

V23

Quantenanalogien

Yanick Sebastian Kind
yanick.kind@udo.edu

Till Willershausen
till.willershausen@udo.edu

Durchführung: 25.04.2022

Abgabe: 02.05.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Eindimensionaler unendlicher Potentialtopf	3
1.2	Das Wasserstoffatom	4
1.2.1	Quantenmechanische Lösung	4
1.2.2	Der Kugelresonator	4
1.3	Das Wasserstoffmolekül	5
1.4	Der eindimensionale Festkörper	5
2	Durchführung	6
2.1	Vorbereitendes Experiment	6
2.2	Wasserstoffatom	7
2.3	Wasserstoffmolekül	7
2.4	Eindimensionaler Festkörper	8
3	Auswertung	8
3.1	Vorbereitendes Experiment	8
3.2	Wasserstoffatom	9
3.2.1	Hochaufgelöstes Frequenzspektrum bei sich gegenüberliegendem Mikrofon und Lautsprecher	9
3.2.2	Phasenverschiebung der aufgenommenen Welle	9
3.2.3	Amplituden in Abhängigkeit des Winkels bei Resonanzfrequenzen	9
3.2.4	Aufspaltung der Peaks bei Symmetriebrechung	12
3.3	Wasserstoffmolekül	15
3.3.1	Abhängigkeit der Resonanzamplitude von dem Blendendurchmesser	15
3.3.2	Winkelabhängigkeit der Resonanzamplitude	17
3.3.3	Phasenverschiebung	18
3.4	Eindimensionaler Festkörper	18
3.4.1	Festkörper aus mehreren Zylinder gleicher Länge und Blenden mit gleichem Durchmesser	18
3.4.2	Ein Variabler Zylinder	20
3.5	Alternierende Zylinder und Blenden	22
3.5.1	Alternierende Zylinder	22
3.5.2	Alternierende Blendendurchmesser	23
4	Diskussion	24
	Literatur	25

1 Theorie

Die folgende Informationen sind den Quellen [1] und [2] entnommen worden. In dem folgendem Versuch werden akustische Experimente in verschiedenen Resonatoren durchgeführt. Ziel ist es die Analogen zwischen akustischen und quantenmechanischen Systemen zu untersuchen und Unterschiede herauszustellen.

Schallwellen sind longitudinale Schwingungen welche sich über ein Medium (wie z.B. Gas) ausbreiten. Die akustischen Wellen können über den Schalldruck p beschrieben werden. Für diesen gilt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta p(\vec{x}, t) \quad (1)$$

mit der Schallgeschwindigkeit c im jeweiligen Medium. Wenn die Schallwelle sich in einem Resonator ausbreitet, muss die Funktion $p(\vec{x}, t)$ an den Rändern des Volumens V die Neumann-Randbedingung

$$\nabla p(\vec{x}, t)|_{\partial V} = 0 \quad (2)$$

erfüllen.

Das Verhalten eines quantenmechanischen Systems lässt sich durch die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t) \quad (3)$$

bestimmen. Dabei ist $\Psi(\vec{x}, t)$ die quantenmechanische Wellenfunktion, welche immer der Normierungsbedingung

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{x}, t) dx dy dz = 1 \quad (4)$$

genügen muss. Die Wellenfunktion ist nicht direkt messbar jedoch ist das Betragsquadrat, was der Wahrscheinlichkeitsdichte entspricht, im Experiment messbar. Im Falle eines zeitunabhängigen Potentials kann mit Hilfe einer Variablenseparation $\Psi(\vec{x}, t) = \phi(t) \psi(\vec{x})$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}) \quad (5)$$

hergeleitet werden. Dabei ist E ein Energieeigenwert.

1.1 Eindimensionaler unendlicher Potentialtopf

In der Quantenmechanik wird der unendliche Potentialtopf über ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

dargestellt. Dabei ist L die Länge des Potentialtopfes. Außerhalb des Potentialtopfes muss die Wellenfunktion null sein. Aufgrund der Stetigkeitsbedingung gelten die Dirichlet-Randbedingungen $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$. Es resultiert eine Wellenfunktion der Form

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kx) \quad (7)$$

mit $k = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$. Das analoge System in der Akustik ist ein Hohlraumresonator. An den Innenoberflächen des Resonators wird die Schallwelle reflektiert, sodass sich bei passenden Frequenzen

$$f = \frac{nc}{2L} \quad (8)$$

stehende Wellen ausbilden. Mit der Gleichung 1 und der Neumann-Randbedingung 2 folgt für den Schalldruck

$$p(x, t) = p_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (9)$$

mit $k = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$ und der Druckamplitude p_0 .

1.2 Das Wasserstoffatom

1.2.1 Quantenmechanische Lösung

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (10)$$

kann über den Separationsansatz $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ gelöst werden. Dabei sind die Indizes n, l und m definiert als die Hauptquantenzahl $n \in \mathbb{N}/\{0\}$, die ganzzahlige Bahndrehimpulsquantenzahl $0 \leq l \leq n-1$ und die magnetische Quantenzahl $-l \leq m \leq l$. Die Energie $E = -\frac{E_{Ryd}}{n^2}$ ist in l und m entartet. Die Energieentartung in l liegt an der $\frac{1}{r}$ -Abhängigkeit des Coulombpotentials, während die Entartung in m an der Kugelsymmetrie des Potentials liegt. Sie lässt sich durch ein angelegtes Magnetfeld auflösen. Die winkelabhängige Lösung ist die Kugelflächenfunktion, welche mit den Legendre-Polynomen $P_{lm}(x)$ als

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos(\theta)) \exp(im\varphi) \quad (11)$$

definiert ist.

1.2.2 Der Kugelresonator

Ein Kugelresonator soll im akustischen Analogon das Coulombpotential des Wasserstoffatoms ersetzen. Um eine stehende Welle auszubilden, müssen die Gleichungen 1 und 2 erfüllt sein. Durch den Separationsansatz $p(r, \theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi)f(r)$ ergibt sich erneut die Kugelflächenfunktion als Lösung für den Winkelanteil. Der Radialanteil ist jedoch

unterschiedlich. Da im Kugelresonator eine Kugelsymmetrie vorliegt, herrscht in m eine Entartung. Jedoch fehlt im Resonator ein $1/r$ -Potential, so dass dort keine Entartung in l vorliegt. Die Entartung in m lässt sich durch Brechen der Kugelsymmetrie auflösen.

1.3 Das Wasserstoffmolekül

Das Wasserstoffmolekül kann in erster Näherung als Überlagerung atomarer Wellenfunktionen betrachtet werden. Die Wellenfunktionen können sich symmetrisch

$$\psi_s(\vec{r}) = C(\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})) \quad (12)$$

oder antisymmetrisch

$$\psi_a(\vec{r}) = C(\psi_1(\vec{r}) - \psi_2(\vec{r})) \quad (13)$$

mit einer Normierungskonstante C überlagern. Bei der antisymmetrischen Wellenfunktion verschwindet die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in einem Punkt zwischen den beiden Kernen. Dadurch ist der antisymmetrische Zustand nicht bindend. Die symmetrische Wellenfunktion hingegen hat einen endlichen Wert an jedem Punkt zwischen den Kernen. Die folgende Energieabsenkung führt zu einem bindenden Zustand. Für die Wasserstoffmoleküzzustände ist l keine gute Quantenzahl mehr. Zustände werden nur durch n und m beschrieben. Das akustische Analogon sind zwei gekoppelte sphärische Resonatoren. Die bindenden und nicht bindenden Zustände werden im Resonator durch die Phasendifferenz zwischen oberen und unteren Resonator identifiziert. Der bindende Zustand hat eine Phasendifferenz von $\varphi = 0^\circ$, während der nicht bindende Zustand mit $\varphi = 180^\circ$ antibindend ist.

1.4 Der eindimensionale Festkörper

Die Schrödingergleichung, die einen Festkörper beschreibt, hat ein periodisches Potential, welches von dem jeweiligen Festkörper abhängig ist. Um die Energie von Elektronen im Festkörper zu bestimmen, können erst freie Elektronen betrachtet werden. Dann werden schwache, periodische Streuzentren eingeführt an denen die Wellenfunktion des Elektrons streut. Bei dem eindimensionalen Festkörper werden die Wellenlängen, die der Braggbedingung

$$n\lambda = 2d \iff k = \frac{n\pi}{d} \quad (14)$$

genügen, besonders effektiv gestreut. In Gleichung (14) ist λ die Wellenlänge der Elektronen, d der Abstand der Kristallebenen und k der Wellenvektor der Elektronen. Die Dispersionsrelation von freien Elektronen

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (15)$$

ist parabolisch. Werden aber Elektronen, welche die Braggbedingung erfüllen, stark gestreut, bilden sich Bandlücken in diesen Bereichen von k aus, da sich dort keine Elektronen mehr aufhalten. Das akustische Analogon ist eine Kette aus Hohlraumzylindern, die

durch Blenden voneinander getrennt werden. Die Blenden wirken als Streuzentren für die Schallwellen und die Hohlraumresonatoren der Länge L repräsentieren die Einheitszelle des eindimensionalen Festkörpers.

