

V204

Wärmeleitung

Mirjam Prayer
mirjam.prayer@udo.edu

Nikola Mang
nikola.mang@udo.edu

Durchführung: 15.06.2021

Abgabe: 22.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	4
2.1	Statische Methode	4
2.2	Dynamische Methode	4
3	Auswertung	4
3.1	Statische Methode	4
3.1.1	Temperaturverläufe	4
3.1.2	Wärmestrom	6
3.1.3	Temperaturdifferenz	7
3.2	Dynamische Methode	8
3.2.1	Kürzere Periodendauer	8
3.2.2	Längere Periodendauer	11
4	Diskussion	12
4.1	Statische Methode	12
4.2	Dynamische Methode	12
	Literatur	13

1 Theorie

Temperatur innerhalb eines Systems verändert sich lokal durch Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung. Im vorliegenden Versuch wird die Wärmeleitung von Metallen untersucht; dort überwiegt die Wärmeleitung eindeutig. Deshalb vernachlässigen wir im Folgenden die anderen beiden Optionen der Temperaturübertragung.

Für die Wärmemenge, die durch Wärmeleitung auf einer Oberfläche A pro Zeit übertragen wird, gilt

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

wobei κ die Wärmeleitfähigkeit des Materials und T die Temperatur ist und die x-Achse senkrecht auf der Oberfläche A steht. Für die Wärmestromdichte j_w gilt daher:

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

kann dieses Problem auf die eindimensionale Wärmeleitungs

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4)$$

zurückgeführt werden. $\frac{\kappa}{\rho c} = \sigma_T$ wird als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet. Sie ist materialabhängig und ist ein Kriterium für die jeweilige Geschwindigkeit des Temperaturausgleiches.

Im hier vorliegenden Fall eines langen, dünnen Stabes, der an einer Seite ($x=0$) abwechselnd erhitzt und gekühlt wird, ist

$$T(x, t) = T_{max} \exp - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} \cos \omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} \quad (5)$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Die Phasengeschwindigkeit der Ausbreitung lautet also

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{2\kappa \omega}{\rho c}} \quad (6)$$

und die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln A_{nah} A_{fern}}. \quad (7)$$

Dabei ist Δx der Abstand zwischen den beiden Messpunkten, Δt die Phasendifferenz, und A_{nah} bzw. A_{fern} die jeweilige Amplitude.

2 Durchführung

An einer strombetriebenen Wärmequelle sind einseitig vier Metallstäbe aus verschiedenen Materialien, Edelstahl, Aluminium, ein schmaler Messingstab und ein breiter Messingstab, angebracht. An jeweils zwei, voneinander 3 cm entfernten Stellen der vier Metallproben sind Temperaturmessgeräte installiert. Das Heizelement wird über einen Schalter auf *Heat* oder *Cool* geregelt. Die Daten der Temperaturmessgeräte werden mithilfe eines Datenloggers aufgenommen.

2.1 Statische Methode

In diesem Versuchteil wird das Heizelement durch den konstanten Strom von 5 V beheizt, wobei eine Abtastrate von $\Delta s = 10$ s verwendet wird. Der Temperaturverlauf wird über ein Zeitintervall von 1000 s verfolgt. Die Daten werden mit einem Datenlogger simultan aufgenommen. Durch den aufgenommenen Temperaturverlauf wird die Wärmeleitfähigkeit bestimmt.

2.2 Dynamische Methode

Als dynamische Methode wird in diesem Versuch das Angström-Messverfahren verwendet. Dabei werden die zu untersuchende Stab über eine Periode von 80 s abwechselnd geheizt und gekühlt, Daten werden mit einer Abtastrate von $\Delta s = 2$ s aufgenommen. Die Wärmequelle wird nun über eine Spannung von 8 V betrieben.

Die erste Messreihe dieser Art wird mit einer Periodendauer von 80 s über 10 Perioden durchgeführt.

