

V351

Fourier-Analyse und Synthese

Christopher Krause
christopher2.krause@tu-dortmund.de

Lucas Witthaus
lucas.witthaus@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.2017

Abgabe: 05.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Fourier-Transformation	4
3 Durchführung	4
3.1 Fourierreihen	4
3.2 Fourier-Analyse	5
3.3 Fourier-Synthese	5
4 Auswertung	5
4.1 Fourier-Analyse	5
4.2 Fourier-Synthese	8
5 Diskussion	10
Literatur	10

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden zum einen Schwingungen in ihre einzelnen Fourierkomponenten zerlegt. Zum anderen werden aus einzelnen Fourierkomponenten zugehörige Schwingungen erzeugt.

2 Theorie

Fast alle räumlich und zeitlich periodischen Vorgänge können durch die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion dargestellt werden.

$$f_s(t) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (1)$$

$$f_c(t) = b \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (2)$$

Die Parameter a und b sind die Amplituden der Wellen und T die Periodendauer.

Diese Aussage folgt aus dem Fourierschen Theorem. Dieses besagt: Konvergiert die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right) \quad (3)$$

gleichmäßig, so stellt sie eine periodische Funktion $f(t)$ dar. Für die Koeffizienten a_n und b_n gilt:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (5)$$

Für eine Grundfrequenz $\nu_1 = \frac{2\pi}{T}$ treten in der Fourierreihe nur ganzzahlige vielfache dieser Frequenz auf. Diese werden als Oberschwingungen bezeichnet

Wird die Amplitude der Schwingungen gegen ihre Frequenz aufgetragen, ergibt sich ein Linienspektrum wie in Abbildung 1.

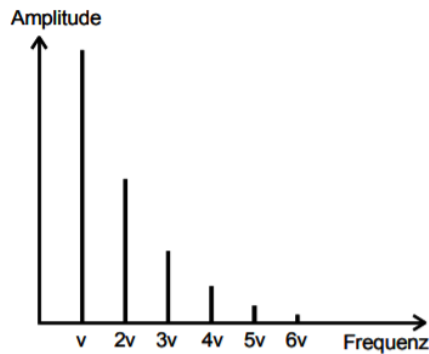


Abbildung 1: Linienspektrum einer periodischen Funktion. [1]

n geht für $\nu \rightarrow \infty$ gegen Null. Hat die Funktion $f(t)$ Sprungstellen t_0 kann die Fourierreihe f dort nicht approximieren. Es kommt zu einer Abweichung, welche auch für größere n nicht kleiner wird. Dies ist das Gibbs'sche Phänomen.

2.1 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation transformiert eine zeitabhängige Funktion $f(t)$ in dessen Frequenzspektrum $g(\nu)$. Es gilt:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t} dt \quad (6)$$

Periodische Funktionen weisen ein Linienspektrum wie in Abbildung 1 auf. Nicht-periodische Funktionen haben ein kontinuierliches Frequenzspektrum. Für das Umkehren einer Fourier-Transformation gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) e^{-i\nu t} d\nu. \quad (7)$$

Das Integrieren über einen unendlich großen Zeitraum ist praktisch nicht umsetzbar, wodurch die Periodizität von f aufgehoben ist. Daraus folgt ein kontinuierliches Linienspektrum für f . Es werden deshalb Nebenmaxima neben den Hauptmaxima auftreten.

3 Durchführung

3.1 Fourierreihen

Zur Vorbereitung werden die Fourierkomponenten von drei Funktionen bestimmt, wobei die Rechteckspannung, die Sägezahnspannung und die Dreiecksspannung gewählt werden.

Die Funktion werden als ungerade oder gerade definiert um die Fourierkomponenten möglichst einfach darstellen zu können. Es ergeben sich folgende Fourierkomponenten:

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{4A}{\pi n} \quad \text{Rechteckspannung} \qquad (8)$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{m_S}{\pi n} \quad \text{Sägezahnspannung} \qquad (9)$$

$$b_n = 0 \qquad a_n = \frac{m_D}{\pi^2 n^2} \quad \text{Dreiecksspannung} \qquad (10)$$

A ist die Amplitude der Rechteckspannung und m_S die Steigung der Flanken der Sägezahnspannung. m_D ist die Steigung der Flanke der Dreiecksspannung.

