

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Yanick Sebastian Kind
yanick.kind@udo.edu

Till Willershausen
till.willershausen@udo.edu

Durchführung: 04.05.2021

Abgabe: DATUM

Inhaltsverzeichnis

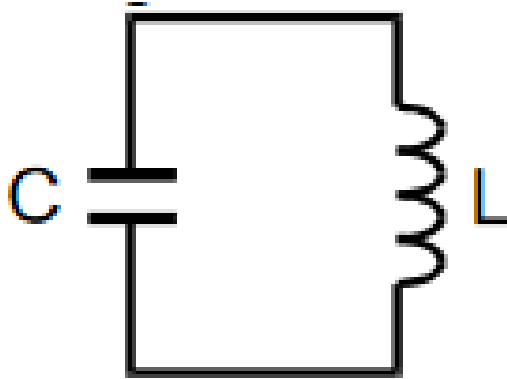
1	Theorie	3
2	Durchführung	4
3	Auswertung	5
3.1	Bestimmung des Dämpfungswiderstandes	5
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstandes bei dem aperiodischen Grenzfall	8
3.3	Bestimmung der Breite der Resonanzkurve	8
4	Diskussion	10
	Literatur	10

1 Theorie

Ziel des vorliegenden Versuches ist die Analyse des gedämpften Schwingkreises. Dafür soll die Dämpfung, der aperiodische Grenzfall und die Frequenzabhängigkeit des RCL-Kreises untersucht werden.

Der grundlegende Aufbau eines Schwingkreises enthält eine Kapazität C und eine Induktivität L , wie in Abbildung 1 zu sehen. Da beide Komponenten Energiespeicher sind,

Abbildung 1: Aufbau ungedämpfter Schwingkreis []



kann durch hineinpumpen eines Energiebetrages eine Schwingung der Energie vollführt werden. Wird dem System ein Widerstand hinzugefügt, kommt es zu einer gedämpften Schwingung. Das lösen der Differentialgleichung

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1)$$

für den Strom des Systems, liefert für $I(t)$

$$I(t) = e^{-t \frac{R}{2L}} \left(I_1 e^{it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} + I_2 e^{-it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \right). \quad (2)$$

Es wird ersichtlich, dass drei Fälle vorliegen. Ist $1/LC > R^2/4L^2$ ergibt sich der Schwingfall

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (3)$$

dabei ist η eine Phasenverschiebung, $\nu = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}/2\pi$ die Frequenz der Schwingung und

$$\mu = R/4\pi L \quad (4)$$

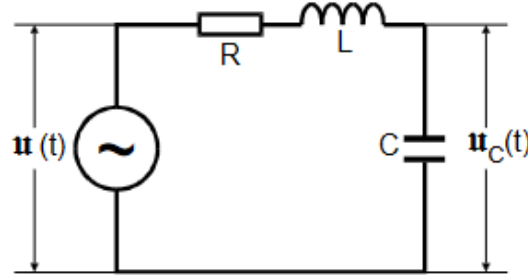
der Dämpfungskoeffizient. In dem Fall

$$R_{ap} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

wird vom aperiodischen Grenzfall gesprochen. Es ergibt sich, dass $\nu = 0$ ist. Somit kommt es zu keinem Überschwinger und $I(t)$ geht am schnellsten gegen Null.

Eine erzwungene Schwingung entsteht, wie in Abbildung 2 zu sehen, wenn an den RLC-Kreis eine Wechselspannung der Frequenz ω angelegt wird. Es kommt zu einer

Abbildung 2: Erzeugung einer erzwungenen Schwingung []



Inhomogenität in der Differentialgleichung. Bei der Berechnung der Spannung an dem Kondensator, folgt die Frequenzabhängigkeit

