

Dispersionsmessungen am Glasprisma

Christopher Krause
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.06.2018

Abgabe: 19.06.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Brechung und Dispersion	3
2.2 Fallunterscheidungen für die Resonanzstelle	4
3 Durchführung	5
4 Auswertung	7
4.1 Fehlerrechnung	7
4.2 Bestimmung der Brechungsindices	7
4.3 Ausgleichsrechnung für die Dispersionskurve	9
4.4 Berechnung der Abbeschen-Zahl	10
4.5 Bestimmung des Auflösungsvermögens	11
4.6 Bestimmung der Absorptionsstelle	11
5 Diskussion	12
Literatur	12

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das Dispersionsverhalten an einem Glasprisma untersucht werden. Dafür werden Brechungseigenschaften von Licht an dem Prisma bestimmt.

2 Theorie

2.1 Brechung und Dispersion

Durchdringt ein Lichtstrahl eine Grenzfläche in ein Medium mit anderer Dichte, so wird die Richtung des Lichtstrahls geändert. In Abbildung 1 ist dieser Effekt zu sehen.

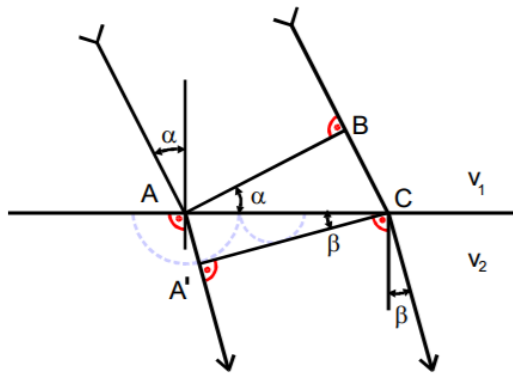


Abbildung 1: Brechung von Lichtstrahlen an einer Wellenfront [2]

Für die Brechungswinkel α und β und den Brechungsindex $n = \frac{v_1}{v_2}$ gilt:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (1)$$

Dabei sind v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten von Licht in den jeweiligen Medien.

Lichtgeschwindigkeit in Medien ist eine frequenzabhängige Größe. Dieses Phänomen wird Dispersion genannt.

Werden Elektronen und Ionenrümpfe in der Materie berücksichtigt, kann eine Dispersionsgleichung abgeleitet werden. Die elektrischen Ladungen und Ionenrümpfe, befinden sich in einer Gleichgewichtslage. Das E-Feld der Lichtwellen regt diese zu Schwingungen an, wodurch auch Resonanzerscheinungen auftreten. Durch die verschobenen Ladungsträger, wegen der Lichtwellen, wird eine rücktreibende Kraft, sowie eine dämpfende Reibung,

induziert. Für die Bewegung der Ladungsträger kann eine Differentialgleichung formuliert werden.

$$m_h \frac{d^2 \vec{x}_h}{dt^2} + f_h \frac{d \vec{x}_h}{dt} + a_h \vec{x}_h = q_h \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

Hierbei ist m_h die Teilchenmasse, q_h die Ladung, \vec{E}_0 das E-Feld, a_h die Beschleunigung, ω die Kreisfrequenz. Für f_h gilt die Beziehung $\vec{F}_{D,h} = f_h \frac{d \vec{x}_h}{dt}$ mit der Reibung $\vec{F}_{D,h}$.

Mit dieser Differentialgleichung lässt sich eine Beziehung für den komplexen Brechungsindex \tilde{n} und der Lichtfrequenz herleiten.

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h \epsilon_0} \quad (3)$$

Zwischen \tilde{n} und n gilt dann die Beziehung:

$$\tilde{n} = n(1 - ik) \quad (4)$$

Mit der Absorptionskonstante k des Lichtes in Materie. Das Modell der erzwungenen Schwingung kann nur ausreichend beschrieben werden, wenn die Dispersionskurve weit außerhalb der Resonanzstellen betrachtet wird. Es soll gelten $n^2 k \approx 0$. Aus Gleichung (3) folgt dann eine Beziehung zwischen Brechungsindex und Wellenlänge:

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_h \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} \quad (5)$$

2.2 Fallunterscheidungen für die Resonanzstelle

Besitzt die betrachtete Materie nur eine Absorptionsstelle λ_1 so kann eine Fallunterscheidung gemacht werden. Fall a: Für $\lambda \gg \lambda_1$ kann Gleichung (5) entwickelt werden.

