

Fortgeschrittenen Praktikum WS 15/16 - V47

# **Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern**

Carl Arne Thomann                      Jonathan Kriewald  
carlarne.thomann@udo.edu      jonathan.kriewald@udo.edu

Durchführung: 09. November Erste Abgabe: 19. November  
Zweite Abgabe: 2. Dezember

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Die klassische Theorie der Molwärme . . . . .	3
2.2	Das Einstein-Modell . . . . .	4
2.3	Das Debye-Modell . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Aufbau</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1	Messung der Molwärme . . . . .	7
5.2	Bestimmung der Debye-Temperatur . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
6.1	Fehlerdiskussion . . . . .	13
6.2	Ergebnis der Messung . . . . .	13
6.3	Verbesserungsansatz . . . . .	14
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Zielsetzung

Es wird die Molwärme, das heißt die aufgenommene Energie bei Temperatur-Erhöhung, von einer Kupferprobe experimentell bestimmt. Hierzu werden drei Theorien – das klassische Modell, das Einstein-Modell und das Debye-Modell – zunächst dargelegt und anschließend die Molwärme einer Kupferprobe bestimmt. Die Messergebnisse werden mit den Vorhersagen des Debye-Modells verglichen.

## 2 Theorie

Die Molwärme  $C$  ist eine thermodynamische Größe, die die Änderung der inneren Energie  $U$  unter Änderung der Temperatur  $T$  beschreibt. Hierzu wird zwischen den Molwärmern bei konstantem Druck

$$C_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p \quad (1)$$

und bei konstantem Volumen

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (2)$$

unterschieden. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird durch

$$C_p - C_V = 9\alpha^2 \kappa V_0 T \quad (3)$$

beschrieben, wobei  $\alpha$  der lineare Ausdehnungskoeffizient,  $\kappa$  der Kompressionsmodul und  $V_0$  das Molvolumen sind.

### 2.1 Die klassische Theorie der Molwärme

In einem kristallinen Festkörper sind die Atome durch Gitterkräfte an ihre Ruhelage gebunden. Sie können daher nur Schwingungen in den drei senkrecht aufeinander stehenden Raumrichtungen ausführen. Die kinetische Energie ist dabei nach dem Äquipartitionstheorem gleichmäßig auf die Bewegungsfreiheitsgrade verteilt. Im zeitlichen Mittel besitzen die Atome pro Freiheitsgrad eine Energie von  $\frac{1}{2}k_B T$ . Bei einer harmonischen Schwingung sind kinetische und potentielle Energie im Mittel gleich, daher wird nach klassischer Betrachtung eine mittlere Energie von

$$\langle u \rangle = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

angenommen. Im Kristall ergibt sich mit der Avogadro-Konstanten  $N_A$  bei der Teilchenzahl  $N = N_A = 1 \text{ mol}$  für die Energie im Allgemeinen

$$U = N_A \langle u \rangle \quad (4)$$

und im Weiteren für die klassische Theorie

$$U_{\text{klass}} = 3k_{\text{B}}N_{\text{A}}T = 3RT. \quad (5)$$

Damit kann die spezifische Molwärme bei konstantem Volumen mit

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \quad (6)$$

berechnet werden.

Die klassische Theorie steht im Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen. Es ist bekannt, dass die Molwärme für niedrige Temperaturen von dem Material und von der momentanen Temperatur  $T$  abhängig ist.

## 2.2 Das Einstein-Modell

Die klassische Theorie missachtet die Quantelung der Energien, insbesondere die Energiequantelung beim harmonischen Oszillator. Im Einstein-Modell wird angenommen, dass die Atome mit der Frequenz  $\omega$  schwingen und nur Energien, die ein Vielfaches von  $\hbar\omega$  sind, annehmen oder abgeben können. Zur Berechnung der mittleren Energie  $\langle u \rangle_{\text{Einstein}}$  wird im Kontrast zum Äquipartitionstheorem die Verteilung  $W(n)$  der Energien betrachtet.  $W(n)$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein harmonischer Oszillator bei der Temperatur  $T$  im thermischen Gleichgewicht die Energie  $n\hbar\omega$  besitzt. Mit der Boltzmann-Verteilung wird

$$W(n) = \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_{\text{B}}T}\right)$$

angegeben, womit

$$\langle u \rangle_{\text{Einstein}} = \frac{\sum_n W(n) \cdot E(n)}{\sum_n W(n)} = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}T}\right) - 1} < k_{\text{B}}T$$

für die mittlere Energie folgt. Durch diese Formel kann durch (2) auf die Molwärme

$$C_{V_{\text{Einstein}}} = \frac{d}{dT} 3N_{\text{A}} \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}T}\right) - 1} = 3R \frac{\hbar^2\omega^2}{k_{\text{B}}^2 T^2} \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}T}\right) - 1\right)^2}. \quad (7)$$

geschlossen werden.