3.2 Fourier-Analyse

Ein Funktionsgenerator wird an das Oszilloskop angeschlossen, welches eine Fourier-Transformation durchführt. Der Funktionsgenerator generiert die Rechteckspannung, Sägezahnspannung und die Dreiecksspannung. Die auf dem Bildschirm angezeigten Peaks werden gemessen, sowie die Frequenzen.

3.3 Fourier-Synthese

Ein Signalgenerator wird an das Oszilloskop angeschlossen, so dass die Grundschwingung und eine beliebige Oberschwingung auf dem Bildschirm angezeigt wird. Abhängig von der darzustellenden Funktion werden die einzelnen Oberschwingungen auf die Grundschwingung addiert. Bei der Rechteckspannung ist jede Fourierkomponente b_n mit geradem n Null, weshalb nur jede zweite Oberschwingung auf die Grundschwingung addiert wird. Dies gilt ebenso für die Dreiecksspannung. Die Frequenzen der Oberschwingungen werden so eingestellt, dass die auf dem Bildschirm angezeigte Funktion die theoretisch zu erwartende Funktion bestmöglich approximiert. Die Amplituden der n -ten-Oberschwingung der Rechteckspannung und der Sägezahnspannung ist dabei die Amplitude der Grundschwingung dividiert durch n . Bei der Dreiecksspannung wird mit n^2 dividiert.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Analyse

Die gemessenen Amplituden der drei Spannungen U_R (Rechteck), U_S (Sägezahn) und U_D (Dreieck), werden in den Tabellen 1,2 und 3 dargestellt. Die Quotienten $\frac{U_n}{U_1}$ werden ebenfalls in den Tabellen dargestellt, da diese für spätere Rechnungen nötig sind. Die Frequenz des Funktionsgenerators beträgt bei allen Messungen 1kHz.

Tabelle 1: Amplituden und Frequenzen der Rechteckspannung

U_R/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U_S/V	$\frac{U_n}{U_1}$	U_D/V	$\frac{U_n}{U_1}$
4.44	1.00	2.18	1.00	2.80	1.00
1.36	0.31	1.04	0.48	0.30	0.11
0.72	0.16	0.64	0.29	0.10	0.04
0.56	0.13	0.44	0.20	0.05	0.02
0.48	0.11	0.30	0.14	0.03	0.01
0.40	0.09	0.26	0.12	0.02	0.01
0.32	0.07	0.24	0.11	0.02	0.01
0.24	0.05	0.20	0.09	0.01	0.00
0.24	0.05	0.18	0.08	0.01	0.00

Der Logarithmus von $\left(\frac{U_n}{U_1}\right)$ der drei Spannungen wird gegen n aufgetragen.

