

V354

# **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Mirjam Prayer

mirjam.prayer@tu-dortmund.de

Nikola Mang

nikola.mang@tu-dortmund.de

Durchführung: 27.04.2021

Abgabe: 03.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Gedämpfte Schwingung . . . . .	3
1.1.1	Schwingfall . . . . .	4
1.1.2	Aperioder Grenzfall . . . . .	5
1.2	Erzwungene Schwingungen . . . . .	5
1.2.1	Schwache Dämpfung . . . . .	7
1.2.2	Starke Dämpfung . . . . .	8
1.2.3	Impedanz . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>9</b>
2.1	Effektiver Dämpfungswiderstand . . . . .	9
2.2	Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall . . . . .	9
2.3	Frequenzabhängigkeit im Serienresonanzkreis . . . . .	10
2.4	Frequenzabhängigkeit der Phase . . . . .	10
2.5	Scheinwiderstand . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
3.1	Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstand $R_{eff}$ und der Abklingdauer $T_{ex}$ . . . . .	13
3.2	Bestimmung des Dämpfungswiderstandes beim aperiodischen Grenzfall .	15
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>
	<b>Literatur</b>	<b>17</b>

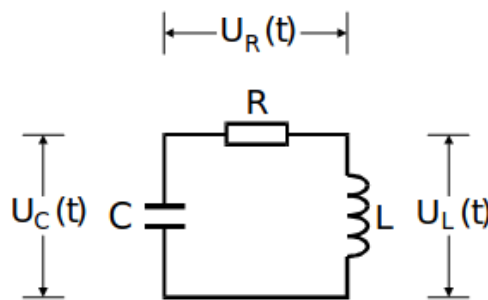
# 1 Theorie

## 1.1 Gedämpfte Schwingung

Werden in einem Stromkreis zwei Energiespeicher in Form einer Kapazität  $C$  und einer Induktivität  $L$  eingebaut, so kann ein hereingepumpter Energiebetrag zwischen beiden hin- und her pendeln.

Da die Energie durch kein Element verbraucht wird, ist sie erhalten. Es handelt sich daher um eine ungedämpfte Schwingung.

Nun kann aber wie in Abbildung 1 dargestellt ein ohmscher Widerstand eingebaut werden, der dem System Energie entzieht. Die Amplituden der Stromes und der Spannung am Kondensator nehmen also mit der Zeit ab, es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung.



**Abbildung 1:** Gedämpfter Schwingkreis schematisch dargestellt.[2]

Zur genaueren Beschreibung des periodischen Vorgangs ist das Lösen einer Differentialgleichung nötig, die aus dem 2. Kirchhoffschen Gesetz folgt. Es gilt demnach

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

Zudem gelten das Ohm'sche Gesetz  $U_R(t) = RI(t)$  und das Induktionsgesetz  $U_L(t) = L \frac{dI}{dt}$ , sowie, mit der Kondensatorladung  $Q$ ,  $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ . Nach Einsetzen folgt also aus (1)

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Da der Strom auch als Ableitung der Ladung geschrieben werden kann, folgt insgesamt die lineare, homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (2)$$

Es wird ein Exponentialansatz  $I(t) = A \exp(i\omega t)$  gewählt. Nach Ableiten und Einsetzen in (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}\right) \cdot A \exp(i\omega t) &= 0 \\
\Rightarrow \omega^2 - i\frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} &= 0 \\
\Rightarrow \omega_{1/2} &= i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}
\end{aligned}$$

Die Gesamtlösung ist eine Superposition der einzelnen Lösungen mit

$$I(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$$

Um die Funktion übersichtlich darstellen zu können, seien  $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$  und  $2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ . Dann wird sie zu

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (A_1 e^{i2\pi\nu t} + A_2 e^{-i2\pi\nu t})$$

In der weiteren Betrachtung muss nun zwischen verschiedenen Verhältnissen von  $\frac{1}{RC}$  und  $\frac{R^2}{4L^2}$  unterschieden werden. je nach dem ist  $\nu$  reell oder imaginär. Hier sollen zwei der drei mögliche Fälle betrachtet werden.

### 1.1.1 Schwingfall

Zunächst sei

$$\frac{1}{RC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

sodass  $\nu$  reell ist und die Linearfaktoren

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} A_0 e^{i\eta} \\
A_2 &= \frac{1}{2} A_0 e^{-i\eta}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mithilfe der Eulerschen Formel für die Exponentialfunktion

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (3)$$

Die exponentiell abnehmende Amplitude verschwindet für  $t \rightarrow \infty$ . Die Abklingdauer  $T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R}$  ist die Zeit, in der die Schwingungsdauer auf ein e-tel ihres ursprünglichen Wertes absinkt. Abbildung 2 zeigt die Schwingung und Einhüllende der des Stromes beim Schwingfall.