Im Einklang mit dem klassischen Modell und der experimentellen Erfahrung gilt für große Temperaturen der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{V_{\text{Einstein}}} = 3R. \quad (8)$$

Dies besagt das Dulong–Petit-Gesetz. Die monofrequente Näherung stellt dennoch eine grobe Näherung dar, sodass bei tiefen Temperaturen große Abweichungen auftreten.

## 2.3 Das Debye-Modell

Zusätzlich zu den Annahmen im Einstein-Modell, wird die spektrale Verteilung  $Z(\omega)$  der Schwingungsfrequenzen  $\omega$  berücksichtigt. Es wird für die Berechnung der Energie  $U$  über alle Frequenzen integriert, sodass die Molwärme zu

$$C_V = \frac{d}{dT} \int_0^{\omega_{\max}} Z(\omega) \langle u \rangle_{\text{Einstein}} d\omega = \frac{d}{dT} \int_0^{\omega_{\max}} Z(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega \quad (9)$$

bestimmt ist. Die Verteilung  $Z(\omega)$  kann eine sehr komplizierte Gestalt haben. Wenn der Kristall weder stark dispersiv noch anisotrop ist, kann in guter Näherung angenommen werden, dass die Eigenfrequenzen in einem Würfel der Länge  $L$  abgezählt werden können. Die Spektraldichte beträgt dann mit der allgemeine Schallgeschwindigkeit  $v$

$$Z(\omega)d\omega = \frac{3L^3}{2\pi^2 v^3} \omega^2 d\omega$$

oder, wenn zwischen longitudinaler Schallgeschwindigkeit  $v_l$  und transversaler Schallgeschwindigkeit  $v_t$  unterschieden wird,

$$Z(\omega)d\omega = \frac{L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right) d\omega. \quad (10)$$

Da ein endlicher Kristall endlich viele Eigenschwingungen besitzt, kann eine obere Grenzfrequenz  $\omega_D$  berechnet werden. Unter der Annahme, der Kristall bestehe aus  $N_L$  Atomen, heißt die Grenzfrequenz  $\omega_D$  mit

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega)d\omega = 3N_L \quad (11)$$

Debye-Frequenz. Dabei ist  $N_L$  die Avogadro-Konstante. Damit ist

$$Z(\omega)d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3} \omega^2 d\omega \quad (12)$$

die Verteilungsfunktion. Es ergibt sich für die Molwärme

$$C_{V_{\text{Debye}}} = \frac{d}{dT} \left[ 9N_L k_B T \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right] = 9R \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (13)$$

mit den Abkürzungen

$$x := \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad \text{und} \quad \frac{\theta_D}{T} := \frac{\hbar\omega_D}{k_B T}$$

in der Debye-Näherung. Im Einklang mit den vorangegangenen Modellen und der experimentellen Erfahrung gilt für große Temperaturen der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{V_{\text{Einstein}}} = 3R. \quad (14)$$

Zusätzlich wird erfasst, dass die Molwärme bei tiefen Temperaturen proportional zu  $T^3$  ist. Damit ist das Debye-Modell für das Tieftemperaturverhalten eine bessere Näherung als das Einstein-Modell.

