

311

## Hall-Effekt

Ann-Sophie Schubert  
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke  
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 24.05.2016

Abgabe: 05.06.2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Elektrische Leitfähigkeit von Metallen . . . . .	4
2.2	Hall-Effekt . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>7</b>
3.1	Messung des elektrischen Widerstands . . . . .	7
3.2	Hall-Effekt . . . . .	8
3.3	Hysteresekurve . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Fehlerrechnung . . . . .	8
4.1.1	Mittelwert und Standardabweichung . . . . .	8
4.1.2	Gaußfehler . . . . .	8
4.1.3	Lineare Regression . . . . .	9
4.2	Leitfähigkeitsparameter . . . . .	9
4.3	Hysteresekurve . . . . .	12
4.4	Messdaten . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

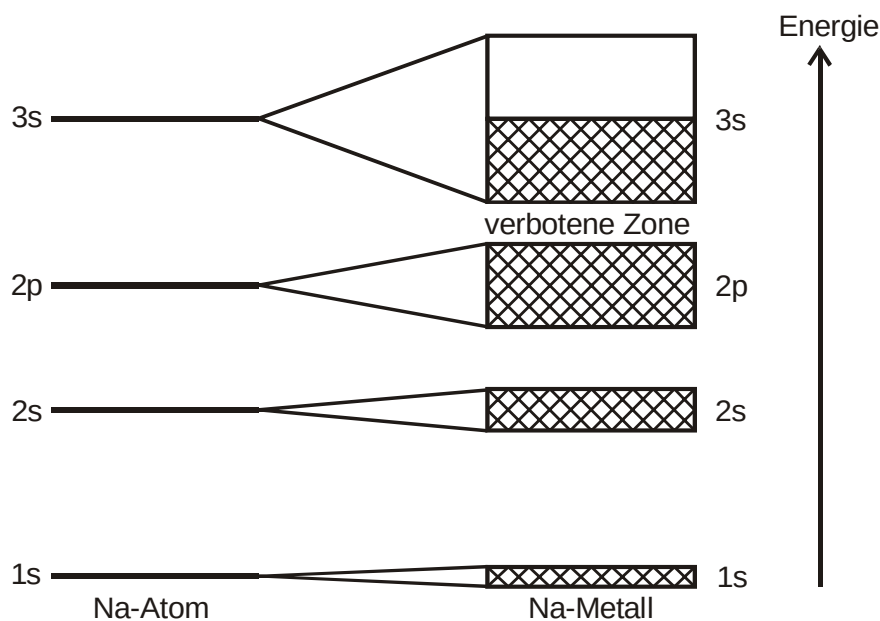
# 1 Ziel

Im Versuch 311 sollen die Hall-Spannung und der ohmsche Widerstand einer Metallprobe, sowie daraus abgeleitete mikroskopische Leitfähigkeitsparameter bestimmt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Elektrische Leitfähigkeit von Metallen

Die Energieniveaus eines Atoms teilen sich in Energiebänder auf (siehe Abbildung 1), da alle Elektronen dem Pauli-Prinzip unterliegen. Laut diesem Prinzip existieren nie zwei Elektronen eines Systems mit dem gleichen Quantenzustand. Es ist möglich, dass sich zwei der Energiebänder überschneiden. Ebenso ist es möglich, dass eine Lücke zwischen zwei Energiebändern existiert, welche als verbotene Zone bezeichnet wird. Kein Elektron des Körpers besitzt einen Energiewert, welcher innerhalb der verbotenen Zone liegt. Für die elektrische Leitfähigkeit eines Metalls ist das sogenannte Leitungsband mit seinen Leitungselektronen verantwortlich, welches nicht voll besetzt ist. Die Leitungselektronen verhalten sich näherungsweise wie die Atome eines idealen Gases. Dass einige Festkörper keine elektrische Leitfähigkeit besitzen, kann wie folgt erklärt werden: Es existieren keine ungepaarten Elektronen und die verbotene Zone ist so breit, dass die Elektronen des darunter liegenden Energiebandes nicht in der Lage sind, diese zu überwinden. Somit beinhaltet das obere Band keine Elektronen. Bewegen sich die Leitungselektronen



