist, mit RC als Zeitkonstante.

Für die Spannung gilt dementsprechend

$$U(t) = U(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

Analog ergibt sich für den Aufladevorgang mit den Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (7)$$

mit U_0 als Spannung der anliegenden Spannungsquelle.

2.2 Relaxationsphänomene unter Einfluss periodischer Auslenkungen

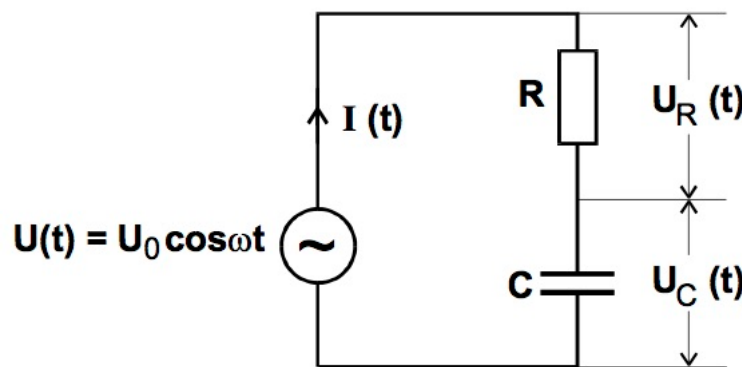


Abbildung 2: Schaltung eines RC-Kreises mit Wechselspannung betrieben, sodass periodische Auslenkungen auftreten.[1].

Die nun anliegende Spannung ist eine Sinusspannung. Gilt für die Kreisfrequenz der anliegenden Spannung $\omega \ll \frac{1}{RC}$, ist die Spannung am Kondensator $U_C(t)$ gleich der anliegenden Spannung $U(t)$. Steigt die Anregungsfrequenz, entsteht eine Phasenverschiebung ϕ zwischen den beiden Spannungen mit vorauseilender Generatorspannung. Außerdem nimmt die Amplitude der Kondensatorspannung mit zunehmender Frequenz ab. Für die Spannung am Kondensator gilt allgemein

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (8)$$

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze

1. In einem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme gleich Null.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (9)$$

2. In einer abgeschlossenen Masche ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

$$\sum_k U_k = 0 \quad (10)$$

ergibt sich für die Phasenverschiebung

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (11)$$

Die Formel zeigt, dass die Phasenverschiebung für kleine Frequenzen gegen 0 und für große Frequenzen gegen $\frac{\pi}{2}$ geht.

Für die frequenzabhängige Amplitude gilt

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (12)$$

Hier ist erkennbar, dass sich $A(\omega)$ bei kleinen Frequenzen U_0 nähert und sich bei großen Frequenzen 0 nähert. Da RC-Glieder nur kleine Frequenzen passieren lassen, werden diese als Tiefpässe verwendet.

2.3 Der RC-Kreis als Integrator

Unter bestimmten Bedingungen kann ein RC-Glied als Integrator eingesetzt werden. Dazu muss $\omega \gg \frac{1}{RC}$ erfüllt sein. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + U_C(t) \quad (13)$$

Mit $I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$ und $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt:

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (14)$$

da $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$, wenn $\omega \gg \frac{1}{RC}$.

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Gliedes

Zunächst soll die Zeitkonstante eines RC-Gliedes bestimmt werden. Dazu wird die folgende Schaltung verwendet. Auf dem Oszilloskop soll nur die abfallende Flanke sichtbar sein; es wird dementsprechend eingestellt. Der Punkt an dem die Spannung Null ist (Minimum zwischen fallender und steigender Flanke), muss ausgemessen werden.