2 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 zu sehen. Essentiell für den Aufbau sind Mikrofon und Lautsprecher, sowie verschiedene Resonatoren. Die Messung und Auswertung erfolgt entweder über einen Sinusgenerator, welcher an den Lautsprecher angeschlossen ist. Ein Oszilloskop wird über einen Frequenz-zu-Spannungs-Konverter, der in der Steuerelektronik verbaut ist, an das Mikrofon angeschlossen. Die andere Auswertungsmethode ist ein Computer mit dem Programm SpectrumSLC. Dazu werden Mikrofon und Lautsprecher direkt an den Computer angeschlossen.

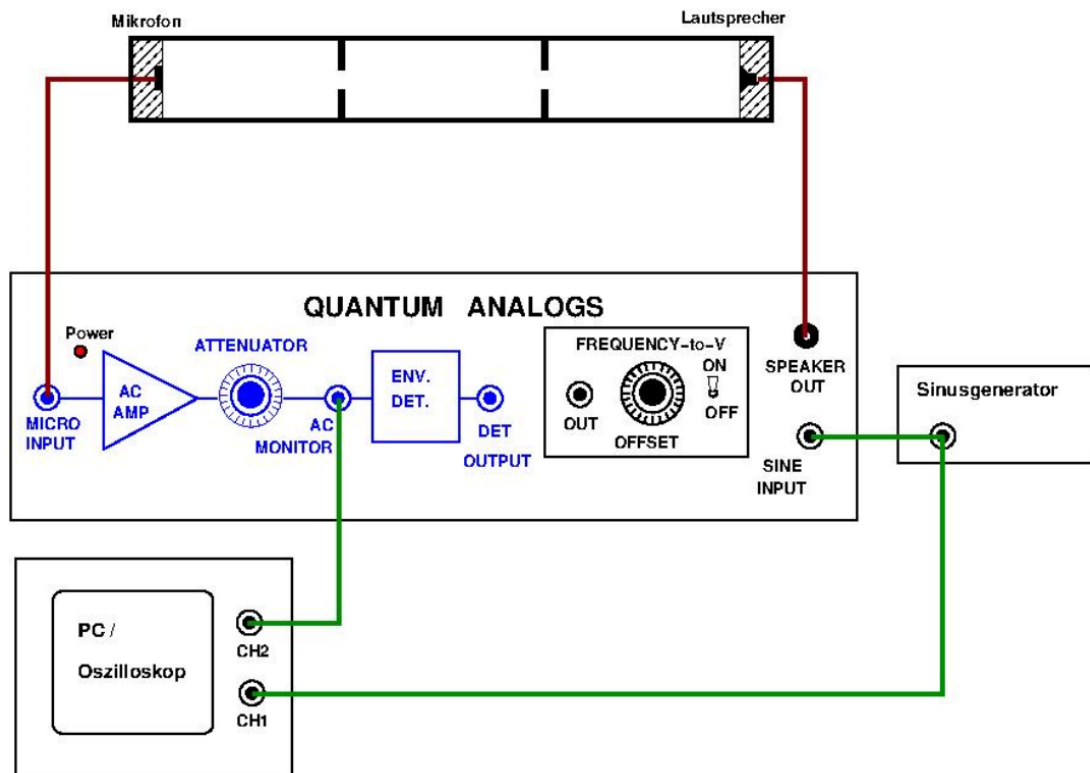


Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau des Versuchs [3].

2.1 Vorbereitendes Experiment

Im ersten Teil des Versuchs soll ein Frequenzspektrum von 0,1 kHz bis 12 kHz eines 50 mm-Zylinders aufgenommen werden. Das Mikrofon-Signal wird am 2-Kanal-Oszilloskop

dargestellt, sowie an dem Computer abgespeichert. Nach der Messung mit einem Zylinder wird ein weiterer hinzugefügt. Diese Schritte wiederholen sich bis zwölf Zylinder hintereinander gereiht sind. Anschließend wird ein Frequenzspektrum eines 75 mm-Zylinders aufgenommen.

2.2 Wasserstoffatom

Im folgenden Versuchsteil wird der Kugelresonator als klassisches Analogon zum Wasserstoffatom untersucht. Der Kugelresonator besteht aus zwei Kugelhälften, wobei die untere Hälfte mit einem Mikrofon und die obere mit einem Lautsprecher ausgestattet ist. Beide sind 45° zur Horizontalen Ebene ausgerichtet. Mit der Winkelskala am Außenrand der oberen Halbkugel lässt sich der Winkel α zwischen Lautsprecher und Mikrofon ablesen. Am Anfang wird $\alpha = 180^\circ$ eingestellt.

Es folgt die Messung eines hochaufgelösten Frequenzspektrums von 0,1 kHz bis 12 kHz in 5 Hz-Schritten bei 60 ms pro Schritt am Computer.

Im nächsten Teil wird wieder das Oszilloskop angeschlossen und es werden die Frequenzen von 100 Hz bis 10 kHz durchlaufen. Dabei werden von den Resonanzfrequenzen die Frequenz, Amplitude und Phasenverschiebung betrachtet.

Als nächstes werden am Computer hochaufgelöste winkelabhängige Frequenzspektren aufgenommen. Diese werden in 5° -Schritten von $0 - 180^\circ$ bei gleichen Einstellungen wie zuvor aufgenommen. Um die Kugelsymmetrie zu brechen wird im folgenden Teil ein 3 mm Zwischenring zwischen die Halbkugeln platziert.

Bei einem Winkel von 180° wird ein hochaufgelöstes Frequenzspektrum der Resonanzfrequenz bei 2,3 kHz aufgenommen. Dafür wird der Bereich 1,8 kHz bis 2,6 kHz in 1 Hz-Schritten bei gleicher Zeiteinstellung aufgenommen. Dieser Versuchsteil wird erneut mit einem 6 mm Zwischenring und einer Kombination der beiden Ringe durchgeführt.

2.3 Wasserstoffmolekül

Zwischen die beiden Halbkugeln des Wasserstoffanalogons werden zwei weitere Halbkugeln mit einem Loch eingesetzt, sodass zwei Kugelresonatoren mit einem offenem Verbindungsstück entstehen. Die Halbkugeln werden so angeordnet, dass das Mikrofon und der Lautsprecher mit einem Winkel von 180° zueinander orientiert sind.

Folgend wird ein hochaufgelöstes Frequenzspektrum in dem Bereich von 2,2 kHz bis 2,5 kHz in 1 Hz-Schritten mit 75 ms pro Schritt, aufgenommen. Dieser Versuchsteil wird mit Blenden mit 10 mm, 13 mm und 16 mm Durchmesser erneut durchgeführt.

Zuletzt wird ein Winkelaufgelöstes Spektrum mit einer 16 mm Blende aufgenommen. Der Messbereich und die Einstellungen sind dabei identisch zu den vorherigen Versuchsteil. Die Messung erfolgt in 5° -Schritten und geht von 0° bis 180° . Des weiteren werden die Phasenverschiebungen der unteren und oberen Kugel bei den Resonanzfrequenzen aufgenommen.

2.4 Eindimensionaler Festkörper

Der letzte Versuchsteil wird aus einer Resonatorkette mit 16 mm-Blenden aufgebaut. Angefangen wird mit einer Blende zwischen zwei Resonatoren. Es wird ein Spektrum im Bereich von 0,1 kHz bis 12 kHz in 5 Hz-Schritten mit 50 ms pro Schritt aufgenommen. Daraufgehend wird die Kette immer um einen Resonator mit einer Blende vergrößert, bis 10 Resonatoren eingebaut sind. Pro hinzugefügtem Resonator wird ein Spektrum, wie oben beschrieben, aufgenommen.

Das Experiment wird mit zwei, vier und zehn Resonatoren wiederholt, wobei einmal 10 mm-Blenden und einmal 13 mm-Blenden verwendet werden.

Als nächstes wird einer der zehn Zylinder durch einen 75 mm, 37,5 mm und einen 62,5 mm Zylinder ersetzt und es wird erneut ein Spektrum aufgenommen.

Der nächste Versuchsteil wird mit zehn abwechselnd angeordneten Resonatoren mit 16 mm-Blenden aufgebaut. Es wird wieder ein Frequenzspektrum wie zuvor aufgenommen.

