

V101

Trägheitsmoment

Samuel Haefs

samuel.haefs@tu-dortmund.de

Max Koch

max.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2019

Abgabe: 07.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Zielsetzung | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 3 Durchführung | 4 |
| 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße | 4 |
| 3.2 Trägheitsmomente von Körpern | 4 |
| 4 Auswertung | 6 |
| 4.1 Winkelrichtgröße und Eigenträgheitsmoment | 6 |
| 4.2 Trägheitsmoment Zylinder (parallel) | 10 |
| 4.3 Trägheitsmoment Zylinder (senkrecht) | 10 |
| 4.4 Trägheitsmomente der Modellpuppe | 11 |
| 4.4.1 Position 1 | 11 |
| 4.4.2 Position 2 | 12 |
| 5 Diskussion | 13 |
| 6 Anhang | 14 |
| Literatur | 17 |

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches war das Trägheitsmoment verschiedener Körper zu bestimmen. Dies soll durch die Analyse der Periodendauer geschehen.

2 Theorie

Jeder Körper hat ein Trägheitsmoment I . Dieses kann durch

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

beschrieben werden. Dabei steht m_i für ein Massenelement, welches einen Abstand r_i von der Drehachse hat.

Für infinitesimal kleine Massenelemente kann die Summe umgeschrieben werden in ein Integral. Damit ergibt sich

$$I = \int r^2 dm.$$

Wenn nun der Schwerpunkt des Körpers nicht auf der Drehachse liegt muss das Trägheitsmoment mit dem Satz von Steiner

$$I = I_S + ma^2 \quad (1)$$

berechnet werden. Hier steht a für den Abstand des Schwerpunkts zur Drehachse und I_S für das Trägheitsmoment im Schwerpunkt.

Bei Drehbewegungen, die durch eine Feder herbeigeführt werden, wirkt ein Drehmoment M . Dieses setzt sich aus der Kraft \vec{F} und den Abstand \vec{r} zur Drehachse zusammen und sieht wie folgt aus

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}.$$

In diesem Versuch führt dieses Drehmoment zu einer Schwingung mit der Schwingungsdauer T welche durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (2)$$

beschrieben wird, diese gilt allerdings nur bei kleinen Auslenkungen. Hierbei entspricht D der Winkelrichtgröße der Feder. Diese kann durch

$$D = \frac{M}{\phi} \quad (3)$$

bestimmt werden, wobei ϕ die Auslenkung der Feder ist.

Nach Umformen von 2 ergibt sich

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2}. \quad (4)$$

Im Versuch werden die Trägheitsmomente einiger einfacher geometrischer Körper bestimmt. Das eines stehenden Zylinders mit Radius R entspricht

$$I_{\text{Zyl},s} = \frac{mR^2}{2}. \quad (5)$$

Das eines liegenden Zylinders mit Länge h entspricht

$$I_{\text{Zyl},l} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right). \quad (6)$$

Das einer Kugel mit Radius R entspricht

$$I_K = \frac{2}{5}mR^2. \quad (7)$$

Das eines langen dünnen Stabes mit Länge l entspricht

$$I_{\text{St}} = \frac{ml^2}{12}. \quad (8)$$

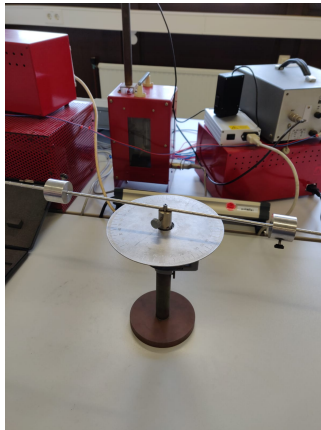
3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Zum weiter Vorgehen muss zunächst die Federstärke D der Feder bestimmt werden. Dafür wird an der Drehachse, an der die Feder befestigt ist, ein Stab senkrecht zur Drehachse eingespannt. Dieser wird nun jeweils um 30 Grad gedreht, daraufhin wird mit einem Newtonmeter die Kraft gemessen, welche die Feder in einem gewissen Abstand ausübt. Nach zehn Messungen von 30 Grad bis 300 Grad, werden an dem Stab zwei Gewichte angebracht. Die Masse und Ausdehnung der Gewichte wurde zuvor durch Messungen bestimmt. Die Massen werden als erstes ganz außen auf dem Stab in einem Abstand von 28,5 cm angebracht. Der Aufbau ist in Abbildung 1 zu sehen. Nun wird der Stab gedreht und die Feder damit ausgelenkt. Daraufhin wird der Stab losgelassen und die Schwingungsdauer T einer Periode gemessen und notiert. Dieser Prozess wird mit verschiedenen Abständen zur Drehachse wiederholt. Es werden zehn Werte aufgenommen.