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (6)$$

Die Spannung hat ein Maximum bei $\omega = \omega_{\text{res}}$ mit

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (7)$$

dass Resonanzüberhöhung genannt wird. Mit Hilfe der beiden Frequenzen ω_+ und ω_- , an denen U_C auf den Bruchteil $1/\sqrt{2}$ abgefallen ist, lässt sich die Güte

$$q = \frac{\omega_{\text{res}}}{\omega_+ - \omega_-} \quad (8)$$

berechnen. Dabei können ω_+ und ω_- berechnet werden mit

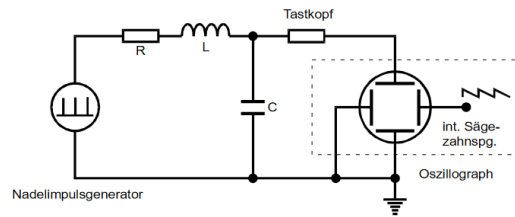
$$\omega_{\pm} = \pm \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (9)$$

Angenähert ergibt sich $\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$ für die Differenz.

2 Durchführung

Um die Zeitabhängigkeit der Amplitude zu untersuchen wurde der Versuch wie in Abbildung 3 aufgebaut. Dabei wurde an Stelle des Nadelimpulsgenerators ein Rechtecksignal genutzt. Der RLC-Kreis wird mit niederfrequenten Rechteckimpulsen ausgelegt und zum Schwingen angeregt. Es werden die Amplituden der Spannung U_C in Abhängigkeit von

Abbildung 3: Aufbau zur Untersuchung einer ungedämpften und erzwungenen Schwingung



der Zeit t der gedämpften Schwingung ausgelesen und notiert.

Der Durchführung des zweiten Versuchsteils erfolgt mit dem selben Aufbau wie in Abbildung 3. Jedoch wird der Widerstand durch einen verstellbaren ersetzt. Dann wird versucht durch variation des Widerstands den aperiodischen Grenzfall zu erreichen. Sobald dieser erreicht ist wird der Wert für den Widerstand notiert.

Für den dritten Versuchsteil wurde erneut der Versuch wie in Abbildung 3 aufgebaut. Dieses mal wird aber nur die Rechteckspannung durch eine Sinusspannung ersetzt. Die Abhängigkeit der Kondensatorsspannung U_C von der Frequenz wird untersucht, indem die Frequenz von 5 kHz bis 60 kHz erhöht wird.

3 Auswertung

Jegliche Fehlerrechnung wurde mit der python-Bibliothek uncertainties [2] absolviert. Trotz dessen sind die Formeln für die Unsicherheiten in den jeweiligen Abschnitten angegeben. Allgemeine Rechnungen wurden mit der python-Bibliothek numpy [3] automatisiert. Die graphischen Unterstützungen wurden mit Hilfe der python-Bibliothek matplotlib [1] erstellt.

Die Bauteile der verwendeten Schaltung haben folgende Werte:

$$L = (16,78 \pm 0,09) \text{ mH}$$

$$C = (2,066 \pm 0,006) \text{ nF}$$

$$R_1 = (67,2 \pm 0,2) \Omega$$

$$R_2 = (682 \pm 1) \Omega .$$

3.1 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes

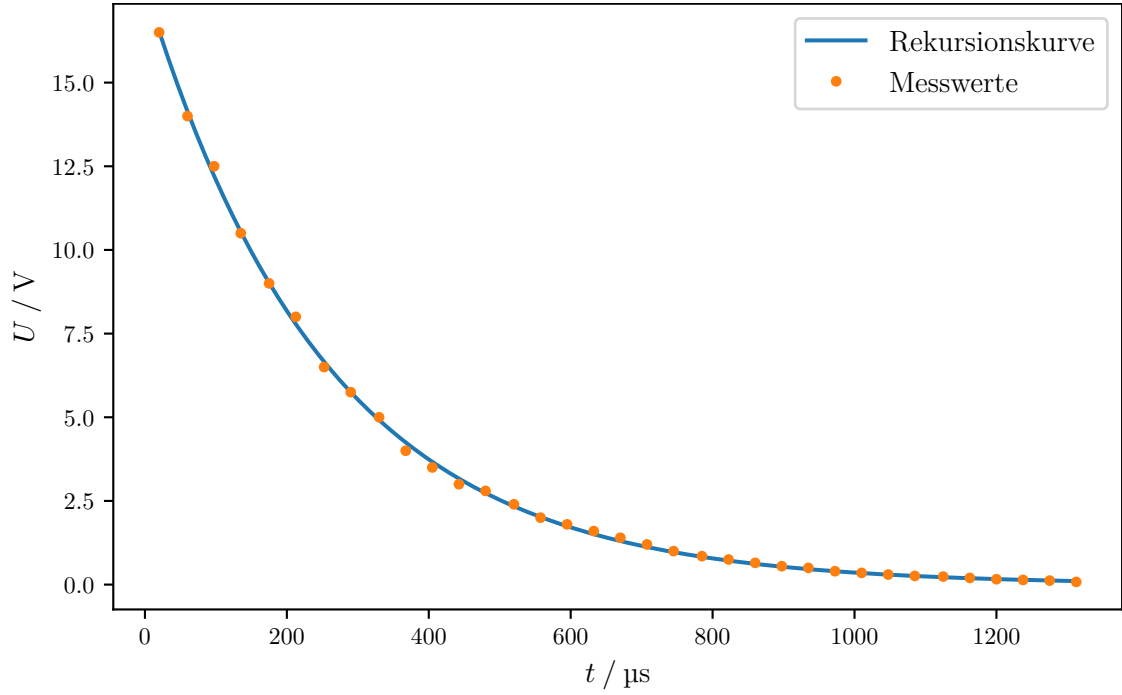
In der Tabelle 1 ist die Spannung mit den dazugehörigen Zeiten aufgetragen. Um den Dämpfungswiderstand zu bestimmen, ist es von Nöten eine Ausgleichsrechnung mit dem e-Term der Funktion *REFERENZ* durchzuführen. Die Parameter der Regressionsfunktion

$$U = U_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (10)$$

Tabelle 1: Gemessene Spannungsamplituden in Abhängigkeit von der Zeit

$t / \mu\text{s}$	U / V
20	16,5
60	14,0
97	12,5
135	10,5
175	9
212,5	8
252,5	6,5
290	5,75
330	5,0
367,5	4,0
405	3,5
442,5	3
480,0	2,8
520	2,4
557,5	2
595	1,8
632,5	1,6
670	1,4
707,5	1,2
745	1
785	0,85
822,5	0,75
860	0,65
897,5	0,55
935	0,5
972,5	0,4
1010	0,35
1047,5	0,3
1085	0,26
1125	0,24
1162,5	0,2
1200	0,16
1237,5	0,14
1275	0,12
1312,5	0,08

Abbildung 4: Gemessene Spannungsamplituden mit Regression



lassen sich zu

$$U_0 = (17,87 \pm 0,08) \text{ V}$$

$$\mu = (622,51 \pm 0,92) \frac{1}{\text{s}}$$

bestimmen. Mit der Beziehung

$$R_{\text{eff}} = 4\pi\mu L \quad (11)$$

lässt sich der Dämpfungswiderstand R zu

$$R_{\text{eff}} = (131,26 \pm 1,09) \Omega$$

bestimmen. Aus dem ebend berechneten Dämpfungswiderstand und der Gleichung *REFERENZ* kann die Abklingdauer zu

$$T_{\text{ex}} = (255,67 \pm 1,61) \mu\text{s}$$

errechnen. Der Fehler für den Dämpfungswiderstand ergibt sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta R_{\text{eff}} = 4\pi \sqrt{L^2 (\Delta\mu)^2 + \mu^2 (\Delta L)^2} . \quad (12)$$

