

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>2</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>2</b>
2.1 Das Wasserstoff-Atom . . . . .	2
2.1.1 Das quantenmechanische Modell . . . . .	2
2.1.2 Das akustische Modell . . . . .	3
2.1.3 Gemeinsamkeiten und Unterschiede . . . . .	4
2.2 Das $H_2^+$ -Molekül . . . . .	4
2.3 Der eindimensionale Festkörper . . . . .	5
<b>3 Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1 Vorbereitende Messungen . . . . .	7
3.2 Das H-Atom . . . . .	7
3.3 Das $H_2^+$ -Molekül . . . . .	8
3.4 Der eindimensionale Festkörper . . . . .	8
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1 Vorbereitende Experimente . . . . .	9
4.2 Das Wasserstoffatom . . . . .	9
4.3 Das Wasserstoffmolekül . . . . .	13
4.4 Der eindimensionaler Festkörper . . . . .	15
<b>5 Diskussion</b>	<b>20</b>
<b>Literatur</b>	<b>22</b>
<b>6 Anhang</b>	<b>22</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuchs ist die Untersuchung verschiedener akustischer Resonatoren mit Hinblick auf Analogien und Unterschiede zu ähnlichen, quantenmechanischen Systemen.

## 2 Theorie

Im Folgenden werden verschiedene quantenmechanische Modelle, sowie der jeweilige akustische Aufbau erläutert. Hierbei wird vor allem auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Modelle eingegangen.

### 2.1 Das Wasserstoff-Atom

In diesem Abschnitt sollen das quantenmechanische Modell eines Wasserstoffatoms und das Verhalten von Schallwellen in einem Kugelresonator erläutert werden, sowie Analogien und Unterschiede der beiden Systeme betrachtet werden.

#### 2.1.1 Das quantenmechanische Modell

Ein Wasserstoff-Atom besteht aus einem Proton, welches den Atomkern bildet, und einem Elektron, das den Kern umgibt. Zur Bestimmung der Wellenfunktion  $\Psi$  des Elektrons muss die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E\Psi = \Delta\Psi + V(\vec{r})\Psi$$

gelöst werden, wobei  $E$  die Energie,  $\Delta$  der Laplace-Operator, und  $V(\vec{r})$  das Potential, in dem sich ein Teilchen befindet, ist. Im Falle des H-Atoms handelt es sich bei dem Potential um das Coulomb-Potential

$$V(\vec{r}) = V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

des Atomkerns mit dem Abstand des Elektrons vom Atomkern  $r = |\vec{r}|$ , wobei  $\vec{r}$  der Ortsvektor des Elektrons ist, der elektrischen Feldkonstante  $\epsilon_0$  und der Elementarladung  $e$ . Aufgrund der Kugelsymmetrie des Systems bieten sich sphärische Koordinaten an. Mit Hilfe des Separationsansatz

$$\Psi(r, \phi, \theta) = R(r) u(\phi, \theta)$$

finden sich so zwei unabhängige Bewegungsgleichungen

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) u(\phi, \theta) = -l(l+1) u(\phi, \theta)$$

und

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right) R(r) = 0 \quad (1)$$

für den Winkelanteil  $u(\phi, \theta)$  und den Radialanteil  $R(r)$ . Lösung der ersteren sind die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2)$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l,$$

wobei  $l$  die Bahndrehimpuls- und  $m$  die magnetische Quantenzahl sind. Letztere wird gelöst durch die Funktionen

$$R_{nl}(r) = - \left( \frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{na_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2r}{na_0} \right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1} \left( \frac{2r}{na_0} \right)$$

mit den zugeordneten Laguerre-Polynomen

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}),$$

dem Bohr'schen Atomradius  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$  und der Hauptquantenzahl  $n = N + l + 1$ , wobei  $N$  die radiale Quantenzahl ist.

Die Energie eines Zustandes ist definiert über

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \quad (3)$$

mit der Rydberg-Energie  $E_R = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}$ .

### 2.1.2 Das akustische Modell

Zur akustischen Modellierung des H-Atoms wird ein Kugelresonator genutzt. Schallwellen in solch einem Resonator unterliegen der Helmholtz-Gleichung

$$\Delta p(r, \phi, \theta) = -\frac{\omega^2}{c^2} p(r, \phi, \theta)$$

mit dem Schalldruck  $p(r, \phi, \theta)$ , dem Laplace-Operator  $\Delta$ , der Schallgeschwindigkeit  $c$  und der Kreisfrequenz  $\omega$ . Mit Hilfe eines Separationsansatzes lassen sich auch hier der Winkel- und Radialteil separieren, wobei die Bewegungsgleichung des Winkelanteils identisch zu der des Winkelanteils des H-Atoms ist und demnach auch durch die Kugelflächenfunktionen (2) gelöst wird. Für den Radialteil ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$-k^2 f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} f(r). \quad (4)$$

### 2.1.3 Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Da die Winkelanteile der Bewegungsgleichungen beider Systeme identisch sind, eignen sich die Quantenzahlen  $l$  und  $m$  zur Beschreibung der Wellen in beiden Systemen. Wie im Vergleich von Gleichung (1) und (4) zu sehen ist, unterscheiden sich die Radialteile der Bewegungsgleichungen beider Systeme und demnach ist die radiale Quantenzahl  $n'$  des einen Systems nicht mit der des anderen gleichzusetzen. Weiterhin lässt sich für das akustische Modell keine Hauptquantenzahl einführen, da dies ein Effekt des Coulomb-Potentials im quantenmechanischen Modell ist. Daher ist auch nur im quantenmechanischen Modell eine Entartung der Energieeigenwerte in  $l$  zu beobachten, weshalb sie nur von  $n$  abhängen, wie in Gleichung (3) zu sehen ist. In beiden Systemen ist allerdings eine Entartung in  $m$  zu beobachten. Da  $-l \leq m \leq l$  gilt, sind Zustände  $(n', l)$  bzw.  $(n, l)$   $(2l + 1)$ -fach entartet. Diese Entartung lässt sich durch Brechung der Kugelsymmetrie aufheben, was im akustischen Modell durch Einfügen eines Ringes zwischen die beiden Hälften des Kugelresonators erreicht werden kann. Ohne diesen Ring kann im Kugelresonator nur der Zustand  $m = 0$  gemessen werden, da nur diese Wellenfunktion auf der Quantisierungsachse, die durch die Lautsprecherposition bestimmt ist, eine von null verschiedene Amplitude hat.

## 2.2 Das $H_2^+$ -Molekül

Beim  $H_2^+$ -Molekül wird ein einzelnes Elektron im Potential zweier H-Atome betrachtet. Dieses System ist zylindersymmetrisch bezüglich der Achse, die durch die beiden Atomkerne verläuft. Daher ist  $m$  auch eine geeignete Quantenzahl zur Beschreibung des Moleküls. Für  $m = 0$  wird ein Zustand mit  $\sigma$  bezeichnet, für  $m = 1$  und  $m = 2$  werden  $\pi$  und  $\delta$  verwendet. Die Quantenzahl  $l$  hingegen eignet sich nicht zur Beschreibung des Moleküls, da mit einem kontinuierlichen Übergang der Atomorbitale zum Molekülorbital als Funktion des Kernabstandes zu rechnen ist. Zur Klassifizierung von Zuständen mit gleicher Symmetrie, aber ansteigender Energie, wird eine Hauptquantenzahl eingeführt. Weiterhin wird zwischen Atomorbitalen mit gleichem und entgegengesetzten Vorzeichen bzw. einer Phasenverschiebung von  $0^\circ$  und  $180^\circ$  unterschieden. Bei gleichem Vorzeichen werden die Zustände gerade oder bindend genannt und mit einem Index  $g$  gekennzeichnet, ungerade, oder auch anti-bindende Zustände werden mit dem Index  $u$  gekennzeichnet. Zur akustischen Modellierung des  $H_2^+$ -Moleküls werden zwei Kugelresonatoren aneinander gekoppelt, wobei der Kernabstand durch Irisblenden verschiedenen Durchmessers zwischen den Öffnungen der beiden Resonatoren simuliert wird. Die Vorzeichen der stehenden Wellen in beiden Resonatoren können als Phasenverschiebung betrachtet werden, es können also sowohl gerade, als auch ungerade Zustände beobachtet werden. Auch die Hauptquantenzahl und die Quantenzahl  $m$  können zur Beschreibung der Eigenzustände genutzt werden, wobei die unterschiedlichen Bedingungen in beiden Systemen zu anderen Reihenfolgen der Eigenzustände führt. Außerdem ist der Grundzustand  $1\sigma_g[1s]$  im akustischen Modell aufgrund der Neumann-Randbedingungen nicht zu beobachten.

