

V. 301

Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen

Julian Hochhaus
julian.hochhaus@tu-dortmund.de

Niko Salewski
niko.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 29.11.2016

Abgabe: 06.12.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	1
2 Theorie	1
3 Durchführung	2
4 Auswertung	3
5 Diskussion	9
Literatur	10

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen der Innenwiderstand und die Leerlaufspannung mehrerer Spannungsquellen bestimmt werden.

2 Theorie

Als Spannungsquelle wird ein Gerät bezeichnet, das über einen endlichen Zeitraum eine konstante Spannung zwischen seinen Anschlusspunkten liefert [2]. Kenngrößen einer Spannungsquelle sind die Leerlaufspannung U_0 sowie der Innenwiderstand R_i .

Das Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle ist in Abbildung 1 dargestellt.

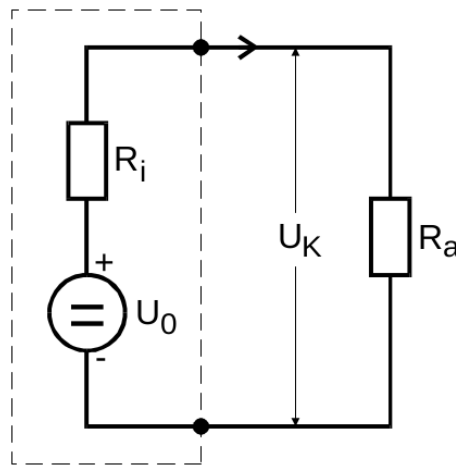


Abbildung 1: Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle mit Lastwiderstand R_a
[2]

Hierbei wird die reale Spannungsquelle durch eine ideale Spannungsquelle - mit Innenwiderstand Null - in Reihe geschaltet mit einem Innenwiderstand R_i , dargestellt. Die Klemmenspannung U_K entspricht der Spannung zwischen den Ausgangspunkten der belasteten Spannungsquelle. Für die Klemmenspannung U_K ergibt sich mit dem Zweiten Kirchhoffschen Gesetz

$$U_K = IR_a = U_0 - IR_i. \quad (1)$$

Es gilt also stets

$$U_K \leq U_0. \quad (2)$$

Durch Gleichung (1) wird auch ersichtlich, dass die Klemmenspannung U_K genau der Leerlaufspannung U_0 entspricht, wenn der Spannungsquelle kein Strom entnommen wird - also über den Innenwiderstand R_i kein Strom fließt. Des Weiteren lässt sich der Gleichung entnehmen, dass die Klemmenspannung U_K sinkt, wenn der Strom I zunimmt.

Die Existenz eines Innenwiderstands R_i der Spannungsquelle impliziert, dass die abgegebene Leistung N beschränkt ist. Für die abgegebene Leistung N an R_a gilt [1]

$$N(R_a) = I^2 R_a = \frac{U_0^2}{(R_a + R_i)^2} R_a. \quad (3)$$

Weiterhin ist die abgegebene Leistung maximal, wenn $R_a = R_i$ gilt [1]. Ist dies der Fall, spricht man von Leistungsanpassung.

Bei elektrischen Generatoren ist der Innenwiderstand R_i durch einen Rückkopplungsmechanismus festgelegt - eine Änderung vom Belastungsstrom hat Auswirkungen auf das elektrische Verhalten der Spannungsquelle [2]. Daher wird der Innenwiderstand R_i als differentielle Größe mit

$$R_i := \frac{dU_K}{dI} \quad (4)$$

definiert.

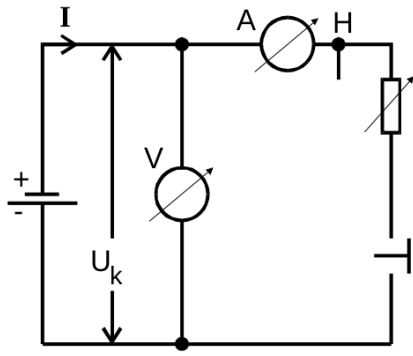
3 Durchführung

Zur Bestimmung der Leerlaufspannung U_0 einer Monozelle wird diese direkt an der Monozelle wie in Abbildung 1 dargestellt, mit einem Spannungsmesser abgegriffen. Wie aus Gleichung (1) ersichtlich ist, kann bei der Verwendung eines hochohmigen Voltmeter wegen des geringen Stroms I der Term IR_i vernachlässigt werden und es gilt $U_K \approx U_0$. Zur Berechnung der Leerlaufspannung U_0 wird hier allerdings der Innenwiderstand R_V des Voltmeters nicht vernachlässigt. Dieser kann am Messgerät abgelesen werden.