In einer weiteren Messreihe wird eine Periodendauer von 200 s über 6 Perioden verwendet.

3 Auswertung

3.1 Statische Methode

Wie in Kapitel 2 beschrieben wird die Wärmeleitfähigkeit der Metalle zunächst mit statischer Temperaturzufuhr untersucht.

3.1.1 Temperaturverläufe

Die aufgenommenen Temperaturverläufe der Messingstäbe (breit und schmal) sind in Abbildung 1 dargestellt, die Verläufe für Edelstahl und Aluminium in Abbildung 2.

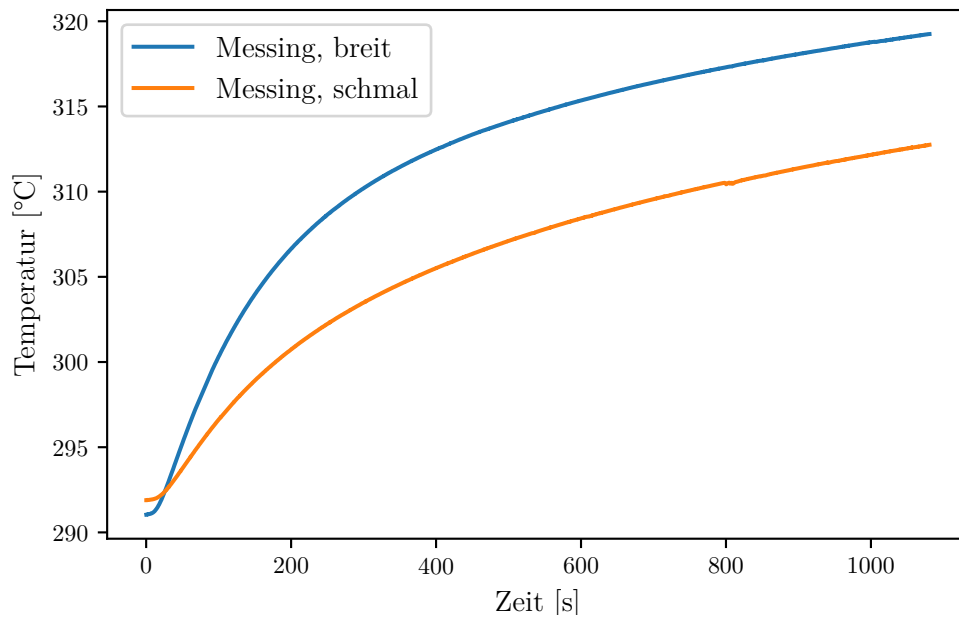


Abbildung 1: Temperaturverläufe der Messingstäbe (breit und schmal).