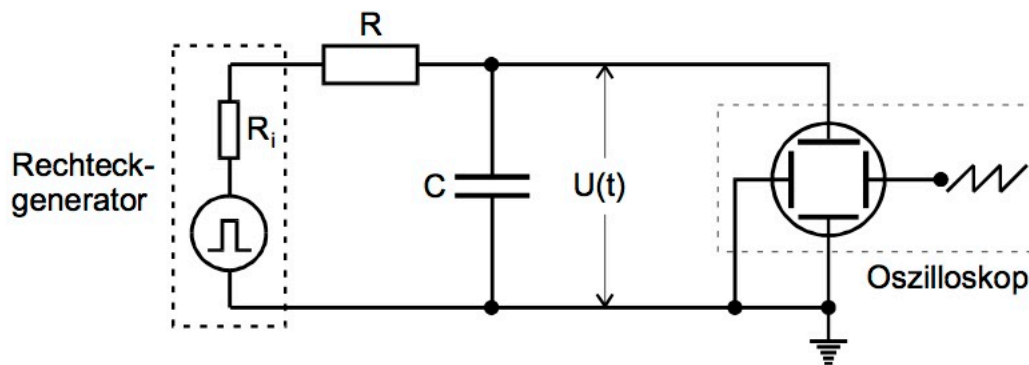


Abbildung 3: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Gliedes. [1].

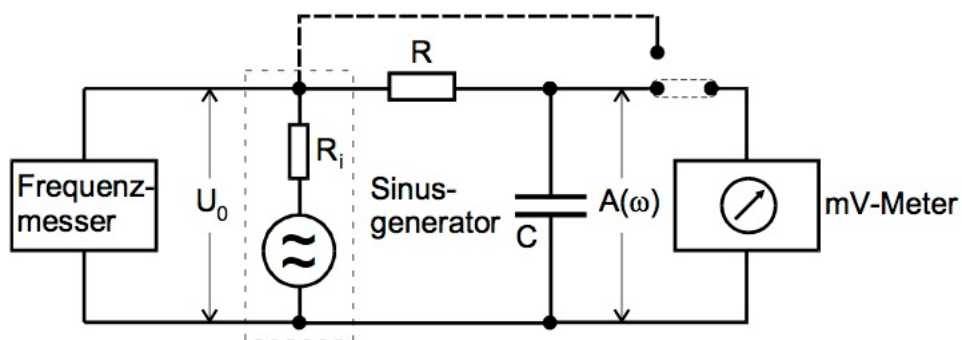


Abbildung 4: Schaltung zur Messung der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz. [1].

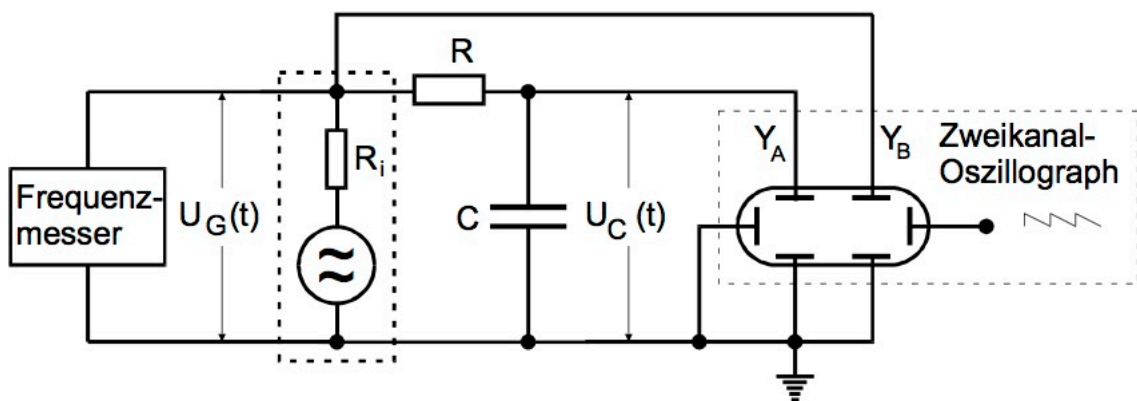


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.[1].

3.2 Kondensatorspannung und Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz

Anschließend sollen die Kondensatorspannung sowie die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz untersucht werden. Die Generatorfrequenz wird zwischen 10 Hz und 10 kHz erhöht. Es werden Werte der Frequenz, der Spannungsamplitude und der Phasenverschiebung aufgenommen.