3.2 Trägheitsmomente von Körpern

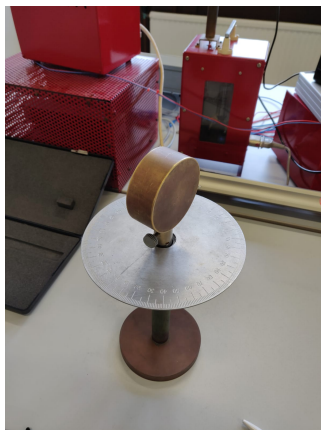
Abbildung 1: Versuchsaufbau mit zwei Gewichten an einem langem Stab.



Nun werden verschiedene Körper auf der Drehachse angebracht. Zuerst wird ein großer Zylinder auf der Drehachse eingespannt. Die Ausdehnung und Masse des Zylinders wurden vorher bestimmt. Dieser wird um einen Winkel ausgelenkt und wieder losgelassen. Nach dem Loslassen wird die Schwingungsdauer gemessen und notiert. Um einen möglichst genauen Mittelwert zu bekommen wird der Prozess fünf mal mit gleichen Auslenkungen durchgeführt.

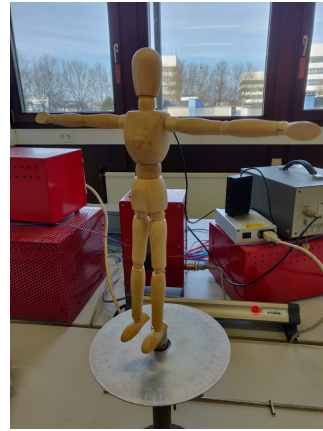
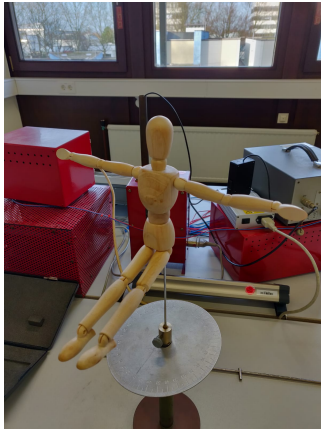
Daraufhin wird der große Zylinder mit einem anderen Körper getauscht. Der nächste Körper ist ein kleiner liegender Zylinder. Der Aufbau ist in der Abbildung 2 zu sehen. Auch die Ausdehnung und Masse dieses Körpers wurden vorher bestimmt. Dieser wird nun genau wie der große Zylinder auf der Drehachse eingespannt und um einen bestimmten Winkel ausgelenkt. Auch hier wird die Schwingungsdauer fünf mal gemessen um den Mittelwert möglichst genau zu bestimmen.

Abbildung 2: Versuchsaufbau mit einem stehenden Zylinder



Nun wird anstelle des Zylinders eine Puppe auf der Drehachse montiert, diese ist in Abbildung 3a zu sehen. Auch diese wird bis zu einem gewissen Winkel ausgelenkt und

losgelassen. Daraufhin wird wieder die Schwingungsdauer notiert. Auch dieser Prozess wird fünf mal wiederholt. Daraufhin wird die Puppe in eine andere Position gebracht, diese ist in Abbildung 3b zu sehen. Hier wird wie bei der anderen Puppenposition vorgegangen.



(a) Versuchsaufbau mit einer sitzenden Puppe. (b) Versuchsaufbau mit einer stehenden Puppe.

Abbildung 3: Die zwei Position von den Puppen.

