

V 206

Die Wärmepumpe

Timo Gräßer
timo.graesser@udo.edu

Jasper Karl Lammering
jasper.lammering@udo.edu

Durchführung: 26.1.16

Abgabe: 2.2.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	3
1.1. Fehlerrechnung	3
1.2. Das Prinzip einer Wärmepumpe	3
1.3. Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe	4
1.4. Kenngrößen einer realen Wärmepumpe	4
1.4.1. Bestimmung der realen Güteziffer	4
1.4.2. Bestimmung des Massendurchsatzes	5
1.4.3. Bestimmung der Kompressorleistung	5
2. Durchführung	6
2.1. Aufbau	6
2.2. Messablauf	7
3. Auswertung	8
3.1. Benutzte Literaturwerte	8
3.2. Temperaturverläufe	8
3.3. Differentialquotienten dT_1/dt und dT_2/dt	8
3.4. Güteziffer	10
3.5. Massendurchsatz	11
3.6. Mechanische Kompressorleistung	12
4. Diskussion	13
Literatur	13
A. Kopie der Originaldaten	14

1. Theorie

1.1. Fehlerrechnung

Für die Fehlerfortpflanzung bei Gleichungen mit N fehlerbehafteten Größen wird jeweils die Formel zur Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \quad (1)$$

mit der jeweiligen Funktion $f(x_i)$, den Messgrößen x_i und den zugehörigen Fehlern σ_i verwendet. Zur Berechnung des arithmetischen Mittels von N Messwerten wird jeweils die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2)$$

mit den Messwerten x_i benutzt. die Standardabweichung des Mittelwerts wird jeweils mit der Gleichung

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

mit den N Messwerten x_i berechnet.

1.2. Das Prinzip einer Wärmepumpe

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt im Wesentlichen, dass die Energie in einem abgeschlossenen System konstant ist. Demnach wäre es theoretisch möglich, Wärme von einem kälteren in ein wärmeres Reservoir zu übertragen, was erfahrungsgemäß aber nicht geschieht. Der zweite Hauptsatz löst dieses Problem auf, denn er beinhaltet, dass diese Übertragung nur durch Zufuhr von zusätzlicher mechanischer Energie mittels einer Wärmepumpe möglich ist. In diesem Fall ergibt sich wegen der Energieerhaltung die Beziehung

$$Q_1 = Q_2 + A \quad (4)$$

mit der vom wärmeren Reservoir aufgenommenen Wärmemenge Q_1 , der vom kälteren Reservoir abgegebenen Wärmemenge Q_2 und der, von der Wärmepumpe aufgewandten, mechanischen Arbeit A . Aus den Hauptsätzen folgt außerdem für die zugehörigen Temperaturen T_1 und T_2 im Idealfall

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (5)$$

Dabei wird aber davon ausgegangen, dass es sich um einen reversiblen Prozess handelt. Gleichung (5) gilt also nur, wenn die vom kälteren Reservoir abgegebene Wärme Q_2 und die mechanische Arbeit A jederzeit wieder in einem umgekehrten Prozess vollständig

zurückgewonnen werden kann. Da man praktisch nie von einem abgeschlossenen System ausgehen kann, da beispielsweise immer ein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet, muss Gleichung (5) zu

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \quad (6)$$

abgewandelt werden. Das Verhältnis zwischen der vom wärmeren Reservoir aufgenommenen Wärmemenge Q_1 zwischen der geleisteten mechanischen Arbeit bezeichnet man als Güteziffer ν der Wärmepumpe. Diese gibt an, wie günstig die Wärmepumpe arbeitet, also wie wenig Arbeitsaufwand für die Übertragung der Wärme notwendig ist. Mit den Gleichungen (4), (5) und (6) ergibt sich die Güteziffer einer idealen Wärmepumpe

$$\nu_{\text{id}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (7)$$

und die einer realen Wärmepumpe

$$\nu_{\text{re}} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (8)$$

An diesen Gleichungen ist erkennbar, dass eine Wärmepumpe umso günstiger arbeitet, wenn die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ zwischen den beiden Reservoiren gering ist. Der Vorteil der Wärmegewinnung mit einer Wärmepumpe gegenüber Verfahren, in denen mechanische Arbeit direkt in Wärme umgewandelt wird, besteht darin, dass die gewonnene Wärmemenge Q_1 hierbei auch größer als die aufgewandte Arbeit A sein kann.