Die Generatorspannung wird am Eingang Y_A und die Kondensatorspannung an Y_B angelegt. Dabei ist zu beachten, dass die Kurven der beiden Spannungsverläufe symmetrisch zur x-Achse sein müssen. Ist die Phasenverschiebung größer Null, ist auf dem Oszilloskop etwa ein Bild wie in 6 zu erkennen.

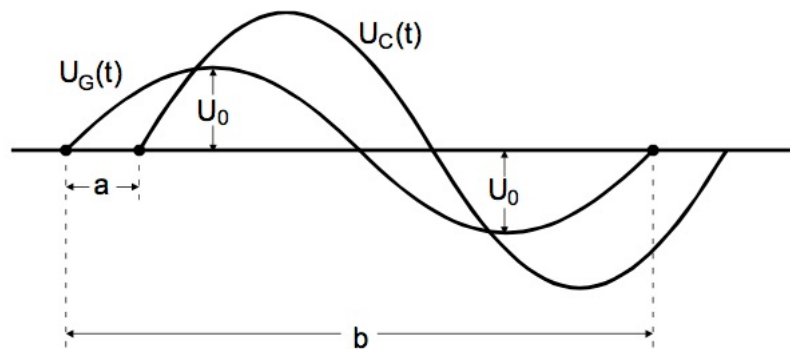


Abbildung 6: Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung. [1].

Die Phasenverschiebung ergibt sich durch

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 360 \quad \text{oder} \quad \phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (15)$$

3.3 Der RC-Kreis als Integrator

Um die Funktionsweise eines RC-Kreises als Integrator zu evaluieren, verwendet man die in 5 dargestellte Schaltung. Es sollen eine Rechteck-, Dreieck-, und Sinusspannung integriert werden. Die Kurve der Spannung soll sowohl vor als auch nach der Integration auf dem Oszilloskop dargestellt werden.

4 Auswertung

4.1 Auf- und Entladevorgang

Die Zeitkonstante $\tau = RC$ eines RC-Kreises wird Anhand der Auf-/Entladekurve bestimmt. Dazu wird ein Stromkreis wie in Abb. 1 genutzt, wobei U_C mit einem digitalen Speicheroszilloskop gemessen wird. Der gemessene Spannungsverlauf findet sich in Abb. 7. Zur Auswertung wird nun das Spannungsoffset

