

V354

## **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Yanick Sebastian Kind  
yanick.kind@udo.edu

Till Willershausen  
till.willershausen@udo.edu

Durchführung: 04.05.2021

Abgabe: 10.05.2021

# Inhaltsverzeichnis

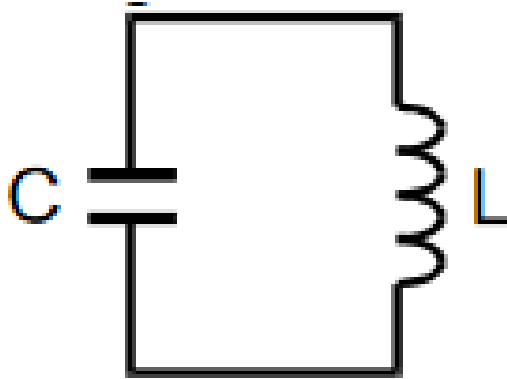
<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Verwendete Bauteile . . . . .	5
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstands bei der gedämpften Schwingung .	6
3.3	Bestimmung des Dämpfungswiderstandes bei dem aperiodischen Grenzfall	8
3.4	Bestimmung der Breite der Resonanzkurve . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>11</b>
	<b>Literatur</b>	<b>12</b>

# 1 Theorie

Ziel des vorliegenden Versuchs ist die Analyse des gedämpften Schwingkreises. Dafür soll die Dämpfung, der aperiodische Grenzfall und die Frequenzabhängigkeit des RCL-Kreises untersucht werden.

Der grundlegende Aufbau eines Schwingkreises enthält eine Kapazität  $C$  und eine Induktivität  $L$ , wie in Abbildung 1 zu sehen ist. Da beide Komponenten Energiespeicher sind,

**Abbildung 1:** Aufbau eines ungedämpften Schwingkreises [1]



kann durch Hineinpumpen eines Energiebetrages eine Schwingung der Energie vollführt werden. Wird dem System ein Widerstand hinzugefügt, kommt es zu einer gedämpften Schwingung. Das lösen der Differentialgleichung

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1)$$

für den Strom des Systems, liefert für  $I(t)$

$$I(t) = e^{-t \frac{R}{2L}} \left( I_1 e^{it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} + I_2 e^{-it \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \right). \quad (2)$$

Es wird ersichtlich, dass drei Fälle vorliegen. Ist  $1/LC > R^2/4L^2$  ergibt sich der Schwingfall

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (3)$$

dabei ist  $\eta$  eine Phasenverschiebung,  $\nu = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}/2\pi$  die Frequenz der Schwingung und

$$\mu = R/4\pi L \quad (4)$$

der Dämpfungskoeffizient. Es lässt sich die Abklingzeit mit

$$T_{\text{ex}} = 2 \frac{L}{R_{\text{eff}}} \quad (5)$$

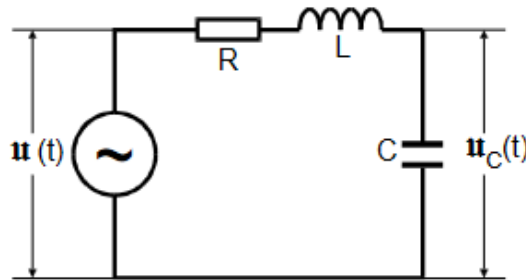
berechnen.  
In dem Fall

$$R_{\text{ap}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

wird vom aperiodischen Grenzfall gesprochen. Es ergibt sich, dass  $\nu = 0$  ist. Somit kommt es zu keinem Überschwinger und  $I(t)$  geht am schnellsten gegen Null.