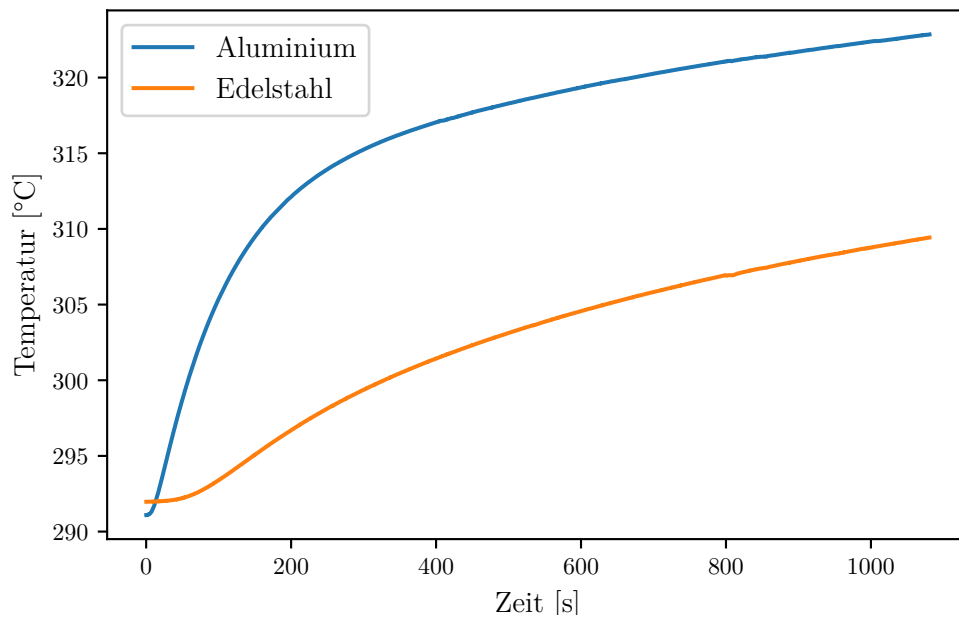


Abbildung 2: Temperaturverläufe der Stäbe aus Aluminium und Edelstahl.

Alle Metalle weisen einen starken Temperturanstieg nach kurzer Zeit auf, der aber mit der Zeit abflacht und sich einem Sättigungswert nähert. Die genaue Form der Kurve ist allerdings unterschiedlich; so ist das Abflachen bei Edelstahl am langsamsten, während Aluminium am schnellsten einen Sättigungswert anstrebt.

Um die Wärmeleitung der Metalle beurteilen zu können, wird die Temperatur am Ende der Messung betrachtet, die Messwerte sind in 1 aufgelistet.

Tabelle 1: Messwerte der Temperatur nach 700s.

Metall	Temperatur/K
Messing, breit (T_1)	316.41
Messing, schmal (T_4)	309.56
Aluminium (T_5)	320.26
Edelstahl (T_8)	305.83

Daraus lässt sich schließen, dass Aluminium von den getesteten Metallen am besten Wärme leitet, während Edelstahl wenig gut leitet.

3.1.2 Wärmestrom

Nun wird der Wärmestrom $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ in den jeweiligen Stäben betrachtet.

Tabellen 2 bis 5 zeigen die Wärmeströme der Metalle zu je fünf verschiedenen Zeiten.

Tabelle 2: Wärmestrom im breiten Messingstab.

Zeit /s	Temperaturdifferenz /K	Wärmestrom /K/s
5	0.430	0.083
300	3.360	0.645
600	2.700	0.518
900	2.590	0.497
1050	2.590	0.497

Tabelle 3: Wärmestrom im schmalen Messingstab.

Zeit /s	Temperaturdifferenz /K	Wärmestrom /K/s
5	0.400	0.045
300	2.820	0.316
600	2.430	0.272
900	2.360	0.264
1050	2.340	0.262

Tabelle 4: Wärmestrom im Aluminiumstab.

Zeit /s	Temperaturdifferenz /K	Wärmestrom /K/s
5	0.450	0.169
300	0.450	0.169
600	0.160	0.060
900	0.120	0.045
1050	0.140	0.053

Tabelle 5: Wärmestrom im Edelstahlstab.

Zeit /s	Temperaturdifferenz /K	Wärmestrom /K/s
5	0.230	0.008
300	10.750	0.361
600	9.380	0.315
900	8.880	0.298
1050	8.730	0.293

Es ist zu beobachten, dass der Wärmestrom mit der Zeit geringer wird und sich einem Wert anzunähern scheint. Dieser ist je nach Metall und Querschnitt sehr unterschiedlich.