1.3. Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe

Der schematische Aufbau einer Wärmepumpe ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Wärme wird über die Verdampfungswärme eines realen Gases mit hoher Kondensationswärme übertragen. Dabei nimmt das Gas am kühleren Reservoir mit der Temperatur T_2 bei kleinem Druck p_a die Verdampfungswärme L auf und verdampft. Dann strömt es in den Kompressor K , in welchem es nahezu adiabatisch, also ohne Wärmeverluste, komprimiert wird und somit weitere Energie aufnimmt. Von dort aus gelangt das Gas in das zweite Reservoir mit der Temperatur T_1 , in welchem es dann bei höherem Druck p_b die aufgenommene Verdampfungswärme L abgibt und kondensiert. Zuletzt strömt die Flüssigkeit durch einen Reiniger, der Gasblasen entfernt, und durch ein Drosselventil, an welchem der Druckunterschied aufrecht erhalten wird, zum ersten Reservoir. Der Kreislauf des Stoffes wird durch den Kompressor, also das Bauteil, welches die für eine Wärmeübertragung nötige, mechanische Arbeit verrichtet, gewährleistet.

1.4. Kenngrößen einer realen Wärmepumpe

1.4.1. Bestimmung der realen Güteziffer

Die pro Zeiteinheit gewonnene Wärmemenge $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t}$ im wärmeren Reservoir lässt sich mit der Gleichung

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t} \quad (9)$$

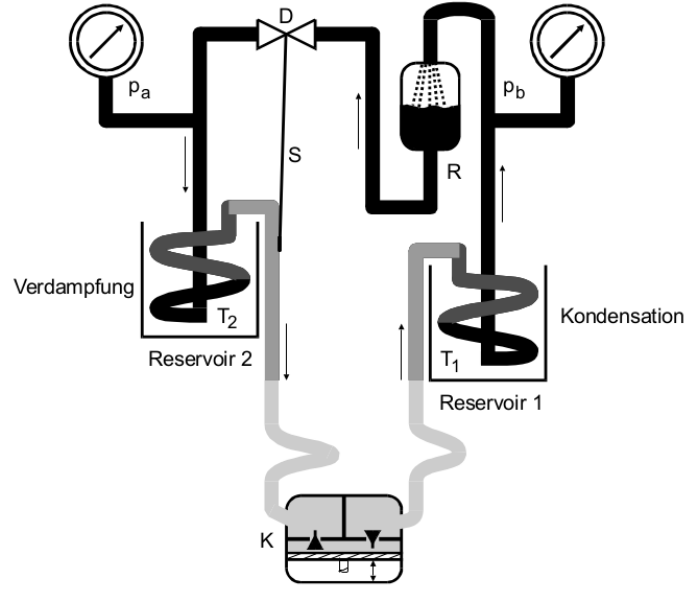


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer Wärmepumpe. $p_b > p_a$, $T_1 > T_2$ [2]

berechnen, wobei $m_1 c_w$ und $m_k c_k$ die Wärmekapazitäten des Wassers und der Kupferschlange und des Eimers im wärmeren Reservoir sind und der Quotient $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$ die dort gewonnene Temperatur pro Zeiteinheit. Mit der über den gesamten Zeitraum gemittelten Leistung \bar{N} des Kompressors folgt für die reale Gütezahl der Wärmepumpe

$$\nu = \frac{1}{\bar{N}} \frac{\Delta Q_1}{\Delta t}. \quad (10)$$

1.4.2. Bestimmung des Massendurchsatzes

Die pro Zeiteinheit verlorene Wärmemenge $\frac{\Delta Q_2}{\Delta t}$ im kälteren Reservoir lässt sich mit der Gleichung

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \quad (11)$$

berechnen, wobei $m_2 c_w + m_k c_k$ die entsprechenden Kapazitäten sind und $\frac{\Delta T_2}{\Delta t}$ die Abkühlung pro Zeiteinheit ist. Ist die Verdampfungswärme L gegeben, so kann der Massendurchsatz mit

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{L} \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} \quad (12)$$

bestimmt werden.

