

VERSUCH NUMMER

TITEL

Mirjam Prayer	Nikola Mang
mirjam.prayer@tu-dortmund.de	nikola.mang@tu-dortmund.de

Durchführung: DATUM	Abgabe: DATUM
---------------------	---------------

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Funktionsweise	3
1.2	Wheatonsche Brücke	4
1.3	Kapazitätsmessbrücke	5
1.4	Induktivitätsmessbrücke	5
1.5	Maxwell-Brücke	6
1.6	Wien-Robinson-Brücke	7
2	Durchführung	8
2.1	a)	8
2.2	b)	8
2.3	c)	8
2.4	d)	8
2.5	e)	9
3	Auswertung	9
3.1	Wheatstonesche Brücke	9
3.2	Kapazitätsmessbrücke	9
3.3	Induktivitätsbrücke	10
3.4	Maxwell-Brücke	10
3.5	Wien-Robinson-Brücke	10
4	Diskussion	12

1 Theorie

1.1 Funktionsweise

Bei einer Brückenschaltung wird die Potentialdifferenz von zwei parallelen Leitern, die jeweils mit unterschiedlichen Widerständen versehen sind, gemessen.

Typischerweise besteht die Schaltung also aus zwei parallel geschalteten Widerstandsfolgen, wie das Schaltbild 1 zeigt.

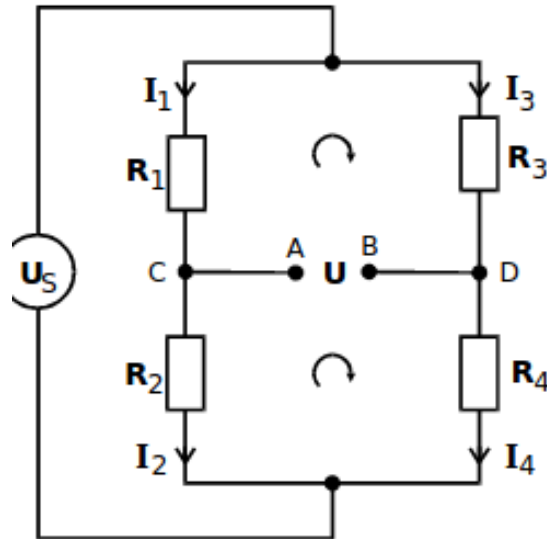


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer typischen Brückenschaltung.

Zur Berechnung der sogenannten Brückenspannung U_{Br} werden die Kirchhoffschen Gesetze verwendet.

1. Knotenregel: Treffen mehrere Ströme aufeinander, ist die Gesamtsumme aller Ströme gleich null, wobei abfließende Ströme ein negatives Vorzeichen haben.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

2. Maschenregel: In dem geschlossenen Stromkreisen ist die Summe aller elektromotorischen Kräfte gleich der Summe aller Stromstärken multipliziert mit den Widerständen. Auch hier sind einige Ströme negativ zu werten; diejenigen, die entgegen dem Uhrzeigersinn laufen.

$$\sum_k E_k = \sum_k I_k R_k \quad (2)$$

Im Fall der allgemeinen Brückenschaltung folgt aus (1) und (2) die Bedingung

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (3)$$

Ist sie erfüllt, spricht man von einer abgeglichenen Brücke.

Oftmals werden auch Kapazitäten und Induktivitäten in eine Brückenschaltung eingebaut, in diesem Fall werden die Widerstände als komplexe Zahlen aufgefasst; es gelten

$$\begin{aligned} Z_C &= -\frac{i}{\omega} \\ Z_L &= i\omega L \\ Z_R &= R \end{aligned}$$

für die Impedanzen (komplexen Widerstände) von Kapazität C , Induktivität L und ohm'schem Widerstand R .