3.1.3 Temperaturdifferenz

In Abbildung 3 ist die Temperaturdifferenz zwischen dem Punkt, der näher am Peltier-Element gelegen, und dem, der weiter entfernt gelegen ist, gegen die Zeit aufgetragen, für die Temperaturen von Edelstahl und denen von Messing

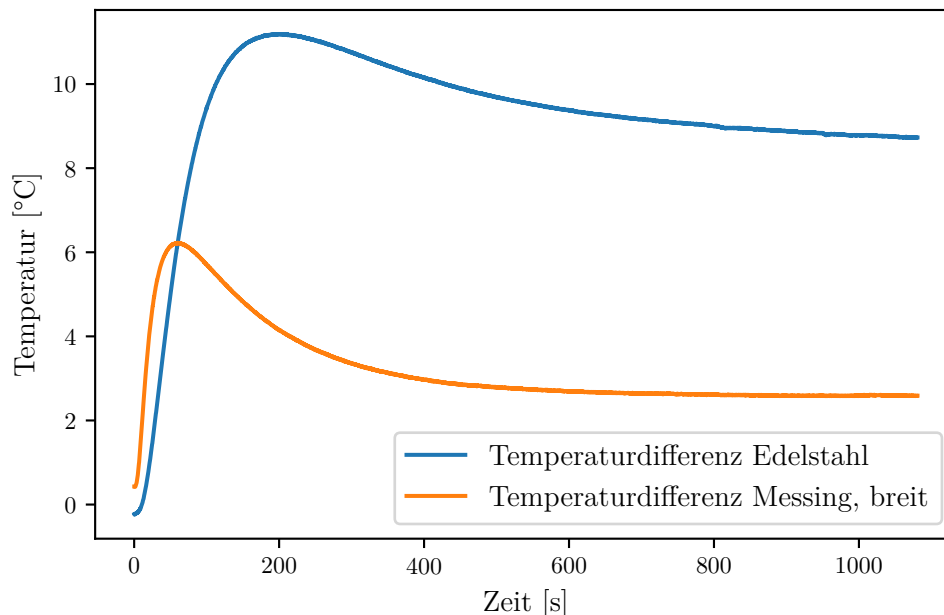


Abbildung 3: Temperaturdifferenzen entlang der Stäbe aus Messing (breit) und Edelstahl.

Der generelle Verlauf der Graphen ist gleich: Beide Graphen steigen zu Beginn des Erhitzens stark an, erreichen dann ein Maximum und fallen danach zunächst stark, dann immer langsamer ab. Allerdings ist die Temperaturdifferenz für Edelstahl später deutlich größer als die im Messingstab, und der Näherungsprozess ist nicht so deutlich zu erkennen, da er langsamer abläuft. Dies bestätigt den Eindruck, dass Edelstahl den Strom weniger gut leitet als Messing.

3.2 Dynamische Methode

Um die Wärmeleitfähigkeit κ zu bestimmen, wird die Temperatur periodisch erhöht und verringert. Dies geschieht einmal mit einer Periodendauer von 80s und einmal mit einer Periodendauer von 200s.

3.2.1 Kürzere Periodendauer

Abbildung 4 zeigt den Verlauf der Temperaturen an beiden Messpunkten des breiten Messingstabs, wobei „innen“ den Stab bezeichnet, der näher am Heizkörper gelegen ist.