1.4.3. Bestimmung der Kompressorleistung

Mit der Poissonschen Gleichung

$$p_a V_a^\kappa = p_b V_b^\kappa = p V^\kappa, \quad (13)$$

wobei κ das Verhältnis der Molwärmen C_p und C_V ist, folgt für die Arbeit, die der Kompressor leistet, wenn er ein Gasvolumen von V_a auf V_b verringert,

$$A_m = - \int_{V_a}^{V_b} p dV = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) V_a. \quad (14)$$

Daraus ergibt sich die Kompressorleistung

$$N_{\text{mech}} = \frac{\Delta A_m}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (15)$$

mit der Dichte des Transportmediums ρ .

2. Durchführung

2.1. Aufbau

In Abbildung 2 ist die Messapparatur der Wärmepumpe abgebildet. In beide thermisch isolierte Wasserbehälter werden jeweils 3 Liter Wasser mit einem Messkolben eingefüllt. Wenn die Behälter an den Kupferschlangen angebracht werden, sollte darauf geachtet werden, dass sie gut abgedichtet sind, um den Wärmeaustausch mit der Umgebung gering zu halten. Die Rührmotoren dienen zur gleichmäßigen Verteilung der Wärme in den Reservoiren. Der Kompressor wird durch einen Motor angetrieben, der am Netz angeschlossen ist. Parallel zu dem Motor ist ein Wattmeter geschaltet, mit welchem die mechanische Leistung gemessen werden kann. Mit Hilfe einer elektrischen Uhr wird die Zeit gemessen.

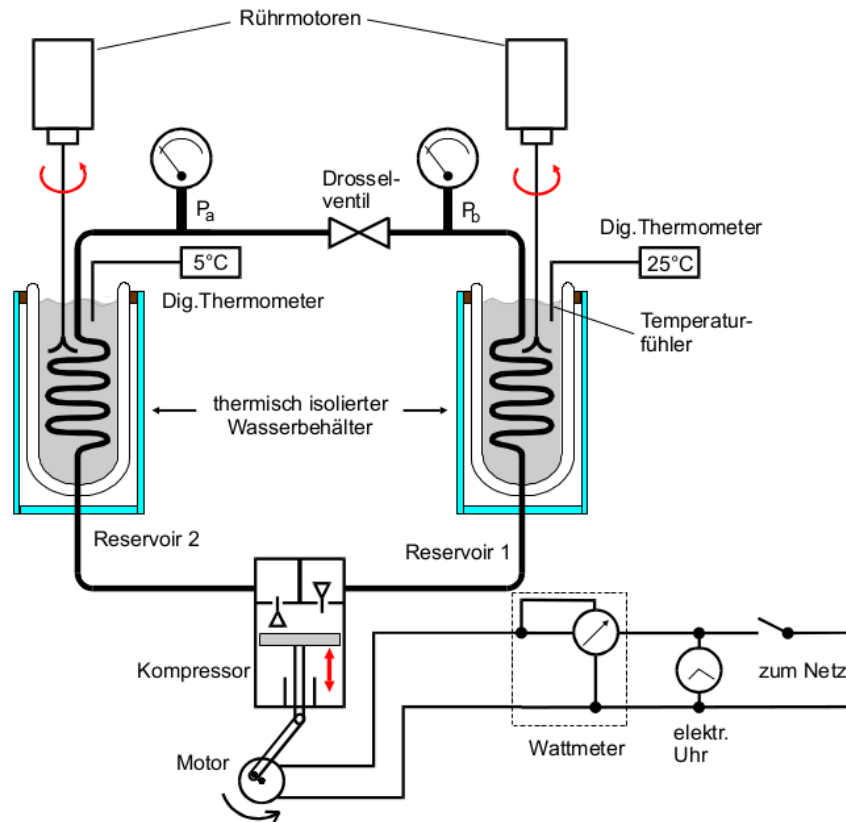


Abbildung 2: Messapparatur der Wärmepumpe.[2]