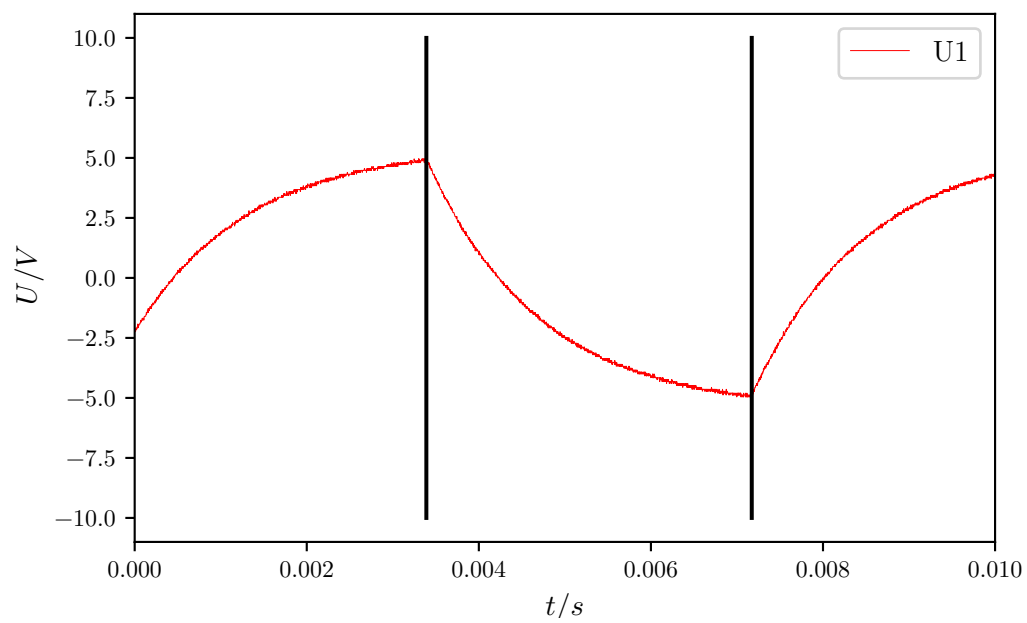


Abbildung 7: Verlauf der Kondensatorspannung U_C bei angelegter Rechteckspannung am RC-Kreis. Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird der mit den schwarzen vertikalen Linien markierte Zeitbereich genutzt.

$$U_0 = -5,6 \text{ V} \quad (16)$$

korrigiert, die Messwerte logarithmiert und mittels linearer Regression die Steigung einer Ausgleichsgeraden ermittelt. Aus (6) folgt über

$$U(t) = U(0) \cdot e^{-t/RC} \quad (17)$$

$$\ln U(t) = \ln(U(0) \cdot e^{-t/RC}) \quad (18)$$

$$\ln U(t) = \ln U(0) - \frac{1}{RC} \cdot t \quad (19)$$

, dass

$$RC = -\frac{1}{a} \quad (20)$$

ist, mit der Steigung a der Ausgleichsgeraden. Die logarithmierten Messwerte über die Zeit aufgetragen finden sich in Abb. 8, das Ergebnis lautet

$$RC = (1,360 \pm 0,001) \text{ ms} \quad (21)$$

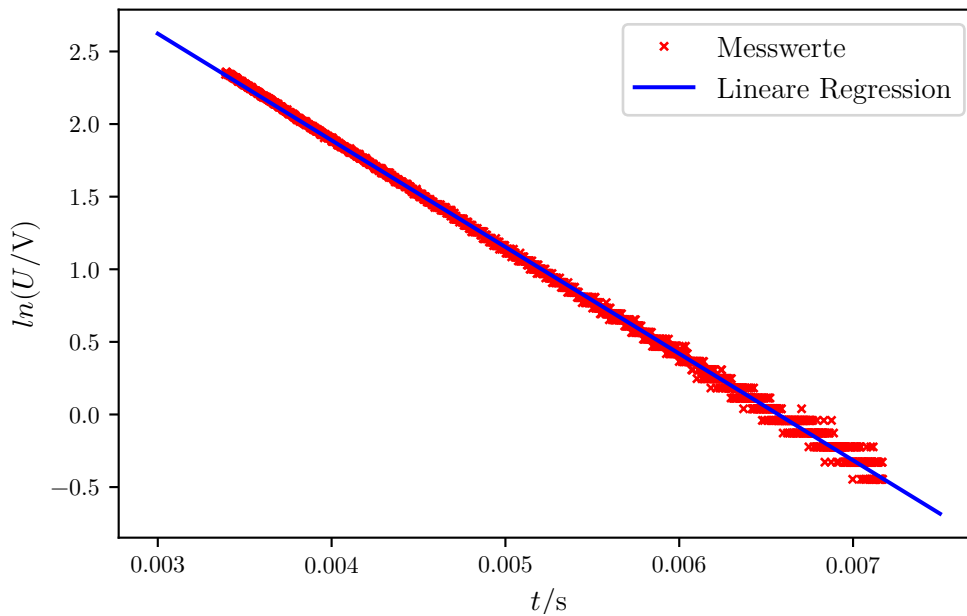


Abbildung 8: Logarithmierter Kondensatorsspannungsverlauf mit Ausgleichsgerade. Fehlerbalken wurden zur Verbesserung der Lesbarkeit ausgelassen.