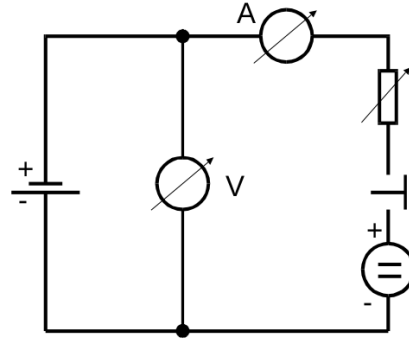
Im Folgenden soll nun die Klemmenspannung U_K der Monozelle in Abhängigkeit vom Belastungsstrom I gemessen werden. Dazu werden, wie in Abbildung 2a zu sehen, ein Amperemeter und ein regelbarer Widerstand R_a in Reihe geschaltet mit der Monozelle. Das Voltmeter dient nun zur Messung der Klemmenspannung U_K und bleibt daher weiterhin parallel geschaltet zur Monozelle. Der Belastungswiderstand R_a wird hierbei variiert im Bereich $0 - 50 \Omega$. Es sollen etwa 10 bis 15 Wertepaare der Spannung U_k in Abhängigkeit des Stroms I aufgenommen werden.

In der nächsten Messung soll eine zusätzliche Spannungsquelle in den Schaltkreis eingebracht werden. Diese soll hierbei 2 V größer sein als die Leerlaufspannung U_0 der Monozelle. Die neue Spannungsquelle wird, wie in Abbildung 2b dargestellt, in entgegengesetzter Stromrichtung in Reihe zum Widerstand R_a geschaltet. Der Strom wird nun also in entgegengesetzter Richtung fließen. Wie bereits in der Messung zuvor wird der Widerstand erneut im Bereich $0 - 50 \Omega$ variiert und die entsprechenden Werte der Spannung U_K in Abhängigkeit des Strom I notiert.

Nun wird die Monozelle aus der Schaltung ausgebaut und durch einen RC-Generator ersetzt. Wie bereits für die Monozelle soll mit der Schaltung in Abbildung 2a erneut die Klemmenspannung U_K in Abhängigkeit zu I bestimmt werden. Zunächst wird dazu der 1-volt-Rechteckausgang des RC-Generators verwendet, der Widerstand R_a soll hierbei variiert werden im Bereich $20 - 250 \Omega$. In einer weiteren Messung wird der 1-V-Sinusaussgang des RC-Generators verwendet, hierbei wird R_a von $0.1 - 5.0 k\Omega$ variiert.



(a) Messschaltung zur Bestimmung von R_i und U_0 [2]



(b) Messschaltung 2a erweitert um eine Gegenspannung [2]

4 Auswertung

Da eine lineare Abhängigkeit zwischen der Spannung U_k und der Stromstärke I nach Formel (1) besteht, wird im Folgenden eine lineare Regression sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler mit IPython 5.1.0 mittels Scipy 0.18.1 durchgeführt. Die Parameter der Ausgleichsgeraden

$$y = a \cdot x + b. \quad (5)$$

werden dabei bestimmt über

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

$$b = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Die direkt an der Monozelle abgegriffene Leerlaufspannung U_0 ergibt sich zu 1.5Ω . Der Fehler des Voltmeters beträgt nach Herstellerangaben im verwendeten Messbereich 1.5%. Damit ergibt sich $U_0 = (1.5 \pm 0.0225) \Omega$. Der Innenwiderstand des Voltmeters ist nach Herstellerangaben $R_V \approx 10 \cdot 10^6 \Omega$.