### 2.3 Der eindimensionale Festkörper

Beim eindimensionalen Festkörper wird ein Elektron als Materiewelle in einem Festkörper unter Ein-Elektron-Näherung betrachtet, wobei die Dispersionsrelation für das Elektron

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (5)$$

lautet. In diesem System kommt es an den Grenzen der Brillouin-Zone, also bei  $k = \pm n \frac{\pi}{a}$ , zu Bragg-Reflexion, wobei  $a$  der Abstand der Streuzentren des Festkörpers ist. An diesen Stellen kommt es zu Energiesprüngen, der übersprungene Bereich wird Bandlücke genannt.

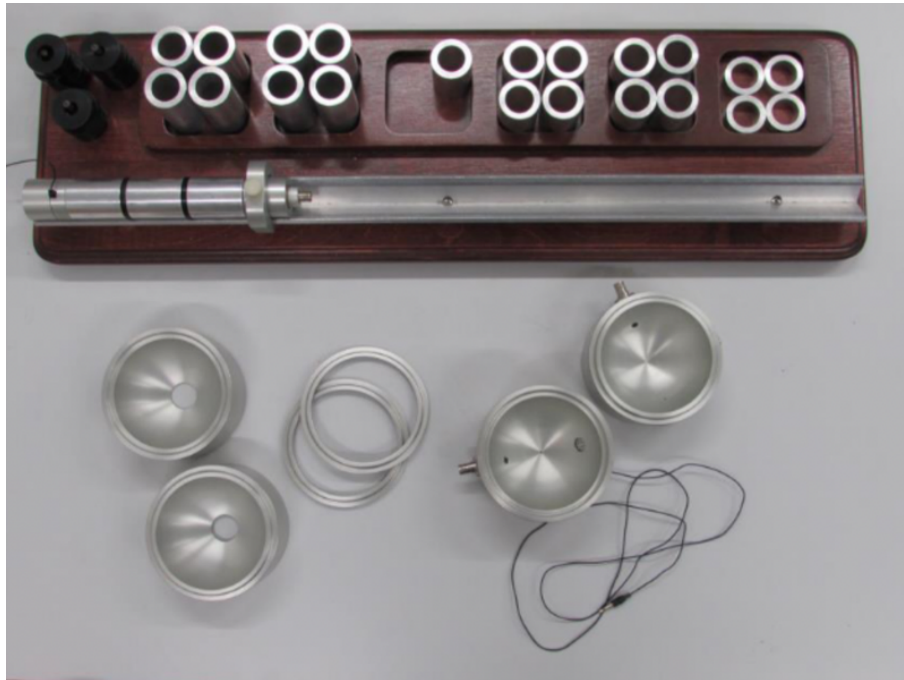
Zur akustischen Modellierung wird ein Röhrenresonator verwendet, der aus mehreren Zylindern besteht, zwischen denen jeweils eine Irisblende eingefügt wird. Die einzelnen Zylinder stellen dabei eine Elementarzelle des Festkörpers da und die Irisblenden dienen als Streuzentren. Durch das Einbauen von Zylindern abwechselnder Länge oder Irisblenden abwechselnden Durchmessers können also auch Festkörper aus zwei Atomarten oder mit verschiedenen Kopplungskonstanten simuliert werden. Außerdem lässt sich durch Auswechseln eines einzelnen Zylinders ein Gitterfehler, genauer gesagt ein Substitutionsatom, im Festkörper simulieren. Es ist allerdings zu beachten, dass die Dispersionsrelation der Schallwelle

$$f(k) = \frac{c}{2\pi} k \quad (6)$$

im Gegensatz zu der parabolischen Dispersionsrelation des Elektrons linear ist.

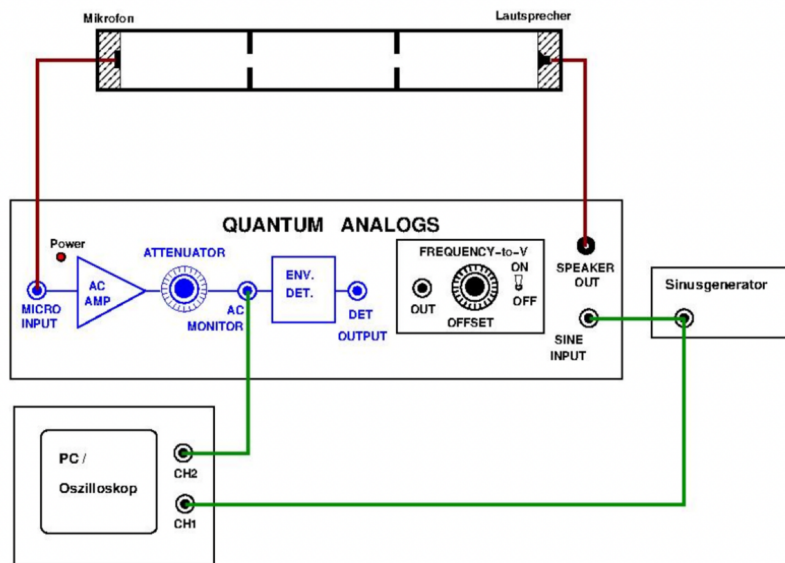
## 3 Durchführung

In Abbildung 1 sind die verwendeten Bauteile der Röhren- und Hohlraumresonatoren und die Halterung für den Röhrenresonator zu sehen.



**Abbildung 1:** Bestandteile der verwendeten Röhren- und Kugelresonatoren [3].

In jedem Teilversuch wird die Schalldruckamplitude als Funktion der Frequenz untersucht. Dies erfolgt entweder über ein eigens dafür entworfenes Programm, oder über einen Sinusgenerator und ein Oszilloskop. Für den letzteren Fall ist in Abbildung 2 die Schaltskizze zu sehen.



**Abbildung 2:** Schaltskizze zur Messung der Eigenmoden im Resonator mit einem Oszilloskop [3].

### 3.1 Vorbereitende Messungen

Zur Vorbereitung werden die Frequenzspektren von Röhrenresonatoren bestehend aus 50 mm-Zylindern von 0,1 kHz bis 12 kHz aufgenommen. Dies wird für Röhrenresonatoren bestehend aus 1–12 Resonatoren zunächst mit dem 2-Kanal-Oszilloskop und daraufhin mit dem PC getan. Bei Verwendung des Sinus-Generators wird die Sweep-Dauer auf 30 s gestellt. Daraufhin wird auch das Frequenzspektrum eines 75 mm-Zylinders mit dem PC aufgenommen.

### 3.2 Das H-Atom

Für diesen Versuchsteil wird ein Hohlraumresonator bestehend aus einer Hälfte mit einem Mikrofon und einer Hälfte mit einem Lautsprecher an den PC angeschlossen. Zunächst wird ein hochaufgelöstes Frequenzspektrum, also 50 Hz-Schritte mit 60 ms pro Schritt, im Bereich 0,1 kHz–12 kHz aufgenommen, wobei sich Lautsprecher und Mikrofon genau gegenüberstehen. Daraufhin werden am 2-Kanal-Oszilloskop Frequenz, Amplitude und Phasenverschiebung beobachtet, während der Sinusgenerator den Frequenzbereich von 100 Hz bis 10 kHz durchläuft. Dabei werden ausgewählte Resonanzfrequenzen und die dazugehörige Ordnung notiert.

Weiterhin werden hochaufgelöste Frequenzspektren als Funktion des Drehwinkels zwischen Lautsprecher und Mikrofon aufgenommen. Dies geschieht in 10°-Schritten in einem Bereich von 0° bis 180°.

Außerdem wird bei einem Winkel von 180° zwischen Mikrofon und Lautsprecher ein Frequenzspektrum im Bereich 1,8 kHz–2,6 kHz mit 1 Hz-Schritten und 60 ms pro Schritt

für Zwischenringe der Dicke 3, 6 und 9 mm aufgenommen.

Zuletzt werden mit einem 9 mm-Zwischenring Spektren im selben Frequenzbereich unter Variation des Winkels aufgenommen. Hierbei wird der Winkel wieder im Bereich  $0^\circ$ – $180^\circ$  in  $10^\circ$ -Schritten variiert.