Ebenfalls mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich der Fehler der Abklingzeit als

$$\Delta T_{\text{ex}} = \frac{2}{R_{\text{eff}}} \sqrt{(\Delta L)^2 + \frac{L}{R_{\text{eff}}^2} (\Delta R_{\text{eff}})^2} . \quad (13)$$

3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes bei dem aperiodischen Grenzfall

Während der Messung wurde ein Dämpfungswiderstand, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, von

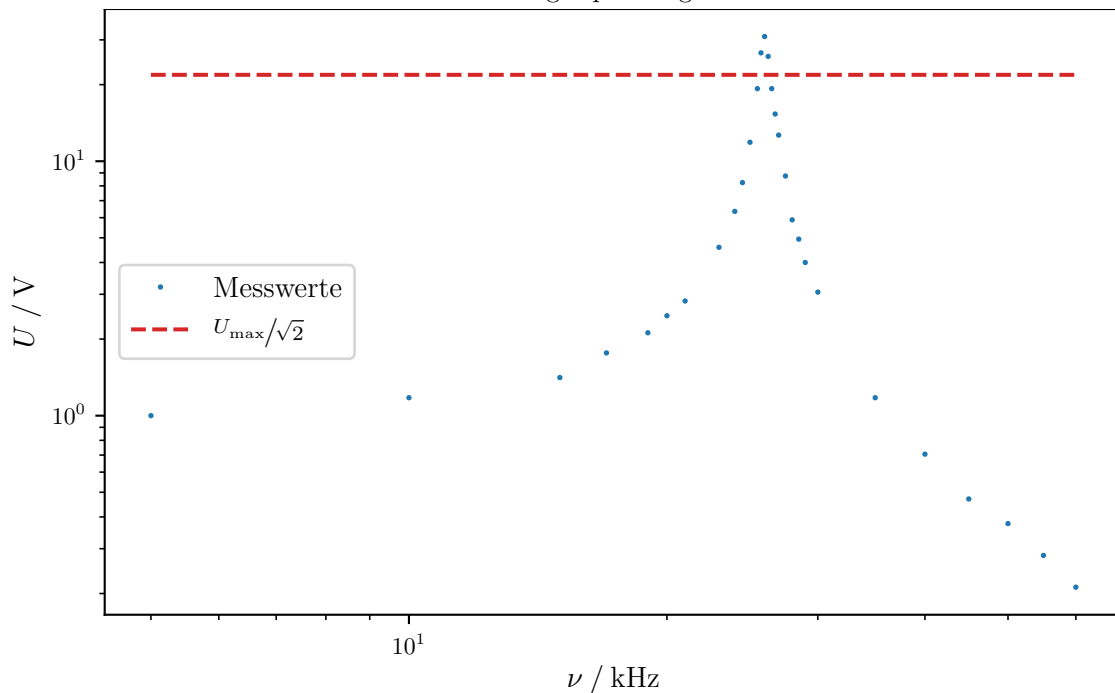
$$R_{\text{ap}} = 4,4 \text{ k}\Omega$$

gemessen.

3.3 Bestimmung der Breite der Resonanzkurve

Die gemessenen Werte für die Frequenz ν , die Erregerspannung U_{err} , die Kondensatorspannung U_C und der daraus berechnete Quotient $U = U_C/U_{\text{err}}$ sind in der Tabelle 2 aufgetragen. In der Abbildung 5 sind die ebend genannten Daten logarithmisch aufgetragen.