Der Innenwiderstand R_i und die Leerlaufspannung U_0 der Monozelle ergeben sich mit Linearer Regression nach (5) unter Verwendung von Formel (1). Dazu werden die in Tabelle 1 gelisteten U_k gegen I aufgetragen. Der zugehörige Plot ist in Abbildung 3 zu sehen.

$$-a = R_i = (15.5 \pm 0.3) \Omega$$

$$b = U_0 = (1501.4 \pm 13.9) \text{ mV}$$

Die Messung der Leerlaufspannung U_0 und des Innenwiderstandes R_i der Monozelle wird mit den Daten der Messreihe mit Gegenspannung wiederholt. Hierbei ist die Stromrichtung nun umgekehrt, sodass sich das Vorzeichen in Gleichung (1) umkehrt. Mit den Messdaten aus Tabelle 2 ergibt sich der zugehörige Plot in 4 mit (5). Damit erhält man:

Tabelle 1: Messdaten für die Klemmenspannung in Abhängigkeit des Strom bei der Monozelle

U_k/mV	I/mA
69.0	91.0
342.0	74.0
550.0	61.0
700.0	52.0
825.0	45.0
910.0	40.0
965.0	37.0
980.0	35.0
990.0	32.0
1026.0	30.0
1056.0	28.0
1083.0	26.0
1110.0	24.0
1116.0	23.0

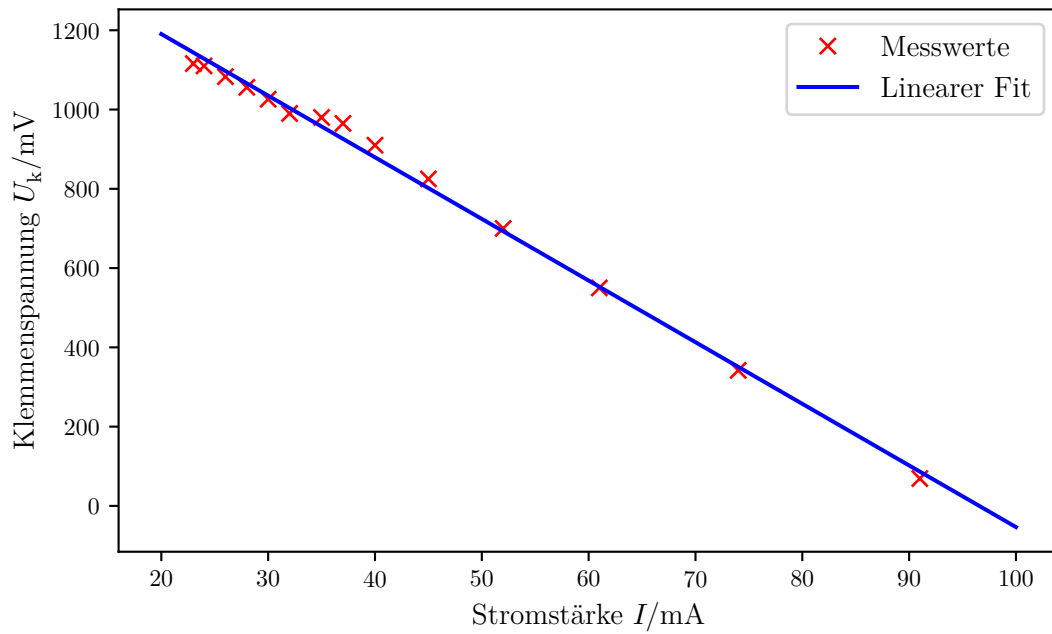


Abbildung 3: Linearer Fit zur Monozelle ohne Gegenspannung

$$a = R_i = (17.3 \pm 0.5) \Omega$$

$$b = U_0 = (1626.3 \pm 26.1) \text{ mV} .$$

Tabelle 2: Messdaten für die Klemmenspannung in Abhängigkeit des Strom bei der Monozelle mit Gegenspannung

U_k / mV	I / mA
3400.0	99.0
3100.0	92.0
2850.0	68.0
2700.0	58.0
2460.0	49.0
2340.0	42.0
2250.0	37.0
2160.0	33.0
2100.0	29.0
2070.0	26.0
2040.0	24.0
2010.0	21.0
1980.0	20.0
1970.0	19.0

Die Berechnung der Ausgleichsgeraden für die Rechteck-und Sinusspannungsquelle ergeben sich analog zu den Berechnungen bei der Monozelle.