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^4 + \dots \right) \quad (6)$$

Mit Koeffizienten $A_i > 0$ kann die Gleichung auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (7)$$

Fall b: Für $\lambda \ll \lambda_1$ gilt:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_1} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} + \dots \right) \quad (8)$$

Oder mit Koeffizienten $A'_i > 0$, $i \geq 2$

$$n^2(\lambda) = 1 - A'_2\lambda^2 - A'_4\lambda^4 - \dots \quad (9)$$

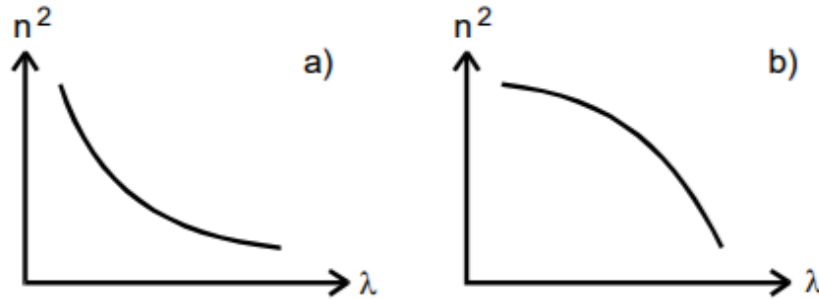


Abbildung 2: Dispersionskurve der beiden Fälle [2]

In beiden Fällen sinkt der Brechungsindex mit steigender Wellenlänge. Dieses Verhalten wird als normale Dispersion bezeichnet.

Mit den Winkeln ϕ und η , welche in diesem Versuch bestimmt werden, gilt für den Brechungsindex:

$$n = \frac{\sin \frac{\eta + \phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \quad (10)$$

3 Durchführung

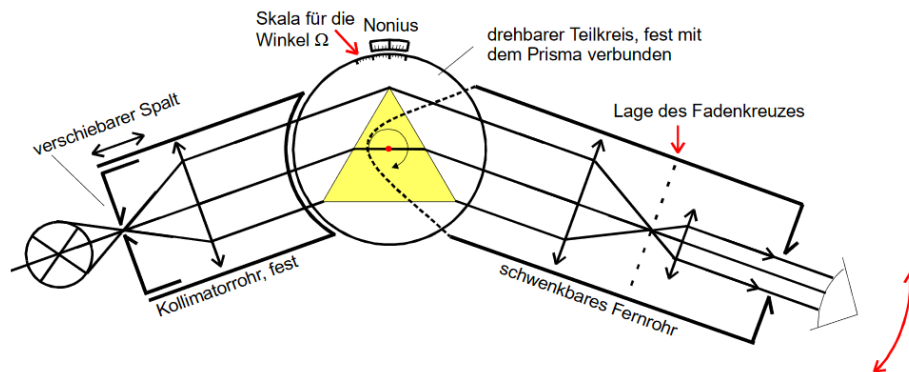


Abbildung 3: Schematische Darstellung eines Prismen-Spektralapparats [2].

Bei diesem Versuch wird eine Apparatur verwendet, dessen schematischer Aufbau in Abbildung 3 dargestellt ist. Aus einer Hg-Cd-Spektrallampe fällt Licht auf einen Spalt,

welcher wiederum in der Brennebene einer Kollimatorlinse liegt. Dadurch wird hinter der Linse ein paralleler Strahlengang des Lichts hergestellt. Anschließend fällt dieses auf ein Prisma und wird dort zweimal gebrochen, bevor es ein bewegliches Fernrohr durchläuft, an dessen Ende das es dann mit dem Auge beobachtet werden kann. Dabei lässt sich dann an der Drehscheibe des Fernrohrs der Winkel ablesen, auf dem es gerade steht.

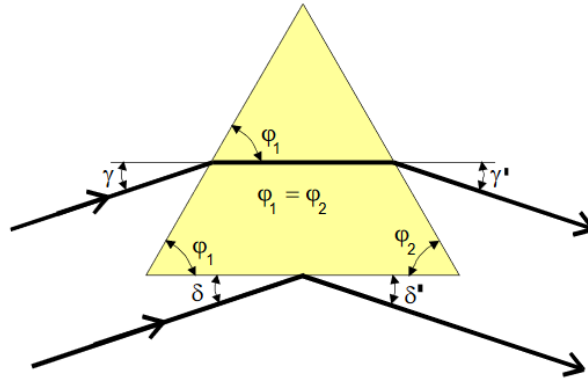


Abbildung 4: Symmetrischer Strahlengang am Prisma [2].