### 3.3 Das $\text{H}_2^+$ -Molekül

In diesem Versuchteil wird das akustische Modell des  $\text{H}_2^+$ -Moleküls, also zwei gekoppelte Kugelresonatoren, untersucht. Hierzu wird zunächst das Frequenzspektrum im Bereich 2,2 kHz–2,5 kHz mit 1 Hz-Schritten und 75 ms pro Schritt mit verschiedenen Blenden zwischen den beiden Hohlraumresonatoren aufgenommen. Die verwendeten Blendendurchmesser sind 5 mm, 10 mm, 15 mm und 20 mm und der Winkel zwischen Mikrofon und Lautsprecher beträgt  $180^\circ$ .

Außerdem werden unter Verwendung der 15 mm-Blende in einem Winkelbereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  in  $10^\circ$ -Schritten Frequenzspektren im selben Frequenzbereich wie zuvor aufgenommen.

Zuletzt wird die Phasenverschiebung der Druckamplitude in der unteren und der oberen Kugel für alle Resonanzfrequenzen im untersuchten Frequenzbereich bei einem Winkel von  $180^\circ$  aufgenommen. Dies geschieht mit dem 2-Kanal-Oszilloskop.

### 3.4 Der eindimensionale Festkörper

In diesem Teilversuch wird wieder der Röhrenresonator verwendet und jegliche Frequenzspektren werden mit dem PC aufgenommen.

Zunächst wird das Frequenzspektrum eines Röhrenresonators bestehend aus zwei 50 mm-Zylindern und einer Irisblende mit einem Durchmesser von 16 mm zwischen den beiden Zylindern in einem Frequenzbereich von 0,1 kHz bis 12 kHz mit 5 Hz-Schritten und 50 mm pro Schritt aufgenommen. Der Röhrenresonator wird jeweils um eine Irisblende und einen Zylinder ergänzt und für jede Ergänzung wird das Frequenzspektrum erneut aufgenommen bis zehn Zylinder verbaut sind. Diese Messung wird wiederholt mit zwei, vier, und zehn Zylindern mit 10 mm bzw. 13 mm-Blenden dazwischen.

Daraufhin wird das Frequenzspektrum für einen Röhrenresonator bestehend aus zehn 50 mm-Zylindern und 16 mm-Blenden dazwischen aufgenommen, wobei einer der Zylinder ersetzt wird durch einen Zylinder der Länge 75 mm. Diese Messung wird wiederholt mit einem Zylinder der Länge 62,5 mm und 37,5 mm.

Weiterhin wird das Frequenzspektrum eines Röhrenresonators bestehend aus zehn Zylindern gekoppelt durch 16 mm-Blenden, wobei die Zylinder abwechselnd 50 mm und 75 mm lang sind.

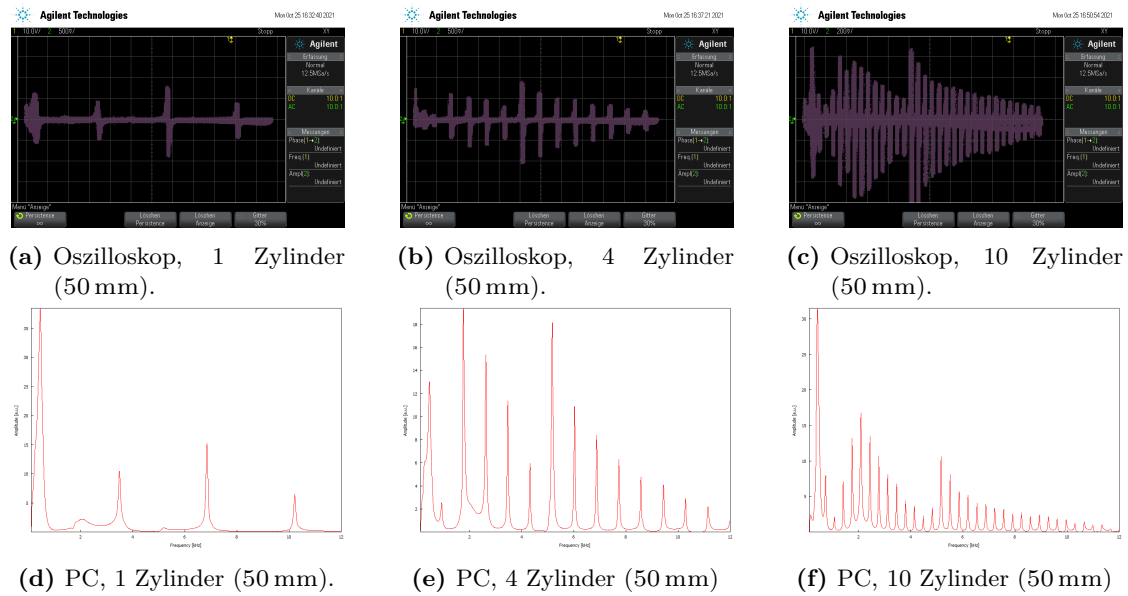
Zuletzt wird das Frequenzspektrum eines Röhrenresonators aus acht 50 mm langen Zylindern mit Irisblenden dazwischen aufgenommen, wobei die Blendendurchmesser abwechselnd 13 mm und 16 mm betragen.



## 4 Auswertung

### 4.1 Vorbereitende Experimente

In einem ersten Schritt werden die Frequenzspektren von verschiedenen Anzahlen 50 mm Zylindern im Bereich von 0,1 kHz bis 12 kHz mit dem Oszilloskop aufgenommen. Zusätzlich wird die selbe Messung mit dem PC aufgenommen; dies ist in Abbildung 3 dargestellt. Alle anderen Darstellungen sind Abbildung 20 bis Abbildung 22 zu entnehmen.

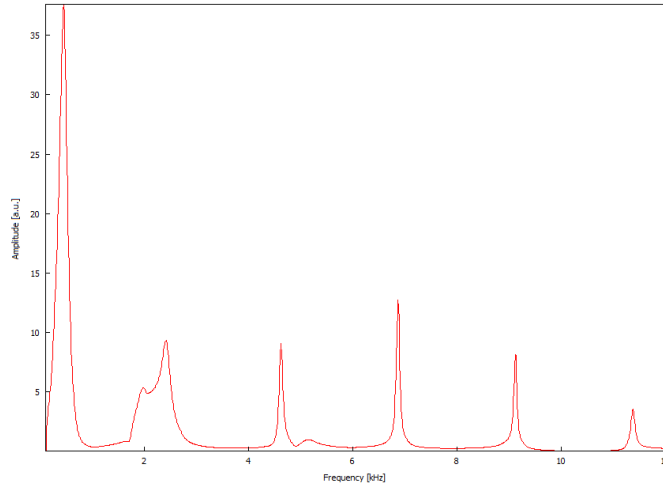


**Abbildung 3:** Das Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz bei verschiedener Anzahl von Zylinder (Länge 50 mm) aufgenommen einmal mit einem Oszilloskop und einmal mit dem PC.

Es fällt auf, dass die Resonanzfrequenzen mit mehr Zylindern ebenfalls zunehmen. Des Weiteren stimmen die Darstellungen von Oszilloskop und PC überein. Die Artefakte im niedrigen Frequenzbereich treten bei beiden Messreihen auf. Auch die Proportionalität der verschiedenen Resonanzfrequenzen ist bei den gemessenen Spektren vergleichbar. Des Weiteren ist die Auflösung des PCs erwartungsgemäß höher als die des Oszilloskopes. Abschließend wird noch ein weiteres Frequenzspektrum eines einzelnen 75 mm Zylinders am PC aufgenommen. Dieses ist in Abbildung 4 dargestellt. Es wird deutlich, dass die Anzahl der Resonanzfrequenzen nicht von der Anzahl der Zylinder, sondern von der Länge des Gesamtzylinders abhängt. Die Anzahl der Peaks ist höher als bei einem 50 mm Zylinder, aber geringer als bei zwei 50 mm Zylindern.

### 4.2 Das Wasserstoffatom

Das Frequenzspektrum des Wasserstoffmodells bei einem Winkel von  $\alpha = 180^\circ$  ist in Abbildung 5 dargestellt.