Im letzten Versuchsteil wird aus acht 50 mm-Resonatoren mit abwechselnd 13 mm und 16 mm-Blenden dazwischen eine Resonatorkette aufgebaut und ein weiteres Spektrum aufgenommen.

3 Auswertung

Im folgenden sind alle Amplituden in willkürlichen Einheiten angegeben.

3.1 Vorbereitendes Experiment

Um Redundanz zu vermeiden sind statt alle zwölf nur die Frequenzspektren, wo der Zylinder die Länge 50 mm und 600 mm hat, in der Abbildung 2 aufgeführt. In der



(a) Frequenzspektrum eines Zylinders mit der Länge 50 mm



(b) Frequenzspektrum eines Zylinders mit der Länge 600 mm

Abbildung 2: Die Frequenzspektren von Zylindern mit jeweils 50 mm und 600 mm, um die Frequenzspektren anderer Länge zu repräsentieren.

Abbildung 2b wird ersichtlich, dass sich die Peaks in der Abbildung 2a zu mehreren kleineren Peaks aufspalten. Ebenfalls ist zu beobachten, dass sich der Abstand der Peaks verändert hat, denn dieser ist um ein Faktor 12 kleiner geworden.

3.2 Wasserstoffatom

Um die Polarplots mit den Kugelflächenfunktionen zu vergleichen, wurden die Darstellungen der Quelle [4] entnommen.

3.2.1 Hochaufgelöstes Frequenzspektrum bei sich gegenüberliegendem Mikrofon und Lautsprecher

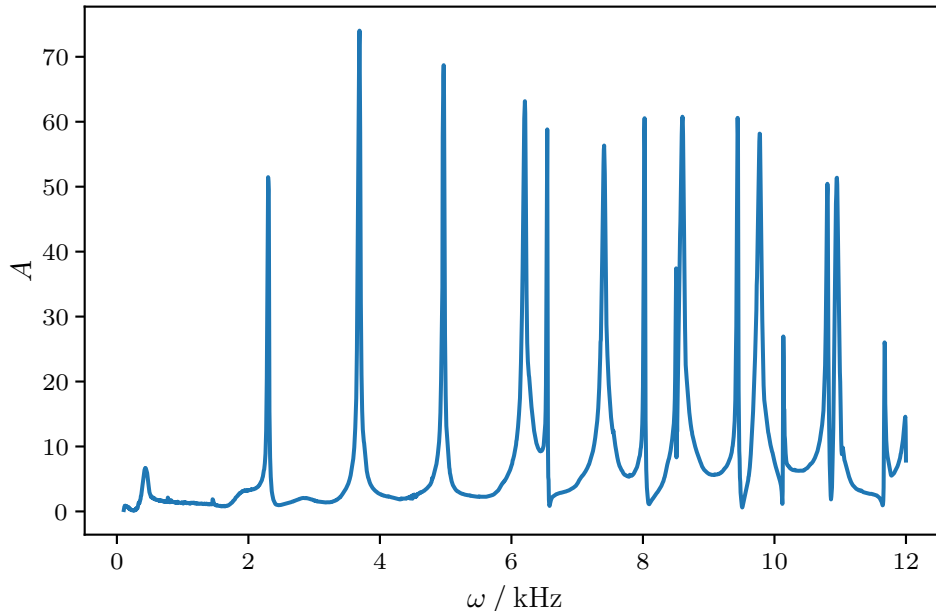


Abbildung 3: Frequenzspektrum bei $\alpha = 180^\circ$

3.2.2 Phasenverschiebung der aufgenommenen Welle

Die relative Phase des oberen bzw. unteren Mikrofons φ_{oben} und φ_{unten} zur Eingangswelle ist für die jeweilige Resonanzfrequenz im Intervall $\omega \in [100 \text{ Hz}, 10 \text{ kHz}]$ in Tabelle 1 angegeben. Ebenfalls ist die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = |\varphi_{\text{oben}} - \varphi_{\text{unten}}|$ angegeben. In der Tabelle 1 sind nur Phasenverschiebungen von $\approx 180^\circ$ ersichtlich. Dies folgert, dass nur Kugelflächenfunktionen mit einer ungeraden Drehimpulsquantenzahl l beobachtet wurden. Zu den Phasenverschiebungen $\Delta\varphi \approx 70^\circ$ lässt sich keine Aussage treffen.

3.2.3 Amplituden in Abhängigkeit des Winkels bei Resonanzfrequenzen

In der Abbildung 4 ist die Amplitude bei der Resonanzfrequenz $\omega = 2,3 \text{ kHz}$, in Abbildung 5 bei $\omega = 3,7 \text{ kHz}$, in Abbildung 6 bei $\omega = 7,4 \text{ kHz}$ und in Abbildung 7 bei $\omega = 8,62 \text{ kHz}$

Tabelle 1: Relative Phase zur Eingangswelle

ω / kHz	φ_{oben}	φ_{unten}	$\Delta\varphi$
2,295	40	110	70
3,69	-75	100	175
6,24	-40	33	73
7,43	0	180	180
8,02	145	-10	155
8,64	-180	6	185
9,45	-30	-160	190

in Abhängigkeit des Winkels θ in einem Polarplot aufgetragen. Der Winkel θ entspricht dabei nicht dem gemessenen Winkel α . Zwischen den beiden Winkeln gilt die Beziehung

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2}\right). \quad (16)$$

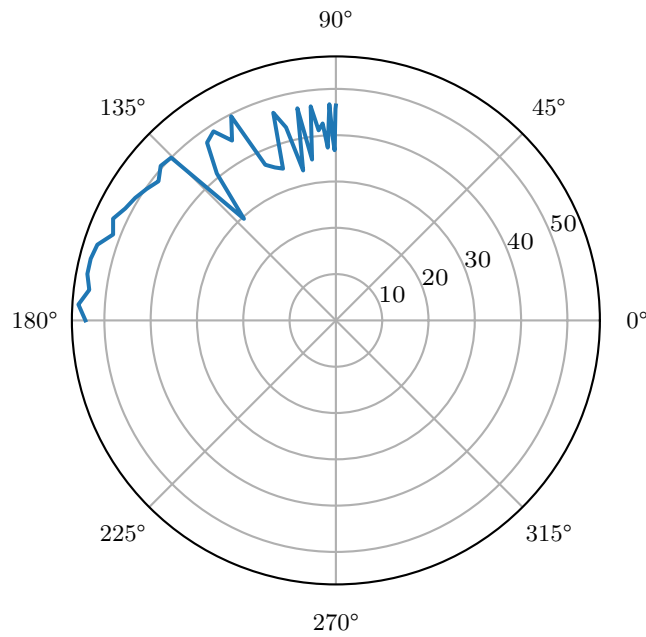


Abbildung 4: Polarplot des Peaks bei 2,3 kHz. Dies entspricht der Kugelflächenfunktion Y_1^0 .

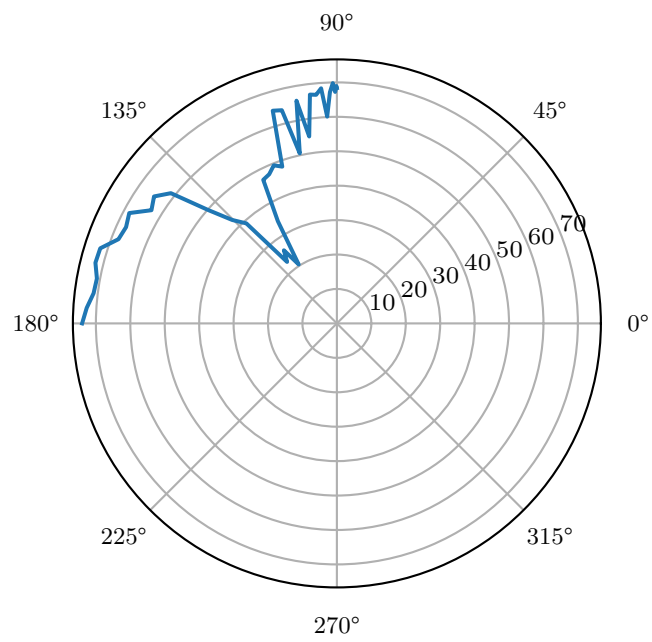


Abbildung 5: Polarplot des Peaks bei 3,7 kHz. Dies entspricht der Kugelflächenfunktion Y_2^0 .