Zu Beginn des Versuchs wird die Winkeländerung bestimmt, die das Licht der einzelnen Wellenlängen beim Durchlaufen des Prismas erfährt. Dazu wird für jede einzelne sichtbare Spektrallinie ein möglichst symmetrischer Strahlengang erzeugt (Abbildung 4). Das im Prisma gebrochene und das an der Prismaoberfläche reflektierte Licht sollen also möglichst parallel in das Fernrohr einlaufen. Sodann wird für jede Spektrallinie der Winkel abgelesen, unter dem das Fernrohr in diesen besagten Einstellungen gerade steht. Anschließend wird die gleiche Messung noch einmal bei spiegelsymmetrischer Stellung des Prismas durchgeführt (zu erkennen in Abbildung 5). Aus diesen beiden gemessenen Winkeln kann dann schließlich die tatsächliche Winkeländerung bestimmt werden.

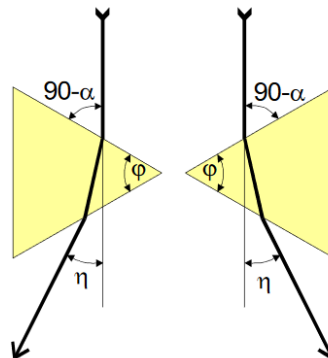


Abbildung 5: Prinzip der Messung der beiden Ablenkungswinkel [2].

Als letztes soll dann noch der Innenwinkel des Prismas festgestellt werden. Dazu wird

das Prisma mit einer seiner Spitzen in Richtung des eintreffenden Lichts positioniert (Abbildung 6). Anschließend werden analog zur ersten Messung die Winkel gemessen, unter denen auf beiden Seiten jeweils die Reflexion des Lichtes zu finden ist. Die Messung wird anschließend für weitere sechs (leicht geänderte) Ausrichtungen des Prismas wiederholt. Aus diesen Winkeln lässt sich dann schließlich der Innenwinkel bestimmen.

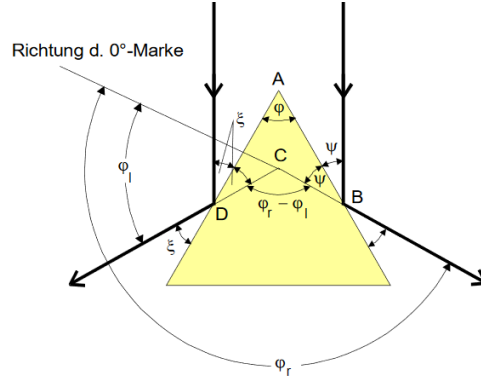


Abbildung 6: Lichtreflexion bei der Bestimmung des Innenwinkels des Prismas [2].

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Der Mittelwert eines Datensatzes mit N Werten ist definiert durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (11)$$

Die Standardabweichung eines Datensatzes von seinem Mittelwert durch:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

Pflanzen sich Unsicherheiten fort, wird der Fehler mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \quad (13)$$

4.2 Bestimmung der Brechungsindizes

In Tabelle 1 werden die gemessenen Winkel ϕ_r und ϕ_l dargestellt, sowie der resultierende Winkel $\phi = \frac{1}{2}(\phi_l - \phi_r)$.

Tabelle 1: Gemessene und berechnete ϕ -Winkel.

$\phi_l/^\circ$	$\phi_r/^\circ$	$\phi/^\circ$
337,5	216,6	60,45
339,8	219,6	60,10
338,0	218,0	60,00
336,6	216,6	60,00
338,6	218,7	59,95
338,1	218,2	59,95
339,7	219,6	60,05

Der Mittelwert von den Winkeln ϕ und dessen Standardabweichung beträgt $\phi = (60,07 \pm 0,17)^\circ$. Die Standardabweichung wird hierbei mit Python berechnet.

Die Winkel Ω_l und Ω_r , sowie der daraus resultierende Winkel $\eta = 180^\circ - (\Omega_r - \Omega_l)$ werden in Tabelle 2 in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ dargestellt.