Eine erzwungene Schwingung entsteht, wie in Abbildung 2 zu sehen ist, wenn an den RLC-Kreis eine Wechselspannung der Frequenz  $\nu$  angelegt wird. Es kommt zu einer

**Abbildung 2:** Erzeugung einer erzwungenen Schwingung [1]



Inhomogenität in der Differentialgleichung. Bei der Berechnung der Spannung an dem Kondensator folgt die Frequenzabhängigkeit

$$U_C(\nu) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\nu^2)^2 + \nu^2 R^2 C^2}}. \quad (7)$$

Die Spannung hat ein Maximum bei  $\nu = \nu_{\text{res}}$  mit

$$\nu_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (8)$$

dass Resonanzüberhöhung genannt wird. Mit Hilfe der beiden Frequenzen  $\nu_+$  und  $\nu_-$ , an denen  $U_C$  auf den Bruchteil  $1/\sqrt{2}$  abgefallen ist, lässt sich die Güte

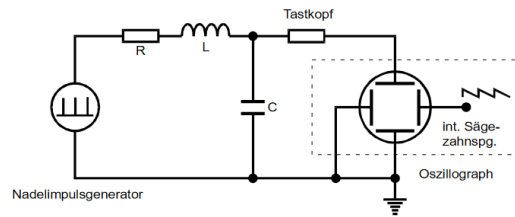
$$q = \frac{\nu_{\text{res}}}{\nu_+ - \nu_-} \quad (9)$$

berechnen. Dabei können  $\nu_+$  und  $\nu_-$  mit

$$\nu_{\pm} = \pm \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} \quad (10)$$

berechnet werden. Angenähert ergibt sich  $\nu_+ - \nu_- \approx \frac{R}{L}$ .

**Abbildung 3:** Aufbau zur Untersuchung einer ungedämpften und erzwungenen Schwingung [1]



## 2 Durchführung

Um die Zeitabhängigkeit der Amplitude zu untersuchen wurde der Versuch wie in Abbildung 3 aufgebaut. Dabei wurde an Stelle des Nadelimpulsgenerators ein Rechtecksignal genutzt. Der RLC-Kreis wird mit niederfrequenten Rechteckimpulsen ausgelegt und zum Schwingen angeregt. Es werden die Amplituden der Spannung  $U_C$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  der gedämpften Schwingung ausgelesen und notiert.

Die Durchführung des zweiten Versuchsteils erfolgt mit dem selben Aufbau wie in Abbildung 3. Jedoch wird der Widerstand durch einen verstellbaren ersetzt. Danach wird versucht durch Variation des Widerstands den aperiodischen Grenzfall zu erreichen. Sobald dieser erreicht ist, wird der Wert für den Widerstand notiert.

Für den dritten Versuchsteil wurde der Versuch erneut wie in Abbildung 3 aufgebaut. Dies mal wird nur die Rechteckspannung durch eine Sinusspannung ersetzt. Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung  $U_C$  wird untersucht, indem die Frequenz von 5 kHz bis 60 kHz erhöht wird.

## 3 Auswertung

Jegliche Fehlerrechnung wurde mit der python-Bibliothek uncertainties [3] absolviert. Trotz dessen sind die Formeln für die Unsicherheiten in den jeweiligen Abschnitten angegeben. Allgemeine Rechnungen wurden mit der python-Bibliothek numpy [4] automatisiert. Die graphischen Unterstützungen wurden mit Hilfe der python-Bibliothek matplotlib [2] erstellt.

### 3.1 Verwendete Bauteile

Die Bauteile der verwendeten Schaltung haben folgende Werte:

$$L = (16,78 \pm 0,09) \text{ mH}$$

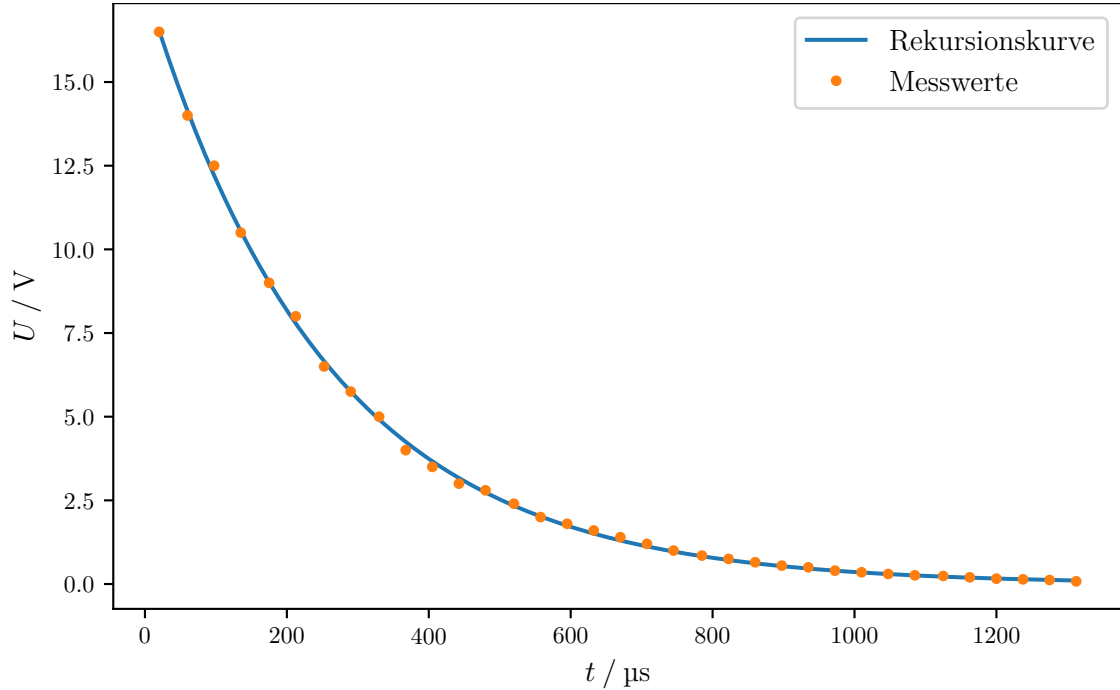
$$C = (2,066 \pm 0,006) \text{ nF}$$

$$R = (67,2 \pm 0,2) \Omega$$

### 3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands bei der gedämpften Schwingung

In der Tabelle 1 ist die Spannung mit den dazugehörigen Zeiten aufgetragen. Um den

**Abbildung 4:** Gemessene Spannungsamplituden mit Regression



Dämpfungswiderstand zu bestimmen, ist es von Nöten eine Ausgleichsrechnung mit dem e-Term der Funktion (3) durchzuführen. Die Parameter der Regressionsfunktion

$$U = U_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (11)$$

lassen sich zu

$$U_0 = (17,87 \pm 0,08) \text{ V}$$

$$\mu = (622,51 \pm 0,92) \frac{1}{\text{s}}$$

bestimmen. Mit der Beziehung

$$R_{\text{eff}} = 4\pi\mu L \quad (12)$$

lässt sich der Dämpfungswiderstand  $R_{\text{eff}}$  zu

$$R_{\text{eff}} = (131,26 \pm 1,09) \Omega$$

bestimmen. Aus dem eben berechneten Dämpfungswiderstand und der Gleichung (5) kann die Abklindauer zu

$$T_{\text{ex}} = (255,67 \pm 1,61) \mu\text{s}$$

**Tabelle 1:** Gemessene Spannungsamplituden in Abhängigkeit von der Zeit

$t / \mu\text{s}$	$U / \text{V}$
20	16,5
60	14,0
97	12,5
135	10,5
175	9
212,5	8
252,5	6,5
290	5,75
330	5,0
367,5	4,0
405	3,5
442,5	3
480,0	2,8
520	2,4
557,5	2
595	1,8
632,5	1,6
670	1,4
707,5	1,2
745	1
785	0,85
822,5	0,75
860	0,65
897,5	0,55
935	0,5
972,5	0,4
1010	0,35
1047,5	0,3
1085	0,26
1125	0,24
1162,5	0,2
1200	0,16
1237,5	0,14
1275	0,12
1312,5	0,08

errechnen. Der Fehler für den Dämpfungswiderstand ergibt sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta R_{\text{eff}} = 4\pi \sqrt{L^2 (\Delta\mu)^2 + \mu^2 (\Delta L)^2} . \quad (13)$$