Die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i der Rechteckspannung ergeben sich mit den Daten aus Tabelle 3 und der Ausgleichsgeraden in Plot 5 zu:

$$-a = R_i = (69.1 \pm 0.7) \Omega$$

$$b = U_0 = (477.8 \pm 1.4) \text{ mV}$$

Die Leerlaufspannung U_0 und der Innenwiderstand R_i der Sinusspannung ergeben sich mit den Daten aus Tabelle 4 und der Ausgleichsgeraden in Plot 6 zu:

$$-a = R_i = (657.0 \pm 5.0) \Omega$$

$$b = U_0 = (1567.4 \pm 3.6) \text{ mV}$$

Bisher wurde für die Berechnungen vereinfachend angenommen worden, dass der Term $-IR_i$ in Gleichung (1) vernachlässigt werden kann. Im realen Fall ist allerdings der Innenwiderstand R_V des Voltmeters nicht unendlich groß. Somit ergibt sich mit dem Ohmschen Gesetz ein systematischer Fehler bei der direkten Leerlaufspannungsmessung:

$$U_k = I \cdot R_a \leftrightarrow I = \frac{U_k}{R_a} ;$$

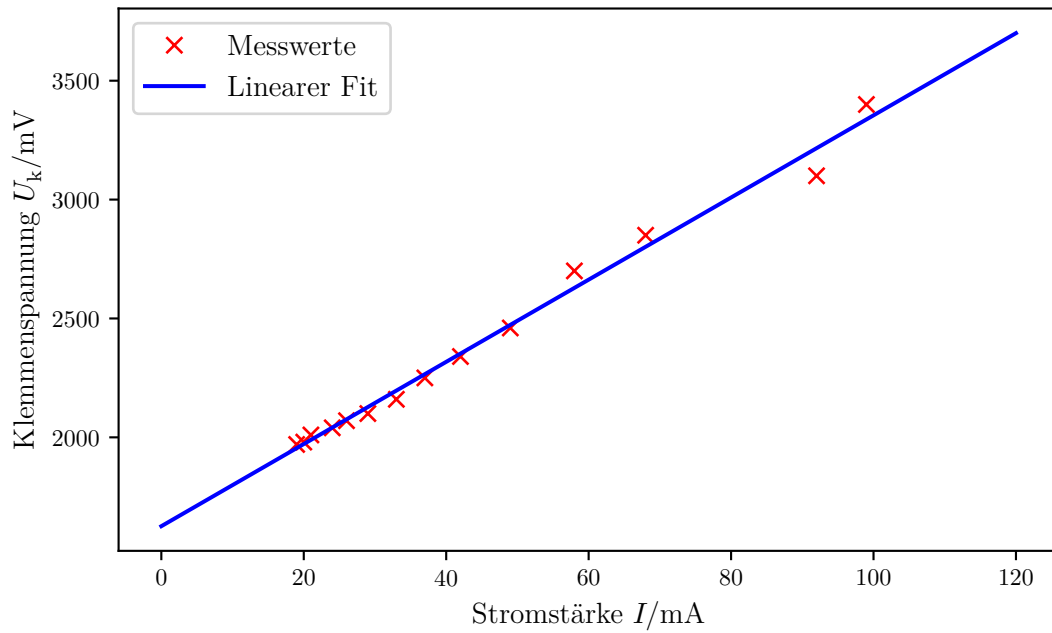


Abbildung 4: Linearer Fit zur Monozelle mit Gegenspannung

Tabelle 3: Messdaten für die Klemmenspannung in Abhängigkeit des Strom bei der Rechteckspannungsquelle

U_k/mV	I/mA
165.0	4.5
195.0	4.1
245.0	3.4
295.0	2.6
325.0	2.2
345.0	1.9
365.0	1.7
380.0	1.4
395.0	1.2
405.0	1.1
415.0	1.0
420.0	0.8
425.0	0.7
430.0	0.68
430.0	0.67