4 Auswertung

4.1 Winkelrichtgröße und Eigenträgheitsmoment

Die Winkelrichtgröße D wird nach (3) berechnet. Der Abstand zur Drehachse beträgt hier $r = 14,2 \text{ cm}$. In Tab. 1 ist die gemessene Kraft F für den Auslenkwinkel φ und die resultierende Winkelrichtgröße D aufgeführt.

| $\varphi / ^\circ$ | F / N | $D / \text{N m}$ |
|--------------------|----------------|------------------|
| 30 | 0,10 | 0,054 |
| 60 | 0,18 | 0,046 |
| 90 | 0,29 | 0,045 |
| 120 | 0,38 | 0,039 |
| 150 | 0,48 | 0,036 |
| 180 | 0,57 | 0,030 |
| 210 | 0,67 | 0,027 |
| 240 | 0,75 | 0,021 |
| 270 | 0,84 | 0,015 |
| 300 | 0,93 | 0,010 |

Tabelle 1: Die gemessene Kraft F bei einem Auslenkwinkel φ und die daraus resultierende Winkelrichtgröße D .

Um den Mittelwert zu ermitteln wird die Formel

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9)$$

verwendet. Hier wird die Python-Bibliothek Numpy [4] verwendet. Wobei x_i der i -te Wert bei n Werten ist. Um die Standardabweichung zu berechnen wird

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (10)$$

verwendet. Hier wird die Python-Bibliothek Numpy [4] verwendet. Werden fehlerbehaftete Größen in Formeln verwendet, so wird im Folgenden die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots \quad (11)$$

verwendet. Die Δ -Werte beschreiben die Fehlergrenzen. Die Fehler werden im Folgenden mithilfe der Python-Bibliothek uncertainties [3] berechnet.

Die Winkelrichtgröße beträgt im Mittel

$$D = (0,032 \pm 0,014) \text{ N m.}$$

Um das Eigenträgheitsmoment zu bestimmen, werden für verschiedene Abstände a die Schwingungsdauer T gemessen (siehe Tab. 2). Die Masse der kleinen Gewichte beträgt jeweils $m_G = 223,27 \text{ kg}$. Sie werden um $\varphi = 20^\circ$ ausgelenkt. Sie haben die Form eines Zylinders mit Radius $r_G = 1,75 \text{ cm}$ und Höhe $h_G = 3 \text{ cm}$.

| a/cm | T/Hz |
|---------------|---------------|
| 28,5 | 7,93 |
| 26,5 | 7,64 |
| 24,5 | 6,87 |
| 21,5 | 5,92 |
| 19,5 | 5,50 |
| 16,5 | 5,03 |
| 14,5 | 4,48 |
| 11,5 | 3,87 |
| 8,5 | 3,27 |
| 5,5 | 2,61 |

Tabelle 2: Die Schwingungsdauer T bei variablem Abstand r zur Drehachse.

Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich aus

$$I_{ges} = I_D + 2I_G.$$

Mithilfe des Satz von Steiner (siehe Gleichung 1) folgt

$$I_{ges} = I_D + 2m_G \left(\frac{r_G^2}{4} + \frac{h_G^2}{12} \right) + 2m_G a^2.$$

Eingesetzt in die Formel für die Schwingungsdauer T (siehe Gleichung 2), ergibt sich

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m_G}{D} \cdot a^2 + \frac{4\pi^2 I_D}{D} + \frac{8\pi^2 m_G \left(\frac{r_G^2}{4} + \frac{h_G^2}{12} \right)}{D} \quad (12)$$

Nun wird eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Die Gleichung 12 muss die Form

$$y = c \cdot x + b$$

haben. Daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$c = \frac{8\pi^2 m_G}{D}$$

und

$$b = \frac{4\pi^2 I_D}{D} + \frac{8\pi^2 m_G \left(\frac{r_G^2}{4} + \frac{h_G^2}{12} \right)}{D}. \quad (13)$$