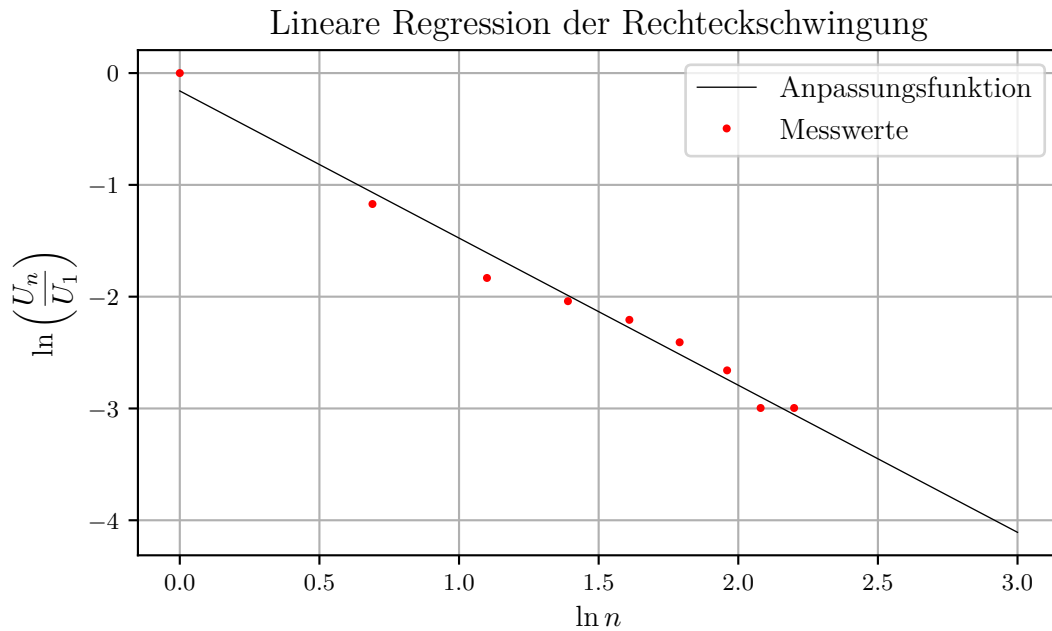


Abbildung 2: Lineare Regression der Rechteckschwingung.

Die Gerade wird durch die Gleichung $y = m_1x + b_1$ beschrieben. Die Parameter betragen:

$$m_1 = -1.32 \pm 0.07$$

$$b_1 = -0.16 \pm 0.10$$

Der Fehler der Steigung m_1 und des Achsenabschnittes b_1 einer linearen Regression wird

wie folgt berechnet:

$$\sigma_m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (11)$$

$$\sigma_b = \frac{\bar{x}^2 \bar{y} - \overline{xy} \bar{x}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (12)$$

Der Theoriewert beträgt $m_1 = -1$. Die relative Abweichung des berechneten Wertes von dem Theoriewert beträgt 32.0%.

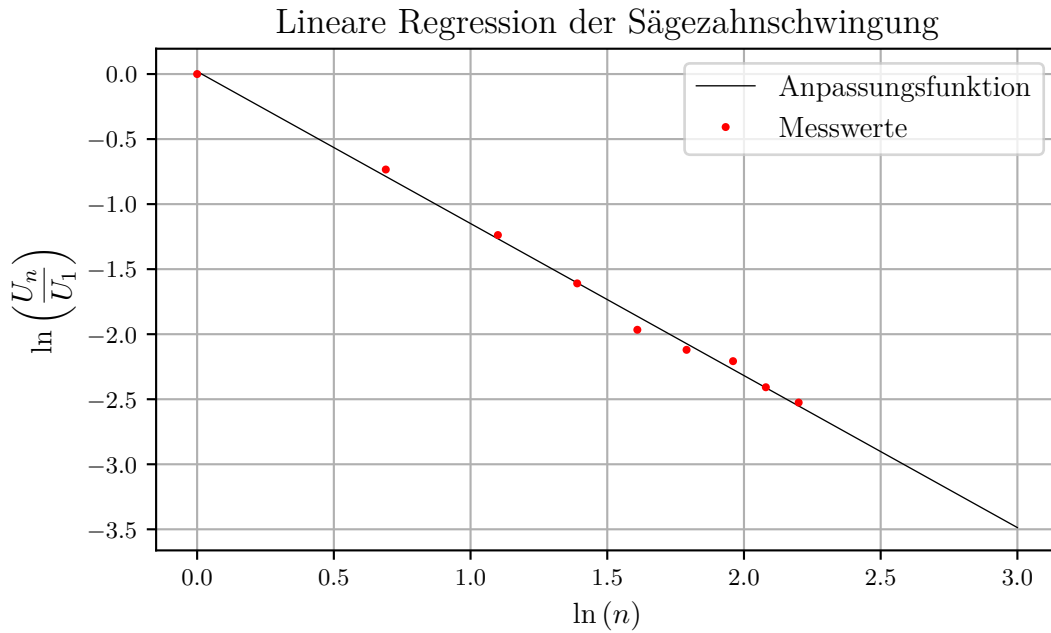


Abbildung 3: Lineare Regression der Sägezahnschwingung.