1.2 Wheatonsche Brücke

Eine Wheatonsche Brückenschaltung ist aufgebaut wie in Abbildung dargestellt. Sie besteht ausschließlich aus ohmschen Widerständen und kann genutzt werden, um den Widerstand R_x zu berechnen. Für ihn gilt

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4)$$

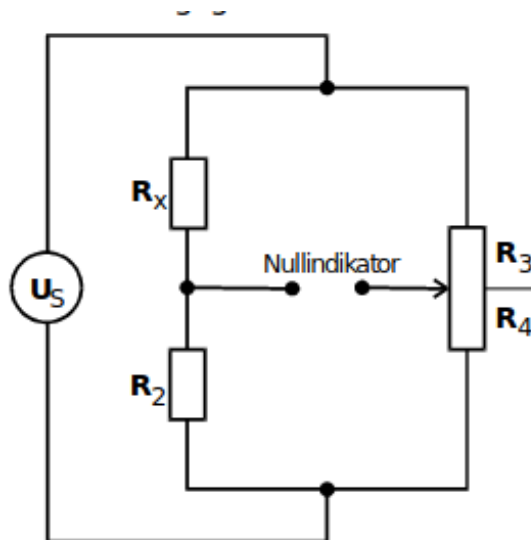


Abbildung 2: Schaltbild der Wheatonschen Brücke.

1.3 Kapazitätsmessbrücke

Durch die bei Kondensatoren anfallenden thermischen Verluste kommt zur Kapazität noch ein ohm'scher Widerstand hinzu, sodass

$$Z_{C,\text{real}} = R - \frac{i}{\omega C}. \quad (5)$$

Im Gegensatz zur Wheatonschen Brücke müssen also zwei Unbekannte bestimmt werden, C_x und R_x , daher ist ein weiterer veränderlicher Widerstand eingebaut. Mit ihm wird die Phasenverschiebung kompensiert, die durch R_x hinzu kommt.

R_x kann auf die gleiche Weise wie in der Wheatonschen Brückenschaltung ermittelt werden (mit dem einzigen Unterschied, dass R_2 nun ein veränderlicher Widerstand ist), für C_x gilt

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (6)$$

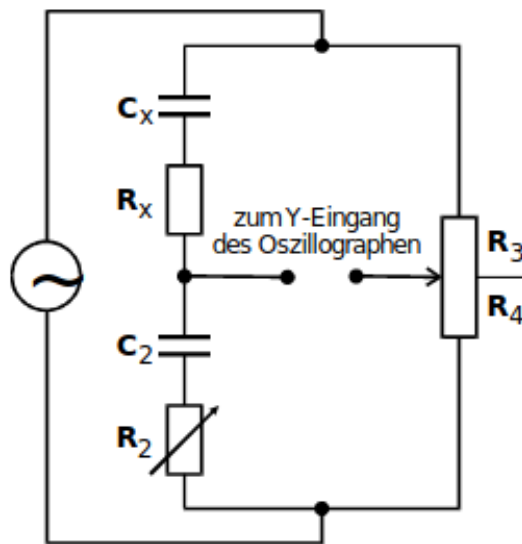


Abbildung 3: Schaltbild Kapazitätsmessbrücke.

1.4 Induktivitätsmessbrücke

Auch bei einer Induktivität muss in der Realität der thermische Verlust betrachtet werden. Auf dieselbe Weise wie bei der Kapazität wird das Schaltbild zu einem ERsatzschaltbild mit ohmschem Widerstand erweitert.

Es gilt für die Impedanz der Induktivität

$$Z_{L,\text{real}} = R + i\omega L. \quad (7)$$

Die Induktivitätsmessbrücke funktioniert daher genau wie die Kapazitätsmessbrücke, abgesehen davon, dass anstatt einem Kondensator C_2 eine Induktivität verbaut wird. Die Abgleichbedingungen werden zu