Ebenfalls mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich der Fehler der Abklingzeit als

$$\Delta T_{\text{ex}} = \frac{2}{R_{\text{eff}}} \sqrt{(\Delta L)^2 + \frac{L}{R_{\text{eff}}^2} (\Delta R_{\text{eff}})^2} . \quad (14)$$

### 3.3 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes bei dem aperiodischen Grenzfall

Mit Hilfe der Messung wurde ein Dämpfungswiderstand, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, von

$$R_{\text{ap}} = 4,4 \text{ k}\Omega$$

ermittelt.

### 3.4 Bestimmung der Breite der Resonanzkurve

Die gemessenen Werte für die Frequenz  $\nu$ , die Erregerspannung  $U_{\text{err}}$ , die Kondensatorspannung  $U_C$  und der daraus berechnete Quotient  $U = U_C/U_{\text{err}}$  sind in der Tabelle 2 aufgetragen. In der Abbildung 5 sind die eben genannten Daten logarithmisch aufgetragen.

Die Frequenzen  $\nu_+$  und  $\nu_-$ , bei denen die Spannung auf  $U_{\text{max}}/\sqrt{2}$  abgefallen ist, liegen bei

$$\begin{aligned} \nu_+ &= 26,5 \text{ kHz} \\ \nu_- &= 25,5 \text{ kHz} , \end{aligned}$$

wodurch sich eine Breite von

$$b = 1 \text{ kHz}$$

ergibt. Mit Hilfe der Beziehung (9) lässt sich die Güte zu

$$q = 26$$

errechnen. Die theoretische Güte, welche sich aus den im Abschnitt 3.1 genannten Werten für die Induktivität  $L$ , die Kapazität  $C$  und dem Widerstand  $R$  errechnen lässt, beträgt

$$q_{\text{Theo}} = 42,41 \pm 0,64 .$$

Die theoretischen Werte für  $\nu_+$  und  $\nu_-$  lassen sich zu

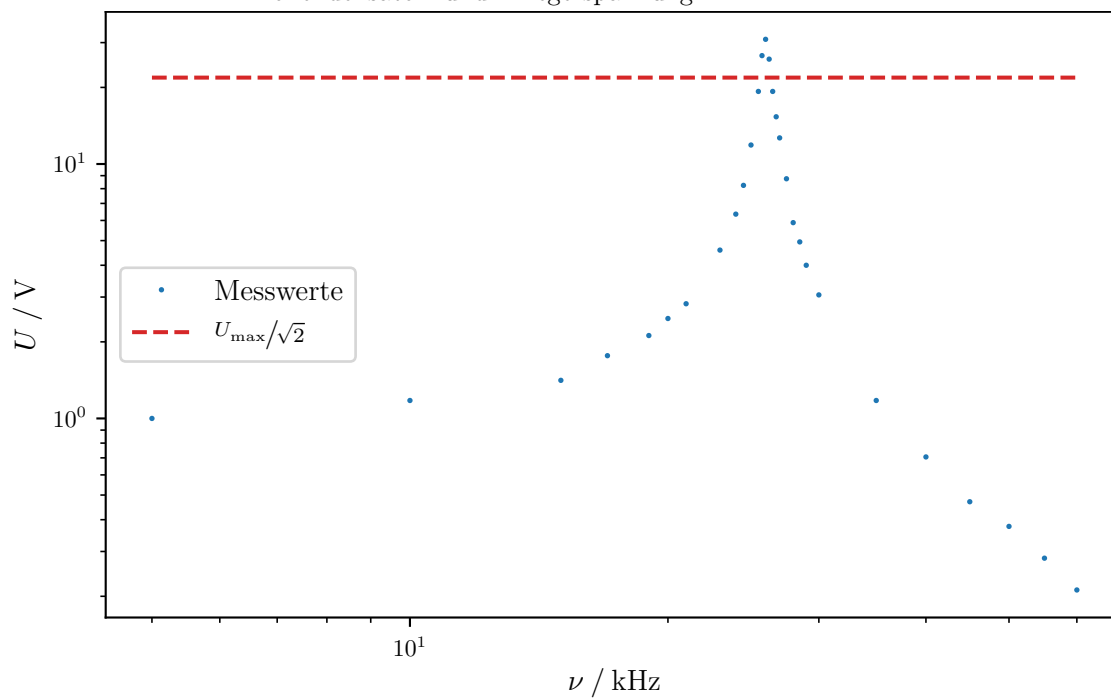
$$\begin{aligned} \nu_{+, \text{ Theo}} &= (27,35 \pm 0,04) \text{ kHz} \\ \nu_{-, \text{ Theo}} &= (26,71 \pm 0,04) \text{ kHz} \end{aligned}$$