**Abbildung 4:** Frequenzspektrum eines einzelnen 75 mm Zylinders im Bereich 0,1 kHz bis 12 kHz.

Vier der Resonanzfrequenzen wurden weiter nach Phasenverschiebung, Frequenz und Amplitude untersucht. Die Daten sind in Tabelle 1 dargestellt. Auffällig ist, dass sich die Phasenverschiebung um die Resonzfrequenzen herum jeweils sehr stark verändert und beim Durchlaufen des Frequenzspektrums mehrfach einen kompletten Kreis beschreibt. Die Amplituden sind unterschiedlich hoch und nicht Deckungsgleich mit dem Spektrum in Abbildung 5.

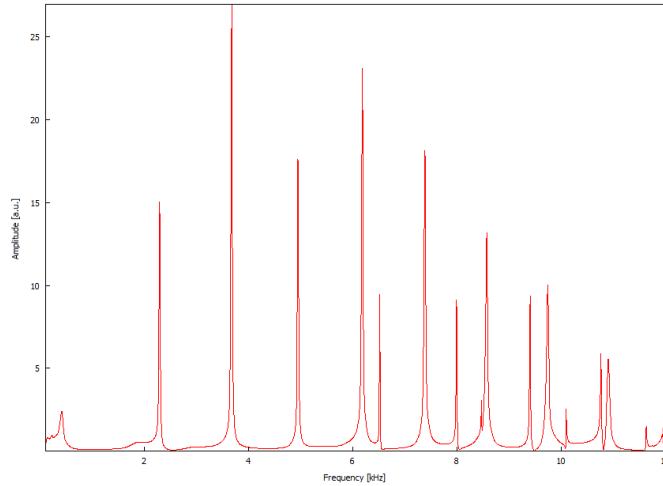
**Tabelle 1:** Frequenzen, Amplituden, Phasenverschiebung und Ordnung einiger Resonanzfrequenzen.

Ordnung	Resonanzfrequenz / kHz	Phasenverschiebung / °	Amplitude
1	0,406	-100	3,1
2	2,279	40	13,8
3	3,665	-90	39,0
7	7,379	165	42,6

Für vier der Resonanzen wird nun die Druckamplitude als Funktion des Drehwinkels  $\theta$  aufgestellt. Die hier verwendeten Resonanzfrequenzen sind die selben wie in Tabelle 1 beschrieben. Der Drehwinkel  $\theta$  ergibt sich dabei durch

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos(\alpha) - \frac{1}{2}\right),$$

wobei  $\alpha$  der Einstellwinkel des Kugelresonators ist. Zudem werden die entsprechenden Kugelflächenfunktionen (Gleichung 2) dargestellt und Werte der Druckamplitude entsprechend der Kugelflächenfunktionen normiert. Die Darstellungen der Winkelverteilun-



**Abbildung 5:** Frequenzspektrum eines Kugelresonators bei einem Winkel von  $\alpha = 180^\circ$  im Bereich 0,1 kHz bis 12 kHz.

gen der Amplituden und deren zugehörigen Kugelflächenfunktionen sind in Abbildung 6 dargestellt.

Allgemein folgen die Amplituden des Drucks dem Verlauf der Kugelflächenfunktionen zumindest ungefähr. Die größte Abweichung kann in der Resonanz 2. Ordnung beobachtet werden, in welcher die Amplituden des Drucks dem Verlauf der Kugelflächenfunktion nicht mehr komplett folgen. Abweichungen gibt es allerdings bei allen Resonanzfrequenzen, wobei erkennbar ist, dass dem Verlauf ungefähr gefolgt wird.

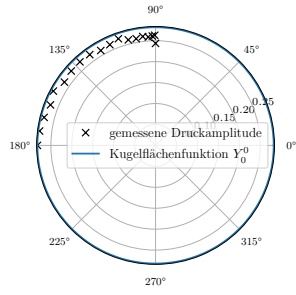
Mit dem eingesetzten Ringe von 3 mm, 6 mm und 9 mm Größe ergibt sich ein Frequenzspektrum zwischen 1,8 kHz bis 2,3 kHz bei einem Winkel von  $\alpha = 180^\circ$  wie in Abbildung 7 dargestellt. Wie zu sehen ist, spaltet sich der Resonanzpeak in zwei Peaks auf. Dabei variiert die Amplitude der Peaks je nach Ringdicke, wobei sich der Abstand beider Peaks mit steigender Ringdicke auch erhöht. Der Abstand der Frequenzen ist in Abbildung 8 gegen die Ringdicke aufgetragen. Des weiteren wurde mittels Python 3.8.0 eine Ausgleichgerade der Form

$$\Delta f = a \cdot d + b$$

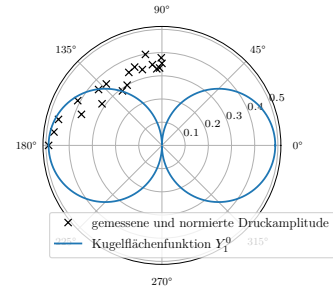
erstellt. Der Fehler der Frequenzmessung wird dabei als 1 Hz angenommen, da dies auch die Schrittweite der Frequenz bei dieser Messung ist; die Durchmesser der Ringe werden als genau angenommen, da sie vom Hersteller angegeben sind. Die Parameter ergeben sich mittels des Paketes *Numeric Python* [2] und die Fehlerrechnung wird allgemein automatisiert mittels des Paketes *uncertainties* [1]. Die Parameter der Geraden ergeben sich zu

$$a = (18 \pm 1) \frac{\text{Hz}}{\text{mm}}$$

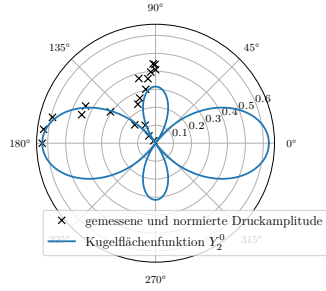
$$b = (6 \pm 6) \text{ Hz.}$$



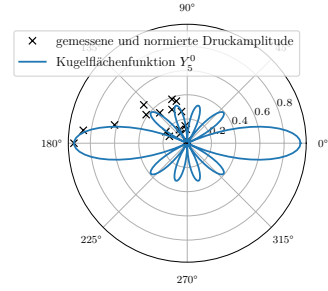
(a) 1. Ordnung,  $f = 0,406$  kHz.



(b) 2. Ordnung,  $f = 2,279$  kHz.

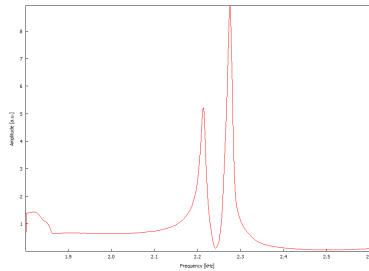


(c) 3. Ordnung,  $f = 3,665$  kHz.

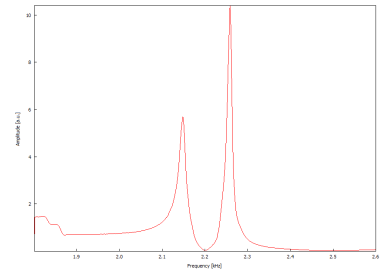


(d) 4. Ordnung,  $f = 7,379$  kHz.

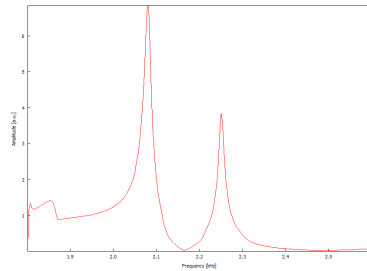
**Abbildung 6:** Die Amplitude des Drucks bei verschiedenen Resonanzfrequenzen  $f$  in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  mit den zugehörigen Kugelflächenfunktionen.



(a) 3 mm Ring.

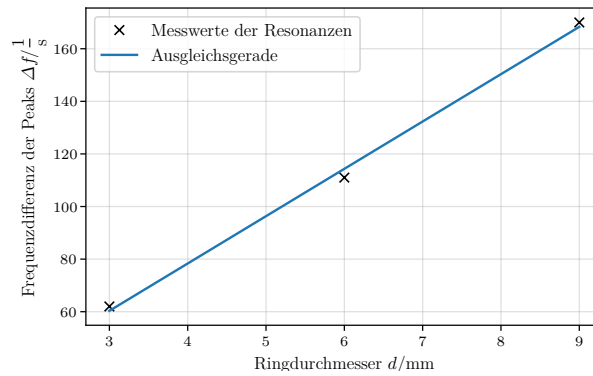


(b) 6 mm Ring.