Die Gerade wird durch die Gleichung $y = m_2 x + b_2$ beschrieben. Die Parameter betragen:

$$m_2 = -1.17 \pm 0.03$$

$$b_2 = 0.02 \pm 0.04$$

Die Fehler können mit Gleichung (11) und (12) berechnet werden. Der Theoriewert beträgt $m_2 = -1$. Die relative Abweichung des berechneten Wertes von dem Theoriewert beträgt 17.0%.

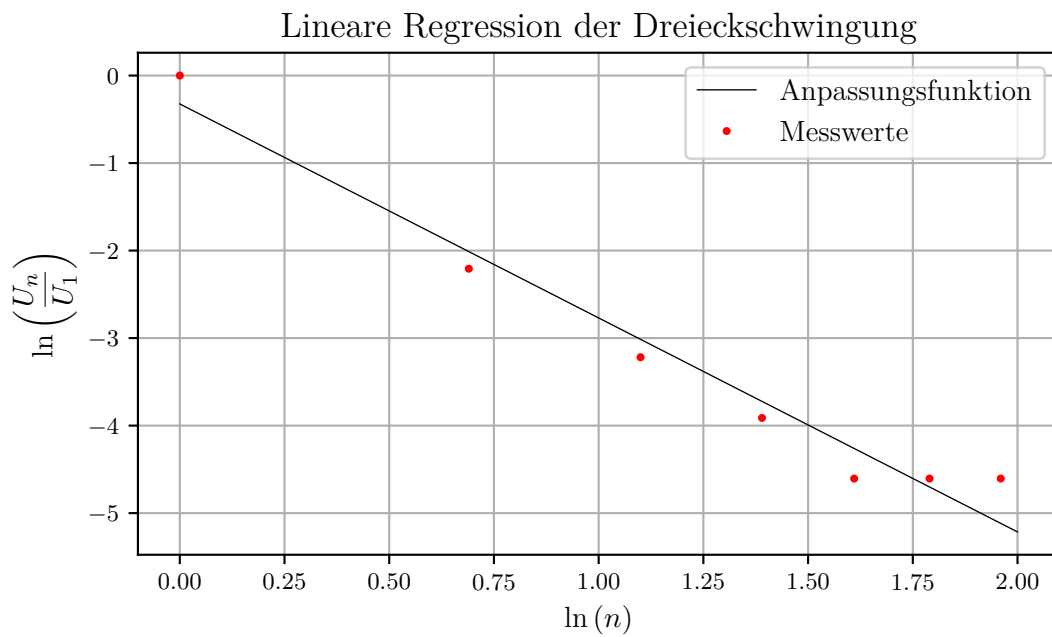


Abbildung 4: Lineare Regression der Dreieckschwingung.

Die letzten beiden Messwerte werden, wegen zu kleiner Amplitude, nicht in dem Plot berücksichtigt. Die Gerade wird durch die Gleichung $y = m_3x + b_3$ beschrieben. Die Parameter betragen:

$$m_3 = -2.45 \pm 0.21$$

$$b_3 = 0.32 \pm 0.29$$

Die Fehler können mit Gleichung (11) und (12) berechnet werden. Der Theoriewert beträgt $m_3 = -2$. Die relative Abweichung des berechneten Wertes von dem Theoriewert beträgt 22.5%.

4.2 Fourier-Synthese

Abbildung 5, 6 und 7 stellen die synthetisierten Funktionen dar.

Die Rechteckspannung werden aus den nach Gleichung (8) errechneten Oberschwingungen zusammengesetzt. Die Amplitude beträgt $A = 1V$.