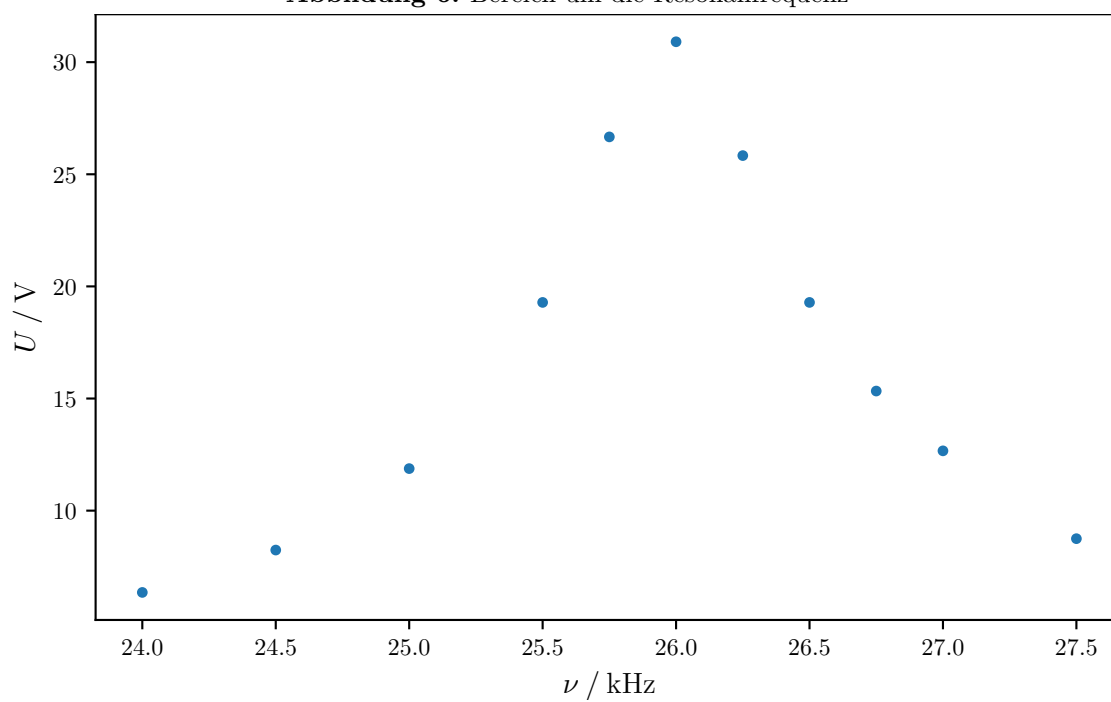
**Tabelle 2:** Quotient aus der gemessenen Kondensator- und Erregerspannung