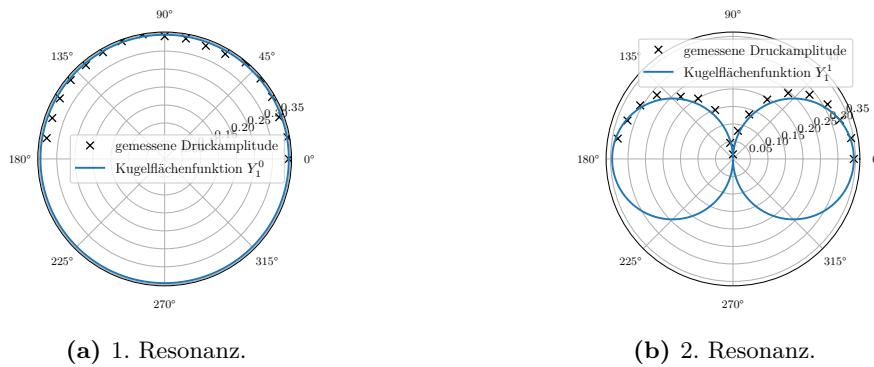
(c) 9 mm Ring.

**Abbildung 7:** Frequenzspektrum der Resonanzfrequenz 2. Ordnung des Kugelresonators mit eingesetztem Zwischenring verschiedener Größe.



**Abbildung 8:** Auftragung der Messwerte der Frequenzdifferenz gegen die Ringdicke mit Ausgleichsgerade.

Für den 9 mm Ring werden zudem die beiden Resonanzpeaks gegen den Azimutwinkel  $\varphi$  aufgetragen und wiederum mit der entsprechenden Kugelflächenfunktion verglichen. Dies ist in Abbildung 9 zu sehen. Hier folgen die Messwerte den Kugelflächenfunktionen

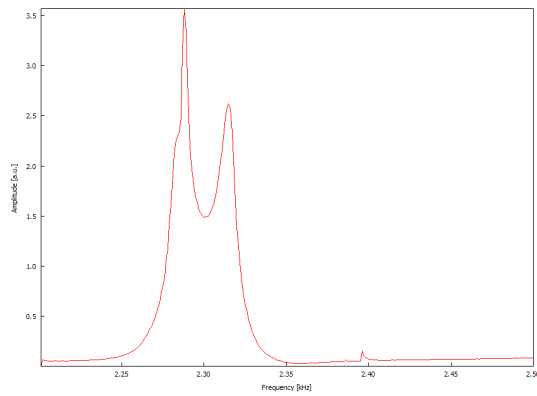


**Abbildung 9:** Resonanzen der beiden Peaks in Abhängigkeit des Azimutwinkels  $\varphi$  mit entsprechenden Kugelflächenfunktionen.

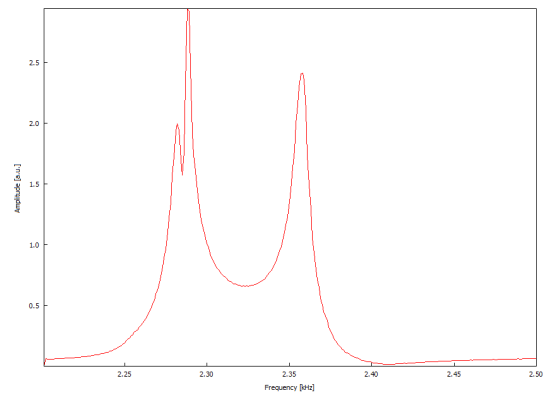
sehr gut, wenngleich kleinere Abweichungen dennoch vorkommen können. Die beiden Resonanzen stellen somit die  $m$ -Aufspaltung in  $m = 0$  und  $m = 1$  dar mit  $l = 1$ .

### 4.3 Das Wasserstoffmolekül

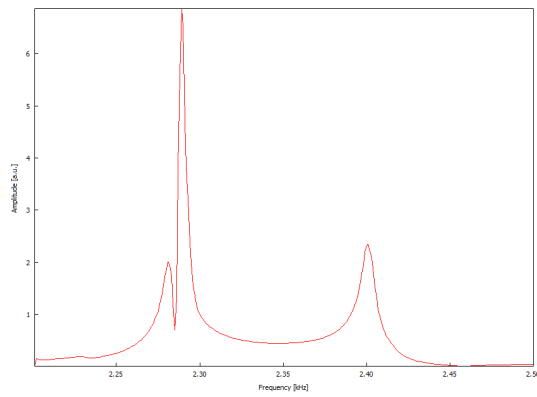
In diesem Teil werden die Frequenzspektren des Wasserstoffmolekülmodells mit verschiedenen Blenden (5 mm, 10 mm, 15 mm und 20 mm Durchmesser), sowie einmal ohne Blende aufgenommen. Der Frequenzbereich verläuft dabei von 2,2 kHz bis 2,5 kHz. Die Spektren sind in Abbildung 10 beziehungsweise Abbildung 11 dargestellt. Zu sehen sind jeweils drei Peaks, wobei der erste Peak bei der 5 mm Blende kaum erkennbar ist, die jeweils je nach Blendendurchmesser  $d$  bei unterschiedlichen Frequenzen liegen. Diese



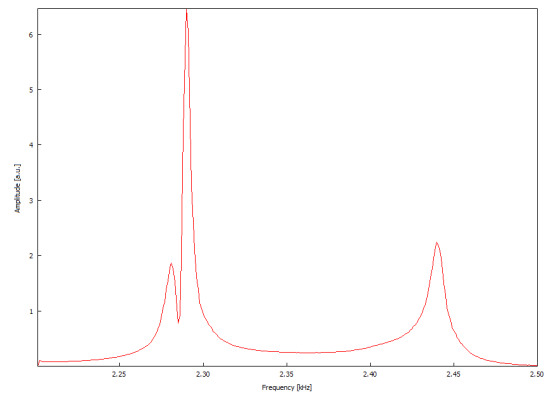
(a)  $d = 5$  mm.



(b)  $d = 10$  mm.

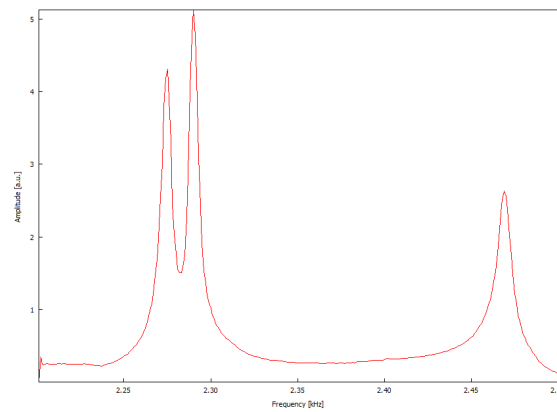


(c)  $d = 15$  mm.



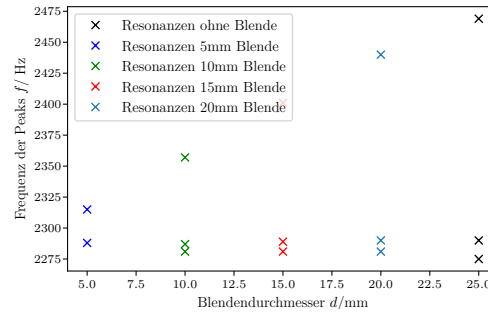
(d)  $d = 20$  mm.

**Abbildung 10:** Frequenzspektren des Wasserstoffmolekülmodells (zwei Kugelresonatoren) im Bereich 2,2 kHz bis 2,5 kHz mit verschiedenen Blendendurchmessern  $d$  zwischen den Kugeln.



**Abbildung 11:** Frequenzspektren des Wasserstoffmolekülmodells (zwei Kugelresonatoren) im Bereich 2,2 kHz bis 2,5 kHz ohne Blende zwischen den Kugeln.

Frequenzen in Abhängigkeit des Blendendurchmessers sind in Abbildung 12 zu sehen. Wie schon erwartet sind zwei der Peaks immer sehr nah beieinander, während der dritte,



**Abbildung 12:** Die Resonanzfrequenzen der beiden Kugelresonatoren in Abhängigkeit des Blendendurchmessers  $d$ .

der mit der höchsten Frequenz, weiter weg ist. Weiterhin ist ein linearer Zusammenhang zwischen letzteren Peaks und dem Blendendurchmesser  $d$  erkennbar.