Hier gilt zudem $y = T^2$ und $x = a^2$. Mithilfe der Python Funktion `curvefit` [2], folgt

$$c = (719 \pm 21) \frac{1}{\text{s}^2 \text{m}^2}$$

und

$$b = (4,7 \pm 1,0) \text{ Hz}^2.$$

Die lineare Ausgleichsrechnung ist in Abb. 4 dargestellt. Das gesuchte Eigenträgheitsmoment der Drillachse lässt sich nun mithilfe der Definition von b (Gleichung 13) bestimmen:

$$I_D = (0,0038 \pm 0,0190) \text{ m}^2 \text{kg}$$

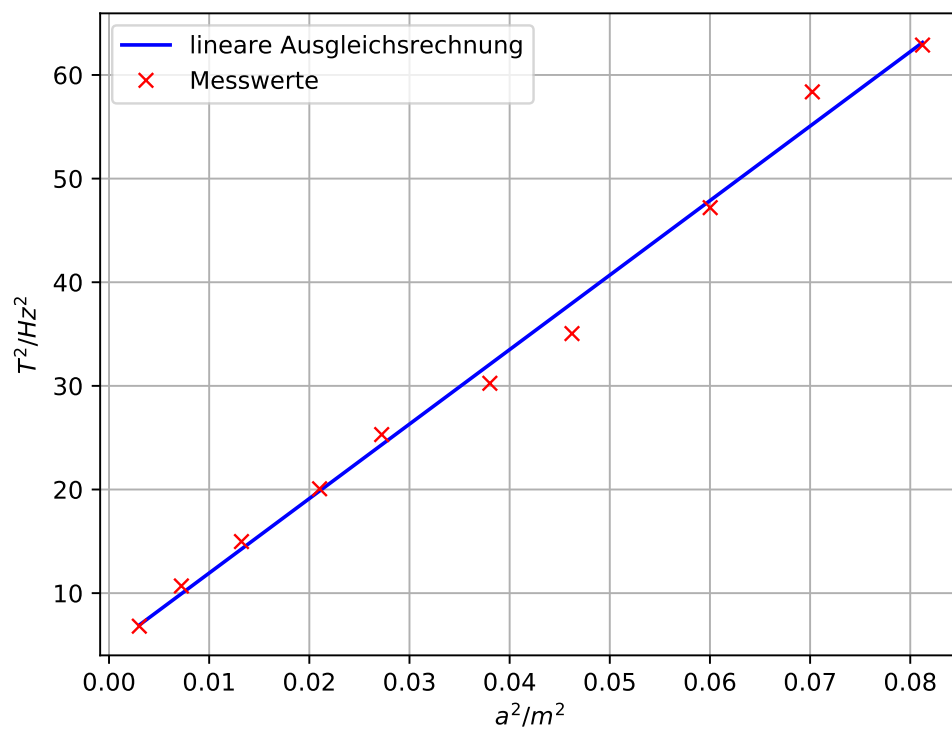


Abbildung 4: Lineare Ausgleichsrechnung um Eigenträgheitsmoment I_d zu ermitteln.
[1]

4.2 Trägheitsmoment Zylinder (parallel)

Der Zylinder ist symmetrisch um die Drehachse fixiert. Die Drehachse verläuft also durch Boden und Deckel des Zylinders. Der Radius beträgt $r = 4$ cm, die Höhe $h = 14$ cm und die Masse $m = 1,0059$ kg. Die gemessenen Zeiten (Tab. 3) ergeben im Mittel

$$T = (1,02 \pm 0,06) \text{ s.}$$

| Messung | T/s |
|---------|--------------|
| 1 | 1,04 |
| 2 | 0,93 |
| 3 | 1,08 |
| 4 | 1,03 |
| 5 | 1,01 |

Tabelle 3: Mehrfache Messung der Schwingungsdauer T für den Zylinder parallel zur Drehachse.

Nach Gleichung 4 und Abzug des Eigenträgheitsmoment der Drillachse ergibt sich der Wert

$$I_{\text{exp}} = (-0,0030 \pm 0,0019) \text{ m}^2\text{kg}.$$

Der theoretisch berechnete Wert

$$I_{\text{th}} = 0,0008 \text{ m}^2\text{kg}$$

folgt aus Gleichung 5.

4.3 Trägheitsmoment Zylinder (senkrecht)

Die Symmetrieachse des Zylinders ist senkrecht zur Drehachse. Der Zylinder hat den Radius $r = 3,75$ cm, die Höhe $h = 3$ cm und die Masse $m = 1,180$ kg.

| Messung | T/s |
|---------|--------------|
| 1 | 0,89 |
| 2 | 0,86 |
| 3 | 0,92 |
| 4 | 0,87 |
| 5 | 0,83 |

Tabelle 4: Mehrfache Messung der Schwingungsdauer T für den Zylinder senkrecht zur Drehachse.