**Abbildung 1:** Die Energieniveaus von Atomen spalten sich bei periodischer Anordnung in Energiebänder auf. Hier am Beispiel von Natrium. [1]

innerhalb eines Metalls, treten Zusammenstöße mit Strukturdefekten oder Ionenrümpfen

auf. Für die mittlere Flugzeit  $\bar{\tau}$ , welche den Zeitraum zwischen zwei Zusammenstößen beschreibt, gilt:

$$\Delta \bar{v}_d = -\frac{e_0}{m_0} \vec{E} \bar{\tau} \quad (1)$$

mit  $e_0$  als Elementarladung,  $m_0$  als Masse eines Elektrons und  $E$  als äußeres elektrisches Feld. Als Folge jedes Zusammenstoßes erleidet das Elektron eine Streuung in eine beliebige Richtung. Für die mittlere Driftgeschwindigkeit  $v_d$ , welche in Richtung des elektrischen Felds zeigt, ergibt sich

$$\bar{v}_d = \frac{1}{2} \Delta \bar{v}. \quad (2)$$

Die Stromdichte lässt sich nach

$$j = -n \bar{v}_d e_0 \quad (3)$$

berechnen. Dabei ist  $n$  die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit. Für einen homogenen Leiter der Länge  $L$  mit Querschnittsfläche  $Q$  folgt für die Stromstärke  $I$

$$I = S U. \quad (4)$$

$S$  wird als elektrische Leitfähigkeit bezeichnet und berechnet sich nach

$$S = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{m_0} n \bar{\tau} \frac{Q}{L}. \quad (5)$$

Der elektrische Widerstand ist durch die reziproke Leitfähigkeit definiert. Damit kann sowohl die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$

$$\sigma = \frac{1}{2} e_0^2 m_0 n \bar{\tau} \quad (6)$$

als auch der spezifische Widerstand  $\rho$

$$\rho = 2 \frac{m_0}{e_0^2} \frac{1}{n \bar{\tau}} \quad (7)$$

berechnet werden. Für die mittlere freie Weglänge, welche die durchschnittliche Strecke, die ein Elektron zwischen zwei Zusammenstößen überwindet, beschreibt, gilt folgender Zusammenhang:

$$\bar{l} = \bar{\tau} \cdot |v| \quad (8)$$

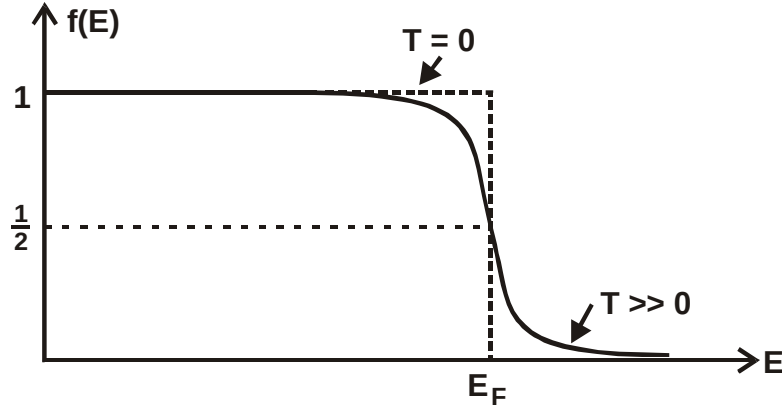
mit  $|v|$  als Totalgeschwindigkeit der Elektronen. Wegen des Pauli-Verbots kann die Energieverteilung nicht mit der klassischen Maxwell-Boltzmann-Statistik bestimmt werden. Sie ist durch die Fermi-Dirac-Verteilung gegeben.