Die Winkelverteilung der drei Resonanzpeaks ist für die Blende mit 15 mm Durchmesser aufgenommen worden und in Abbildung 13 dargestellt. Es werden insgesamt 3 Resonanzen detektiert. Auffällig ist das konstante Verhalten der Amplitude der dritten Resonanz, während die anderen beiden Peaks in ihrer Amplitude schwanken, aber ähnliche Verläufe zeigen. Dies ist schon Indiz dafür, dass der eine Peak den anderen überlagert.

Die Phasendifferenz zwischen unterer und oberer Kugel an den Resonanzfrequenzen ist in Tabelle 2 aufgetragen. Auffällig ist, dass beim zweiten Peak eine Phasendifferenz deutlich

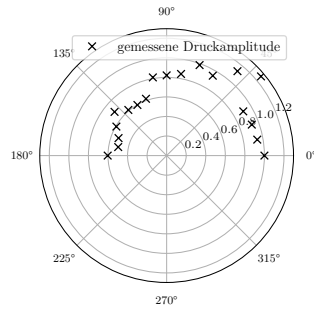
**Tabelle 2:** Phasendifferenzen zwischen ober und unterer Kugel an den Resonanzfrequenzen an den zwei Kugelresonatoren.

Peak Nummer	Resonanzfrequenz / kHz	Absolute Phasendifferenz / °
1	2,28	180
2	2,293	218
3	2,472	180

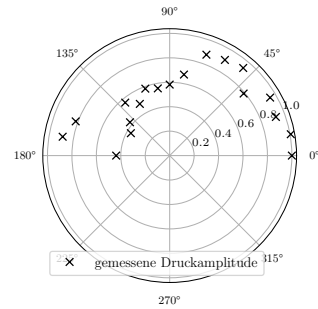
größer als  $180^\circ$  gemessen wurde. Der Zustand, der hier letztlich vermessen wurde, ist beim dritten Peak der Zustand  $2\sigma_u$ . Die anderen beiden Peaks sollten theoretisch die Zustände  $2\sigma_g$  und  $1\pi_u$  zeigen. Diese überlagern sich allerdings so, dass keine genauere Bestimmung möglich ist.

#### 4.4 Der eindimensionaler Festkörper

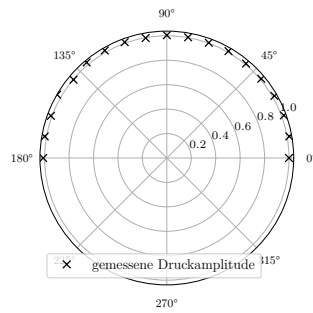
Zunächst wird eine Kette aus gleichen Elementarzellen und gleichen Streuzentren simuliert. Dazu ist zunächst das Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 Hz von 50 mm Zylindern und Irisblenden mit 16 mm Durchmesser dargestellt. Exemplarisch sind dies die Spektren mit



(a) 1. Resonanz.



(b) 2. Resonanz.

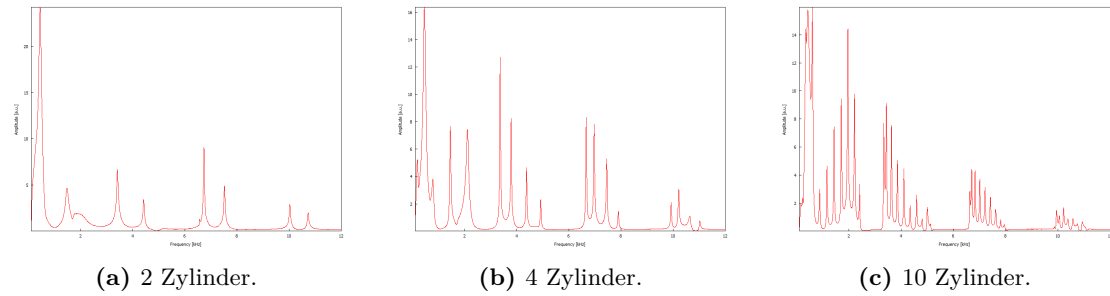


(c) 3. Resonanz.

**Abbildung 13:** Verteilung der Peaks der drei beobachteten Resonanzen an den zwei Kugelresonatoren mit einem Blendendurchmesser von 15 mm in Abhängigkeit des Azimutwinkels  $\varphi$ .

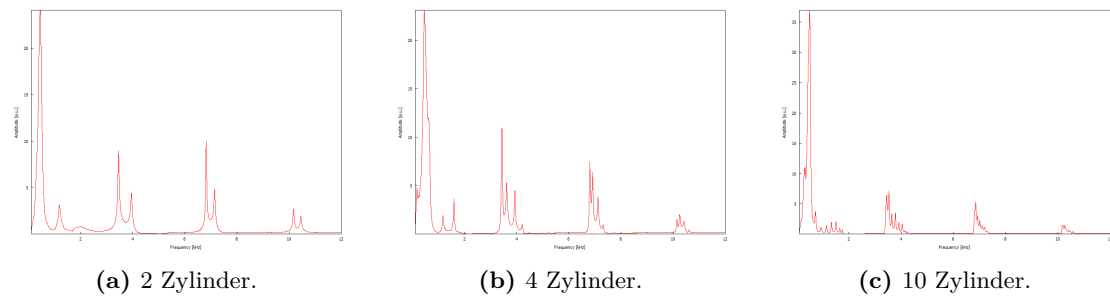


2, 4 und 10 Zylindern in Abbildung 14 dargestellt. Die übrigen Spektren sind im Anhang als Abbildung 23 aufgeführt. Scheinbar steigt die Anzahl der Resonanzfrequenzen mit der



**Abbildung 14:** Frequenzspektrum von verschiedener Anzahl von Zylinder mit 50 mm Länge und jeweils Irisblenden mit 16 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.

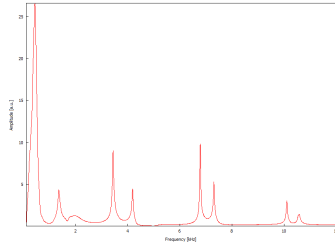
Anzahl der Zylinder an. Die Resonanzen scheinen sich in Gruppen anzuordnen, in denen immer so viele Peaks wie Zylinder sind. Der Abstand der Peaks nimmt dabei generell ab. Ähnliche Spektren sind auch für Irisblenden mit 10 mm und 13 mm Durchmesser in Abbildung 15 und Abbildung 16 zu sehen. Von der Struktur her unterscheiden sich beide



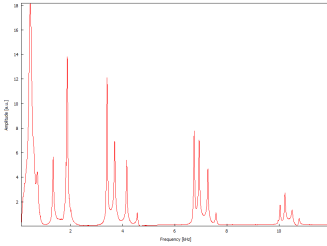
**Abbildung 15:** Frequenzspektrum bei verschiedener Anzahl von Zylinder mit 50 mm Länge und jeweils Irisblenden mit 10 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.

Spektren nur geringfügig vom Spektrum mit den 16 mm Irisblenden. Die Lücke zwischen den einzelnen Peakgruppen wird allerdings mit kleinerer Blende größer. Bezogen auf den Festkörper kann diese Lücke als Bandlücke interpretiert werden, die bei kleineren Streuzentren größer wird. Die Aufteilung der Peaks innerhalb der Gruppe kann durch den Einfluss der Streuung interpretiert werden. Ohne Streuung wäre die Gruppe nur ein großer Peak.

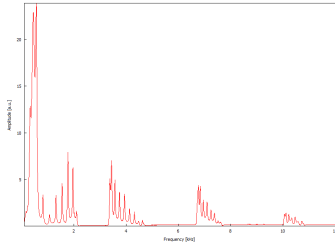
In einer 10 zylindrigen Kette aus 50 mm Zylindern wird ein Zylinder durch einen Zylinder einer anderen Größe ersetzt. Die anderen Zylinder haben die Größe 37,5 mm, 62,5 mm, sowie 75 mm. Die entsprechenden Frequenzspektren sind in Abbildung 17 zu sehen. Für die unterschiedlichen eingesetzten Zylinder verändert sich die Position einer Resonanzfrequenz an der ersten Bandlücke, beziehungsweise im Falle des 75 mm Zylinders innerhalb



(a) 2 Zylinder.

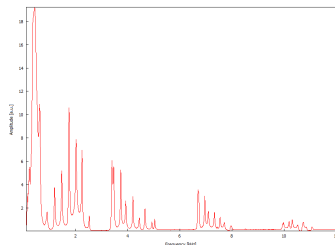


(b) 4 Zylinder.