### 3 Aufbau

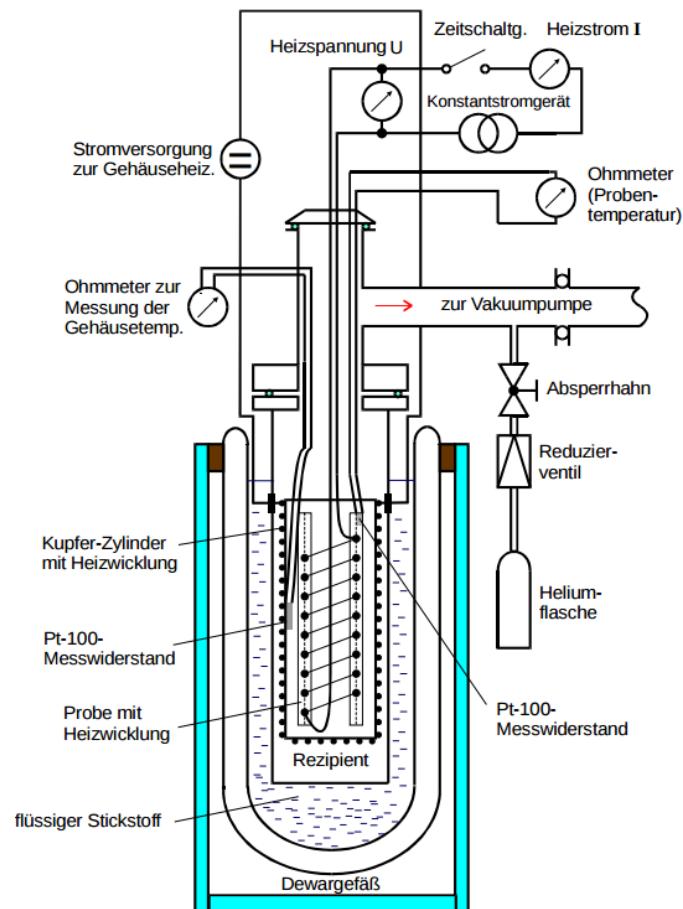


Abbildung 1: Skizzenhafter Aufbau des Versuchs. [1]

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 dargestellt. In einem *Dewargefäß* befindet sich der *Rezipient* und im Rezipienten befindet sich die *Probe mit Heizwicklung*, die von einem *Kupfer-Zylinder mit Heizwicklung* umgeben ist. Die Heizwicklungen der Probe und des Kupferzylinders sind individuell regelbar. Der Rezipient ist mit Gas befüllbar und kann mittels einer Vakuumpumpe evakuiert werden. Die Temperaturmessung von Probe und Kupferzylinder wird durch zwei *Pt-100-Messwiderständen*, je eine an beiden Heizungen, ermöglicht.

### 4 Durchführung

Es wird die Temperatur-Abhängigkeit der Molwärme  $C_p$  von Kupfer im Bereich von 80 K bis 300 K gemessen. Zum Kühlen der Probe wird der Rezipient mit gasförmigen Helium

geflutet und das Dewar-Gefäß mit flüssigem Stickstoff gefüllt. Auf diese Weise stellt sich ein Temperaturgleichgewicht zwischen Probe und Stickstoff ein und die Probe wird auf die Temperatur flüssigen Stickstoffs  $T = 77\text{ K}$  [7] gekühlt. Nach Abkühlen der Probe wird der Rezipient evakuiert. Weiter sollen während des Versuches die Temperatur der Probe und die Temperatur des die Probe umhüllenden Kupferzylinders möglichst gleich sein. Dies wird erforderlich, um Wärmeverluste durch Wärmestrahlung und Konvektion auszuschließen und die Energiebilanz der Kupferprobe auf die reine Wärme-Aufnahme zu beschränken. Über die Probenheizung kann der Probe Wärme zugeführt werden und durch den Temperaturanstieg auf die Molwärme geschlossen werden. Um die von der Probe aufgenommenen Wärme zu bestimmen, wird die Probenheizspannung  $U$ , der Probenheizstrom  $I$  und die Zeit  $t$  in Zeitintervallen notiert, in denen die Probe um 7 K bis 11 K erwärmt wird.

## 5 Auswertung

Die für die Molwärme charakteristische Materialgröße ist nach Gleichung (13) die Debye-Temperatur  $\theta_D$ . Bei den Messgeräten Ohm-, Volt- und Amperemeter sowie für die Stoppuhr wird eine Messunsicherheit abgeschätzt:

$$\sigma_R = 0.1\ \Omega$$

$$\sigma_U = 0.01\text{ V}$$

$$\sigma_I = 0.1\text{ mA}$$

$$\sigma_{\Delta t} = 0.1\text{ s}.$$

### 5.1 Messung der Molwärme

Die Molwärme  $C_V$  bei konstantem Volumen zu bestimmen, gestaltet sich experimentell schwierig. Einfacher ist es, zunächst die Molwärme  $C_p$  bei konstantem Druck zu bestimmen und diese mittels Gleichung (3) umzurechnen. Die Molwärme  $C_V$  kann mit der zugeführten Energie bestimmt werden. Diese kann aus den Werten in Tabelle 1 und Tabelle 2 mit

$$E = U \cdot I \cdot \Delta t, \quad (15)$$

$$C_p = \frac{M}{m} \cdot \frac{E}{\Delta T} \quad (16)$$

berechnet werden. Dabei bezeichnen  $E$  die zugeführte Energie,  $U$  die Spannung,  $I$  die Stromstärke,  $\Delta t$  das Zeitintervall,  $\Delta T$  den Temperaturunterschied,  $M$  die molare Masse und  $m$  die Probenmasse. In Tabelle 2 sind außer den bereits genannten Größen die berechneten Molwärmen eingetragen. Die durch Messunsicherheiten entstehenden Fehler