Abbildung 5: Logarithmisch dargestellter Quotient aus der gemessenen Kondensator- und Erregerspannung



Die Frequenzen ν_+ und ν_- , bei welcher die Spannung auf $U_{\text{max}}/\sqrt{2}$ abgefallen ist, liegen bei

$$\nu_+ = 26,5 \text{ kHz}$$

$$\nu_- = 25,5 \text{ kHz} ,$$

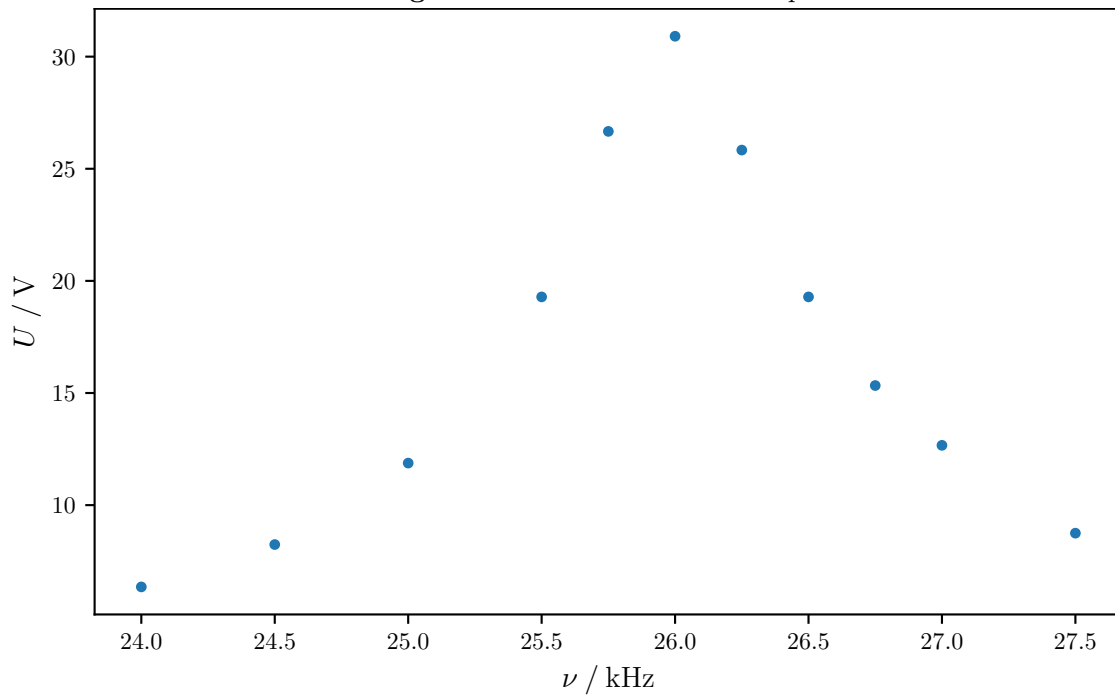
wodurch sich eine Breite von

$$b = 1 \text{ kHz}$$

Tabelle 2: Quotient aus der gemessenen Konensator- und Erregerspannung

ν / kHz	$U_{\text{Err}} / \text{V}$	U_{C} / V	U / V
5	9	9	1
10	8,5	10	1,1
15	8,5	12	1,4
17	8	15	1,7
19	8	18	2,1
20	8	21	2,4
21	8	24	2,8
23	8	39	4,5
24	8	54	6,3
24,5	8,25	68	8,2
25,0	8	95	11,8
25,5	7	135	19,9
25,75	6	160	26,7
26	5,5	170	30,1
26,25	6	155	25,3
26,5	7	135	19,9
26,75	7,5	115	15,3
27	7	95	12,7
27,5	8	70	8,7
28	8,5	50	5,8
28,5	8,5	42	4,9
29	8,5	34	4
30	8,5	26	3,0
35	8,5	10	1,1
40	8,5	6	0,7
45	8,5	4	0,4
50	8,5	3,2	0,3
55	8,5	2,4	0,2
60	8,5	1,8	0,2

Abbildung 6: Bereich um die Resonanzfrequenz



ergibt. Mit Hilfe der Beziehung *REFERENZ* lässt sich die Güte zu

$$q = 26$$

errechnen. Die theoretische Güte beträgt

4 Diskussion

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.