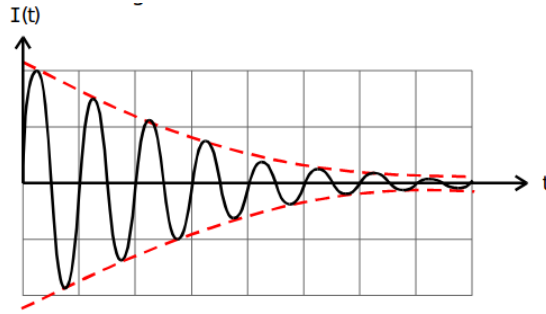


Abbildung 2: Strom als Funktion der Zeit beim Schwingfall.[2]

### 1.1.2 Aperiodischer Grenzfall

Beim zweiten Fall, dem aperiodischen Grenzfall, ist  $\nu$  rein imaginär, da

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

Durch die reellen Exponenten schwingt die Funktion nicht mehr, es wird von aperiodischer Dämpfung gesprochen.

Nach einiger Zeit gilt

$$I \propto \exp \left( - \left( \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \right) t \right)$$

Für den Spezialfall, dass  $\nu = 0$  ist, gelten

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \quad (4)$$

und

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

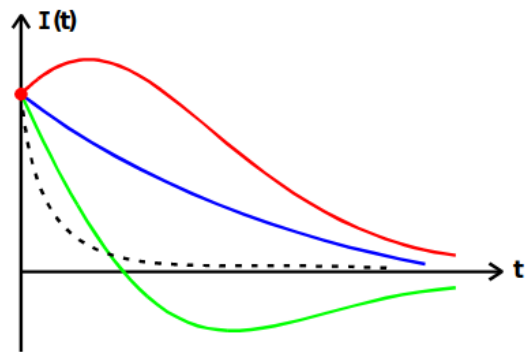
Der Spezialfall ist in Abbildung 3 als gestrichelte Linie eingezeichnet. Der Strom geht dabei ohne jegliche Schwingungen gegen null.

## 1.2 Erzwungene Schwingungen

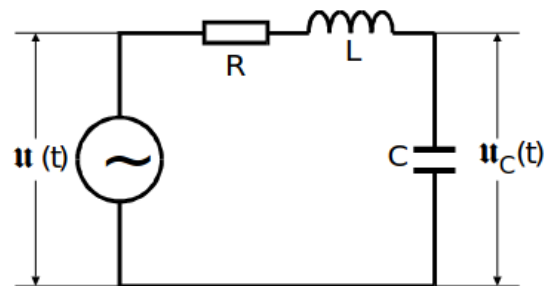
Anderes Verhalten zeigt sich beim Anschließen einer äußeren periodischen Kraft, in diesem Falle eine Spannungsquelle, die für eine sinusförmige Wechselspannung  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  sorgt. Der Schaltkreis ist in 4 zu sehen.

Dann kommt zur Gleichung (1) die angelegte Spannung als Inhomogenität hinzu und es folgt die Differentialgleichung

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$



**Abbildung 3:** Verschiedene Verläufe der aperiodischen Dämpfung.[2]



**Abbildung 4:** Stromkreis der erzwungenen Schwingung.

wobei verwendet wurde, dass  $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$  die Spannung am Kondensator ist und  $I = \frac{dU_C}{dt}$  deren zeitliche Änderung. Es wird erneut ein Exponentialansatz verwendet, dessen Amplitude nun aber frequenzabhängig sein kann.

$$U_C(\omega, t) = U(\omega)e^{i\omega t} \quad (6)$$

Nach Einsetzen in (5) ergibt sich die Funktion

$$U(\omega) = \frac{U_0 (1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Deren Betrag ist gegeben durch

$$|U| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (7)$$

während die Phase sich zu

$$\tan \phi = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \iff \phi = \arctan \left( \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \right) \quad (8)$$

ergibt.

Es muss allerdings von  $U_C$  gleich dem Betrag von  $U$  sein, wie an (5) zu erkennen ist. So folgt also

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

Die Grenzfälle sind

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \infty &\implies U_C \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0 &\implies U_C \rightarrow U_0 \end{aligned}$$

Zwischen diesen erreicht die Kondensatorspannung ein Maximum bei der sogenannten Resonanzfrequenz. Für die gilt

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (10)$$

### 1.2.1 Schwache Dämpfung

Für den Fall, dass  $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$  wird von schwacher Dämpfung gesprochen. Die Resonanzfrequenz geht gegen die Frequenz der ungedämpften Schwingung und für die Kondensatorspannung folgt