Folgende Werte sind durch die Apparatur gegeben:

$$\text{Spezifische Wärmekapazität der Reservoirs:} \quad m_k c_k = (660 \pm 10) \text{ J K}^{-1} \quad (16)$$

$$\text{Füllmenge der Reservoirs:} \quad m_1 = m_2 = (2.994 \pm 0.001) \text{ kg} \quad (17)$$

$$\text{Abweichung der Druckmesswerte:} \quad \sigma_p = \pm 0.2 \text{ bar} \quad (18)$$

$$\text{Abweichung der Temperaturmesswerte:} \quad \sigma_T = \pm 0.1 \text{ K} \quad (19)$$

$$\text{Abweichung der Leistungsmesswerte:} \quad \sigma_N = \pm 5 \text{ W} \quad (20)$$

2.2. Messablauf

Beim Ablesen der Drücke am Manometer muss der Normaldruck von etwa

$$p_0 = 1 \text{ bar} \quad (21)$$

beachtet werden. Dieser Druck wird zu jedem Messwert hinzugerechnet. Die Temperaturen werden von den jeweiligen digitalen Thermometern abgelesen.

1. Nachdem der Versuch aufgebaut wurde, werden die Rührmotoren eingeschaltet. Dann werden die Startwerte für p_a , p_b , T_1 und T_2 aufgenommen.

2. Der Strom wird eingeschaltet, sodass der Motor und die Stoppuhr starten. In einem Abstand von einer Minute, werden die Messwerte für p_a , p_b , T_1 , T_2 , die Zeit t und die Kompressorleistung N notiert.
3. Die Messung wird bei der Temperatur

$$T_1 = 50^\circ\text{C} \quad (22)$$

beendet.

3. Auswertung

3.1. Benutzte Literaturwerte

Zur Rechnung wurden folgende Literaturwerte benutzt:

$$R = (8.314\,459\,8 \pm 0.000\,004\,8) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad [4]$$

$$\rho_{\text{Wasser}} = 0.998\,203 \text{ g cm}^{-3} \quad [6]$$

$$M_{\text{CCl}_2\text{F}_2} = 120.91 \text{ g mol}^{-1} \quad [5]$$

$$c_w = (4.138 \pm 0.041) \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad [1]$$

3.2. Temperaturverläufe

Die gemessenen Temperaturen aus Tabelle 1 wurden in Abbildung 3 eingetragen. Um die Ausgleichskurven zu finden wurde die Funktion (23) an die Messwerte mit der Funktion *curve – fit* aus *scipy* [3] gefittet.

$$T(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D \quad (23)$$

Fehlerbalken wurden weggelassen, da sie keinen Mehrwert bringen. Die Ausgleichsrechnung liefert folgende Parameter:

$$\begin{array}{ll} A_1 = (-2.0 \pm 0.1) \cdot 10^{-8} \text{ K s}^{-3} & B_1 = (2.6 \pm 0.3) \cdot 10^{-5} \text{ K s}^{-2} \\ C_1 = (2 \pm 2) \cdot 10^{-2} \text{ K s}^{-1} & D_1 = (294.2 \pm 0.2) \text{ K} \\ A_2 = (3.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-8} \text{ K s}^{-3} & B_2 = (-4.6 \pm 0.4) \cdot 10^{-5} \text{ K s}^{-2} \\ C_2 = (-6.4 \pm 2.0) \cdot 10^{-3} \text{ K s}^{-1} & D_2 = (295.1 \pm 0.3) \text{ K}. \end{array}$$

3.3. Differentialquotienten dT_1/dt und dT_2/dt

Um die Differentialquotienten der Ausgleichskurven $T_1(t)$ und $T_2(t)$ müssen die Funktionen abgeleitet werden zu der Form aus Gleichung (24).

$$\frac{dT(t)}{dt} = 3At^2 + 2Bt + C \quad (24)$$

$T_1 / ^\circ\text{C}$	$T_2 / ^\circ\text{C}$	t / min
21.4	21.3	0
22.2	21.3	1
23.1	21.2	2
24.3	20.1	3
25.9	18.4	4
27.8	16.6	5
29.8	14.8	6
31.7	13.0	7
33.5	11.2	8
35.4	9.6	9
37.2	8.0	10
38.8	6.3	11
40.6	4.8	12
42.2	3.4	13
43.8	2.0	14
45.3	0.8	15
46.7	0.0	16
48.1	-0.5	17
49.1	-0.9	18
50.6	-1.1	19

Tabelle 1: Messwerte der Temperaturen.