4.2 Schwingungsverhalten

Nun soll die Zeitkonstante auf andere Art und Weise ermittelt werden, und zwar dadurch, dass eine Wechselspannung an den RC-Kreis angelegt wird und dabei die resultierende Spannung bzw. Phasenverschiebung gemessen wird. Der Aufbau der Schaltung findet sich an Abb. 5. Hierbei wird die Zeitkonstante mittels nichtlinearer Ausgleichsrechnung an die der Formeln (12) und (11) bestimmt. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 1 und Abb. 9/10.

Tabelle 1: Ergebnis der Auswertung der Zeitkonstante des RC-Kreises.

	RC / s
Messreihe Amplitude	$1,37 \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-5}$
Messreihe Phasenverschiebung	$1,26 \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-5}$

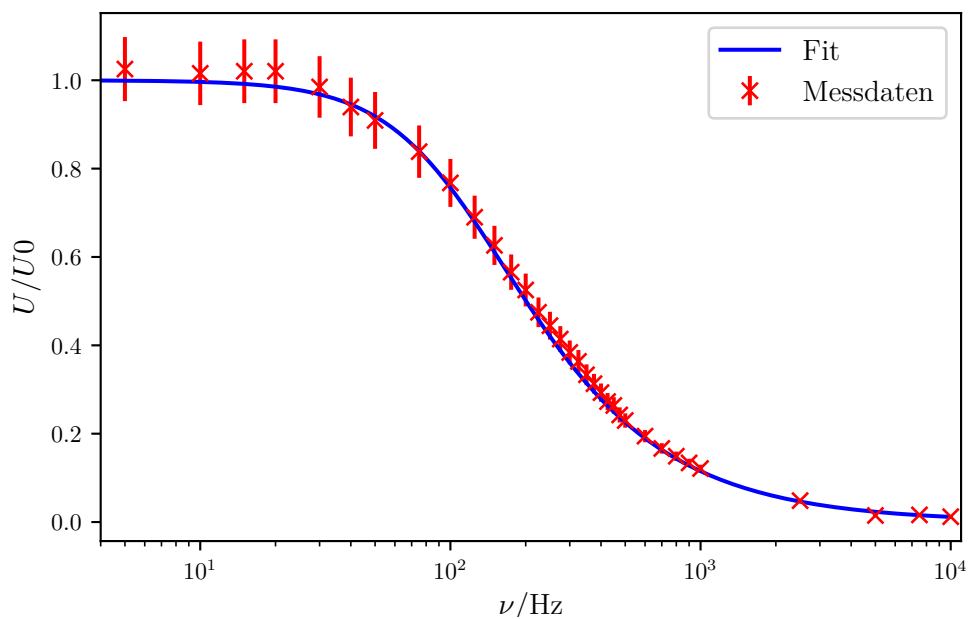


Abbildung 9: Frequenzabhängigkeit des Verhältnisses der Amplitude am Kondensator zur angelegten Amplitude, einfachlogarithmische Darstellung.