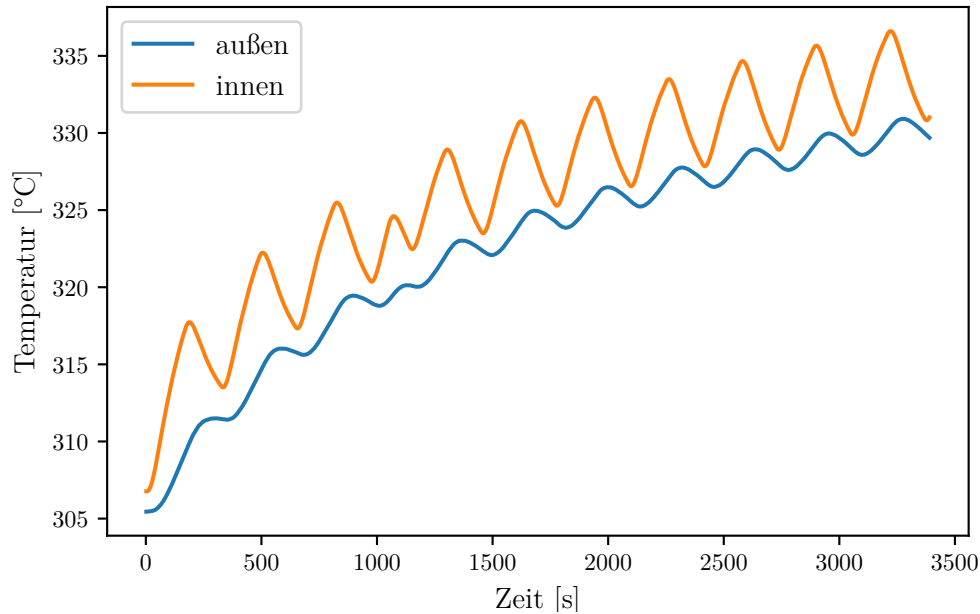


Abbildung 4: Temperaturverläufe des Messingstabs (breit) bei periodischer Wärmezufuhr.

Aus den Amplituden der periodischen Änderungen der Temperaturen und den zugehörigen Phasendifferenzen kann die Wärmeleitfähigkeit κ bestimmt werden (nach).

Tabelle 6: Werte zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Messing.

Größe	Wert
Mittlere Amplitude, innen	$7.3 \pm 1.7\text{K}$
Mittlere Amplitude, außen	$3.1 \pm 1.3\text{K}$
Mittlere Phasendifferenz	$17 \pm 5\text{s}$
Wärmeleitfähigkeit κ	$(1.0 \pm 0.6) \cdot 10^2 \text{W K/m}$

Nach der Formel

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi\kappa T}{\rho c}}$$

lässt sich aus der Wärmeleitfähigkeit die Wellenlänge der Temperaturwelle bestimmen, wobei T die Periodendauer ist. Im Fall von Messing ergibt sie sich zu $\lambda_{\text{Messing}} = (0.18 \pm 0.06)\text{m}$.

Dieselbe Auswertung folgt für Aluminium, wobei der Temperaturverlauf in 5 aufgeführt und die berechneten Werte in 7 zu finden sind.

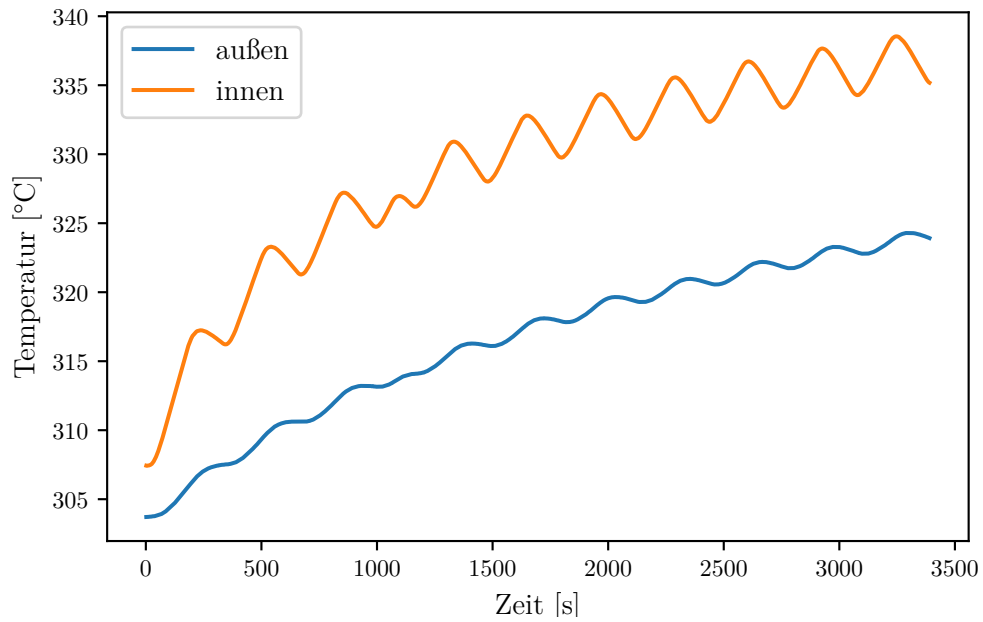


Abbildung 5: Temperaturverlauf des Aluminiumstabs bei periodischer Wärmezufuhr.