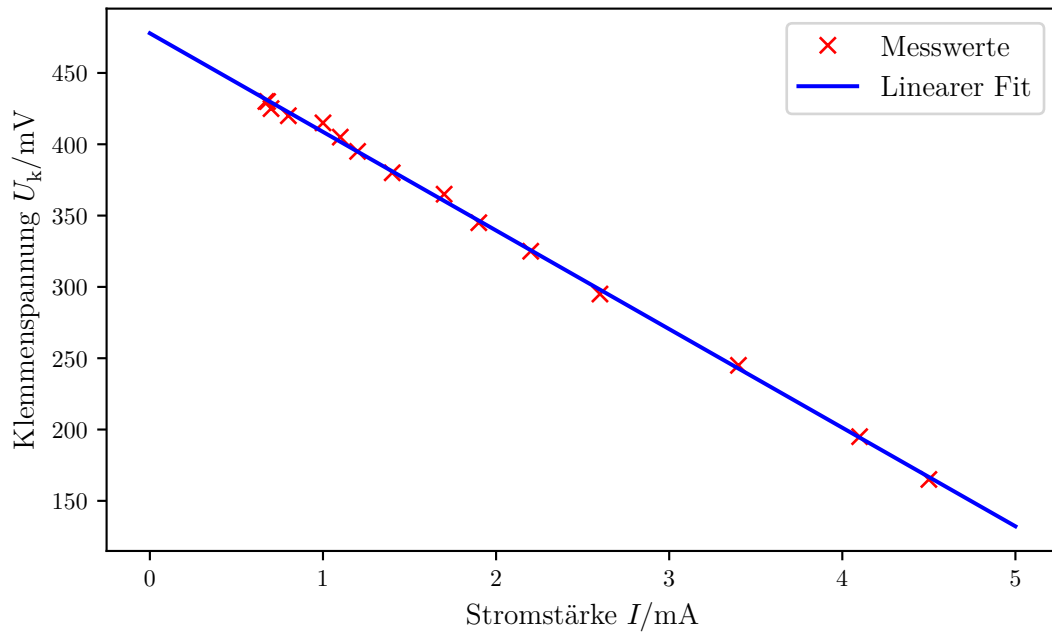


Abbildung 5: Linearer Fit zur Rechteckspannung

Tabelle 4: Messdaten für die Klemmenspannung in Abhängigkeit des Strom bei der Sinusspannungsquelle

U_k/mV	I/mA
510.0	1.62
675.0	1.35
960.0	0.93
1125.0	0.66
1230.0	0.51
1320.0	0.36
1395.0	0.27
1425.0	0.21
1455.0	0.18
1485.0	0.15
1491.0	0.12
1500.0	0.09