$$f(E) dE = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dE \quad (9)$$

$k$  bezeichnet hierbei die Boltzmann-Konstante;  $E_F$  ist die Fermi-Energie, welche dem höchsten Energiewert eines Elektrons am absoluten Nullpunkt entspricht. Sie berechnet sich aus

$$E_F = \frac{h^2}{2m_0} \sqrt[3]{\left(\frac{3}{8\pi} n\right)^2} \quad (10)$$

mit  $h$  als Planksches Wirkungsquantum. In Abbildung 2 ist die Fermi-Dirac Verteilung für die Elektronen eines Festkörpers graphisch dargestellt. Für die mittlere freie Weglänge



**Abbildung 2:** Fermi-Dirac-Verteilung für die Elektronen eines Festkörpers.[1]

ergibt sich:

$$\bar{l} \approx \bar{\tau} \sqrt{\frac{2 E_F}{m_0}}. \quad (11)$$

Die Beweglichkeit  $\mu$  der Ladungsträger lässt sich aus dem Zusammenhang zwischen der mittleren Driftgeschwindigkeit und der äußeren Feldstärke bestimmen.

$$\bar{v}_d = \mu \vec{E}. \quad (12)$$

## 2.2 Hall-Effekt

Befindet sich, wie in Abbildung 3 dargestellt, eine stromdurchflossene homogene Leiterplatte mit der Dicke  $d$  und der Breite  $b$  in einem zur Oberfläche der Platte senkrechten homogenen Magnetfeld, tritt an den Punkten A und B eine Spannung auf, welche als Hallspannung  $U_H$  bezeichnet wird. Sie wird durch die Lorentzkraft, welche auf die sich in negative  $x$ -Richtung bewegenden Elektronen wirkt, verursacht. Da die Lorentzkraft in die negative  $y$ -Richtung wirkt, wird durch die Ablenkung der Elektronen in eben diese Richtung ein elektrisches Feld  $E_y$  aufgebaut, welches entgegen der Bewegung der Elektronen wirkt.

Für die Hallspannung gilt

$$U_H = -\frac{1}{n e_0} \frac{B \cdot I_q}{d}. \quad (13)$$

Dabei ist  $I_q$  der Querstrom und  $B$  das Magnetfeld.

Beim anomalen Hall-Effekt treten aufgrund der Tatsache, dass sich die Energiebänder überschneiden und somit Elektronen beliebig den Übergang von unteren in das obere Energieband vollziehen, wobei sie im unteren Band sogenannte Löcher hinterlassen. Sie weisen das Verhalten einer positiven Ladung auf. Das Vorzeichen der Hallspannung ist entsprechend umgekehrt.