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

Dabei wird die Güte

$$q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11)$$

definiert. Sie kann auch durch die Frequenzen  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  dargestellt werden.  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  sind die Frequenzen, bei denen für die Spannung gilt  $U_C = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{C,\max}$ . Aus der Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (12)$$

folgt

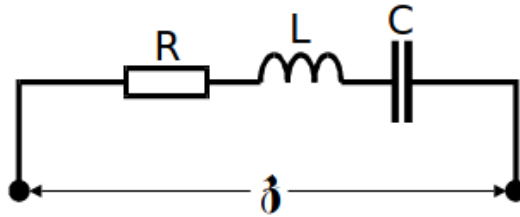
$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

### 1.2.2 Starke Dämpfung

Im gegenteiligen Fall gilt  $\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$ , es liegt also starke Dämpfung vor. Die Kondensatorspannung nähert sich monoton der null an und geht nicht über  $U_0$  hinaus. Dann ist  $U_C \propto \frac{1}{\omega^2}$  für große Frequenzen.

### 1.2.3 Impedanz

Interpretiert man den Schwingkreis als Zweipol, so hat er eine komplexe Impedanz, die sich aus den Impedanzen der einzelnen Bestandteile zusammensetzt. Schematisch ist der Zweipol in Abbildung 5 dargestellt.



**Abbildung 5:** Interpretation des Schwingkreises als Zweipol.[2]

Die Impedanz kann durch  $Z = X + iY$  dargestellt werden. Dabei ist X der Wirkwiderstand und Y der Blindwiderstand.  $|Z|$  wird als Scheinwiderstand bezeichnet.

Bei Untersuchungen der Impedanz interessiert insbesondere der Verlauf in der komplexen Zahlenebene.



Für den Fall des Serienschwingkreises gilt

$$\begin{aligned}
 Z_C &= -\frac{i}{\omega}C \\
 Z_L &= i\omega L \\
 Z_R &= R \\
 \Rightarrow Z_{\text{ges}} &= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\
 \Rightarrow |Z_{\text{ges}}| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Der Scheinwiderstand hat also sein Minimum bei  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Dabei ist  $|Z_{\text{min}}| = R$ , während er sowohl für  $\omega \rightarrow 0$  als auch für  $\omega \rightarrow \infty$  gegen unendlich geht.

## 2 Durchführung

### 2.1 Effektiver Dämpfungswiderstand

Zunächst wird mit dem in Abbildung 6 gezeigten Stromkreis die Zeitabhängigkeit der Amplitude eines gedämpften Schwingkreises untersucht.

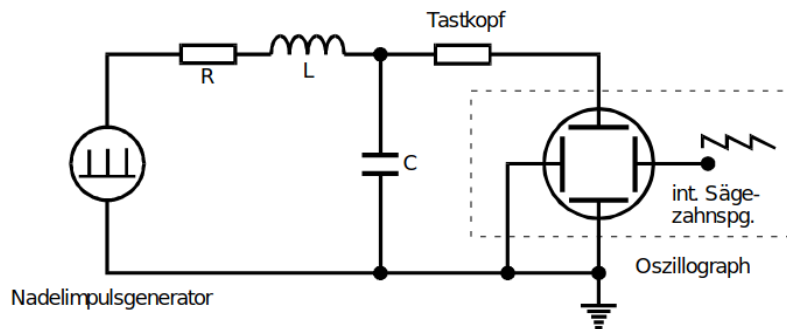
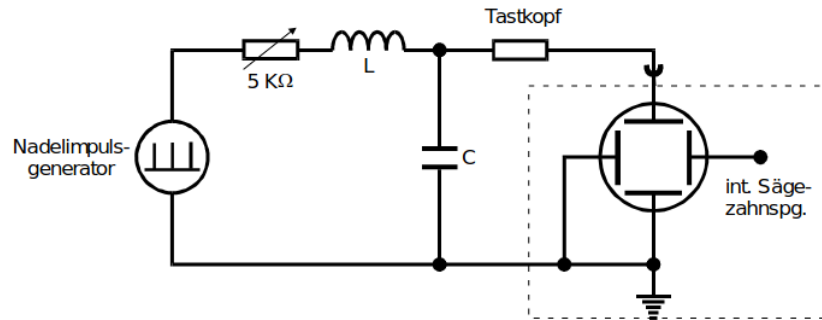


Abbildung 6: Versuchsaufbau zur Untersuchung der Amplitude.[2]

Um den Schwingkreis zu erregen genügt ein kurzer Puls des Nadelimpulsgenerators. Dabei hat die Amplitude zwischen zwei Pulsen ausreichend Zeit, um den Faktor abzuklingen. Da der Oszillograph, der zum betrachten der Schwingung verwendet wird, einen Eingangswiderstand hat, der eine zusätzliche dämpfende Wirkung auf das System hat, wird ein Tastkopf mit großem Widerstand  $R = 10\text{M}\Omega$  eingebaut. Durch ihn wird der Einfluss des Oszillographen bis auf einen vernachlässigbar kleinen Teil verringert.