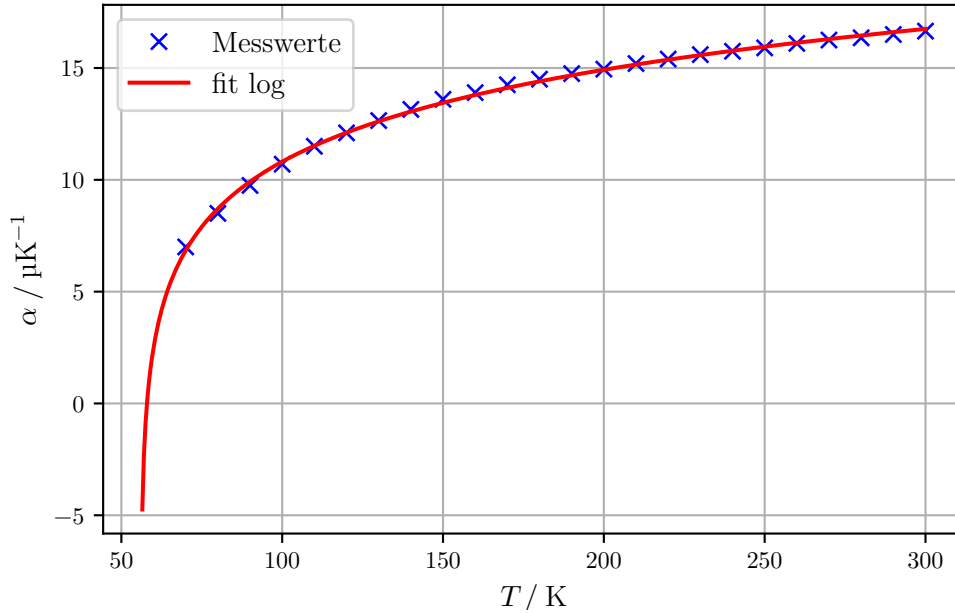
werden über Gauß mit den folgenden Fehlerformeln berechnet:

$$\begin{aligned}\sigma_E &= \sqrt{I^2 U^2 \sigma_{\Delta T}^2 + I^2 \Delta T^2 \sigma_U^2 + U^2 \Delta T^2 \sigma_I^2} \\ \sigma_{C_p} &= \sqrt{\frac{E^2 M^2 \sigma_{\Delta T}^2}{\Delta T^4 m^2} + \frac{M^2 \sigma_E^2}{\Delta T^2 m^2}} \\ \sigma_{C_V} &= \sqrt{324 T^2 V_0^2 \alpha^2 \kappa^2 \sigma_\alpha^2 + 81 V_0^2 \alpha^4 \kappa^2 \sigma_T^2 + \sigma_{C_p}^2}.\end{aligned}$$

Der lineare Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  ist in Tabelle 3 eingetragen. Um diese genauer an die gemessenen Temperaturen anzupassen, wurden diese logarithmisch mit

$$\alpha_{\text{fit}}(T) = a \cdot \log(b \cdot T + c)$$

gefittet. Die Fitparameter sind dabei  $a = (-28 \pm 3) \text{ K}^{-1}$ ,  $b = (0.52 \pm 0.05) \text{ K}^{-1}$  und  $c = (3.47 \pm 0.07) \cdot 10^{-6}$ . Der Fit für  $\alpha$  ist in Abbildung 2 zu sehen. Zur Illustration



**Abbildung 2:** Der Fit für den linearen Ausdehnungskoeffizienten.

und zur Übersicht, sind die Werte für  $C_V$  und  $C_p$  in Abbildung 3 in Abhängigkeit von der, über den Messwiderstand berechneten, Temperatur geplottet. Die Einheiten für  $C_V$  und  $C_p$  wurden in den Tabellen aus Platzgründen bewusst weggelassen und werden hier separat angegeben:

$$[C_V] = [C_p] = \text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$



**Tabelle 1:** Die aufgenommene Wärmemenge berechnet mit den Messwerten für Strom und Spannung.

$U / \text{V}$	$I / \text{mA}$	$\Delta t / \text{s}$	$E / \text{J}$
$13.9 \pm 0.01$	$133.5 \pm 0.1$	$322.2 \pm 0.1$	$597.9 \pm 0.6$
$18.8 \pm 0.01$	$179.5 \pm 0.1$	$270.1 \pm 0.1$	$911.6 \pm 0.8$
$19.9 \pm 0.01$	$190.5 \pm 0.1$	$252.4 \pm 0.1$	$956.9 \pm 0.8$
$18.8 \pm 0.01$	$179.0 \pm 0.1$	$273.9 \pm 0.1$	$921.8 \pm 0.8$
$18.9 \pm 0.01$	$179.3 \pm 0.1$	$277.6 \pm 0.1$	$938.1 \pm 0.8$
$18.9 \pm 0.01$	$179.5 \pm 0.1$	$282.9 \pm 0.1$	$959.8 \pm 0.8$
$18.9 \pm 0.01$	$179.5 \pm 0.1$	$297.5 \pm 0.1$	$1009.2 \pm 0.8$
$18.9 \pm 0.01$	$179.7 \pm 0.1$	$319.2 \pm 0.1$	$1084.0 \pm 0.9$
$19.0 \pm 0.01$	$179.8 \pm 0.1$	$322.8 \pm 0.1$	$1102.7 \pm 0.9$
$19.0 \pm 0.01$	$179.9 \pm 0.1$	$393.6 \pm 0.1$	$1345.2 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.0 \pm 0.1$	$366.2 \pm 0.1$	$1252.5 \pm 1.0$
$19.0 \pm 0.01$	$180.0 \pm 0.1$	$367.2 \pm 0.1$	$1255.9 \pm 1.0$
$19.0 \pm 0.01$	$180.0 \pm 0.1$	$366.2 \pm 0.1$	$1252.5 \pm 1.0$
$19.0 \pm 0.01$	$180.0 \pm 0.1$	$354.0 \pm 0.1$	$1210.7 \pm 1.0$
$19.0 \pm 0.01$	$180.0 \pm 0.1$	$378.0 \pm 0.1$	$1292.8 \pm 1.0$
$19.0 \pm 0.01$	$180.2 \pm 0.1$	$398.7 \pm 0.1$	$1365.1 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.2 \pm 0.1$	$412.1 \pm 0.1$	$1410.8 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.2 \pm 0.1$	$382.8 \pm 0.1$	$1310.8 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.3 \pm 0.1$	$402.2 \pm 0.1$	$1377.8 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.3 \pm 0.1$	$401.6 \pm 0.1$	$1375.6 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.3 \pm 0.1$	$435.0 \pm 0.1$	$1490.2 \pm 1.2$
$19.0 \pm 0.01$	$180.4 \pm 0.1$	$407.0 \pm 0.1$	$1395.2 \pm 1.1$
$19.0 \pm 0.01$	$180.4 \pm 0.1$	$382.9 \pm 0.1$	$1312.4 \pm 1.1$

## 5.2 Bestimmung der Debye-Temperatur

Um die Debye-Temperatur  $\theta_D$  zu bestimmen, kann die Gleichung (13) genutzt werden. Die Zahlenwerte der Debye Funktion sind in Tabelle 4 zu sehen. Die Werte können abgelesen und zur weiteren Berechnung genutzt werden. Diese sind in Tabelle 5 eingetragen. Die Debye-Temperatur kann mittels (13) berechnet werden. Es ergibt sich ein Mittelwert von

$$\theta_D = \frac{\theta_D}{T} \cdot T = (352.8 \pm 0.6) \text{ K}$$

für die Debye-Temperatur mit der Messunsicherheit nach

$$\sigma_{\theta_D} = \sigma_T \cdot \frac{\theta_D}{T},$$

wobei die Werte nach Tabelle 4 als fehlerfrei angesehen werden.

**Tabelle 2:** Die Messwerte und die berechneten Werte für die Wärmekapazitäten, die Messung startet bei  $R=(27.1 \pm 0.1) \Omega$  und  $T=(85.29 \pm 0.24) \text{ K}$ .