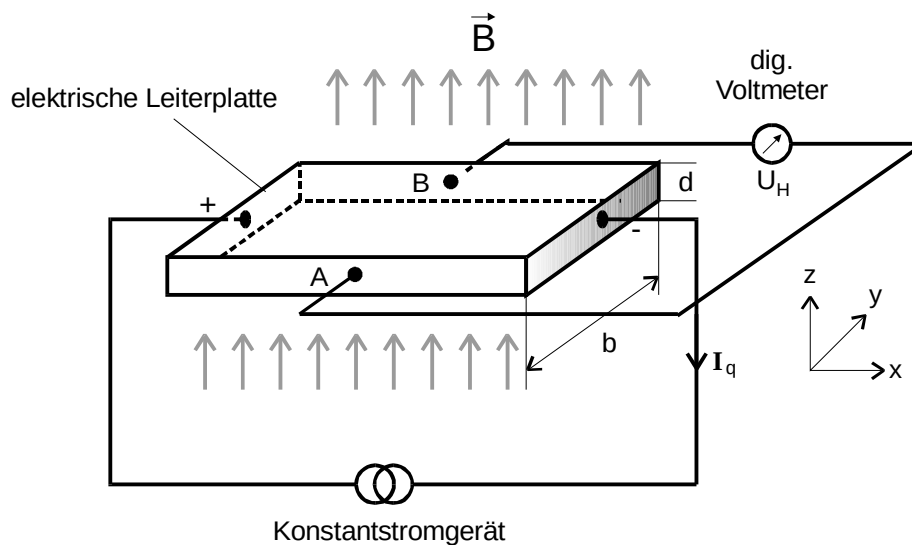


Abbildung 3: Versuchsanordnung zur Beobachtung des Hall-Effektes. [1]

### 3 Aufbau und Durchführung

Das Experiment wird mit Zink und Kupfer durchgeführt. Zunächst werden die Abmessungen der beiden Proben bestimmt.

#### 3.1 Messung des elektrischen Widerstands

Um den Widerstand der Proben zu messen, wird der Aufbau aus Abbildung 4 verwendet. Sowohl für Zink als auch für Kupfer werden zu jeweils 12 Stromstärken im Bereich von 0

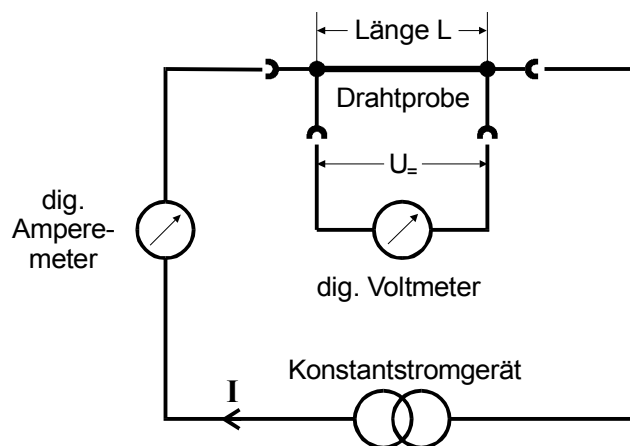


Abbildung 4: Versuchsaufbau zur Messung der Widerstände. [1]

bis 5 A und die entsprechenden Spannungen aufgenommen.

### 3.2 Hall-Effekt

Zur Erzeugung des Magnetfeldes dienen zwei Spulen, in deren Zwischenraum die Probe platziert wird. An den Punkten A und B der Probe kann die Hallspannung  $U_H$  abgegriffen werden. Für Zink wird bei der Messung die Stromstärke  $I$  im Bereich von 0-8,0 A stets um 0,5 A erhöht und die jeweilige Hallspannung gemessen. Die Messung für Kupfer erfolgt analog mit einer Stromstärke im Bereich von 0-10 A.

### 3.3 Hysteresekurve

Um die Hysteresekurve des vorliegenden Elektromagneten darstellen zu können, wird die Flussdichte  $B$  in Abhängigkeit vom Feldstrom gemessen. Dafür befindet sich eine Hall-Sonde im  $B$ -Feld der Spulen. Die Stromstärke wird zunächst in Abständen von jeweils 0,5A auf 5A erhöht und der mittels Hall-Sonde gemessene Wert für die magnetische Flussdichte notiert. Dies wird für eine sinkende Stromstärke wiederholt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Fehlerrechnung

#### 4.1.1 Mittelwert und Standardabweichung

Der Mittelwert mehrerer Messwerte wird berechnet durch

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i, \quad (14)$$

dabei ist die Standardabweichung

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (v_j - \langle v \rangle)^2}, \quad (15)$$

wobei  $v_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) die Messwerte sind. Der Standardfehler ist über

$$\sigma_i = \frac{s_i}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (v_j - \langle v_i \rangle)^2}{N(N-1)}}. \quad (16)$$

definiert.