Zur Berechnung der folgenden Werte wurden diese vier Zeiten gewählt:

$$t_1 = 4 \text{ min}$$

$$t_2 = 8 \text{ min}$$

$$t_3 = 12 \text{ min}$$

$$t_4 = 16 \text{ min}$$

$dT_1(t)/dt / \text{K s}^{-1}$	$dT_2(t)/dt / \text{K s}^{-1}$	t / s
0.029 ± 0.003	-0.023 ± 0.003	240
0.031 ± 0.004	-0.030 ± 0.005	480
0.026 ± 0.005	-0.026 ± 0.007	720
0.015 ± 0.007	-0.01 ± 0.01	960

Tabelle 2: Die berechneten Differentialquotienten.

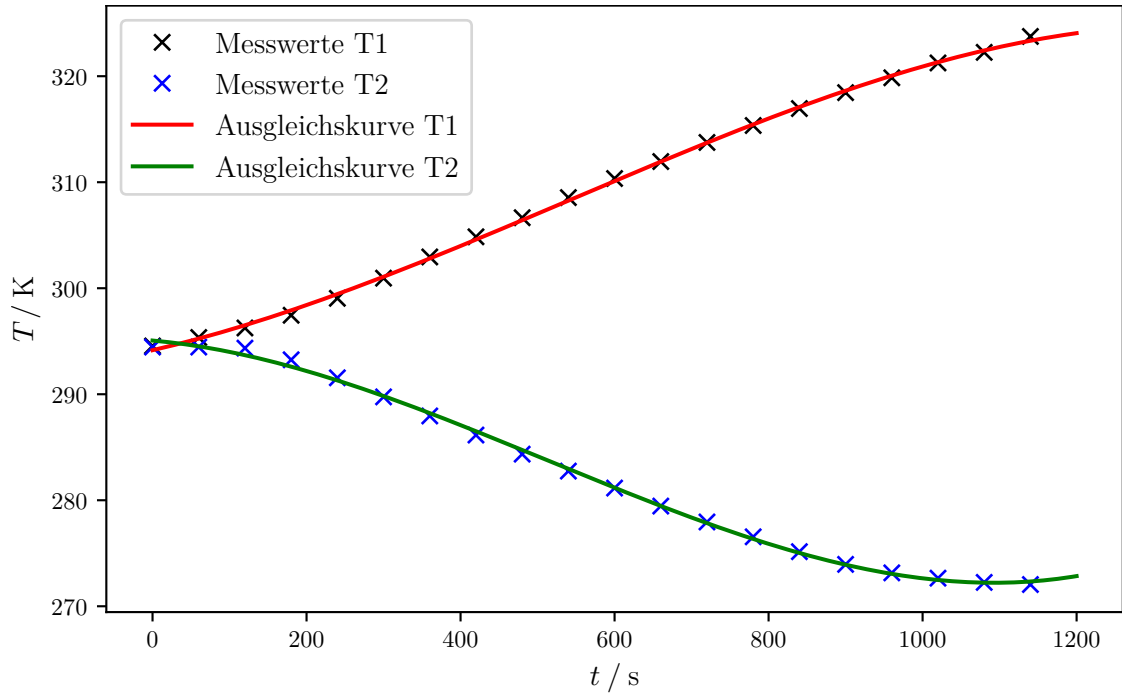


Abbildung 3: Temperaturverlauf mit Ausgleichsrechnung.

3.4. Gütezahl

Die reale Gütezahl ν wird mit Formel (25) berechnet.

$$\nu = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{dT_1(t)}{dt} \cdot \frac{1}{N} \quad (25)$$

Die Masse m_1 des Wassers wird mit Formel (26) bestimmt.

$$m_1 = \rho_{\text{Wasser}} \cdot V_1 = 0.998\,203 \text{ g cm}^{-3} (3000.0 \pm 1.2) \text{ cm}^3 = (2994.6 \pm 1.2) \text{ g} \quad (26)$$

Zur Berechnung der idealen Gütezahl wird Formel (7) genutzt.