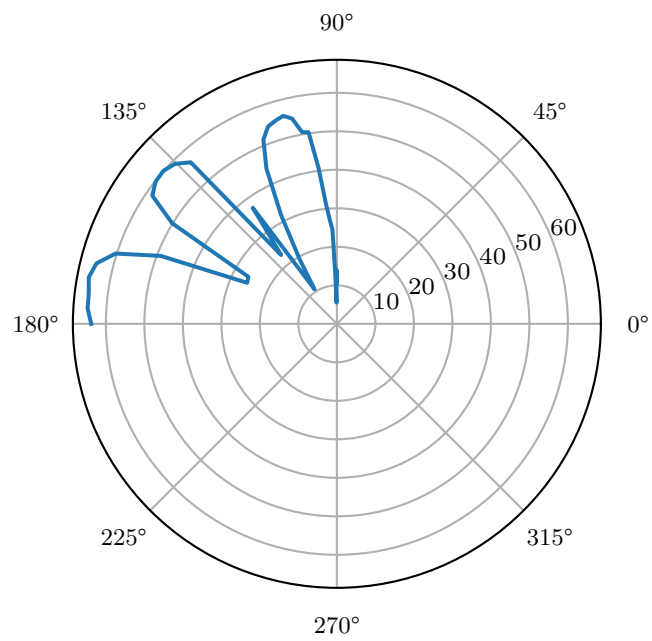


Abbildung 6: Polarplot des Peaks bei 7,4 kHz. Dies entspricht der Kugelflächenfunktion Y_5^0 .

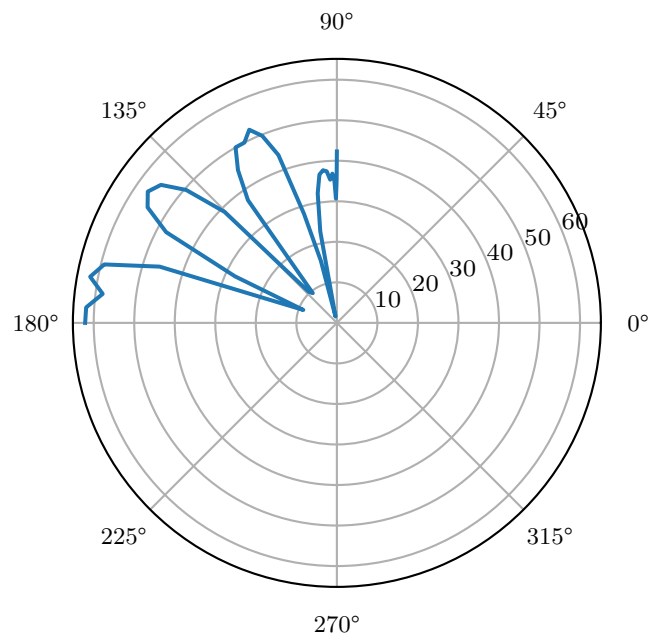


Abbildung 7: Polarplot des Peaks bei 8,62 kHz. Dies entspricht der Kugelflächenfunktion Y_6^0 .

3.2.4 Aufspaltung der Peaks bei Symmetriebrechung

In den Abbildungen 8, 9 und 10 sind die Frequenzspektren bei verschiedenen Ringdicken aufgezeigt. Mittels Abbildung 11 wird ersichtlich, dass die Aufspaltung der Peaks mit der Ringdicke linear zunimmt. Dort lässt sich eine Analogie zum Zeeman-Effekt beobachten, da dort die Aufspaltung der Energien linear mit der Stärke des Magnetfelds zunimmt.

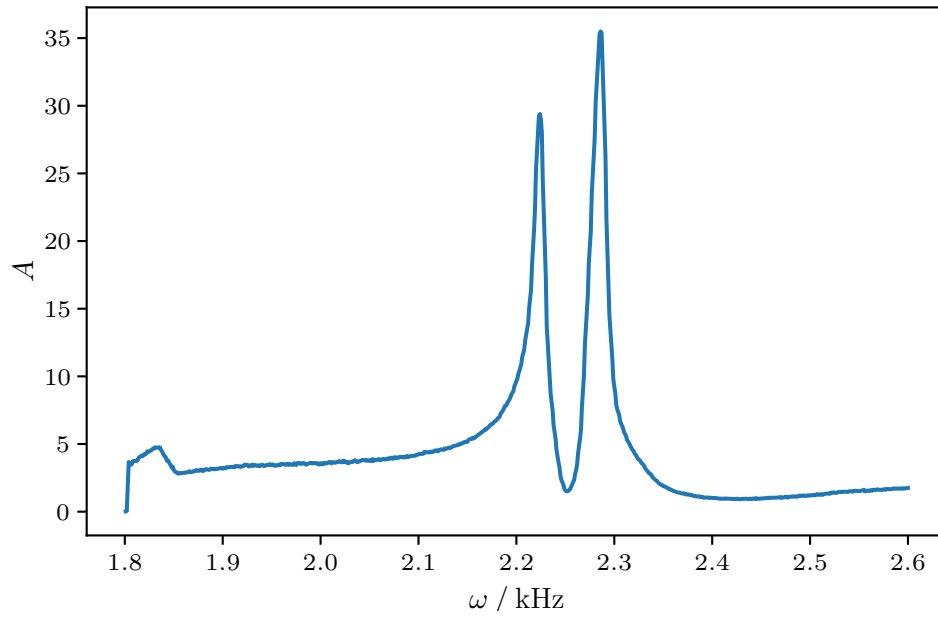


Abbildung 8: Frequenzspektrum mit einem Zwischenring der Dicke $d = 3$ mm bei $\alpha = 180^\circ$.

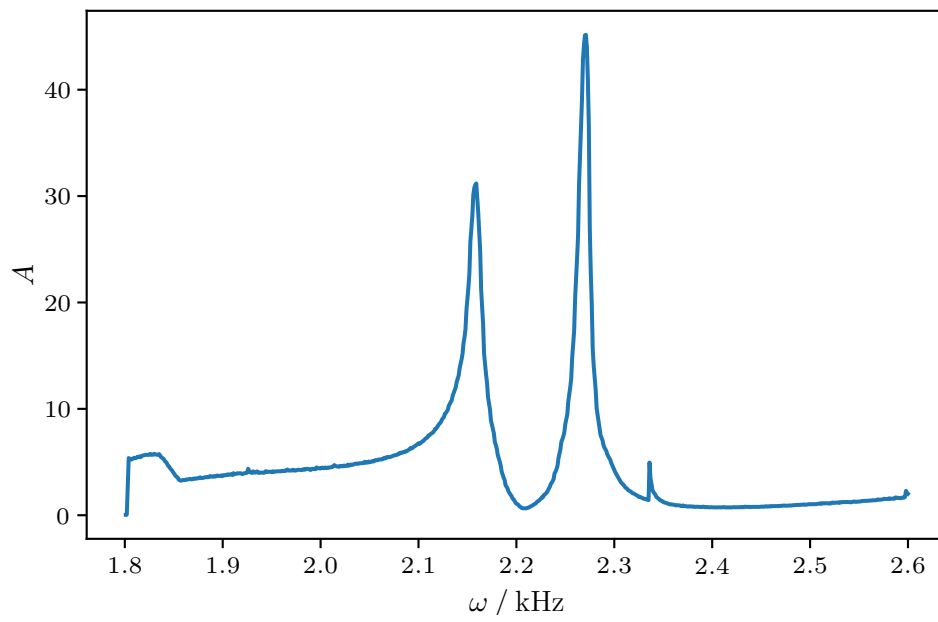


Abbildung 9: Frequenzspektrum mit einem Zwischenring der Dicke $d = 6$ mm bei $\alpha = 180^\circ$.

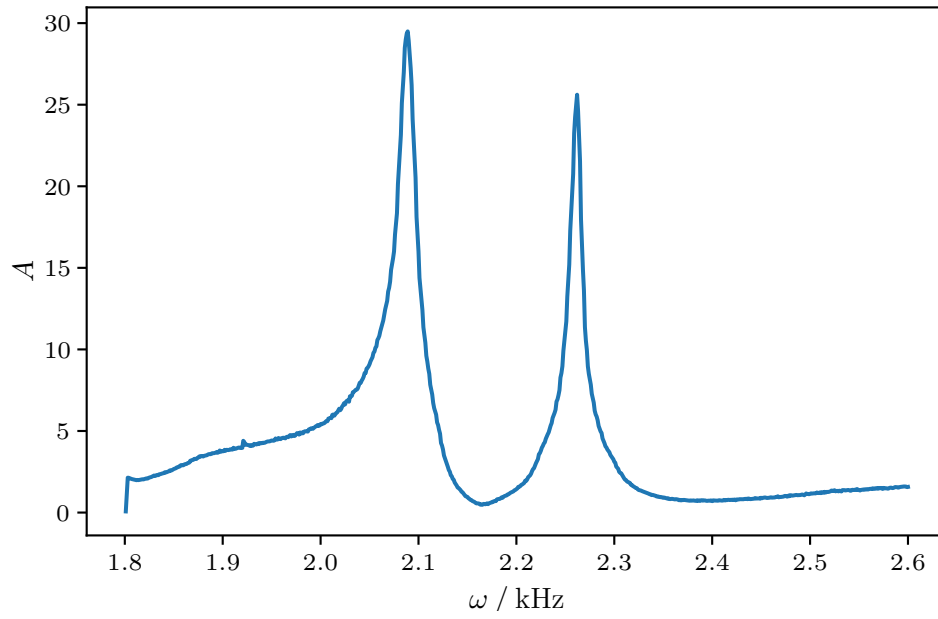


Abbildung 10: Frequenzspektrum mit einem Zwischenring der Dicke $d = 9 \text{ mm}$ bei $\alpha = 180^\circ$.