#### 4.1.2 Gaußfehler

Bei einer fehlerbehafteten Funktion  $f$  mit  $k$  als fehlerbehafteter Größe und  $\sigma_k$  als Ungenauigkeit, gilt

$$\Delta x_k = \frac{df}{dk} \sigma_k. \quad (17)$$



Der relative Gaußfehler berechnet sich nach

$$\Delta x_{k, \text{rel}} = 1 \pm \frac{\Delta x_k}{|x|} \cdot 100\%. \quad (18)$$

Der absolute Gaußfehler ergibt sich aus

$$\Delta x_i = \sqrt{\left(\frac{df}{dk_1} \cdot \sigma_{k_1}\right)^2 + \left(\frac{df}{dk_2} \cdot \sigma_{k_2}\right)^2 + \dots} \quad (19)$$

#### 4.1.3 Lineare Regression

Bei einer linearen Regression über den Messdaten  $x_i, y_i$  wird für die Steigung

$$m = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (20)$$

und für den  $y$ -Achsenabschnitt

$$b = \langle y \rangle - m \cdot \langle x \rangle \quad (21)$$

angenommen. Für die Standardabweichung gelten

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - b - mx_i)^2} \quad (22)$$

und

$$s_b = s_m \cdot \sqrt{\frac{1}{N(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}}. \quad (23)$$

#### 4.2 Leitfähigkeitsparameter

Die gemessenen Hallspannungen werden über den Strom durch die Probe aufgetragen und es wird eine lineare Regression der Daten durchgeführt und damit die Steigung der Geraden  $m$  bestimmt. Das bedeutet, dass eine Ausgleichsrechnung an die Funktion

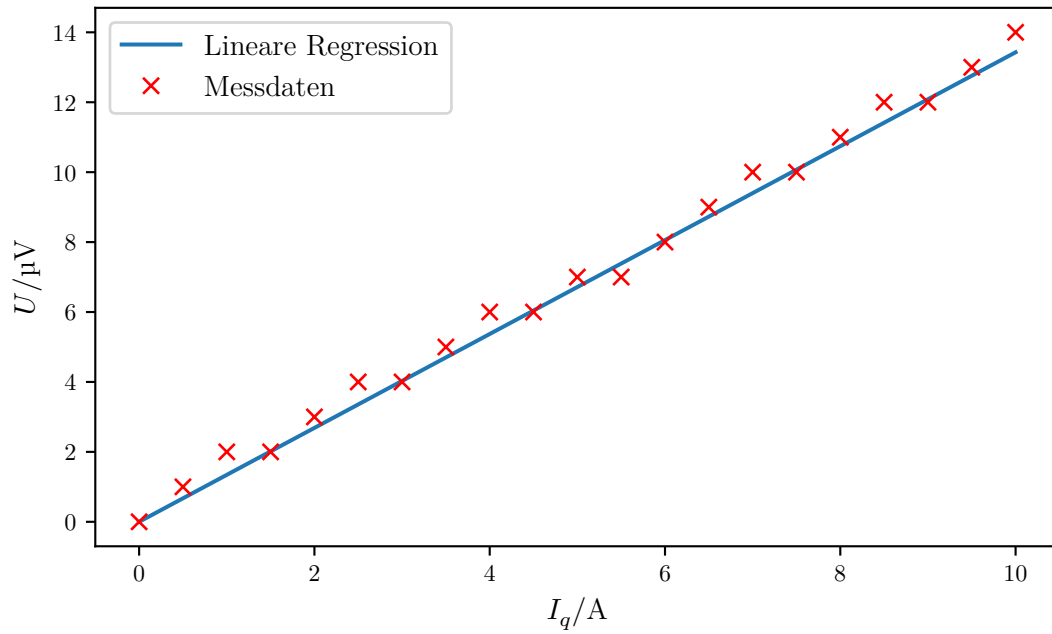
$$B(I) = mI + n \quad (24)$$

durchgeführt wird, siehe 4.1.3. Die zugehörigen Plots finden sich in Abb. 6 und Abb. 5. Da die Dicken der Proben unbekannt sind (oder bei Kupfer als unbekannt angenommen werden soll), werden sie über