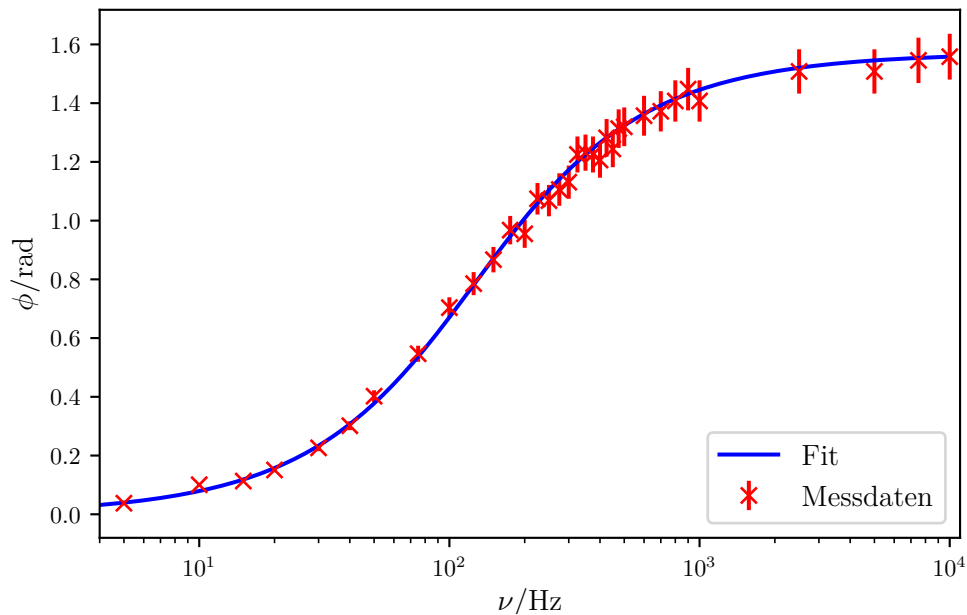


Abbildung 10: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung von Kondensator- und Generatorspannung, einfachlogarithmische Darstellung.

4.3 Integrator

Bei ausreichend hohen Frequenzen $\omega \gg 1/RC$ kann ein RC-Kreis als Integrationsglied verwendet werden. Die hochfrequenten Anteile der angelegten Spannung werden dabei aufintegriert. Einige Beispiele dazu finden sich in den Abbildungen 11, 12 und 13.

4.4 Messdaten

Die Angabe der Oszilloskop-Messdaten aus 4.1 ist aufgrund der Menge (6000 Punkte) nicht möglich. Die restlichen Daten finden sich in Tabelle 2.

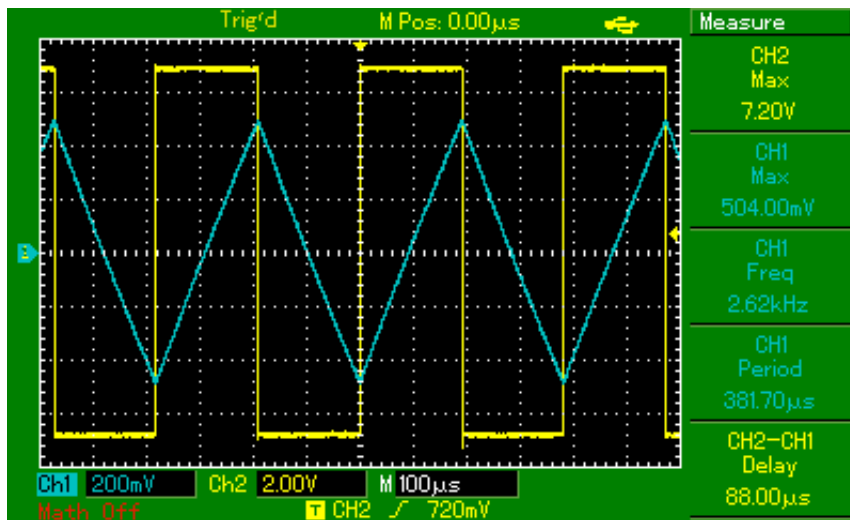


Abbildung 11: Spannungsverlauf einer Dreiecksschwingung und der vom RC-Kreis integrierten resultierenden Parabelschwingung.