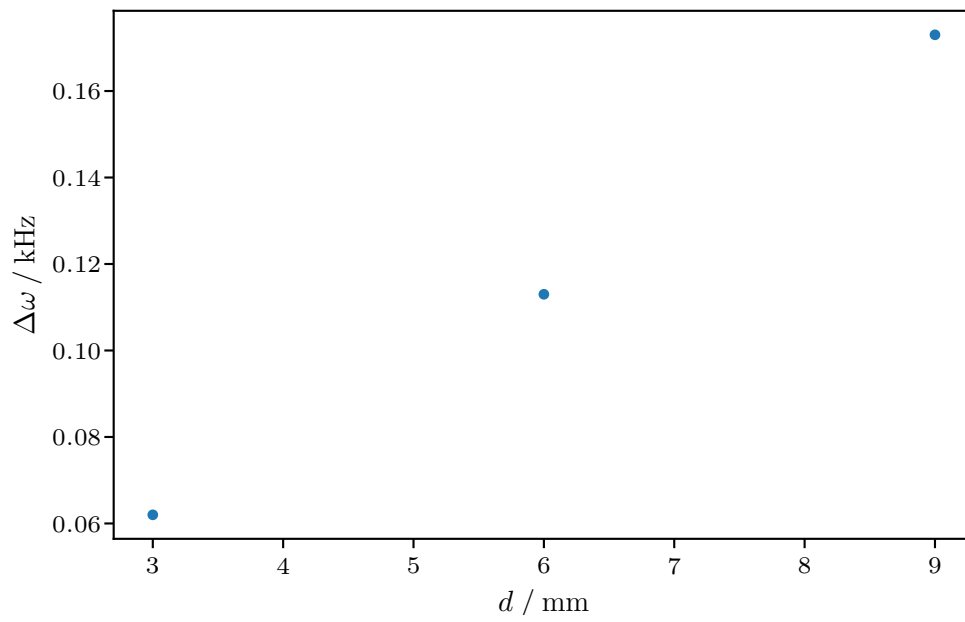


Abbildung 11: Aufspaltung der Peaks bei verschiedenen Ringdicken bei einem Winkel von $\alpha = 180^\circ$.

3.3 Wasserstoffmolekül

3.3.1 Abhängigkeit der Resonanzamplitude von dem Blendendurchmesser

In den Abbildungen 12 und 13 sind die Frequenzspektren bei verschiedenen Blendendurchmessern aufgeführt.

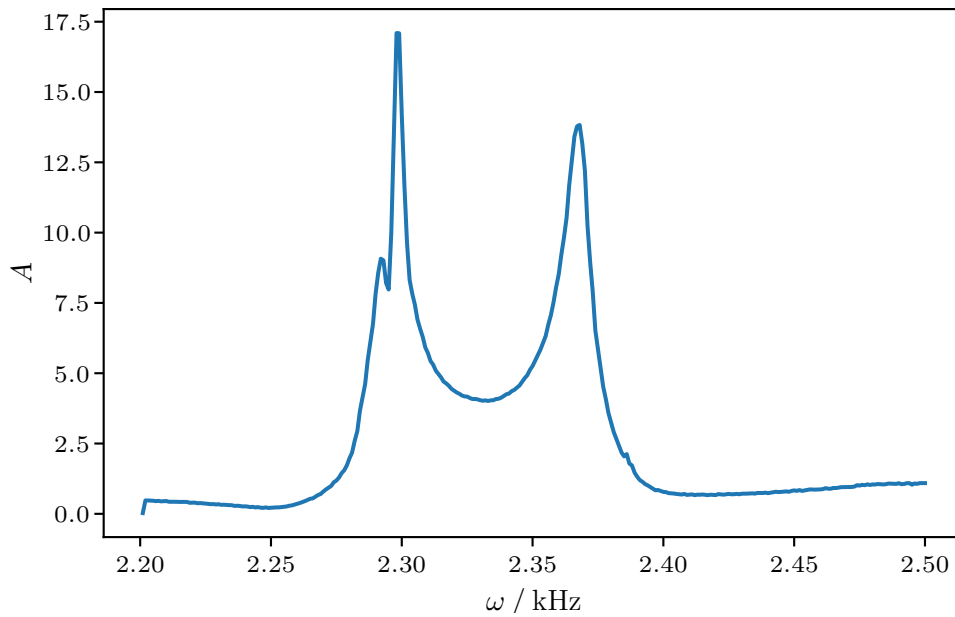


Abbildung 12: Frequenzspektrum des Wasserstoffmoleküls bei einem Winkel von $\alpha = 180^\circ$ mit einer Blende mit dem Durchmesser $d = 10$ mm.

Anhand Abbildung 14 lässt sich erkennen, dass ein größerer Blendendurchmesser eine größere Kopplung und somit Amplitude hervorruft. Dies ist analog zu einem größeren Überlapp der beiden atomaren Orbitale.

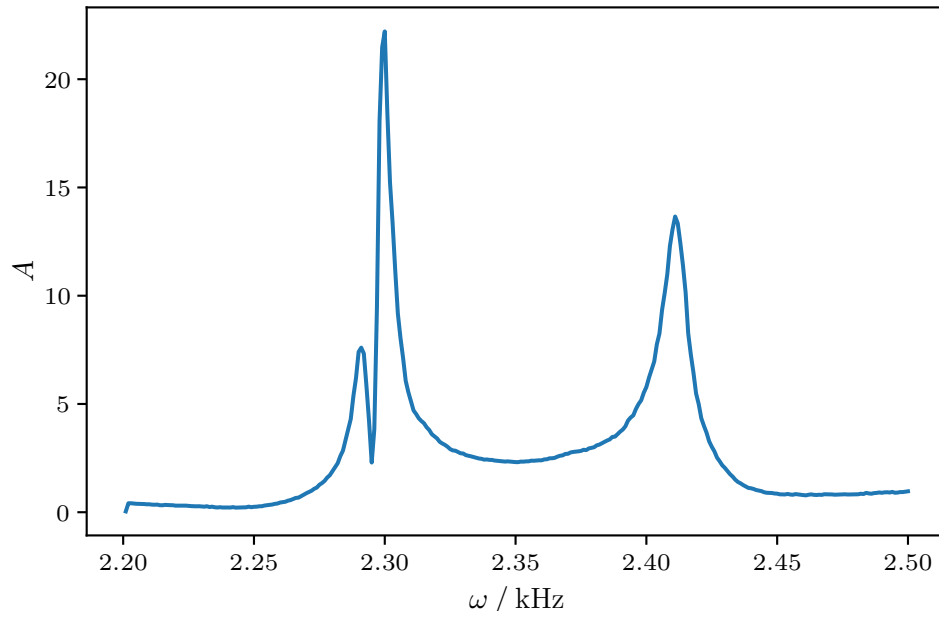


Abbildung 13: Frequenzspektrum des Wasserstoffmoleküls bei einem Winkel von $\alpha = 180^\circ$ mit einer Blende mit dem Durchmesser $d = 16$ mm.