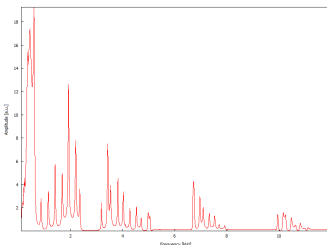


(c) 10 Zylinder.

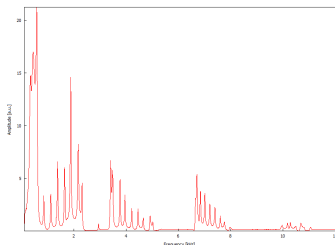
**Abbildung 16:** Frequenzspektrum von verschiedenen Anzahlen Zylinder mit 50 mm Länge und jeweils Irsiblen mit 13 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.



(a)  $l = 37,5$  mm.



(b)  $l = 62,5$  mm.

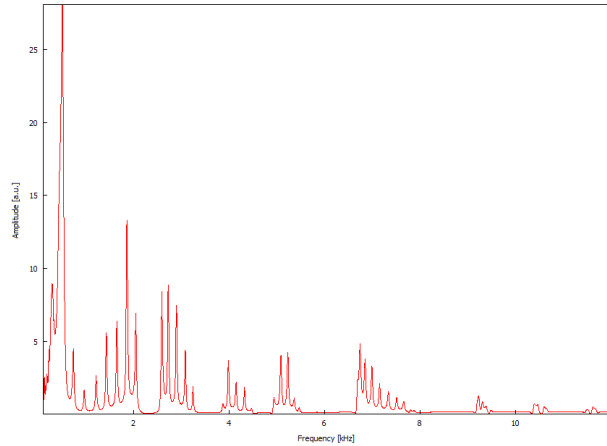


(c)  $l = 75$  mm.

**Abbildung 17:** Frequenzspektrum von 9 Zylindern mit  $l = 50$  mm Länge und einem Zylinder unterschiedlicher Länge und jeweils Irsiblen mit 16 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.

der ersten Bandlücke.

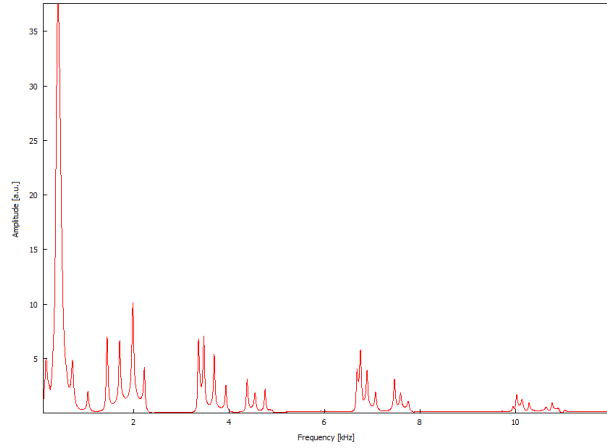
Durch Abwechseln der Zylindergrößen (hier: 50 mm und 75 mm) lässt sich ein eindimensionaler Festkörper mit zwei unterschiedlichen Elementarzellen simulieren, wobei die Streuzentren konstant bleiben (Irisblenden mit Durchmesser 16 mm). Das Frequenzspektrum ist in Abbildung 18 dargestellt. Im direkten Vergleich mit dem Spektrum eines



**Abbildung 18:** Frequenzspektrum einer 10 Zylinderkette mit abwechselnd  $l = 50$  mm und  $l = 75$  mm Länge und jeweils Irisblenden mit 16 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.

einzelnen 50 mm beziehungsweise 75 mm Zylinder in Abbildung 3 und Abbildung 4 fällt auf, dass es sich tatsächlich um eine Überlagerung beider Frequenzspektren handelt. Die zuvor betrachteten Gruppen bestehen im Prinzip aus zwei zusammengefügt Gruppen. Es ergeben sich so andere Zustände als in den Zylinderketten zuvor.

Durch Beibehalten der Zylinderstruktur (50 mm) und abwechseln der Irisblenden (16 mm und 13 mm) ergibt sich das Spektrum in Abbildung 19. In diesem Fall bilden sich neben den Resonanzgruppen deutlich kleinere Gruppen aus, mit einer Lücke dazwischen. Dies kann dahingehend interpretiert werden, dass durch unterschiedliche Streuzentren weitere Bänder entstehen.



**Abbildung 19:** Frequenzspektrum einer 10 Zylinderkette mit Längen  $l = 50$  mm und jeweils abwechselnd Irsiblen mit 16 mm beziehungsweise 13 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.

## 5 Diskussion

Im vorbereitenden Experiment wird deutlich, dass das Computerprogramm eine deutlich höhere Auflösung hat, als das Oszilloskop, also deutlich genauere Werte liefert. Gleichzeitig bestätigt die Messung am Oszilloskop und der Vergleich die Validität des Computerprogramms. Das akustische Modell des Wasserstoffatoms kann als gutes Analogon zum quantenmechanischen System betrachtet werden. Das Modell liefert Werte, die den theoretischen Werten im Genauigkeitsrahmen des Experimentes gut genug entsprechen um mit anderen Effekten wie Reflexion oder Beeinflussung von außen erklärt werden zu können. Die Aufspaltung der Zustände durch Einfügen eines Ringes, welcher dabei die  $m$ -Zustände aufspaltet, liefert ebenfalls sehr gute Ergebnisse und zeigt nochmal deutlicher, dass die Analogie hier funktioniert. Dass die Messwerte bei eingesetztem Ring tatsächlich noch näher an der Theorie liegen, liegt daran, dass dabei nur ein  $l$  betrachtet wurde, während bei der Messung ohne Ring stärkere Abweichungen vorliegen. Ein Grund hierfür kann die Abhängigkeit der Quantenzahl  $l$  von der Frequenz sein. Bei höheren Frequenzen lässt sich diese genauer bestimmen.

Bei der Untersuchung des Wasserstoffmoleküls ließen sich die verschiedenen Resonanzpeaks, zumindest bei größeren Blendendurchmessern gut voneinander trennen. Bei kleineren Durchmessern ist die schwieriger oder auch unmöglich, was aber zu erwarten war. Die Nähe dieser Peaks zueinander ist auch in der Phasendifferenz zwischen oberer und unterer Kugel zu erkennen, die bei einem Peak nicht  $180^\circ$  entspricht. Die Verteilung der Peaks in Abhängigkeit des Azimutwinkels ist ebenfalls nur für den dritten Peak, welcher frei von den anderen steht, gut erkennbar. Die anderen beiden Peaks weisen eine Winkelverteilung ohne erkennbares Muster auf. Ein Grund könnte hierfür die Überlagerung (und damit schwere Unterscheidbarkeit im Spektrum) der Zustände  $2\sigma_g$  und  $1\pi_u$  sein. Der dritte Peak ist aber gut erkennbar und kann dem  $2\sigma_u$  Zustand gut zugeordnet

werden.

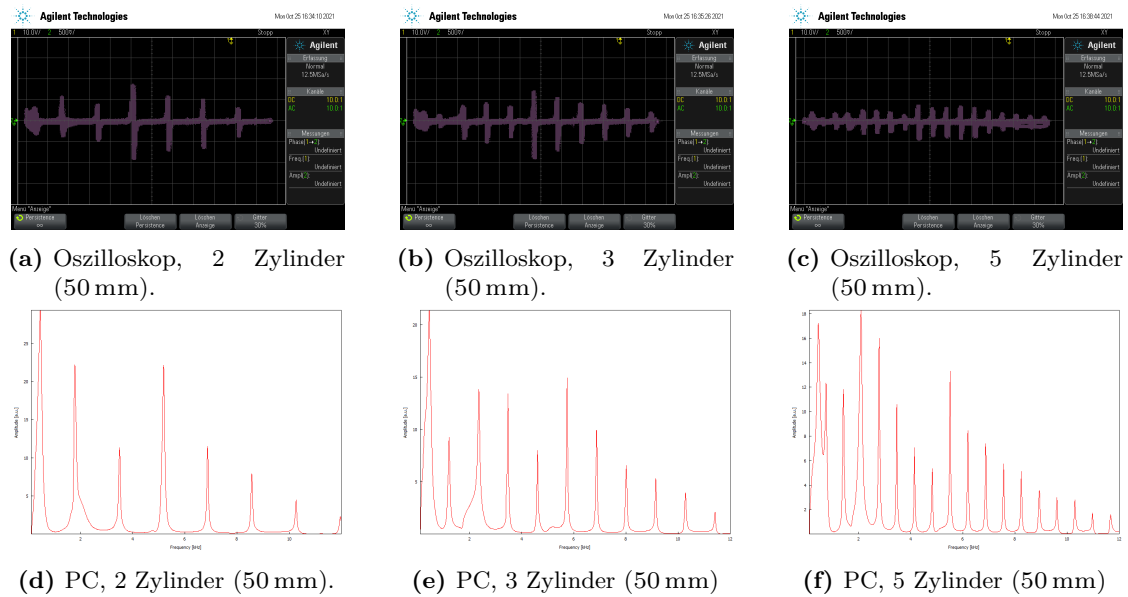
Die Modellierung des eindimensionalen Festkörpers lief ebenfalls zufriedenstellend ab, sodass direkte Analogien zu Bändern und Bandlücken im quantenmechanischen Modell gefunden werden konnten.