Die Ergebnisse und gemessenen Werte für N sind dann in Tabelle 3 zu sehen.

ν	t / s	ν_{ideal}	Abweichung / %	N / W
1.93 ± 0.14	240	39.9 ± 0.7	95.2	197
1.90 ± 0.15	480	13.75 ± 0.08	85.5	204
1.87 ± 0.17	720	8.76 ± 0.03	81.0	211
1.84 ± 0.19	960	6.85 ± 0.02	87.0	210

Tabelle 3: Die berechneten Güteziffern.

3.5. Massendurchsatz

Zur Bestimmung des Massendurchsatzes werden die Formeln (11) und (12) verwendet.

Die Verdampfungswärme L wird aus einer linearen Ausgleichsrechnung wie in V203 bestimmt. Die Werte zur Aufstellung der Dampfdruckkurve sind in Tabelle 4 zu sehen.

p / bar	$T / ^\circ\text{C}$
0.37	−50
0.99	−30
2.15	−10
3.04	0
4.20	10
4.93	15
5.61	20
6.51	25
7.40	30
8.49	35
9.55	40
10.77	45

Tabelle 4: Messwerte zur Dampfdruckkurve.

Die Messwerte werden dann an die Gleichung (27) mit *curve – fit* gefittet.

$$\ln(p) = -\frac{L}{R} \cdot \frac{1}{T} + \text{const.} \quad (27)$$

Der Graph mit Messwerten und Ausgleichskurve ist in Abbildung 4 zu sehen.

Das entnommene L ist dann:

$$L = (2.09 \pm 0.01) \cdot 10^4 \text{ J mol}^{-1}.$$

Die damit berechneten Massendurchsätze sind aber bei Betrachtung der Einheiten noch ein Stoffmengen­durchsatz. Durch Multiplikation mit der molaren Masse $M_{\text{CCl}_2\text{F}_2}$ ergibt sich der Massendurchsatz. Die Ergebnisse sind dann in Tabelle 5 zu sehen.

$dm_{\text{mol}}(t)/dt / \text{mol s}^{-1}$	$dm_{\text{g}}(t)/dt / \text{g s}^{-1}$	t / s
0.015 ± 0.002	1.8 ± 0.2	240
0.019 ± 0.003	2.3 ± 0.3	480
0.016 ± 0.004	2.0 ± 0.5	720
0.007 ± 0.006	0.9 ± 0.7	960

Tabelle 5: Die berechneten Massendurchsätze.