Tabelle 7: Werte zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Aluminium.

Größe	Wert
Mittlere Amplitude, innen	$8.2 \pm 1.8\text{K}$
Mittlere Amplitude, außen	$5.1 \pm 1.9\text{K}$
Mittlere Phasendifferenz	$9.2 \pm 1.8\text{s}$
Wärmeleitfähigkeit κ	$(2.5 \pm 2.4) \cdot 10^2 \text{W K/m}$
Wellenlänge $\lambda_{\text{Aluminium}}$	$(0.33 \pm 0.16)\text{m}$

Aluminium hat also eine weit höhere Wärmeleitfähigkeit als Messing, beinahe doppelt so hoch. Das bestätigt die vorherigen Ergebnisse des Versuches.

3.2.2 Längere Periodendauer

In der Messung mit längerer Periodendauer soll Edelstahl genauer betrachtet werden. Der Temperaturverlauf ist in 6 dargestellt.

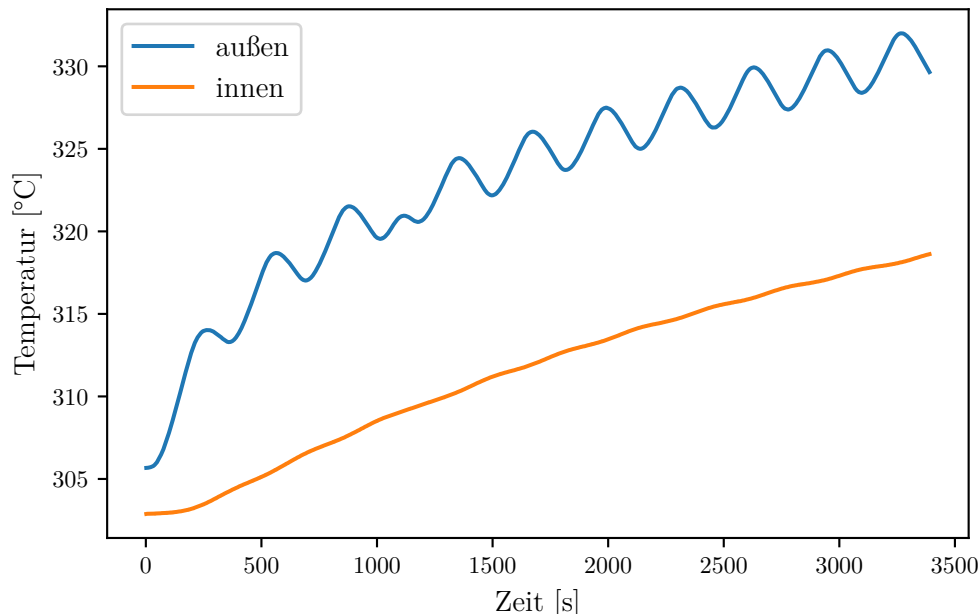


Abbildung 6: Temperaturverlauf des Edelstahlstabs bei periodischer Wärmezufuhr.

Die Werte für die mittlere Amplitude, die mittlere Phasendifferenz und die daraus berechnete Wärmeleitfähigkeit sind in 8 zu finden.

Tabelle 8: Werte zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl.

Größe	Wert
Mittlere Amplitude, innen	$4.1 \pm 1.7\text{K}$
Mittlere Amplitude, außen	$1.6 \pm 1.2\text{K}$
Mittlere Phasendifferenz	$87 \pm 8\text{s}$
Wärmeleitfähigkeit κ	$19 \pm 16\text{W K/m}$
Wellenlänge $\lambda_{\text{Edelstahl}}$	$(0.12 \pm 0.05)\text{m}$

Die Wärmeleitfähigkeit ist also deutlich geringer als die der anderen beiden Metalle.