Im Mittel beträgt die Schwingungsdauer (Tab. 4)

$$T = (0,874 \pm 0,034) \text{ s.}$$

Nach Gleichung 4 und Abzug des Eigenträgheitsmoment der Drillachse ergibt sich das Trägheitsmoment

$$I_{\text{exp}} = (-0,0032 \pm 0,0019) \text{ m}^2\text{kg}. \quad (14)$$

Der Theoriewert

$$I_{\text{th}} = 0,0005 \text{ m}^2\text{kg} \quad (15)$$

berechnet sich nach Gleichung 6.

4.4 Trägheitsmomente der Modellpuppe

Die Modellpuppe hat eine Masse von $m = 0,1620 \text{ kg}$ und die Maße:

| Körperteil | Radius r | Höhe h |
|------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| Arm | $r_{\text{Arm}} = 0,6 \text{ cm}$ | $h_{\text{Arm}} = 13,7 \text{ cm}$ |
| Bein | $r_{\text{Bein}} = 0,65 \text{ cm}$ | $h_{\text{Bein}} = 17,2 \text{ cm}$ |
| Rumpf | $r_{\text{Rumpf}} = 1,95 \text{ cm}$ | $h_{\text{Rumpf}} = 10 \text{ cm}$ |
| Kopf | $r_{\text{Kopf}} = 1,5 \text{ cm}$ | |

Arm, Bein und Rumpf werden als Zylinder angenommen. Der Kopf hingegen hat die Form einer Kugel. Die Puppe wird um $\varphi = 30^\circ$ ausgelenkt. Die Masse der einzelnen Teile der Puppe ergeben sich aus dem Volumen

$$V_{\text{Zyl}} = \pi r^2 h \quad \text{und} \quad V_{\text{Kugel}} = \frac{3}{4} \pi r^3$$

und der Dichte von Kiefernholz $\rho = 520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ [5]. Daraus ergeben sich die folgenden Massen:

$$\begin{aligned} m_{\text{Kopf}} &= 0,0061 \text{ kg} \\ m_{\text{Rumpf}} &= 0,0514 \text{ kg} \\ m_{\text{Arm}} &= 0,0067 \text{ kg} \\ m_{\text{Bein}} &= 0,0098 \text{ kg} \end{aligned}$$

4.4.1 Position 1

Die Modellpuppe befindet sich in der sitzenden Position wie in Abb. 3a zu sehen. Der theoretische Wert für das Trägheitsmoment der Modellpuppe setzt sich aus den einzelnen Trägheitsmomenten der Puppe zusammen (siehe Gleichung 5, Gleichung 6, Gleichung 7). Sind die Körperteile um einen bestimmten Abstand r verschoben, so wird der Satz von Steiner verwendet (siehe Gleichung 1). Die einzelnen Trägheitsmomente

$$I_{\text{Kopf}} = \frac{2}{5} \cdot m_{\text{Kopf}} \cdot r_{\text{Kopf}}^2$$

$$I_{\text{Rumpf}} = m_{\text{Rumpf}} \cdot \frac{r_{\text{Rumpf}}^2}{2}$$

$$I_{\text{Arme}} = 2 \cdot m_{\text{Arm}} \left(\frac{r_{\text{Arm}}^2}{4} + \frac{h_{\text{Arm}}^2}{12} \right) + 2 \cdot m_{\text{Arm}} \left(r_{\text{Rumpf}} + \frac{h_{\text{Arm}}}{2} \right)^2$$

$$I_{\text{Beine}} = 2 \cdot m_{\text{Bein}} \left(\frac{r_{\text{Bein}}^2}{4} + \frac{h_{\text{Bein}}^2}{12} \right) + 2 \cdot m_{\text{Bein}} \left(\frac{h_{\text{Bein}}}{2} \right)^2$$

ergeben in Summe

$$I_{\text{th}} = I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Rumpf}} + I_{\text{Beine}} + I_{\text{Arme}}$$

ein Gesamtträgheitsmoment von

$$I_{\text{th}} = 0,000\,328\,\text{m}^2\text{kg}.$$

Der experimentelle Wert folgt aus der Schwingdauer. Die gemessenen Zeiten T (siehe

| Messung | T/s |
|---------|--------------|
| 1 | 0,89 |
| 2 | 0,86 |
| 3 | 0,92 |
| 4 | 0,87 |
| 5 | 0,83 |

Tabelle 5: Mehrfache Messung der Schwingungsdauer T für die Modellpuppe in Position 1.