$R / \Omega$	$T / \text{K}$	$\Delta T / \text{K}$	$C_P/[C_P]$	$C_V/[C_V]$
$31.3 \pm 0.1$	$93.3 \pm 0.2$	$8.0 \pm 0.3$	$13.7 \pm 0.6$	$13.8 \pm 0.6$
$35.5 \pm 0.1$	$103.3 \pm 0.2$	$10.0 \pm 0.3$	$16.9 \pm 0.6$	$17.0 \pm 0.6$
$39.6 \pm 0.1$	$113.3 \pm 0.2$	$10.0 \pm 0.3$	$17.6 \pm 0.6$	$17.7 \pm 0.6$
$43.8 \pm 0.1$	$123.2 \pm 0.2$	$9.8 \pm 0.3$	$17.3 \pm 0.6$	$17.4 \pm 0.6$
$47.9 \pm 0.1$	$133.3 \pm 0.2$	$10.1 \pm 0.3$	$17.1 \pm 0.6$	$17.2 \pm 0.6$
$52.0 \pm 0.1$	$143.2 \pm 0.2$	$9.9 \pm 0.3$	$17.8 \pm 0.6$	$18.0 \pm 0.6$
$56.1 \pm 0.1$	$153.1 \pm 0.2$	$10.0 \pm 0.3$	$18.6 \pm 0.7$	$18.8 \pm 0.6$
$60.0 \pm 0.1$	$163.2 \pm 0.2$	$10.0 \pm 0.3$	$19.9 \pm 0.7$	$20.1 \pm 0.7$
$64.3 \pm 0.1$	$172.7 \pm 0.2$	$9.6 \pm 0.3$	$21.1 \pm 0.8$	$21.4 \pm 0.8$
$68.3 \pm 0.1$	$183.3 \pm 0.2$	$10.6 \pm 0.3$	$23.3 \pm 0.8$	$23.6 \pm 0.8$
$72.3 \pm 0.1$	$193.2 \pm 0.2$	$9.9 \pm 0.3$	$23.2 \pm 0.8$	$23.5 \pm 0.8$
$76.3 \pm 0.1$	$203.1 \pm 0.2$	$9.9 \pm 0.4$	$23.1 \pm 0.8$	$23.5 \pm 0.8$
$80.3 \pm 0.1$	$213.1 \pm 0.3$	$10.0 \pm 0.4$	$22.9 \pm 0.8$	$23.3 \pm 0.8$
$84.2 \pm 0.1$	$223.1 \pm 0.3$	$10.0 \pm 0.4$	$22.0 \pm 0.8$	$22.4 \pm 0.8$
$88.2 \pm 0.1$	$233.0 \pm 0.3$	$9.8 \pm 0.4$	$24.0 \pm 0.9$	$24.5 \pm 0.9$
$92.1 \pm 0.1$	$243.1 \pm 0.3$	$10.1 \pm 0.4$	$24.6 \pm 0.9$	$25.1 \pm 0.9$
$96.1 \pm 0.1$	$253.0 \pm 0.3$	$9.9 \pm 0.4$	$26.0 \pm 1.0$	$26.5 \pm 1.0$
$100.0 \pm 0.1$	$263.2 \pm 0.3$	$10.2 \pm 0.4$	$23.3 \pm 0.8$	$23.9 \pm 0.8$
$103.9 \pm 0.1$	$273.1 \pm 0.3$	$10.0 \pm 0.4$	$25.1 \pm 0.9$	$25.7 \pm 0.9$
$107.8 \pm 0.1$	$283.1 \pm 0.3$	$10.0 \pm 0.4$	$24.9 \pm 0.9$	$25.5 \pm 0.9$
$111.7 \pm 0.1$	$293.2 \pm 0.3$	$10.1 \pm 0.4$	$26.9 \pm 1.0$	$27.5 \pm 1.0$
$115.5 \pm 0.1$	$303.3 \pm 0.3$	$10.1 \pm 0.4$	$25.0 \pm 0.9$	$25.7 \pm 0.9$

Aus der Forderung (11) kann die Debye-Temperatur für ein gegebenes Material auch bestimmt werden. Dazu wird das Integral über die Verteilungsfunktion  $Z(\omega)$  (10) ausgeführt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega_D} \frac{L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left( \frac{1}{v_1^3} + \frac{2}{v_{\text{tr}}^3} \right) d\omega &\stackrel{!}{=} 3N_L \\
\frac{L^3}{6\pi^2} \omega_D^3 \left( \frac{1}{v_1^3} + \frac{2}{v_{\text{tr}}^3} \right) &= 3N_L \\
\left[ \frac{18\pi^2 N_L}{L^3} \left( \frac{1}{v_1^3} + \frac{2}{v_{\text{tr}}^3} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} &= \omega_D.
\end{aligned}$$

Die Größe  $L$  ist die Länge der Probe, welche nicht gegeben ist. Diese kann aber mittels

**Tabelle 3:** Die angegebenen Werte für den linearen Ausdehnungskoeffizienten [1].

$T / \text{K}$	$\alpha / \mu\text{K}^{-1}$
70	7.00
80	8.50
90	9.75
100	10.70
110	11.50
120	12.10
130	12.65
140	13.15
150	13.60
160	13.90
170	14.25
180	14.50
190	14.75
200	14.95
210	15.20
220	15.40
230	15.60
240	15.75
250	15.90
260	16.10
270	16.25
280	16.35
290	16.50
300	16.65

einer Umrechnung der Loschmidtschen Zahl  $N_L$  eliminiert werden. Es ergibt sich:

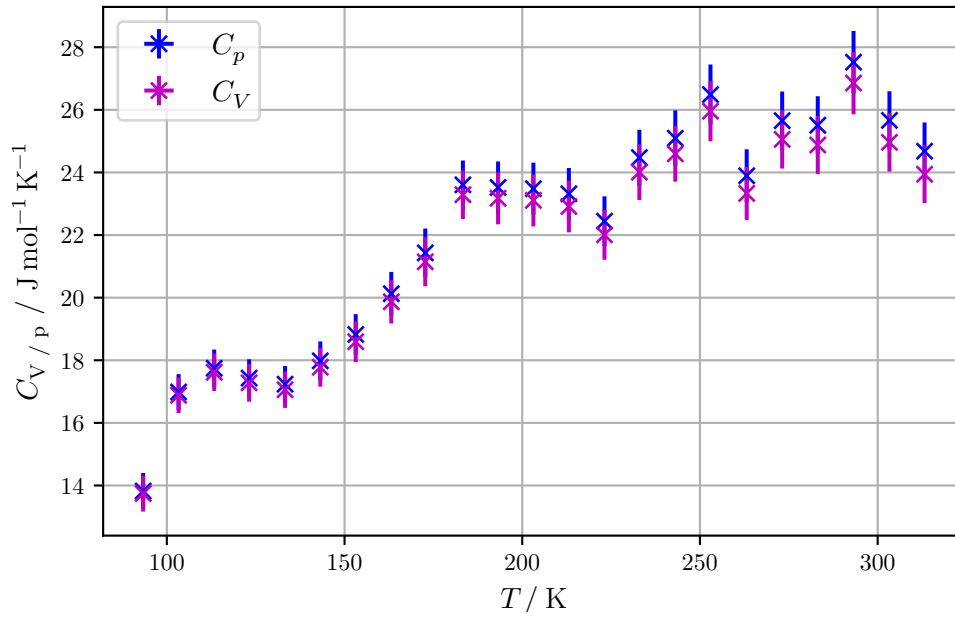
$$L^3 = V = \frac{m}{\rho_{\text{Cu}}} \quad N_L = N_A \frac{m}{M}$$

$$\Rightarrow \frac{N_L}{L^3} = N_A \frac{\rho_{\text{Cu}}}{M}.$$

Dabei ist  $N_A$  die Avogadrokonstante. Mit den Werten  $m = 342 \text{ g}$ ,  $v_l = 4.7 \text{ km s}^{-1}$  und  $v_{\text{tr}} = 2.26 \text{ km s}^{-1}$  kann über

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} = \frac{\hbar}{k_B} \left[ \frac{18\pi^2 \rho_{\text{Cu}} N_A}{M} \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{\text{tr}}^3} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} = 331.991 \text{ K}$$

bestimmt werden. Dabei sind  $k_B$  die Boltzmannkonstante und  $\hbar$  das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum.



**Abbildung 3:** Die Molwärmen in Abhängigkeit von der Temperatur.

$\Theta_D/T$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	24,9430	24,9310	24,8930	24,8310	24,7450	24,6340	24,5000	24,3430	24,1630	23,9610
1	23,7390	23,4970	23,2360	22,9560	22,6600	22,3480	22,0210	21,6800	21,3270	20,9630
2	20,5880	20,2050	19,8140	19,4160	19,0120	18,6040	18,1920	17,7780	17,3630	16,9470
3	16,5310	16,1170	15,7040	15,2940	14,8870	14,4840	14,0860	13,6930	13,3050	12,9230
4	12,5480	12,1790	11,8170	11,4620	11,1150	10,7750	10,4440	10,1190	9,8030	9,4950
5	9,1950	8,9030	8,6190	8,3420	8,0740	7,8140	7,5610	7,3160	7,0780	6,8480
6	6,6250	6,4090	6,2000	5,9980	5,8030	5,6140	5,4310	5,2550	5,0840	4,9195
7	4,7606	4,6071	4,4590	4,3160	4,1781	4,0450	3,9166	3,7927	3,6732	3,5580
8	3,4468	3,3396	3,2362	3,1365	3,0403	2,9476	2,8581	2,7718	2,6886	2,6083
9	2,5309	2,4562	2,3841	2,3146	2,2475	2,1828	2,1203	2,0599	2,0017	1,9455
10	1,8912	1,8388	1,7882	1,7393	1,6920	1,6464	1,6022	1,5596	1,5184	1,4785
11	1,4400	1,4027	1,3667	1,3318	1,2980	1,2654	1,2337	1,2031	1,1735	1,1448
12	1,1170	1,0900	1,0639	1,0386	1,0141	0,9903	0,9672	0,9449	0,9232	0,9021
13	0,8817	0,8618	0,8426	0,8239	0,8058	0,7881	0,7710	0,7544	0,7382	0,7225
14	0,7072	0,6923	0,6779	0,6638	0,6502	0,6368	0,6239	0,6113	0,5990	0,5871
15	0,5755	0,5641	0,5531	0,5424	0,5319	0,5210	0,5117	0,5020	0,4926	0,4834