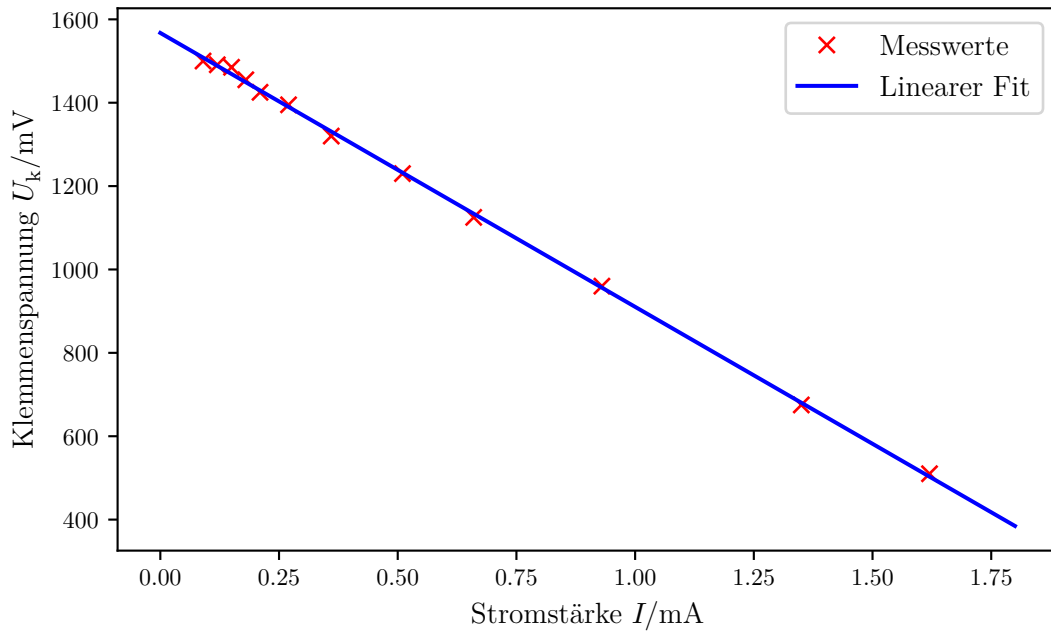


Abbildung 6: Linearer Fit zur Sinusspannung

da im vorliegenden Fall, wie in Abbildung 1 zu sehen, $R_a = R_V$ gilt, ergibt sich mit Gleichung (1)

$$U_0 = U_k + \frac{R_i}{R_V} \cdot U_k.$$

Damit ergibt sich der Fehler

$$\Delta U_0 = \frac{R_i}{R_V} \cdot U_k.$$

Mit $R_V = 10 \cdot 10^6 \Omega$ und $R_i = (15.5 \pm 0.3) \Omega$ ergibt sich für die Monozelle

$$\Delta U_0 = (1.55 \pm 0.03) \cdot 10^{-6} \Omega$$

Da der direkt gemessene Wert $U_0 = (1.5 \pm 0.0225) \Omega$ betrug, ergibt sich ein Fehler von $\frac{\Delta U_0}{U_0} = (1.033 \pm 0.025) \cdot 10^{-6} \%$. Dieser systematische Fehler ist sehr gering und wird daher im Weiteren vernachlässigt.

Des Weiteren würde man einen systematischen Fehler machen, wenn man in Abbildung 2a das Voltmeter hinter das Amperemeter - also an den Punkt H legt. Dies liegt daran, dass durch den Innenwiderstand des Amperemeters ein weiterer Spannungsabfall zu berücksichtigen ist. Daher würde man nicht die zuvor definierte Klemmenspannung U_K messen.

Die abgegebene Leistung N in Abhängigkeit vom Belastungswiderstand R_a ist in Abbildung 7 dargestellt. Hierzu wird die Theoriekurve mit der rechten Seite der Formel

(3) bestimmt. Die Werte N für die abgegebene Leistung, die sich aus den Messdaten U_K und I aus Tabelle 1 ergeben, werden allerdings mit der linken Seite der Formel (3) berechnet und gegen $R_a = \frac{U_K}{I}$ aufgetragen.