Tab. 5) ergeben im Mittel

$$T = (0,874 \pm 0,034)\,\text{s}.$$

Das Gesamtträgheitsmoment wird nach Gleichung 4 bestimmt und im Anschluss das Trägheitsmoment der Drillachse abgezogen:

$$I_{\text{exp}} = (-0,0032 \pm 0,0019)\,\text{m}^2\text{kg}$$

4.4.2 Position 2

Die Modellpuppe befindet sich nun in der T-Position (siehe Abb. 3b). Die einzelnen Trägheitsmomente sind bis auf die der Beine wie in Position 1. Das Trägheitsmoment der Beine wird nun durch

$$I_{\text{Beine}} = 2 \cdot \frac{m_{\text{Bein}} r_{\text{Bein}}^2}{2} + 2 \cdot m_{\text{Bein}} r_{\text{Bein}}^2$$

beschrieben. In Summe ergibt sich das theoretische Gesamtträgheitsmoment der Modellpuppe von

$$I_{\text{th}} = 0,000\,136\,\text{m}^2\text{kg}.$$

Der experimentelle Wert folgt aus der gemittelten Schwingungsdauer

$$T = (0,65 \pm 0,04) \text{ s.}$$

Diese ergibt sich aus den gemessenen Schwingungsdauern (siehe Tab. 6). Das experimentelle Trägheitsmoment hat nach Gleichung 4 den Wert

$$I_{\text{exp}} = (-0,0035 \pm 0,0019) \text{ m}^2\text{kg}$$

unter Berücksichtigung des Eigenträgheitsmoment der Drillachse.

| Messung | T/s |
|---------|--------------|
| 1 | 0,69 |
| 2 | 0,66 |
| 3 | 0,69 |
| 4 | 0,59 |
| 5 | 0,64 |

Tabelle 6: Mehrfache Messung der Schwingungsdauer T für die Modellpuppe in Position 2.

5 Diskussion

Die Winkelrichtgröße hat einen relativen Fehler von 43,75 %. Bei weiteren Berechnungen werden die neuen Fehler durch die Fehlerfortpflanzung beschrieben. Die Ausgleichsgerade zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoment entspricht der Theorie und weicht wenig von den Messwerten ab.

Ein Teil der Abweichungen ist damit zu Begründen, dass die Messung der Periodendauer schwierig war, da die Schwingungen in den meisten Fällen sehr kurz war. Das Trägheitsmoment der Puppe mit ausgestreckten Beinen (Pos.1) ist wie zu erwarten größer als das der Puppe mit angelegten (Pos. 2).

Die Abweichungen zwischen Theorie- und Praxiswert der Trägheitsmomente der Körper und der Modellpuppe sind konstant (Tab. 7) und lassen daher auf einen systematischen Fehler schließen. Bei der Bestimmung des Eigenträgheitsmoment der Drillachse wird die Stange als masselos angenommen. Daraus folgt dass das Trägheitsmoment der Stange in etwa

$$I_{\text{Abw}} = 0,00365 \text{ m}^2\text{kg} \quad (16)$$

beträgt. Abschließend kann gesagt werden, dass die erhaltenen Werte trotz ungenauer Messmethoden zur Theorie passen. Außerdem darf die Masse der Stange nicht vernachlässigt werden, da sonst negative Trägheitsmomente auftreten.

| Körper | $I_{\text{th}}/\text{m}^2\text{kg}$ | $I_{\text{exp}}/\text{m}^2\text{kg}$ | Differenz / m^2kg |
|----------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| Zylinder - Parallel | 0,0008 | −0,0030 | 0,0038 |
| Zylinder - Senkrecht | 0,0005 | −0,0032 | 0,0037 |
| Modellpuppe - Pos. 1 | 0,000328 | −0,0032 | 0,0035 |
| Modellpuppe - Pos. 2 | 0,000136 | −0,0035 | 0,0036 |

Tabelle 7: Theoriewert, Praxiswert und Differenz der Trägheitsmomente verschiedener Körper.