Tabelle 2: Gemessene Ω_l und Ω_r und berechnete η -Winkel.

λ/nm	$\Omega_l/^\circ$	$\Omega_r/^\circ$	$\eta/^\circ$
404,6	104,7	214,5	70,2
439,8	103,7	214,6	69,1
480,0	103,0	226,6	66,4
502,5	102,8	216,8	66,0
546,1	101,8	217,0	64,8
577,0	101,7	217,8	63,9
615,8	101,5	218,1	63,4
623,4	101,0	218,8	62,2

Die Wellenlängen sind dabei Literaturwerte [1].

Mit Gleichung (10) wird aus ϕ und η die Brechungsindizes berechnet. Dabei errechnet sich der Fehler von n über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_\phi^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\eta}{2} + \frac{\phi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\eta}{2} + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2}$$

Tabelle 3: Brechungsindices in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

λ/nm	n
404,6	$1,813 \pm 0,004$
439,8	$1,805 \pm 0,004$
480,0	$1,784 \pm 0,004$
502,5	$1,781 \pm 0,004$
546,1	$1,771 \pm 0,004$
577,0	$1,764 \pm 0,004$
615,8	$1,760 \pm 0,004$
623,4	$1,750 \pm 0,004$

4.3 Ausgleichsrechnung für die Dispersionskurve

Wird n^2 gegen die entsprechende Wellenlänge aufgetragen, so ergibt sich das folgende Diagramm.

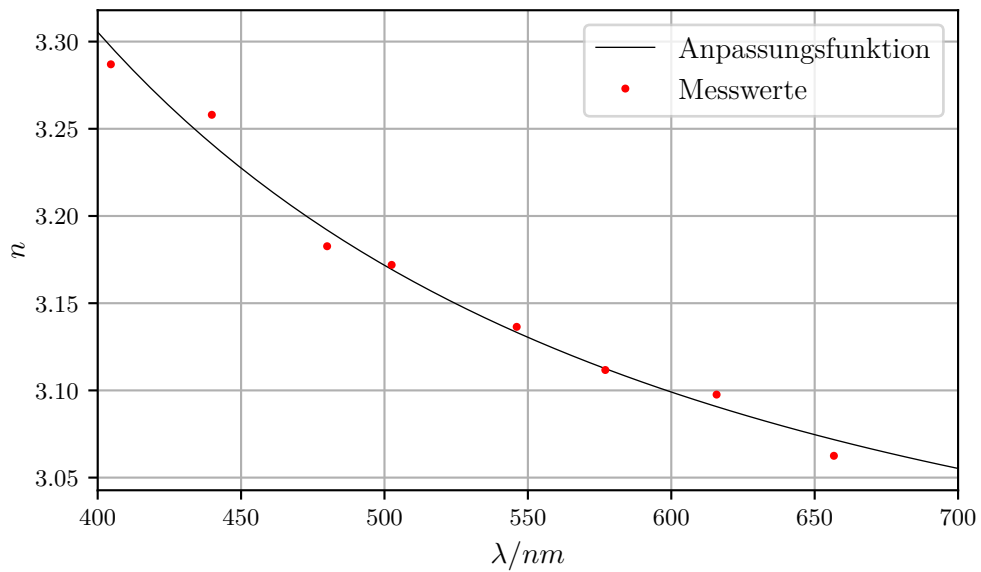


Abbildung 7: Brechungsindices aufgetragen gegen die Wellenlänge.

Dabei muss für die Ausgleichsrechnung zwischen den Gleichungen (7) und (9) entschieden werden. Mithilfe von Python wird die Methode der kleinsten Quadrate angewandt und für die beiden Gleichungen die folgenden Parameter ermittelt:

Gleichung (7):

$$A_0 = 2,93 \pm 0,01$$

$$A_2 = (5,9 \pm 0,3) \cdot 10^4 \text{ nm}^2$$

Gleichung (9):

$$A'_0 = 3,40 \pm 0,03$$

$$A'_2 = (8,1 \pm 0,9) \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{nm}^2}$$

Daraus ergibt sich für die jeweiligen Abweichungsquadrate

$$s_7 = 0,00015$$

$$s_9 = 0,0005$$

Da das Abweichungsquadrat der Funktion aus Gleichung (7) wesentlich kleiner ist, wird also eine Ausgleichsrechnung mit dieser Funktion durchgeführt.