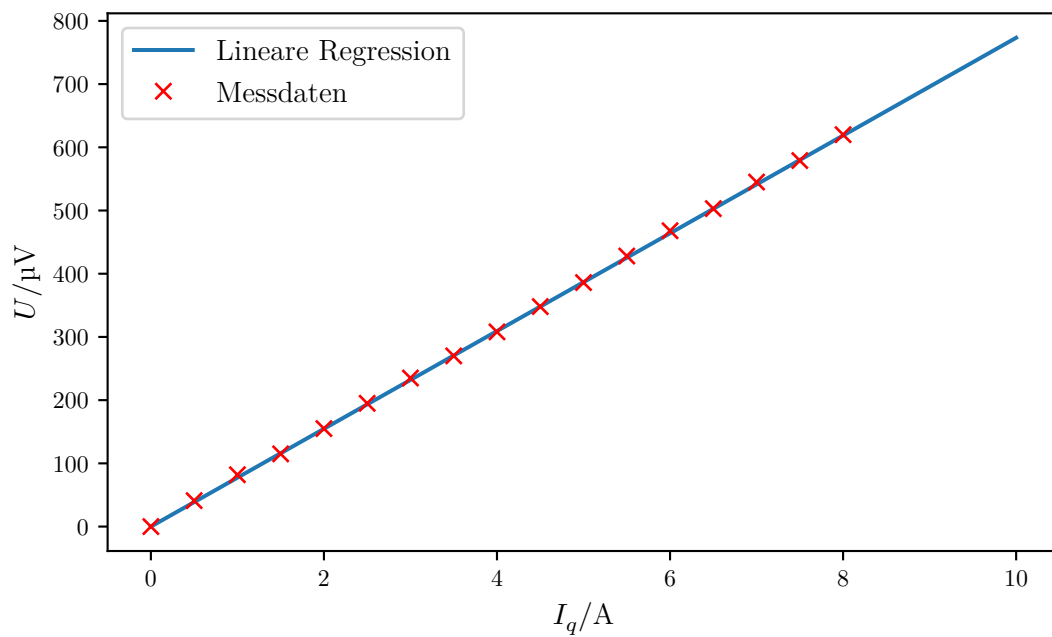
$$d = \frac{\rho L}{Rb} \quad (25)$$

mit dem spezifischen Widerstand  $\rho$  (aus [2]) bestimmt. Damit kann dann über

$$R_H = \frac{m}{bd} = \frac{1}{ne} \quad (26)$$



**Abbildung 5:** Hallspannung in Abhängigkeit von der Stromstärke für Kupfer.



**Abbildung 6:** Hallspannung in Abhängigkeit von der Stromstärke für Zink.

die Hall-Konstante bestimmt werden.

Aus  $R_H$  kann wiederum auf triviale Art und Weise die Ladungsträgerdichte bestimmt werden. Aus

$$z = nV_m/N_A \quad (27)$$

kann mit dem molaren Volumen, das jeweils [3] entnommen ist, die Zahl der Ladungsträger pro Atom bestimmt werden. Für weitere Berechnungen ist der Ohmsche Widerstand der Probe nötig, der über

$$R = \frac{U}{I} \quad (28)$$

aus der Widerstandsmessreihe (gemittelt) bestimmt wird. Für die mittlere Flugzeit folgt aus (5)

$$\bar{\tau} = \left( \frac{e^2 R Q n}{2m_e L} \right)^{-1}. \quad (29)$$

Die mittlere Driftgeschwindigkeit

$$\bar{v}_d = -\frac{j}{ne} \quad (30)$$

wird für

$$j = 1 \text{ A mm}^{-2} \quad (31)$$

berechnet. Die Totalgeschwindigkeit

$$v \approx \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} \quad (32)$$

und die mittlere freie Weglänge

$$\bar{l} \approx \bar{\tau} \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} \quad (33)$$

werden aus den zuvor berechneten Größen bestimmt. Alle Ergebnisse der angegebenen Berechnungen finden sich in den Tabellen 1, 2 und 3.