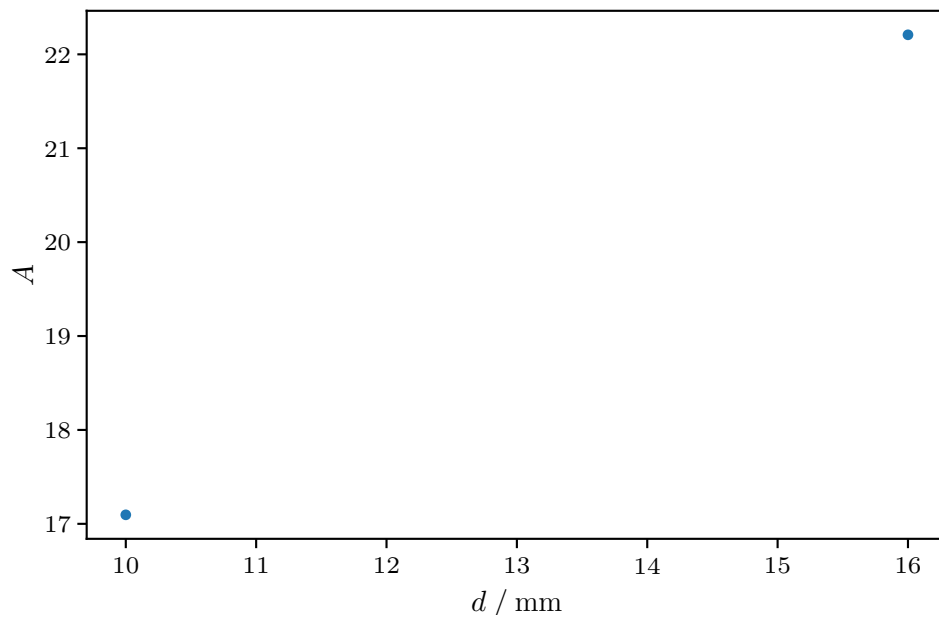


Abbildung 14: Resonanzamplitude bei $\omega = 2,3$ kHz des Wasserstoffmoleküls bei einem Winkel von $\alpha = 180^\circ$ in Abhängigkeit des Blendendurchmessers.

3.3.2 Winkelabhängigkeit der Resonanzamplitude

Der Polarplot in Abbildung 16, welcher die Resonanzamplitude bei 2,3 kHz in Abhängigkeit von dem Winkel darstellt, bezieht auf den ersten Peak aus Abbildung 15.

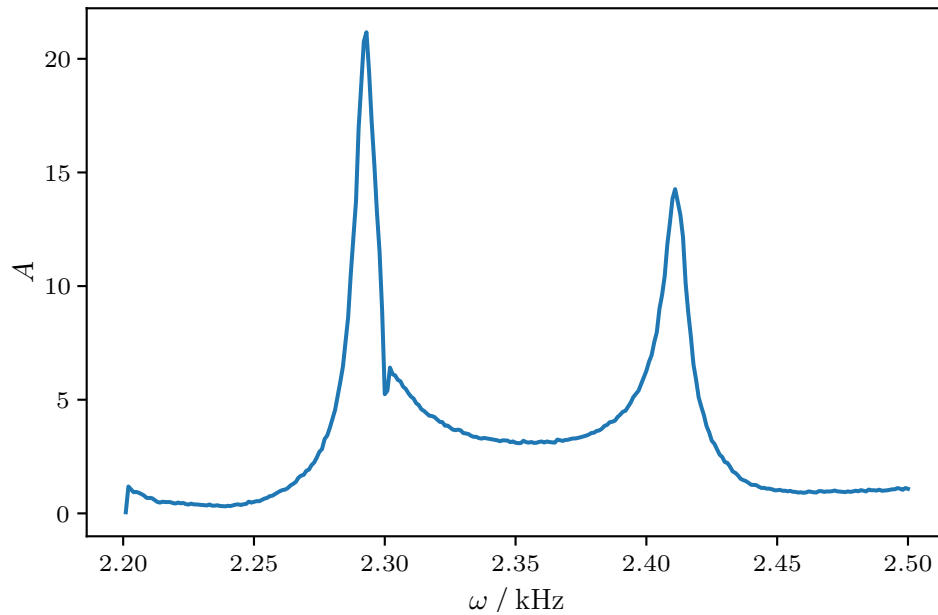


Abbildung 15: Frequenzspektrum des Wasserstoffmoleküls bei einem Winkel von $\alpha = 0^\circ$.

Aufgrund der in Tabelle 2 verschwundenen Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 0^\circ$ lässt sich ein bindender Zustand identifizieren.

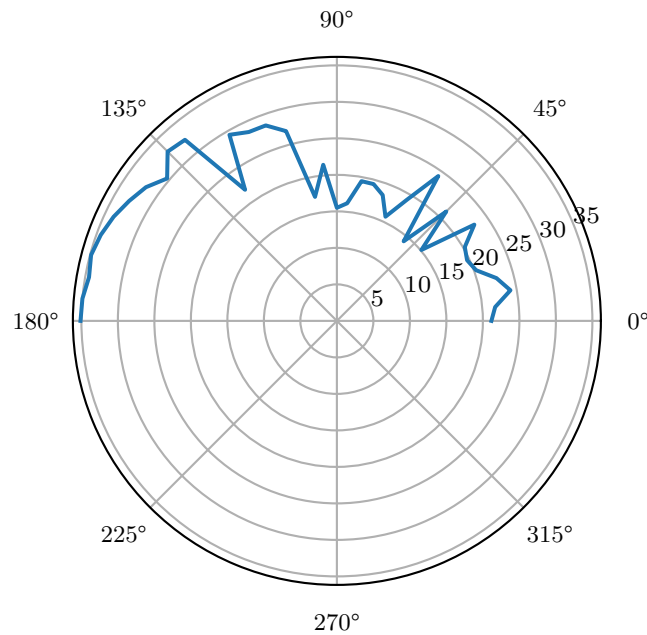


Abbildung 16: Polarplot des Peaks bei 2,3 kHz.

3.3.3 Phasenverschiebung

Tabelle 2: Relative Phase zur Eingangswelle

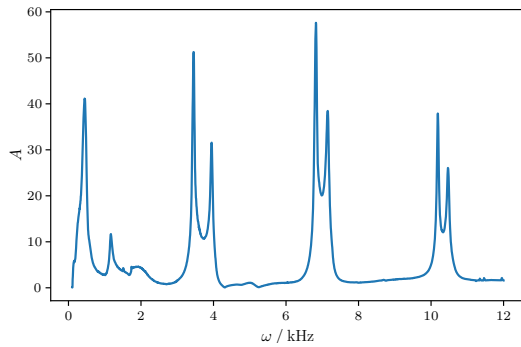
ω / kHz	φ_{oben}	φ_{unten}	$\Delta\varphi$
2,295	0	0	0
2,48	7	-172	179

In Tabelle 2 lässt sich erkennen, dass bei der Frequenz $\omega = 2,295$ kHz ein bindender Zustand vorliegt, da die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$ ist. Der Zustand bei der Frequenz $\omega = 2,48$ kHz ein antibindender Zustand, da die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 179$ beträgt.

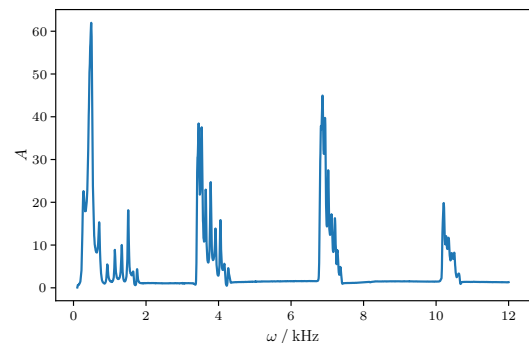
3.4 Eindimensionaler Festkörper

3.4.1 Festkörper aus mehreren Zylinder gleicher Länge und Blenden mit gleichem Durchmesser

In Abbildung 17a wird erkenntlich, dass sich der Peak eines einzelnen Zylinders bei mehreren Zylindern und Blenden in mehrere kleinere Peaks aufspaltet. Dies geschieht dadurch, dass die Resonanzen über mehr als einen Zylinder hinzukommen. Dies bedeutet, dass sich der Peak bei N Zylindern mit einer Blende zu N Peaks aufspaltet. Wird nun der Blendendurchmesser erhöht, verbreitern sich die Energiebänder, da die Abstände

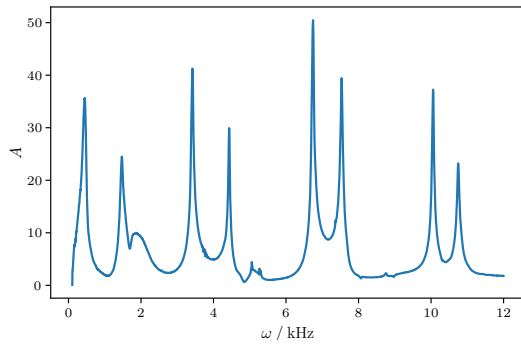


(a) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zwei 50 mm Zylindern und einer 10 mm Blende.

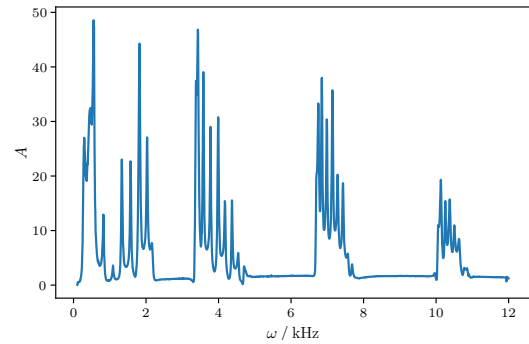


(b) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zehn 50 mm Zylindern und neun 10 mm Blenden.