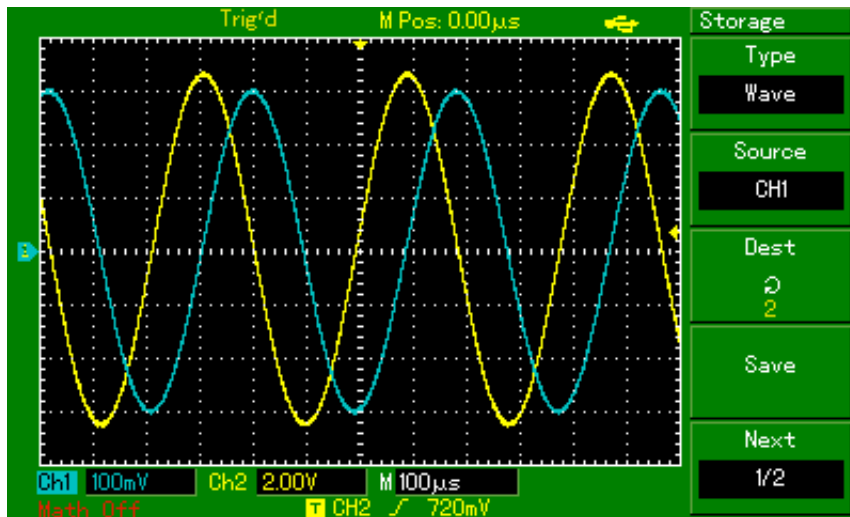


Abbildung 12: Spannungsverlauf einer Rechteckschwingung und der vom RC-Kreis integrierten resultierenden Dreieckschwingung.

Tabelle 2: Messdaten.

f/Hz	U/V	U_0/V	A		a/ms	ϕ/rad	
5	7,3	7,1	1,03	$\pm 0,072$	1,2	$0,0377 \pm 0,0019$	
10	7,8	7,7	1,02	$\pm 0,072$	1,6	$0,101 \pm 0,0050$	
15	8,0	7,8	1,02	$\pm 0,072$	1,2	$0,113 \pm 0,0057$	
20	8,0	7,8	1,02	$\pm 0,072$	1,2	$0,151 \pm 0,0075$	
30	7,8	7,9	0,985	$\pm 0,070$	1,2	$0,226 \pm 0,011$	
40	7,4	7,9	0,939	$\pm 0,066$	1,2	$0,302 \pm 0,015$	
50	7,2	7,9	0,909	$\pm 0,064$	1,3	$0,402 \pm 0,020$	
75	6,6	7,9	0,838	$\pm 0,059$	1,2	$0,547 \pm 0,027$	
100	6,1	7,9	0,768	$\pm 0,054$	1,1	$0,704 \pm 0,035$	
500	1,8	7,9	0,230	$\pm 0,016$	0,42	$1,32 \pm 0,066$	
1000	0,96	7,9	0,121	$\pm 0,0086$	0,22	$1,41 \pm 0,070$	
10 000	0,096	7,9	$0,0121 \pm 0,000 86$		0,025	$1,56 \pm 0,078$	
130	5,5	8,0	0,690	$\pm 0,049$	1,0	$0,785 \pm 0,039$	
150	5,0	7,9	0,626	$\pm 0,044$	0,92	$0,867 \pm 0,043$	
180	4,5	7,9	0,566	$\pm 0,040$	0,88	$0,968 \pm 0,048$	
200	4,2	7,9	0,525	$\pm 0,037$	0,76	$0,955 \pm 0,048$	
230	3,8	7,9	0,475	$\pm 0,034$	0,76	$1,07 \pm 0,054$	
250	3,5	7,9	0,444	$\pm 0,031$	0,68	$1,07 \pm 0,053$	
280	3,3	7,9	0,414	$\pm 0,029$	0,64	$1,11 \pm 0,055$	
300	3,0	7,9	0,384	$\pm 0,027$	0,60	$1,13 \pm 0,057$	
330	2,9	7,9	0,364	$\pm 0,026$	0,60	$1,23 \pm 0,061$	
350	2,6	7,9	0,333	$\pm 0,024$	0,56	$1,23 \pm 0,062$	
380	2,5	7,9	0,313	$\pm 0,022$	0,52	$1,23 \pm 0,061$	
400	2,3	7,9	0,293	$\pm 0,021$	0,48	$1,21 \pm 0,060$	
430	2,2	7,9	0,273	$\pm 0,019$	0,48	$1,28 \pm 0,064$	
450	2,1	7,9	0,264	$\pm 0,019$	0,44	$1,24 \pm 0,062$	
480	1,9	7,9	0,242	$\pm 0,017$	0,44	$1,31 \pm 0,066$	
600	1,5	7,9	0,194	$\pm 0,014$	0,36	$1,36 \pm 0,068$	
700	1,3	7,9	0,167	$\pm 0,012$	0,31	$1,37 \pm 0,069$	
800	1,2	7,9	0,149	$\pm 0,011$	0,28	$1,41 \pm 0,070$	
900	1,1	7,9	0,134	$\pm 0,0095$	0,26	$1,45 \pm 0,072$	
2500	0,38	7,9	$0,0485 \pm 0,0034$		0,096	$1,51 \pm 0,075$	
5000	0,12	7,9	$0,0149 \pm 0,0011$		0,048	$1,51 \pm 0,075$	
7500	0,13	7,9	$0,0162 \pm 0,0011$		0,033	$1,55 \pm 0,077$	
$\Delta U^{\text{rel}} = 5\%, \quad \Delta U_0^{\text{rel}} = 5\%, \quad \Delta a^{\text{rel}} = 5\%$							