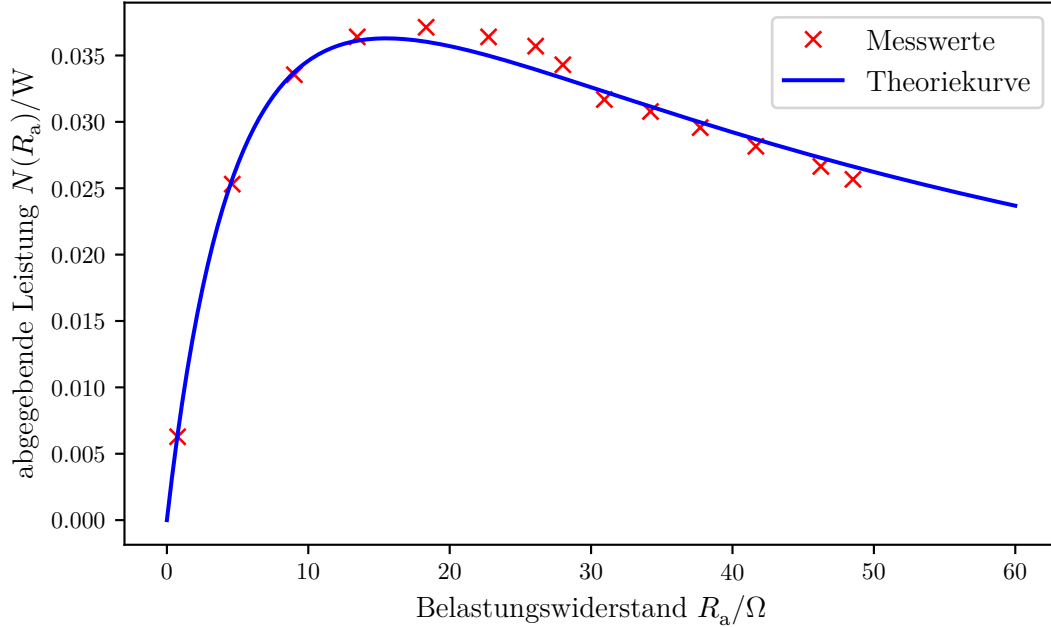


Abbildung 7: Abgegebene Leistung in Abhängigkeit vom Belastungswiderstand

Die Abweichungen der einzelnen Messpunkte zur Theoriekurve $N(R_a)$ lassen sich nicht auf einen systematischen Fehler zurückführen. Zuerst lässt sich anmerken, dass die größte Abweichung von der Theoriekurve bei $R_a \approx 26,1 \Omega$ mit ungefähr 5,3 % gering ausfällt. Daher herrscht eine geringe Diskrepanz zwischen den Messwerten und der Theoriekurve. Des Weiteren liegen die Messpunkte sowohl über- als auch unterhalb der Theoriekurve, was ein weiteres Indiz für ausschlaggebende zufällige Fehler ist. Der systematische Fehler beispielsweise bei der direkten Messung der Leerlaufspannung U_0 ist - wie vorher angenommen - vernachlässigbar in Relation zu den zufälligen Fehlern bei diesen Messungen.

Das Maximum der Leistung liegt bei $R_a \approx R_i = (15,5 \pm 0,3) \Omega$ - was auch nach der Theorie zu erwarten war.

5 Diskussion

Generell lässt sich aussagen, dass die einzelnen Messwerte in den jeweiligen Abbildungen eine geringe Diskrepanz gegenüber der Ausgleichsgeraden - beziehungsweise der Theoriekurve in Abbildung 7 - aufweisen. Allerdings fiel bereits während der Messung auf, dass das Voltmeter und das Amperemeter durch Stöße an den Tisch stark schwankten und

zum Teil daraufhin nicht den zuvor gemessenen Wert anzeigten.

Auffällig ist zudem, dass die Messgeräte bei einer Änderung der Skalierung einen anderen Wert als zuvor angezeigt haben. Daher wurde eine Änderung des Messbereichs weitmöglichst vermieden.

Dennoch sieht man eine Änderung des Messbereichs zum Teil auch in den gemessenen Werten. So wurde beispielsweise in der Messung der Klemmenspannung der Monozelle ohne Gegenspannung (vergleiche mit Abbildung 3) nach der sechsten Messung der Messbereich des Voltmeters geändert. Ebenso bei der Messung der Monozelle mit Gegenspannung (siehe auch Abbildung 4). Dort wurde für die letzten beiden Messpunkte ebenfalls der Messbereich des Voltmeters geändert. Diese Ungenauigkeit der Messung bei der Änderung des Messbereichs lässt sich erklären mit einem dadurch geänderten Innenwiderstand des Messgeräts. Eine weitere Ungenauigkeit ergab sich durch den verwendeten Widerstand bei der Messung der Monozelle. Der hier verwendete Widerstand ließ sich per Knopfdruck aktivieren und führte zum Teil zu Schwankungen am Voltmeter, da der Widerstand sich nicht immer einwandfrei einschalten ließ.

Die Abweichungen der Messpunkte gegenüber den Theoriekurven lassen sich weitestgehend - wie schon am Ende der Auswertung angesprochen - auf zufällige Fehler bei der Messung zurückführen. Die systematischen Fehler - wie beispielsweise bei der direkten Messung der Leerlaufspannung U_0 , bedingt durch unberücksichtigte Innenwiderstände der Messgeräte oder dem Vernachlässigen von Leitungswiderständen - fallen vernachlässigbar gering aus, sodass sie gegenüber den zufälligen Fehlern vernachlässigbar sind. Mögliche zufällige Fehler stellen Ablesefehler oder auch Schwankungen der Netzspannung dar.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Kaiserslautern: Springer-Verlag.
- [2] TU Dortmund. *Versuch 302: Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf> (besucht am 29.11.2016).