**Tabelle 1:** Ergebnisse der Auswertung, erster Teil.

$m/\Omega$	$R_H/(10^{-11} \text{ m}^3/\text{C})$	$d/\mu\text{m}$	$n/\text{nm}^{-3}$
Kupfer			
$1,34 \cdot 10^{-6}$	$0,278 \pm 0,004$	$2,19 \pm 0,03$	$2250 \pm 30$
Zink			
$7,73 \cdot 10^{-5}$	$90,3 \pm 2$	$12,4 \pm 0,2$	$6,91 \pm 0,1$

**Tabelle 2:** Ergebnisse der Auswertung, zweiter Teil.

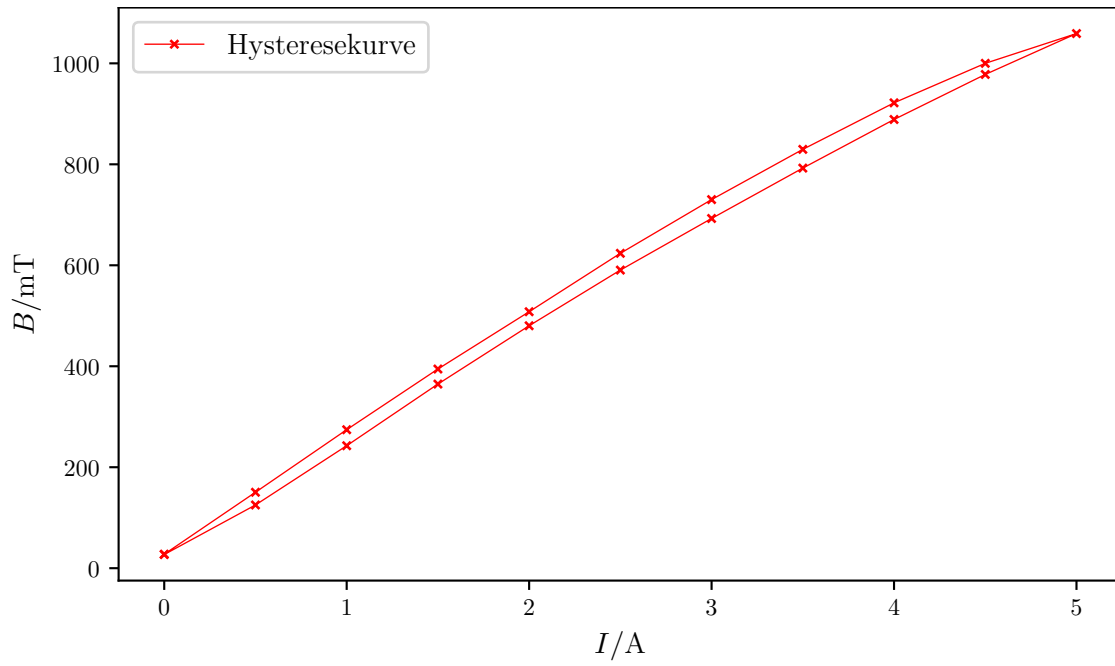
$\bar{v}_d/(\text{mm/s})$	$\mu/(\text{cm}^2/\text{V/s})$	$v/(\text{Mm/s})$	$\bar{l}/\text{nm}$
Kupfer			
$2,78 \pm 0,04$	$3,23 \pm 0,04$	$4,69 \pm 0,02$	$8,61 \pm 0,07$
Zink			
$903 \pm 20$	$301 \pm 5$	$0,682 \pm 0,004$	$117 \pm 1$