$\nu / \text{kHz}$	$U_{\text{Err}} / \text{V}$	$U_{\text{C}} / \text{V}$	$U / \text{V}$
5	9	9	1
10	8,5	10	1,1
15	8,5	12	1,4
17	8	15	1,7
19	8	18	2,1
20	8	21	2,4
21	8	24	2,8
23	8	39	4,5
24	8	54	6,3
24,5	8,25	68	8,2
25,0	8	95	11,8
25,5	7	135	19,9
25,75	6	160	26,7
26	5,5	170	30,1
26,25	6	155	25,3
26,5	7	135	19,9
26,75	7,5	115	15,3
27	7	95	12,7
27,5	8	70	8,7
28	8,5	50	5,8
28,5	8,5	42	4,9
29	8,5	34	4
30	8,5	26	3,0
35	8,5	10	1,1
40	8,5	6	0,7
45	8,5	4	0,4
50	8,5	3,2	0,3
55	8,5	2,4	0,2
60	8,5	1,8	0,2

**Abbildung 5:** Logarithmisch dargestellter Quotient aus der gemessenen Kondensator- und Erregerspannung



**Abbildung 6:** Bereich um die Resonanzfrequenz



berechnen, was zu einer theoretischen Breite von

$$b_{\text{Theo}} = (637 \pm 4) \text{ Hz}$$

führt. Die Fehler für  $q_{\text{Theo}}$  und  $\nu_{\pm, \text{Theo}}$  lassen sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta q_{\text{Theo}} = \frac{1}{\sqrt{RC}} \sqrt{\frac{1}{4LR} (\Delta L)^2 + \frac{L}{R^3} (\Delta R)^2 + \frac{L}{4C^2 R} (\Delta C)^2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (\Delta \nu_{+, \text{Theo}})^2 &= (\Delta L)^2 \left( \frac{-\frac{R^2}{4L^3} - \frac{1}{2CL^2}}{2\pi \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL}}} - \frac{R}{4\pi L^2} \right)^2 + (\Delta R)^2 \left( \frac{1}{4\pi L} + \frac{R}{8\pi L^2 \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL}}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{(\Delta C)^2}{16\pi^2 C^4 L^2 \left( \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL} \right)} \end{aligned} \quad (16)$$

und

$$\begin{aligned} (\Delta \nu_{-, \text{Theo}})^2 &= (\Delta L)^2 \left( \frac{-\frac{R^2}{4L^3} - \frac{1}{2CL^2}}{2\pi \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL}}} + \frac{R}{4\pi L^2} \right)^2 + (\Delta R)^2 \left( -\frac{1}{4\pi L} + \frac{R}{8\pi L^2 \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL}}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{(\Delta C)^2}{16\pi^2 C^4 L^2 \left( \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{CL} \right)} \end{aligned} \quad (17)$$

errechnen.

## 4 Diskussion

Bei Betrachtung der Güte fällt es auf, dass diese stark von der theoretischen Güte abweicht. Die Abweichung beträgt

$$\frac{q_{\text{Theo}} - q}{q_{\text{Theo}}} = 38,69 \% , \quad (18)$$

welche eine relativ hohe Abweichung ist. Möglicherweise könnte es daran liegen, dass bei der Berechnung der theoretischen Güte der Innenwiderstand des Sinusgenerators vernachlässigt wurde. Da durch den Widerstand geteilt wird, liegt dies nahe. Wo sich der vernachlässigte Widerstand ebenfalls widerspiegelt ist bei der Berechnung der Frequenz, wo die Spannung auf ein Faktor  $U_{\text{max}}/\sqrt{2}$  abgefallen ist. Denn die daraus errechnete theoretische Breite ähnelt der experimentell bestimmten Breite ähnlich wenig. Außerdem sind die Frequenzen  $\nu_+$  und  $\nu_-$  im Vergleich zu den theoretisch berechneten Frequenzen um ca. 1 kHz verschoben.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2014.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.