6 Anhang

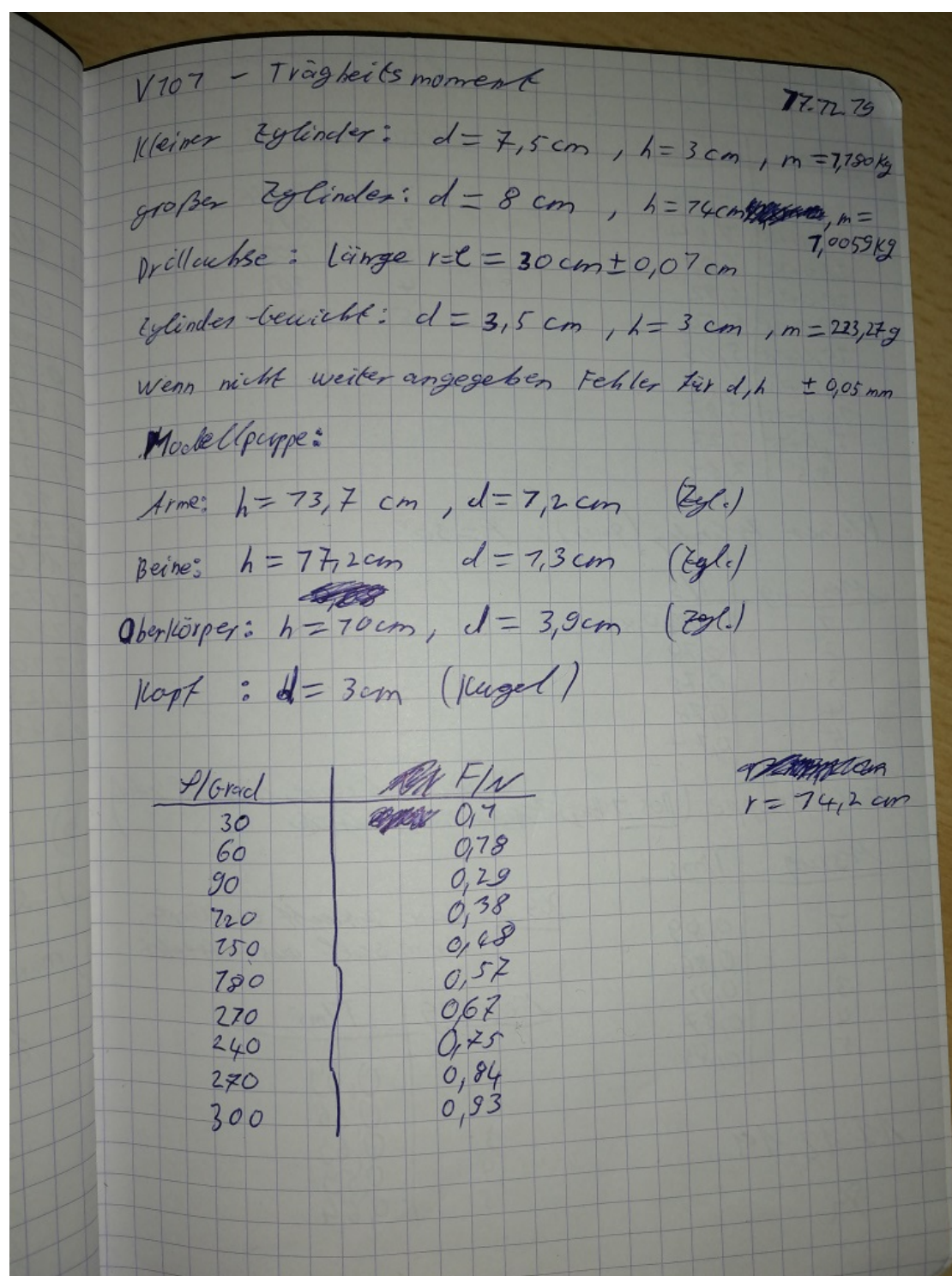


Abbildung 5: Originaldaten aus dem Laborheft (Seite 1).