**Tabelle 3:** Ergebnisse der Auswertung, dritter Teil.

$z$	$R/\text{m}\Omega$	$\bar{\tau}/\text{fs}$
Kupfer		
$26,5 \pm 0,3$	$8,80 \pm 0,1$	$1,83 \pm 0,02$
Zink		
$0,105 \pm 0,002$	$8,21 \pm 0,1$	$171 \pm 3$

### 4.3 Hysteresekurve

Die magnetische Flussdichte des Elektromagneten in Abhängigkeit vom Spulenstrom findet sich in Abb. 7.



**Abbildung 7:** Hysteresekurve des verwendeten Elektromagneten. Zur Verdeutlichung des Kurvenverlaufs wurden die Messwerte mit einem Polygonzug interpoliert.

#### 4.4 Messdaten

**Tabelle 4:** Messdaten, Widerstandsmessreihe.

$I / \text{A}$	$U_{\text{Zn}} / \text{mV}$	$U_{\text{Cu}} / \text{mV}$	$I / \text{A}$	$U_{\text{Zn}} / \text{mV}$	$U_{\text{Cu}} / \text{mV}$
0,0	0,0	0,0	3,5	31,1	28,6
0,5	4,5	4,3	4,0	35,5	32,5
1,0	8,9	8,4	4,5	39,1	36,4
1,5	13,3	12,3	5,0	43,2	40,7
2,0	17,5	16,4	4,21	36,6	34,1
2,5	22,2	20,5	3,89	33,6	31,5
3,0	26,4	24,5			

**Tabelle 5:** Messdaten, Hallspannungsmessreihe.

$I/A$	$U_{Zn}/\mu V$	$U_{Cu}/\mu V$	$I/A$	$U_{Zn}/\mu V$	$U_{Cu}/\mu V$
0,0	0	0	5,5	428	7
0,5	41	1	6,0	468	8
1,0	82	2	6,5	503	9
1,5	115	2	7,0	545	10
2,0	155	3	7,5	579	10
2,5	195	4	8,0	620	11
3,0	235	4	8,5		12
3,5	270	5	9,0		12
4,0	308	6	9,5		13
4,5	348	6	10,0		14
5,0	386	7			

**Tabelle 6:** Messdaten, Hysteresekurve.

$I/A$	$B/mT$	$I/A$	$B/mT$	$I/A$	$B/mT$
0,0	27,05	3,5	792,5	3,0	730,1
0,5	125,2	4,0	888,8	2,5	623,7
1,0	242,6	4,5	978,0	2,0	508,0
1,5	364,7	5,0	1059	1,5	394,5
2,0	480,2	4,5	1000	1,0	274,3
2,5	590,5	4,0	921,8	0,5	150,4
3,0	692,7	3,5	829,6	0,0	27,67

## 5 Diskussion

Die Messdaten lassen sich gut durch eine lineare Regression fitten. Bei Kupfer ist die Linearität schlechter als bei Zink, da der Messbereich deutlich geringer war und die Grenze der Messgenauigkeit des Geräts erreicht wurde. Die Leitfähigkeitsparameter liegen in der korrekten Größenordnung, allerdings liegen keine Literaturdaten zum Vergleich vor. Die Durchführung des Versuchs war problematisch, da viele Proben nicht ordnungsgemäßes Verhalten zeigten. Die Hysteresekurve des Elektromagneten zeigt ein plausibles Verhalten, da die Magnetfeldstärke bei steigendem Strom höher war als bei sinkendem Strom. Dies ist durch den Ferromagnetismus des Elektromagneten zu begründen.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 311: Hall-Effekt*.
- [2] URL: <http://www.elektrotechnik-fachwissen.de/tabellen/spezifische-widerstaende-leitwerte.php>.
- [3] CHEMIE.DE. URL: <http://www.chemie.de>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [6] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.