4 Diskussion

4.1 Statische Methode

Die wichtigsten Messergebnisse sind in 9 zusammengefasst.

Tabelle 9: Ergebnisse der Messung mit statischer Erhitzung.

Messwert	Messing, breit	Messing, schmal	Aluminium	Edelstahl
Temperatur nach 700s	316.41K	309.56K	320.26K	305.83K
Wärmestrom nach 300s	0.645K/s	0.316K/s	0.169K/s	0.361K/s
Wärmestrom nach 900s	0.497K/s	0.264K/s	0.045K/s	0.298K/s

Anhand dieser Werte ist zu erkennen, dass Aluminium der beste Wärmeleiter ist, während Edelstahl am wenigsten gut leitet. Das ist genau das Ergebnis, das zu erwarten war. Auch die Temperaturverläufe (Abbildungen 1 und 2) spiegeln dieses Ergebnis sehr gut wieder; es ist zu beobachten, dass Aluminium sich schneller an einen Grenzwert annähert als Edelstahl und dass es insgesamt eine höhere Temperatur erreicht.

4.2 Dynamische Methode

Tabelle 10 zeigt die aus den Messwerten berechneten Wärmeleitfähigkeiten im Vergleich mit den Theoriewerten (Quelle [1]).

Tabelle 10: Vergleich der Mess- und Theoriewerte der Wärmeleitfähigkeiten.

Metall	Messwert/W K/m	Theoriewert/W K/m	Abweichung in Prozent
Messing	100 ± 60	120	10 ± 50
Aluminium	250 ± 240	235	10 ± 100
Edelstahl	19 ± 16	21	10 ± 80

Es fällt auf, dass die Unsicherheiten in den berechneten Werten sehr hoch sind, sodass sowohl Abweichungen von wenigen Prozent aber auch 100%-ige Abweichungen möglich sind.

Da nur wenige Perioden gemessen wurden, kommt ein großer statistischer Fehler zum Tragen; zusätzlich dazu gibt es beim manuellen Umschalten von Kühlen auf Erhitzen, das bestenfalls immer noch genau einer halben Periodendauer erfolgen sollte, ein hohes Potential für menschlichen Fehler. Wenn die Periodendauer während der Messung um einige Sekunden variiert, führt das zu einer Schwankung in den Messwerten. Zudem werden die Amplituden und Phasendifferenzen zwar teilweise durch Scientific Python ausgelesen, da das aber bei der Messung von Edelstahl nicht möglich war (aufgrund der geringen Ausprägung der Amplituden), musste hier anhand des Plots abgelesen werden. Das führt auch zu weiteren Unsicherheiten.

Tabelle 11 zeigt die Werte für die Wellenlängen der verschiedenen Temperaturwellen bei periodischer Anregung.

Tabelle 11: Wellenlängen der Temperaturwellen.

Metall	λ / m	$\lambda_{\text{theoretisch}}$ / m	Abweichung in Prozent
Messing	0.18 ± 0.06	0.191	7 ± 29
Aluminium	0.33 ± 0.16	0.318	0 ± 50
Edelstahl	0.12 ± 0.05	0.128	10 ± 40

Eindeutig haben die Schwankungen bei Aluminium die größte Wellenlänge, während die bei Edelstahl am kleinsten ist. Wie zuvor sind die Schwankungen sowohl in den Messwerten als auch den Abweichungen sehr groß. Mögliche Ursachen davon wurden bereits diskutiert.

Literatur

- [1] Schweizer FN. *Formelsammlung und Berechnungsprogramme Maschinen- und Anlagenbau*. 2021. URL: https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php (besucht am 20.06.2021).