**Tabelle 4:** Werte der Debye-Funktion.

**Tabelle 5:** Die Debye-Temperatur.

$T / \text{K}$	$C_V / [C_V]$	$\frac{\theta_D}{T}$	$\theta_D / \text{K}$
$93.3 \pm 0.2$	$13.7 \pm 0.6$	3.7	$345.2 \pm 0.8$
$103.3 \pm 0.2$	$16.9 \pm 0.6$	2.9	$299.6 \pm 0.7$
$113.3 \pm 0.2$	$17.6 \pm 0.6$	2.7	$315.9 \pm 0.5$
$123.2 \pm 0.2$	$17.3 \pm 0.6$	2.8	$345.0 \pm 0.6$
$133.3 \pm 0.2$	$17.1 \pm 0.6$	2.9	$386.6 \pm 0.6$
$143.2 \pm 0.2$	$17.8 \pm 0.6$	2.7	$386.6 \pm 0.5$
$153.1 \pm 0.2$	$18.6 \pm 0.7$	2.5	$382.8 \pm 0.5$
$163.2 \pm 0.2$	$19.9 \pm 0.7$	2.2	$359.0 \pm 0.4$

## 6 Diskussion

### 6.1 Fehlerdiskussion

Nach Abschnitt 4 wird die Angleichung der Temperaturen von Probe und Probengehäuse gefordert. Da das Heizsystem des Gehäuses nicht an die Probenheizung angepasst arbeitet, muss es von Hand eingestellt und gegebenenfalls nachjustiert werden. Weiterhin reagiert das System träge auf Leistungsanpassungen. Es konnte daher die obige Forderung nicht mit Sicherheit gewährleistet werden und somit ist von störenden Effekten, die das Ergebnis beeinflussen, auszugehen. Weitere Probleme, die nur durch das Innenleben des Rezipienten einsichtig würden, können hier nicht diskutiert werden, da dieser als Blackbox behandelt werden musste.

### 6.2 Ergebnis der Messung

Für die Debye-Temperatur wurden für Kupfer der angegebenen Masse folgende Werte gefunden.

$$\theta_{D, \text{Messung}} = (352.7 \pm 0.6) \text{ K}, \quad (17)$$

$$\theta_{D, \text{Th.}} = 331.991 \text{ K}, \quad (18)$$

Mit dem Literaturwert [4]

$$\theta_{D, \text{Lit.}} = 345 \text{ K} \quad (19)$$

ergeben sich die prozentualen Abweichungen

$$\Delta\theta_D = 15,65\%, \quad (20)$$

$$\Delta\theta_{D, \text{Th.}} = 4,05\%. \quad (21)$$

Dies sind vertretbare Abweichungen im Rahmen einer nicht aufwendig vorbereiteten Messung, obgleich der Literaturwert nicht in der einfachen Standardabweichung von  $\theta_D$  liegt.

Die Molwärme als solche ist keine in Standardwerken aufgeführte Größe, da sie von der Probenmenge abhängt. Die spezifische Wärmekapazität ist eine Materialkonstante und wird als Molwärme pro Masse definiert. Die spezifische Wärmekapazität ist wie die Molwärme von der Temperatur abhängig und wird in Tabellenwerken bei fester Temperatur angegeben. Der Vergleich der experimentell bestimmten Molwärme erfolgt mit der spezifischen Wärmekapazität und der molaren Masse  $M_{\text{Kupfer}} = 63.55 \text{ g mol}^{-1}$  zu

$$C_p = (25.0 \pm 0.9) \text{ J K}^{-1} \quad (22)$$

$$C_{p, \text{Lit.}} = c_{p, \text{Lit.}} \cdot M_{\text{Kupfer}} = 24.21 \text{ J K}^{-1}, \quad (23)$$

$$(24)$$

bei Raumtemperatur, woraus sich die Abweichung

$$\Delta C_p = 3,26\% \quad (25)$$

ergibt. Die geringe Abweichung lässt auf ein zufriedenstellenden Aufbau und Durchführung des Experimentes schließen.

Mit den Ergebnissen des Experimentes, aufbauend auf die Debye-Theorie in Abschnitt 2.3, kann diese als gute Näherung erkannt werden.

### 6.3 Verbesserungsansatz

Der Aufbau des Experimentes könnte durch selbstständige, abgestimmte Heizsysteme und digitalisierte Zeitaufnahme optimiert werden. Hierdurch würden Fehler, die auf die Durchführung zurückzuführen sind, ausgeschlossen werden.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/V47.pdf> (besucht am 30.11.2015).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. „SciPy: Open source scientific tools for Python“. Version 0.16.0. In: (). URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Charles Kittel. *Einführung in die Festkörperphysik*. Oldenbourg Verlag, 2005.
- [5] Eric O. Lebigot. „Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties“. Version 2.4.6.1. In: (). URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [7] WebElements. *Nitrogen*. URL: <http://www.webelements.com/nitrogen/> (besucht am 30.11.2015).