Abbildung 17: Die Frequenzspektren von Festkörpern bestehend aus zwei bzw. zehn 50 mm Zylindern mit einer bzw. neun 10 mm Blenden, um die Frequenzspektren der Festkörper, welche eine Länge zwischen diesen beiden Extrema haben, zu repräsentieren.



(a) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zwei 50 mm Zylindern und einer 13 mm Blende.



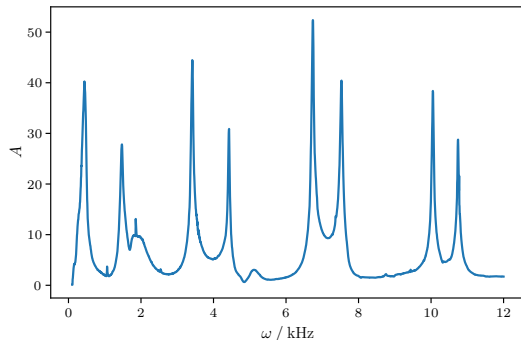
(b) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zehn 50 mm Zylindern und neun 13 mm Blenden.

Abbildung 18: Die Frequenzspektren von Festkörpern bestehend aus zwei bzw. zehn 50 mm Zylindern mit einer bzw. neun 13 mm Blenden, um die Frequenzspektren der Festkörper, welche eine Länge zwischen diesen beiden Extrema haben, zu repräsentieren.

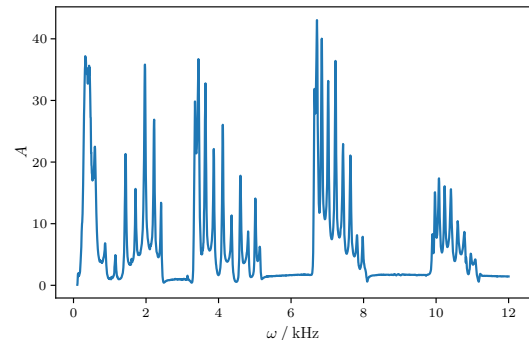
zwischen den Peaks in einem Band größer werden, wie in Abbildung 18 und 19 ersichtlich wird.

3.4.2 Ein Variabler Zylinder

In Abbildung 20d lässt sich ein kleiner Peak bei $\omega \approx 2,2$ kHz erkennen. Bei den anderen Störstellen ist kein zusätzlicher Peak erkenntlich, da das Spektrum dort mit 10 mm Blenden aufgenommen wurde, und somit die Streuung zu groß war. Ebenfalls könnte durch den kleineren Blendendurchmesser die Wechselwirkung zwischen den Rohrstücken zu klein gewesen sein, so dass dies auch zur Verminderung bzw. Vermeidung des zusätzlichen Peaks geführt haben.

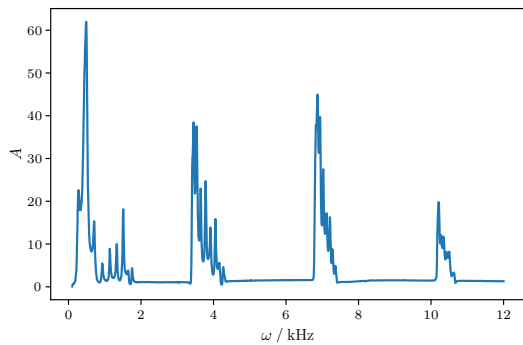


(a) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zwei 50 mm Zylindern und einer 16 mm Blende.

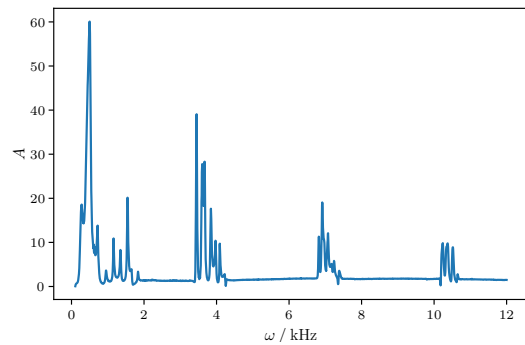


(b) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zehn 50 mm Zylindern und neun 16 mm Blenden.

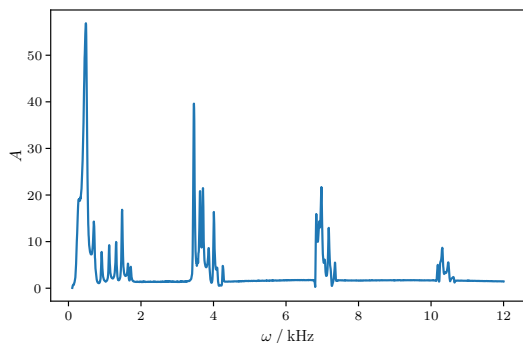
Abbildung 19: Die Frequenzspektren von Festkörpern bestehend aus zwei bzw. zehn 50 mm Zylindern mit einer bzw. neun 16 mm Blenden, um die Frequenzspektren der Festkörper, welche eine Länge zwischen diesen beiden Extrema haben, zu repräsentieren.



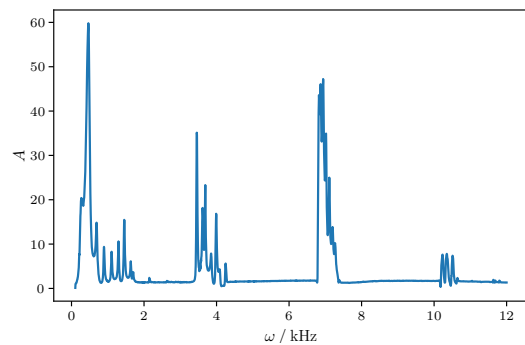
(a) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus zehn 50 mm Zylindern und neun 10 mm Blenden.



(b) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus neun 50 mm Zylindern, einem 37,5 mm Zylinder und neun 10 mm Blenden.



(c) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus neun 50 mm Zylindern, einem 62,5 mm Zylinder und neun 10 mm Blenden.



(d) Frequenzspektrum eines 1-dimensionalen Festkörpers bestehend aus neun 50 mm Zylindern, einem 75 mm Zylinder und neun 10 mm Blenden.

Abbildung 20: Die Frequenzspektren der Festkörper bestehend aus neun 50 mm Zylindern und einem variablen Zylinder mit neun 10 mm Blenden, um die Frequenzspektren Festkörper, welche eine Länge zwischen diesen beiden Extremen haben, zu repräsentieren.

3.5 Alternierende Zylinder und Blenden

3.5.1 Alternierende Zylinder

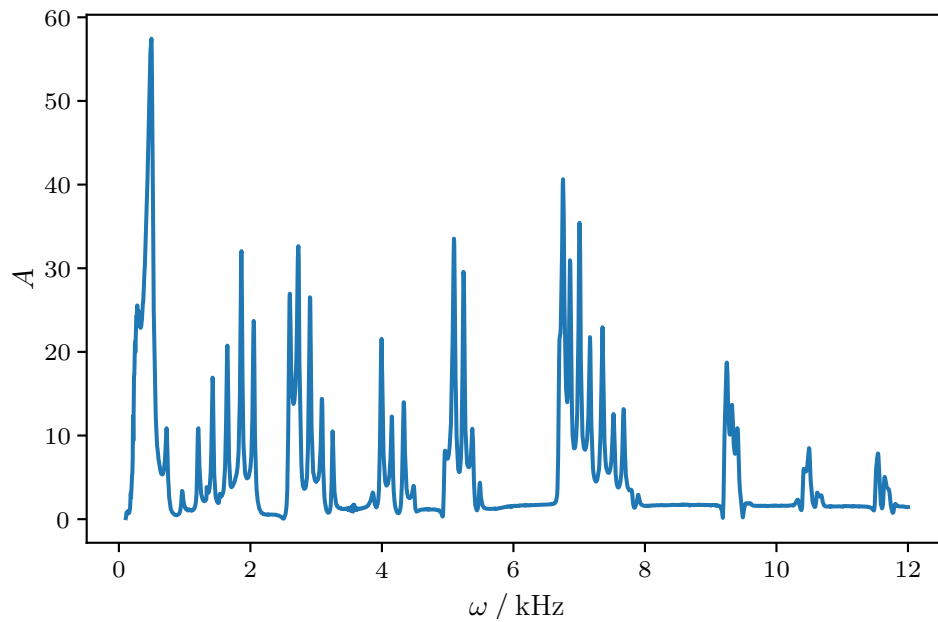
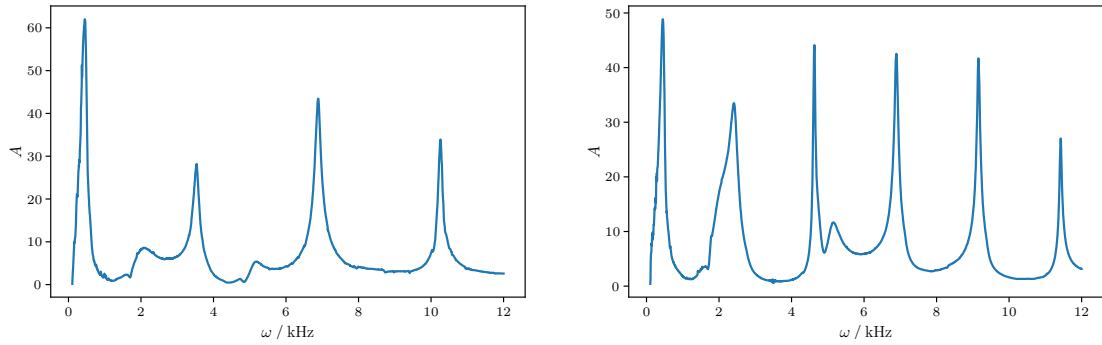