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (8)$$

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (9)$$

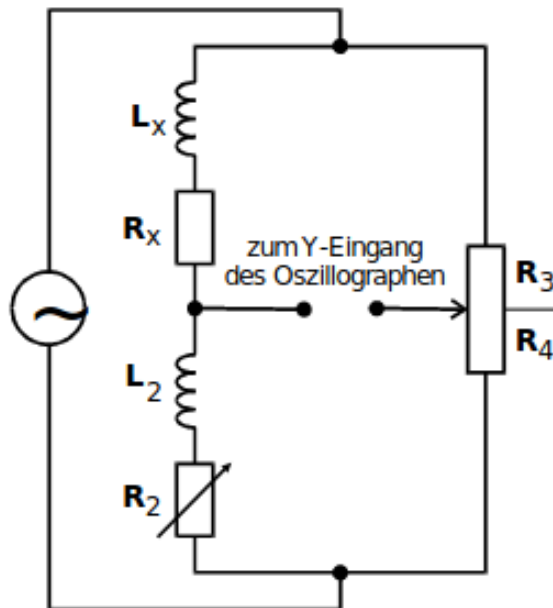


Abbildung 4: Schaltbild der Induktivitätsbrücke.

1.5 Maxwell-Brücke

Eine andere Möglichkeit, die Induktivität zu messen, besteht in der Maxwell-Brücke. Sie verwendet zwei veränderliche Widerstände zum Abgleichen, von denen einer mit einem Kondensator parallel geschaltet ist wie in 5 zu sehen.

Die Abgleichbedingung wird zu

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (10)$$

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (11)$$

In der Realität ist die Maxwell-Brücke für einen bestimmten Frequenzbereich optimal zur Messung geeignet, auch wenn die Abgleichbedingung unabhängig von der Spannung ist. Dies liegt an Streukapazitäten in der Verdrahtung der Bauteile, die besonders bei hohen

Frequenzen nicht zu vernachlässigen sind, und an den langen Einschwingvorgängen, die bei niedrigen Frequenzen problematisch werden können.

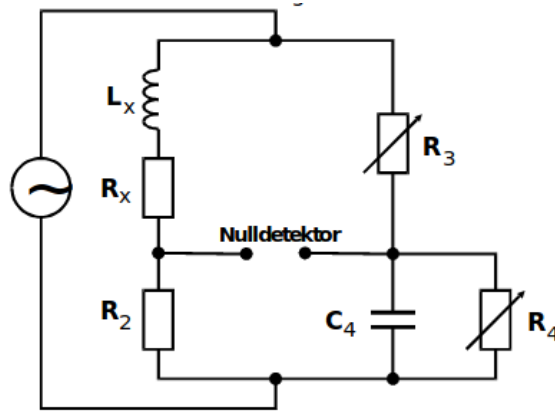


Abbildung 5: Schaltbild der Maxwell-Brücke.

1.6 Wien-Robinson-Brücke

Mit einem anderen Prinzip funktioniert die Wien-Robinson-Brücke. Wie in Abbildung 6 zu sehen benötigt sie keinerlei Abgleichelemente, stattdessen ist die Frequenz für den Abgleich essentiell. Solche Brückenschaltungen werden daher als frequenzabhängig bezeichnet.

Grob lässt sich die Schaltung in vier Zweige aufteilen, deren Impedanzen lassen sich schreiben als

$$Z_1 = 2R' \quad (12)$$

$$Z_2 = R' \quad (13)$$

$$Z_3 = R + \frac{1}{i\omega C} \quad (14)$$

$$Z_4 = \frac{R}{1 + i\omega RC} \quad (15)$$

Aus diesen Verhältnissen folgt naus (2) für das Verhältnis aus Brückenspannung U_{Br} und Speisespannung U_{Sp}

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_{Sp}} \right|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2} \quad (16)$$

Dies kann null werden für $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Mit der Substitution $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ wird die obige Gleichung in eine elegantere Form gebracht

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_{Sp}} \right|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \quad (17)$$

was einem elektrischen Filter für Frequenzen in der Nähe von und gleich ω_0 gleichkommt.

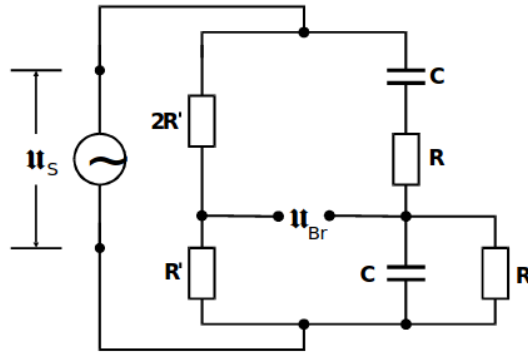


Abbildung 6: Schaltbild der Wien-Robinson-Brücke.