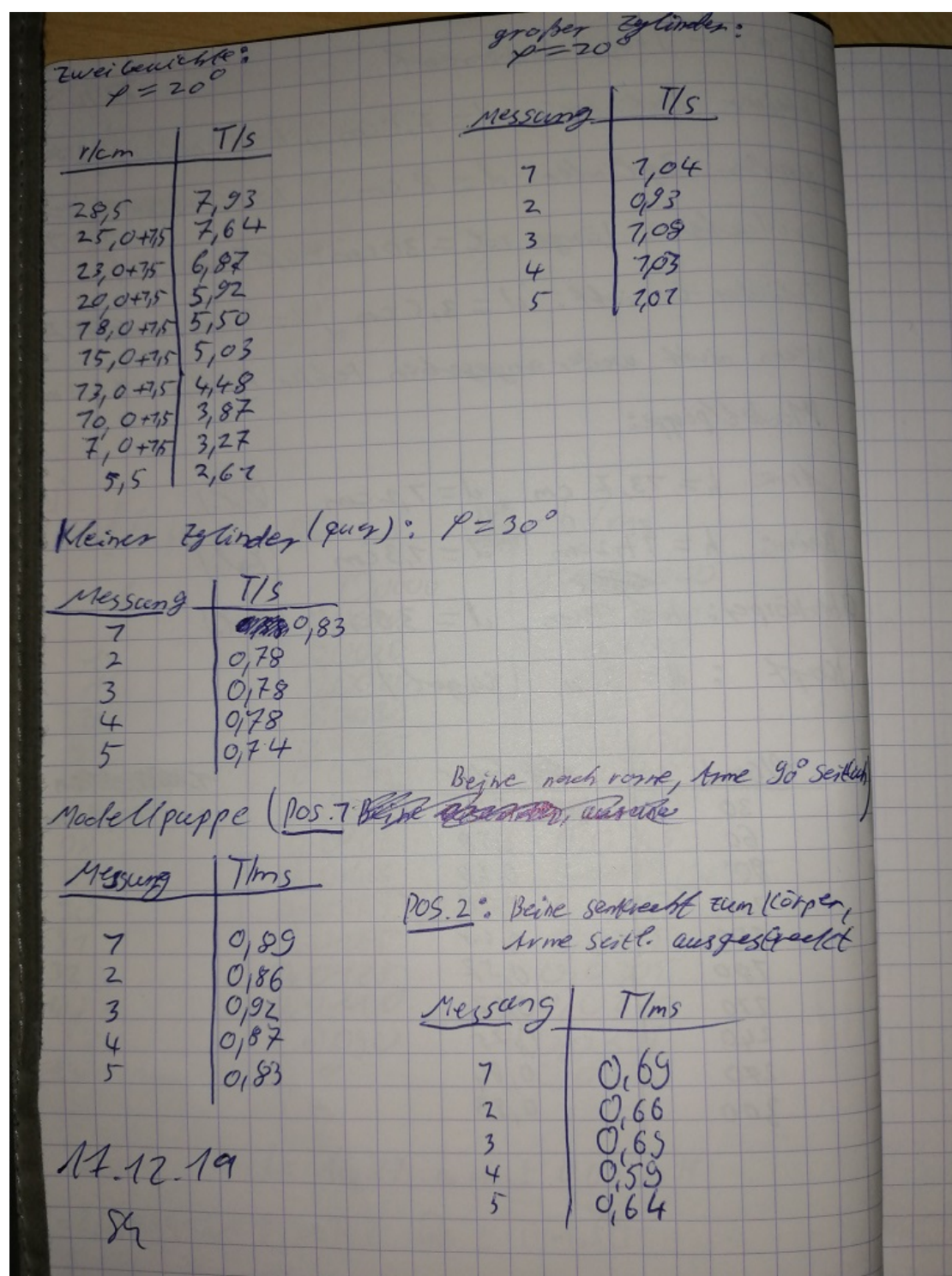


Abbildung 6: Originaldaten aus dem Laborheft (Seite 2).

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] *Rohdichte des Holzes*. URL: holzvomfach.de.