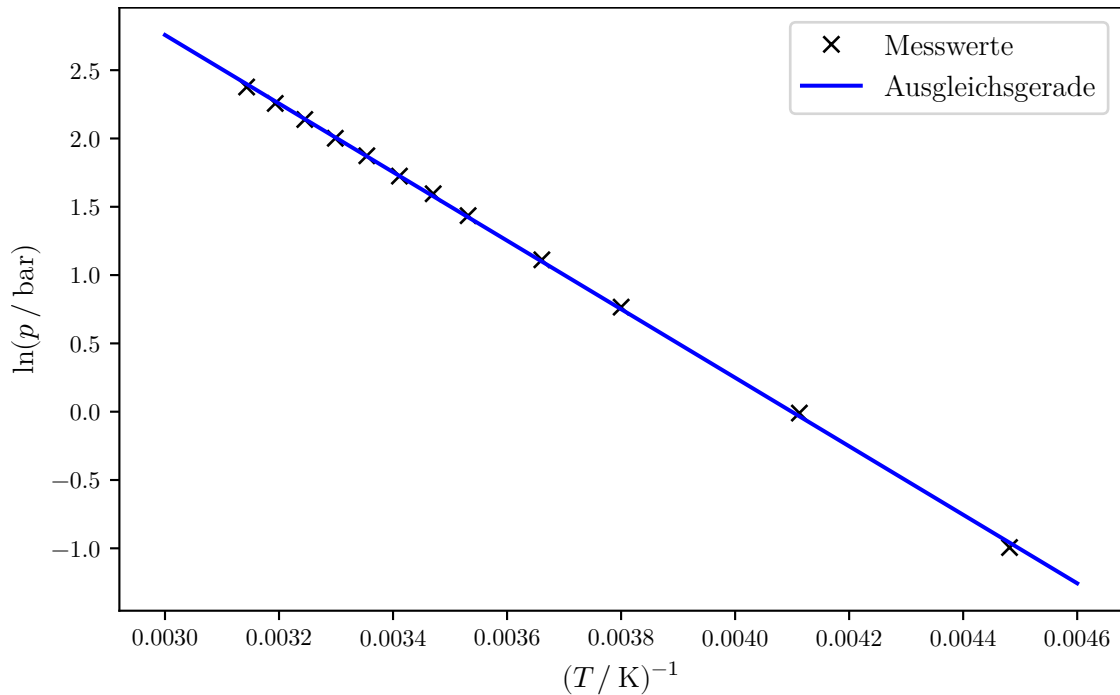


Abbildung 4: Die Dampfdruckkurve.

3.6. Mechanische Kompressorleistung

Zur Berechnung der mechanischen Kompressorleistung wird Formel (15) genutzt. Nun muss das darin enthaltende ρ bestimmt werden.

Ausgehend von der idealen Gasgleichung:

$$\begin{aligned}
 pV &= nRT \\
 \Leftrightarrow \frac{pV}{T} &= nR \\
 \text{mit } n_1R &= n_2R : \\
 \Rightarrow \frac{p_0V_0}{T_0} &= \frac{p_2V_2}{T_2} \\
 \text{mit } \rho V &= m \Leftrightarrow V = \frac{m}{\rho} : \\
 \frac{p_0m}{\rho_0T_0} &= \frac{p_2m}{\rho_2T_2} \\
 \text{mit } \rho_2 &= \rho \text{ und } p_2 = p_a \\
 \rho &= \frac{\rho_0T_0p_a}{T_2p_0}
 \end{aligned}$$

Die berechneten Werte für ρ sind in Tabelle 6 eingetragen. Daraus folgt nun für N_{mech}

die Gleichung (28).

$$N_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{T_2 p_0}{\rho_0 T_0 p_a} \frac{dm}{dt} \quad (28)$$

Damit ergeben sich dann die Werte aus Tabelle 6.

$N_{\text{mech}} / \text{W}$	t / s	p_a / bar	p_b / bar	$\rho / \text{g L}^{-1}$
30 ± 4	240	3.1	8.1	16 ± 1
46 ± 8	480	3.1	9.8	16 ± 1
44 ± 12	720	3.2	11.4	17 ± 1
22 ± 18	960	3.2	12.9	18 ± 1

Tabelle 6: Die berechneten mechanischen Kompressorleistungen mit $\sigma_{p_a} = \sigma_{p_b} = 0.2 \text{ bar}$.

4. Diskussion

Die Temperaturverläufe konnten gut angenähert werden. Der geringe Koeffizient A bei beiden Ausgleichskurven zeigt, dass der Anstieg der Temperatur fast linear zur Zeit verläuft. Die empirischen Güteziffern weichen stark von den theoretischen Werten einer idealen Wärmepumpe ab. Es können folgende Gründe angegeben werden. Zum einen arbeitet der Kompressor nicht adiabatisch, wie es bei den theoretischen Werten angenommen wird. Dann existieren auch Verluste durch Reibung an den Rohrwänden. Außerdem ist der Versuch nicht reversibel. Des Weiteren sind auch die Isolierungen nicht perfekt. Diese Fehlerquellen beeinflussen auch den Massendurchsatz und die mechanische Kompressorleistung.

Literatur

- [1] Chemie.de. *Spezifische Wärmekapazität*. 2016. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html.
- [2] TU Dortmund. *Die Wärmepumpe*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V206.pdf>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] NIST. *molar gas constant*. 2016. URL: http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?r%7Csearch_for=gas+constant.
- [5] Wikipedia. *Dichlordifluormethan*. 2016. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Dichlordifluormethan>.
- [6] Wikipedia. *Eigenschaften des Wassers*. 2016. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Eigenschaften_des_Wassers.

A. Kopie der Originaldaten