2 Durchführung

2.1 a)

Zunächst wird die in 1 erklärte Wheatonsche Brückenschaltung aufgebaut, um mit ihr einen unbekannten Widerstand zu ermitteln. Abgeglichen wird dabei mit einem Potentiometer mit 1 kOhm Gesamtwiderstand. Der feste ohmsche Widerstand R_2 wird dabei variiert, um die Messung genauer zu machen und die Fehler berechnen zu können. Zur Messung wird ein Millivoltmeter genutzt.

2.2 b)

Des weiteren wird eine Kapazitätsmessbrücke gemäß 3 aufgebaut und verwendet, um die Kapazität und den Widerstand eines realen Kondensators zu ermitteln. Dazu werden die regelbaren Widerstände abwechselnd so eingestellt, das die Brückenspannung ein Minimum erreicht.

2.3 c)

Um die Induktivität einer realen Spule zu berechnen, wird eine Induktivitätsmessbrücke aufgebaut. Das Messprinzip ist genau wie bei der Kapazitätsmessbrücke, auch hier werden die Widerstände alternierend verstellt.

2.4 d)

Dieselbe Induktivität soll ein weiteres Mal gemessen werden, diesmal unter Verwendung der Maxwell-Brücke (5).

Dazu wird die Schaltung nach dem Schaltbild aufgebaut und alternierend mit den beiden Widerständen abgeglichen.

2.5 e)

Zuletzt soll die Wien-Robinson-Brücke auf ihre Frequenzabhängigkeit untersucht werden, dazu wird die Brückenspannung gemessen für Frequenzen im Bereich von 20Hz–20000Hz. Beim Nähern der Werte an die minimale Frequenz wird der Abstand zwischen den Messpunkten verkleinert, sodass ein annähernd logarithmischer Datensatz entsteht.

3 Auswertung

3.1 Wheatstonesche Brücke

Nachdem die die Widerstände jeweils so eingestellt wurden, dass die Brückenspannung ihr Minimum erreicht, werden die in Tabelle 2 dargestellten Werte für die Widerstände aufgenommen. Anhand dieser kann nach Gleichung ... der zu untersuchende Widerstände R_x bestimmt werden.

Tabelle 1: Messwerte der Wheatstoneschen Brücke

$R_2[\Omega]$	$R_3 [\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_x[\Omega]$
500	390	610	319.672
332	490	510	318.98
1000	242	758	319.261

Der Mittelwert dieser für R_x bestimmten Werte wurde mit numpy ermittelt und lautet $R_x = 319.3 \pm 0.28$.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Bei der Kapazitätsmessbrücke wird für ein Bauteil mit unbekanntem Widerstand R_x und unbekannter Kapazität C_x das Minimum des Brückenstroms durch eine Konstellation mit den folgenden Werten erreicht.

$$R_2 = 228,5 \Omega$$

$$R_3 = 632 \Omega$$

$$R_4 = 386 \Omega$$

$$C_2 = 750 \text{ nF}$$

Daraus kann durch Gleichung ... auf

$$R_x = 391,5 \Omega$$

$$C_x = 436,7 \text{ nF}$$

geschlossen werden.

3.3 Induktivitätsbrücke

Bei dieser Brückenschaltung werden zu dem Bauteil R_x L_x die folgenden Widerstände und Induktivität festgestellt:

$$R_2 = 224 \Omega$$

$$R_3 = 608 \Omega$$

$$R_4 = 392 \Omega$$

$$L_2 = 20,1 \text{ mH}$$

Aus diesen ergeben sich für $R_x = 375.34 \Omega$ und $L_x = 31.17 \text{ mH}$.