Abbildung 21: Frequenzspektrum eines Festkörpers bestehend aus 10 alternierenden 50 mm und 75 mm mit neun 16 mm Blenden.

Beim Vergleich zu Abbildung 22 fallen die Peaks in Abbildung 21, welche den Peaks von den einzelnen Rohren mit einem Durchmesser von $d = 50 \text{ mm}$ bzw. $d = 75 \text{ mm}$ entsprechen, auf.



(a) Frequenzspektrum von einem einzelnen 50 mm Zylinder.

(b) Frequenzspektrum von einem einzelnen 75 mm Zylinder.

Abbildung 22: Die Frequenzspektren von einzelnen 50 mm bzw. 75 mm Zylindern, um diese mit dem Spektrum aus Abbildung 21 zu vergleichen.

3.5.2 Alternierende Blendendurchmesser

Wenn nun die Blenden alternierend angeordnet werden, gleicht dies einem Festkörper bestehend aus zwei Basisatomen, wodurch zwei Untergitter simuliert werden. In Abbildung 23 wird deutlich, dass die Periodizität der verschiedenen Zylinderlängen ein Analogon zu zwei Untergittern ist. Bei alternierenden Blendendurchmesser entstehen neben den Hauptbündeln an Peaks neue Nebenbündel an Peaks, was mit der Beobachtung aus 3.4.1 übereinstimmt. Diese neuen Nebenbündel entsprechen neuen Subbändern.

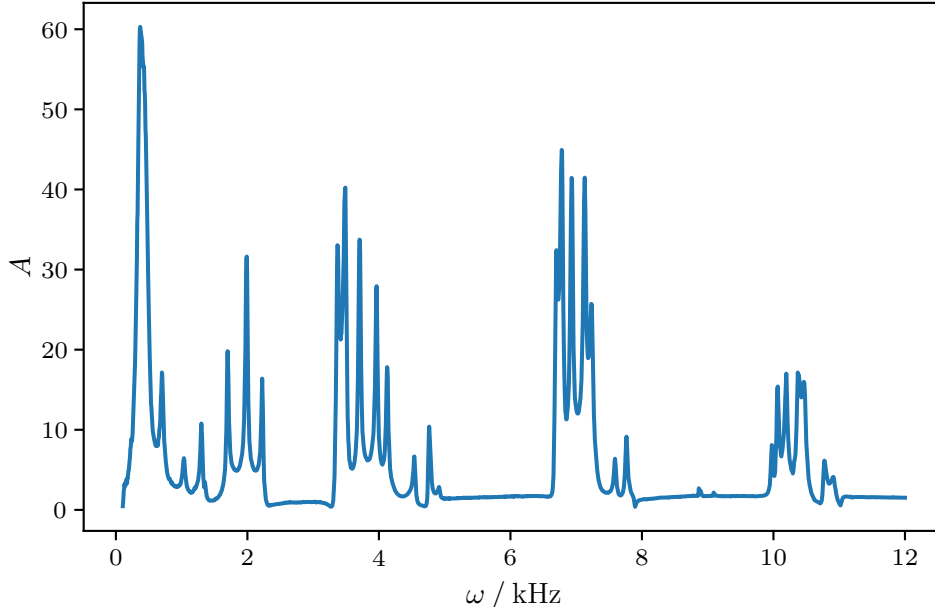


Abbildung 23: Frequenzspektrum eines Festkörpers bestehend aus acht 50 mm Zylindern mit sieben alternierenden einzelnen 13 mm und 16 mm Blenden.

4 Diskussion

Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass sich die Analogie zwischen den quantenmechanischen Wasserstoff- bzw. Wasserstoffmolekülmodellen und einem klassischen Hohlraumresonator durch diesen Versuch sehr gut verdeutlichen lässt. Besonders die Polarplots zeigen dieses Verhalten, da sich dort die Kugelflächenfunktionen mit einem relativ kleinen Aufwand erkennen lassen. Die einzige Ausnahme bildet der Polarplot 4, welcher die Kugelflächenfunktion Y_1^0 darstellen soll. Bei einem Winkel von $\theta \approx 135^\circ$ herrscht dort ein Einbruch der Amplitude, wodurch die Unterscheidung zur Kugelflächenfunktion Y_2^0 erschwert wird. Dennoch wird die Struktur dieser Kugelflächenfunktion deutlich. Ebenso wurde sowohl die Symmetriebrechung durch die Ringe bei dem Wasserstoffatom als auch die Kopplungsstärke in Abhängigkeit des Blendendurchmessers bei dem Wasserstoffmolekül deutlich. Ebenso ließ sich die Phasenverschiebung bei dem (anti-)bindenden Zustand veranschaulichen. Bei dem Festkörper wurde die Aufspaltung der Peaks gut aufgezeigt. Außerdem muss noch angemerkt werden, dass weitere Gewichte benötigt wurden, um die Lücken zwischen anliegenden Halbkugeln zu schließen, damit Störeinflüsse vermieden werden. Zudem sind bei dem Wasserstoffatom sehr viele Resonanzen samt Phasenverschiebungen, welche in Tabelle 1 aufgezeigt sind, aufgenommen worden. Besonders die beiden Phasenverschiebungen bei $\Delta\varphi \approx 70^\circ$ können als besonders problematisch angesehen werden, da diese keine klare Tendenz zu einer verschwindenden beziehungsweise zu einer Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 180^\circ$ aufzeigen. Zudem passen diese nicht ganz zu

den gemessenen Kugelflächenfunktionen, welche eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 0^\circ$ aufweisen sollten. In Abbildung 20 wird keine klare Veränderung in Abhängigkeit der Länge des Fremdzylinders ersichtlich. Dies liegt, wie in dem Abschnitt 3.4.2 beschrieben, an dem Blendendurchmesser, welcher in der Durchführung zu klein gewählt wurde. Es würde bei einer Störstelle mit einem Zylinder mit dem Durchmesser $d = 37,5$ mm ein Peak oberhalb jedes Bandes und bei einer Störstelle mit einem Zylinder mit dem Durchmesser $d = 62,5$ mm ein Peak unterhalb jedes Bandes erwartet werden. Diese neuen Peaks entsprächen einem neuem Zustand. Bei der erst genannten Störstelle würde es sich um eine p-Dotierung handeln, während bei der zweitgenannten Störstelle eine n-Dotierung vorliegen würde. Im Allgemeinen lässt sich zu dem eindimensionalen Festkörper sagen, dass dort die Bänder und Bandlücken, besonders in Abbildung 17a, deutlich wird. Die Bündel von Peaks entsprechen dort den Bändern, während zwischen diesen die Lücken sind. Wie in Abschnitt 3.5 ersichtlich wird, ist die Differenzierung zwischen alternierenden Zylindern und Blenden wichtig. Denn bei alternierenden Zylindern können die Peakpositionen und somit Bandpositionen von den einzelnen Rohren erkannt werden, während bei alternierenden Blenden Subbänder um die ursprüngliche Peakposition entstehen.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme, 9. Auflage*. Springer Spektrum, 2021. ISBN: 3662627280.
- [2] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3. Atome, Moleküle und Festkörper, 5. Auflage*. Springer Spektrum, 2021. ISBN: 3662490943.
- [3] TU Dortmund. *V23 Quanten Analogie*. 2022.
- [4] *Kugelflächenfunktionen*. 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelfl%C3%A4chenfunktionen> (besucht am 30.04.2022).