4.4 Berechnung der Abbeschen-Zahl

Für die Abbesche-Zahl wird:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (14)$$

Hierbei sind n_D , n_F und n_C die Brechungsindizes des Glasprismas bei den Fraunhofer Linien $\lambda_D = 589\text{nm}$, $\lambda_F = 486\text{nm}$ und $\lambda_C = 656\text{nm}$. Für die Berechnung der Brechungsindizes wird Gleichung (7) verwendet.

Tabelle 4: Brechungsindizes für drei Fraunhofer Linien.

λ/nm	n
λ_D	$1,761 \pm 0,004$
λ_F	$1,783 \pm 0,005$
λ_C	$1,751 \pm 0,004$

Für die Abbesche-Zahl folgt:

$$\nu = 24 \pm 5$$

Der Fehler von n und ν wird wieder mit der 'Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sigma_{A_0}^2}{4A_0 + \frac{4A_2}{\lambda^2}} + \frac{\sigma_{A_2}^2}{4\lambda^4 \left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)}}$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{\sigma_{n_C}^2 (n_D - 1)^2}{(-n_C + n_F)^4} + \frac{\sigma_{n_D}^2}{(-n_C + n_F)^2} + \frac{\sigma_{n_F}^2 (n_D - 1)^2}{(-n_C + n_F)^4}}$$

4.5 Bestimmung des Auflösungsvermögens

Das Auflösungsvermögen A ist gegeben durch

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda}$$

mit

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{A_2}{\lambda^3 \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}}$$

und b ist die Basislänge mit $b = 3 \text{ cm}$. Daraus ergibt sich für die beiden Wellenlängen λ_C und λ_F :

$$A_C = 3580 \pm 180$$

$$A_F = 8600 \pm 400$$

Die Fehler von A_C und A_F werden mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{A_2^2 \sigma_{A_0}^2}{4\lambda^6 \left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^3} + \sigma_{A_2}^2 \left(-\frac{A_2}{2\lambda^5 \left(A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\lambda^3 \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}} \right)^2}$$

4.6 Bestimmung der Absorptionsstelle

Aus einem Koeffizientenvergleich von Gleichung (6) und (7) ergibt sich für die gesuchte Absorptionsstelle:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}}$$

Daraus ergibt sich ein Wert von

$$\lambda_1 = (175 \pm 4) \text{ nm}.$$

Für den berechneten Fehler von λ_1 gilt:

$$\sigma_{\lambda_1} = \sqrt{\frac{A_2^2 \sigma_{A_0}^2}{(A_0 - 1)^4} + \frac{\sigma_{A_2}^2}{(A_0 - 1)^2}}$$

5 Diskussion

Die berechneten Brechungsindices werden wie in der Theorie beschrieben mit größer werdenden Wellenlängen kleiner. Aus dem Diagramm kann eine Dispersionskurve klar identifiziert werden und somit der Verlauf der anderen in dieser Messreihe verworfen werden. Abweichungen der Messwerte von dem Fit können durch systematische Fehler bei der Durchführung des Experimentes erklärt werden. Zusätzlich ist das Bestimmen der Wellenlängen ebenfalls nicht ohne Ungenauigkeiten möglich. Die berechnete Abbesche-Zahl weist eine große Ungenauigkeit, durch die Fortpflanzung des Fehlers der Brechungsindices, auf. Dies lässt die Aussagekraft des berechneten Wertes fragwürdig erscheinen. Da sich bei der Berechnung des Auflösungsvermögens sowie der Absorptionsstelle die oben genannten Fehler wieder einwirken, sollte es auch dort zu gewissen Abweichungen kommen. Trotzdem hat die berechnete Absorptionsstelle einen den Erwartungen entsprechenden Wert. Dieser liegt nämlich im UV-Bereich. Also ist die Annahme, dass sich keine Absorptionsstelle im Bereich des sichtbaren Lichts befindet, gerechtfertigt.

Literatur

- [1] A. Kramida u. a. *NIST Atomic Spectra Database Lines Data*. 2018. URL: <https://physics.nist.gov/asd>.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung des Versuchs V402 Dispersionsmessung am Glasprisma*. 2018.