3.4 Maxwell-Brücke

Das selbe Bauteil wird nun in einer Maxwell-Brückenschaltung untersucht. Hier ergeben sich die folgenden Werte:

$$R_2 = 332 \Omega$$

$$R_3 = 191 \Omega$$

$$R_4 = 179 \Omega$$

$$C_2 = 750 \text{ mF} \quad R_x = 354.25 \Omega$$

$$L_x = 47.5 \text{ mH}$$

3.5 Wien-Robinson-Brücke

Bei einem Widerstand von $R = 1000 \text{ k}\Omega$, einer Kapazität von $C = 295 \text{ nF}$ werden folgende Werte gemessen:

Tabelle 2: Messdaten zur Wien-Robinson-Brücke

ν [Hz]	Amplitude [V]
20	3.2
120	2.75
220	1.875
320	1.125
420	0.52
500	0.17
520	0.0775
530	0.04
540	0.005
550	0.04
600	0.225
700	0.56
800	0.75
1000	1.25
2000	2.5
3000	2.7
4000	2.85
5000	2.95
10000	3
15000	2.7
20000	2.3

Diese sind in Abbildung 7 grafisch dargestellt. Der Klirrfaktor wurde zu $k = 3.35 \cdot 10^{-3}$ bestimmt.

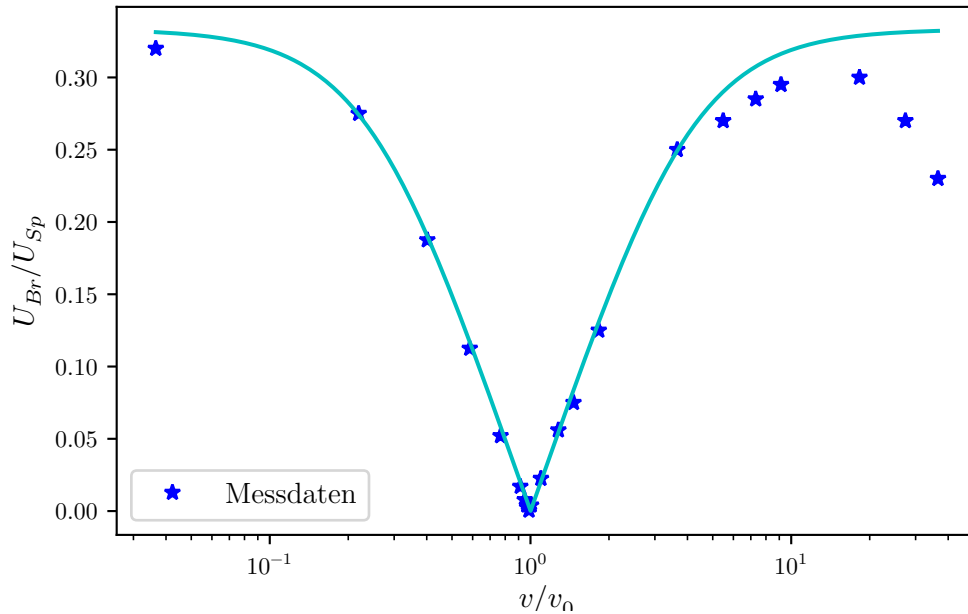


Abbildung 7: Messdaten zur Wien-Robinson-Brücke

4 Diskussion

Sowohl für die Wheatstonesche Brücke als auch für die Kapazitätsmessbrücke weichen die durch den Versuch bestimmten Werte kaum von denen vom Hersteller angegebenen Werten ab. Das lässt darauf schließen, dass die Messinstrumente und anderen Bauteile exakt arbeiten und den Herstellerangaben entsprechen.

Bei der Induktivitätsmessbrücke ist zu erwarten, dass die Werte ein wenig abweichen, da Spulen nicht als Vergleichselement geeignet sind, da durch den Innenwiderstand der Spule thermische Energie verloren geht. Tatsächlich wurde beobachtet, dass die selbe Induktivität mit einer Maxwellbrücke wesentlich genauer gemessen wurde.

Wie in Abb. 7 dargestellt, weicht die Theoriekurve für hohe Frequenzen von den Messwerten ab. Insbesondere die Genauigkeit um v_0 lässt auf den tatsächlich recht geringer Klirrfaktor schließen.