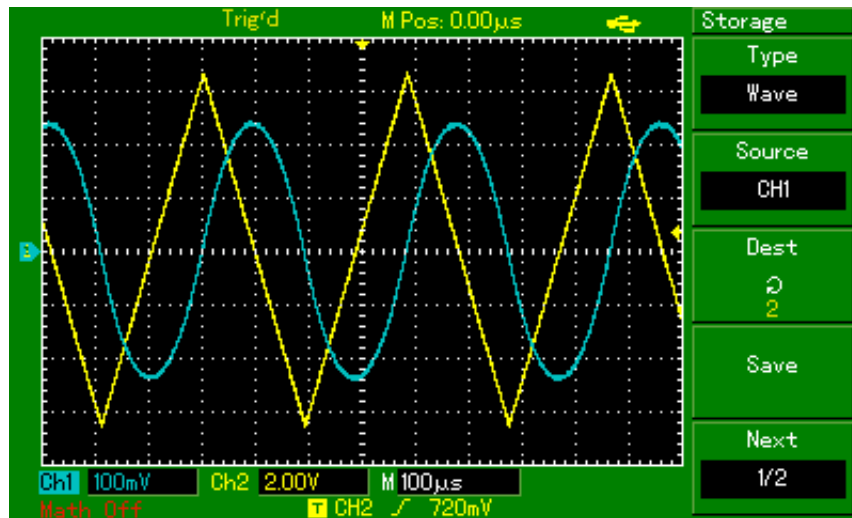


Abbildung 13: Spannungsverlauf einer Sinusschwingung und der vom RC-Kreis integrierten resultierenden Cosinusschwingung.

5 Diskussion

Da kein nomineller Wert für RC gegeben ist, kann kein Vergleich damit zur Evaluation der Messdaten angestellt werden, es können lediglich die einzelnen Messungen verglichen werden. Die Messung ist durch die Messunsicherheit bzw. Genauigkeit des Oszilloskops beschränkt, was auch in Abb. 8 an den „Stufen“ im niedrigen Spannungsbereich zu sehen ist. Bei den Sinus-gespeisten Messungen in 4.2 ist problematisch, dass eine eventuelle Fehlerbehaftung der Frequenz bei der Auswertung nicht berücksichtigt wird. Wenn die ermittelten RC -Werte

$$RC = (1,360 \pm 1,210) \cdot 10^{-3} \text{ ms} \quad (22)$$

$$RC = (1,370 \pm 2,160) \cdot 10^{-2} \text{ ms} \quad (23)$$

$$RC = (1,260 \pm 2,020) \cdot 10^{-2} \text{ ms} \quad (24)$$

verglichen werden fallen Abweichungen auf, diese werden eventuell durch den Innenwiderstand des Spannungsgenerators verursacht, der in der Auswertung nicht berücksichtigt wird.

Die Verläufe der frequenzabhängigen Größen ϕ und A entsprechen den Erwartungen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 353: Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.

- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.