Insgesamt verlief der Versuch gut; eine höhere Genauigkeit ließe sich vor allem durch kleinschrittigere Frequenzspektrenaufnahmen und längere Messzeiten pro Schritt erreichen.

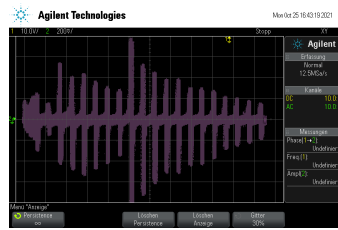
## Literatur

- [1] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.21. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] *V23 - Quantenanalogen*. TU Dortmund, 11. Apr. 2021.

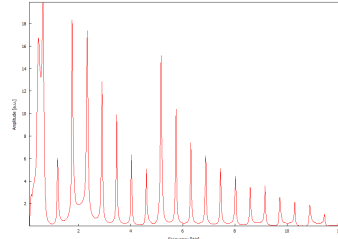
## 6 Anhang



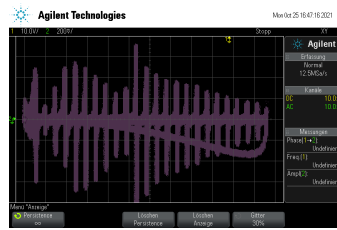
**Abbildung 20:** Das Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz bei verschiedener Anzahl Zylinder (Länge 50 mm) aufgenommen einmal mit einem Oszilloskop und einmal mit dem PC.



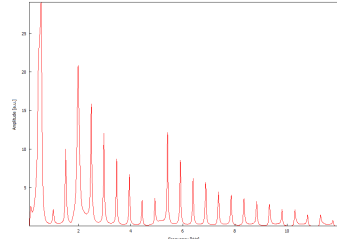
(a) Oszilloskop, 6 Zylinder (50 mm).



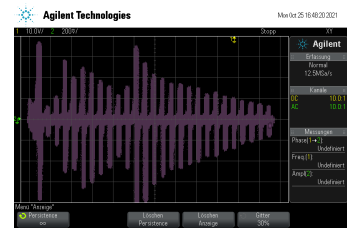
(d) PC, 6 Zylinder (50 mm).



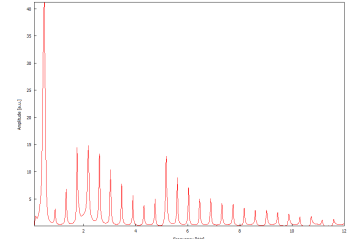
(b) Oszilloskop, 7 Zylinder (50 mm).



(e) PC, 7 Zylinder (50 mm)

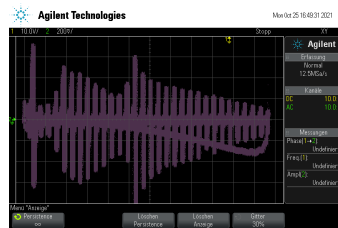


(c) Oszilloskop, 8 Zylinder (50 mm).

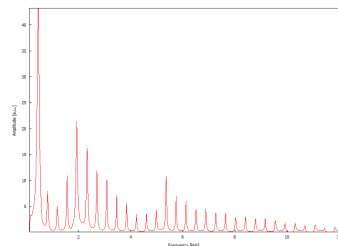


(f) PC, 8 Zylinder (50 mm)

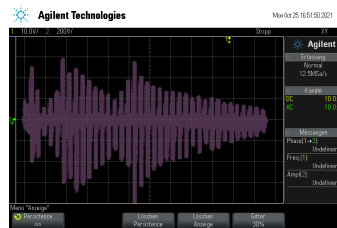
**Abbildung 21:** Das Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz bei verschiedener Anzahl Zylinder (Länge 50 mm) aufgenommen einmal mit einem Oszilloskop und einmal mit dem PC.



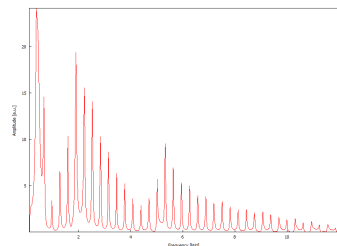
(a) Oszilloskop, 9 Zylinder (50 mm).



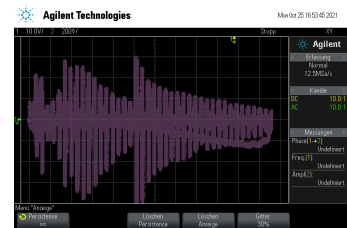
(d) PC, 9 Zylinder (50 mm).



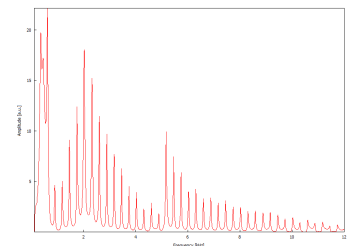
(b) Oszilloskop, 11 Zylinder (50 mm).



(e) PC, 11 Zylinder (50 mm)

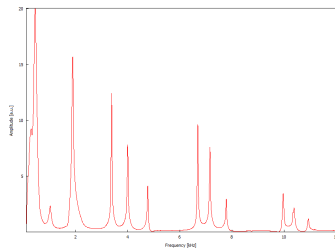


(c) Oszilloskop, 12 Zylinder (50 mm).

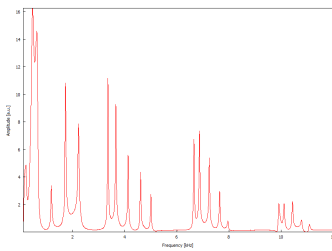


(f) PC, 12 Zylinder (50 mm)

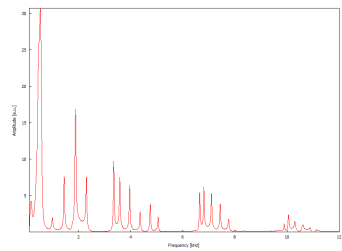
**Abbildung 22:** Das Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz bei verschiedener Anzahl Zylinder (Länge 50 mm) aufgenommen einmal mit einem Oszilloskop und einmal mit dem PC.



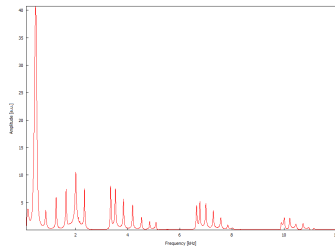
(a) 3 Zylinder.



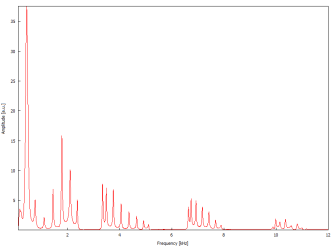
(b) 5 Zylinder.



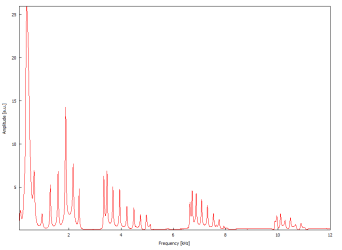
(c) 6 Zylinder.



(d) 3 Zylinder.



(e) 5 Zylinder.



(f) 6 Zylinder.

**Abbildung 23:** Frequenzspektrum von verschiedenen Anzahlen Zylinder mit 50 mm Länge und jeweils Irsiblen mit 16 mm Durchmesser dazwischen im Bereich 0,1 kHz bis 12 Hz.