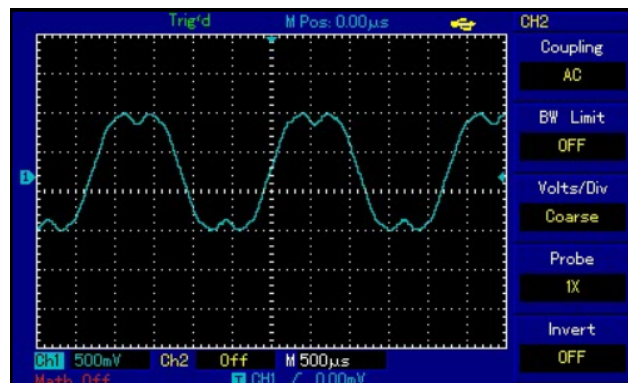


Abbildung 5: Synthetisierte Rechteckschwingung.

Die Sägezahnspannung werden aus den nach Gleichung (9) errechneten Oberschwingungen zusammengesetzt. Die Amplitude beträgt $A = 1V$.

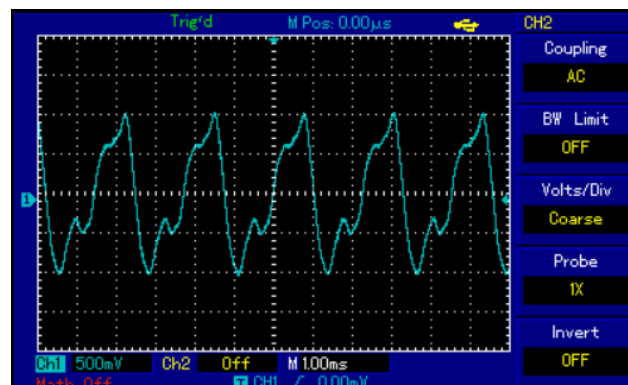


Abbildung 6: Synthetisierte Sägezahnschwingung.

Die Dreiecksspannung werden aus den nach Gleichung (10) errechneten Oberschwingungen zusammengesetzt. Die Amplitude beträgt $A = 1\text{V}$.

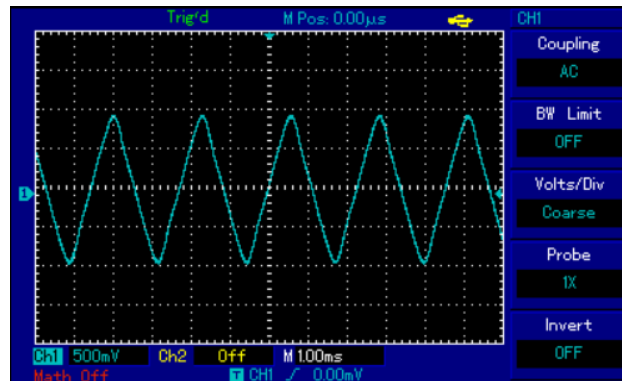


Abbildung 7: Synthetisierte Dreieckschwingung.

5 Diskussion

Bei der Fourier-Analyse weisen die Amplituden der einzelnen Oberschwingungen einen in etwa der Theorie entsprechende Abfall auf. Die Abweichung treten möglicherweise durch das nicht störfreie Signal auf. Zudem kann die Fourier-Transformation von dem Oszilloskop bei einem endlichen Zeitintervall nicht genau durchgeführt werden. Hinzu kommt bei der Dreiecksspannung, dass die schnell abfallenden Amplituden nicht mehr genau gemessen werden können.

Die Rechteck- und Sägezahnspannung konnten nicht genau synthetisiert werden. Grund dafür ist, dass die Regler nicht genau kalibriert sind und die Phasen nicht optimal eingestellt werden können. Somit ist auch das Gibbs'sche Phänomen an den Sprungstellen nicht genau zu beobachten. Die Dreiecksspannung hingegen kann gut approximiert werden, da die Oberwellen mit $\frac{1}{n^2}$ abfallen und dadurch nur die ersten Oberwellen dominieren. Die endliche Anzahl an Oberwellen hat also keinen so großen Einfluss.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung des Versuchs V351, Fourier-Analyse und Synthese*. 2017.