### 2.2 Dämpfungswiderstand beim aperiodischen Grenzfall

Des Weiteren wird das Verhalten des Schwingkreises bei aperiodischer Schwingung genauer betrachtet. Dazu wird die Schaltung 7 verwendet.

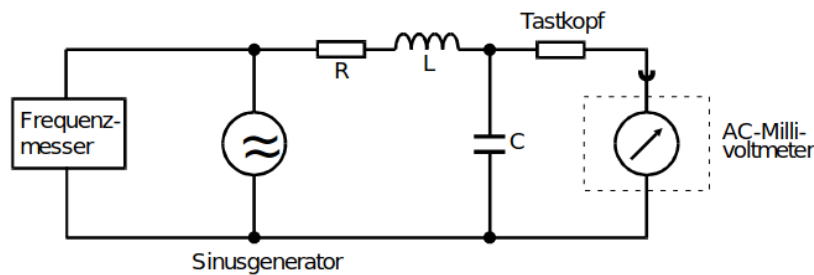


**Abbildung 7:** Versuchsaufbau zur Untersuchung des aperiodischen Grenzfalles.[2]

Zu Beginn wird der regelbare Widerstand auf den Maximalwert eingestellt, dann langsam verringert. Es wird der Wert ermittelt, in dem gerade kein Überschwingen auftritt.

### 2.3 Frequenzabhängigkeit im Serienresonanzkreis

Es gilt zudem, im Serienresonanzkreis, der in Abbildung 8 zu sehen ist, die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung zu messen.



**Abbildung 8:** Serienresonanzkreis zur Untersuchung der Frequenz.[2]

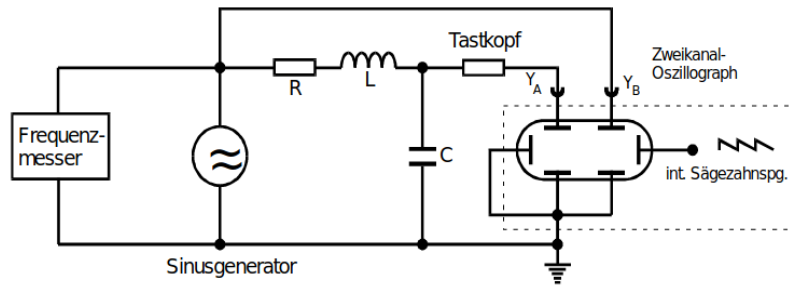
Wie zuvor hindert ein Tastkopf den Einfluss des Messgerätes, hier des Millivoltmeters, daran, zu groß zu werden. Da dessen Ausgangsspannung aber nicht unabhängig vom der Frequenz ist, muss zur Korrektur auch die Erregerspannung über den Tastkopf gemessen werden.

Der Innenwiderstand des Sinusgenerators muss auch betrachtet werden.

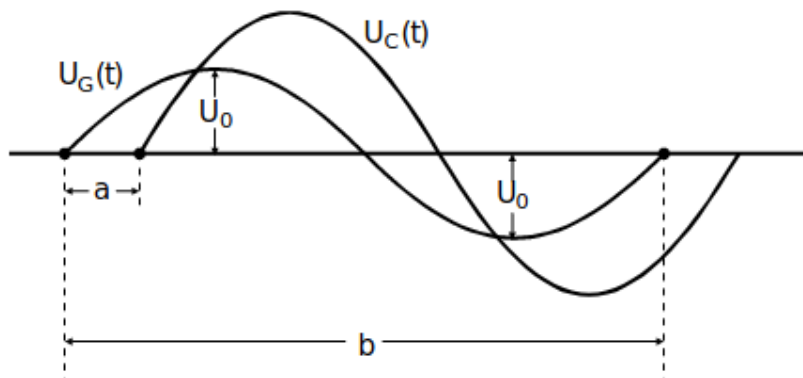
### 2.4 Frequenzabhängigkeit der Phase

Um die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung zu messen, wird die Anordnung in 9 genutzt.

Es wird ein Zweistrahl-Oszilloskop verwendet, in das die Kondensatorspannung und die Erregerspannung gegeben werden. Für eine Phase  $\phi > 0$  erhält man eine Anzeige wie in Abbildung 10. Es ist dabei wichtig, dass beide Sinuskurven so eingestellt sind, dass sie symmetrisch zur x-Achse liegen.



**Abbildung 9:** Messung der Frequenzabhängigkeit der Phase.[2]



**Abbildung 10:** Anzeige eines Zweistrahloszillographen zur Messung der Phasenverschiebung. [1]

## 2.5 Scheinwiderstand

Zuletzt wird der Scheinwiderstand des Serienresonanzkreises durch Messung von Generatorspannung und Strom errechnet. Die dazu verwendete Schaltung ist in Abbildung 11 gezeigt.

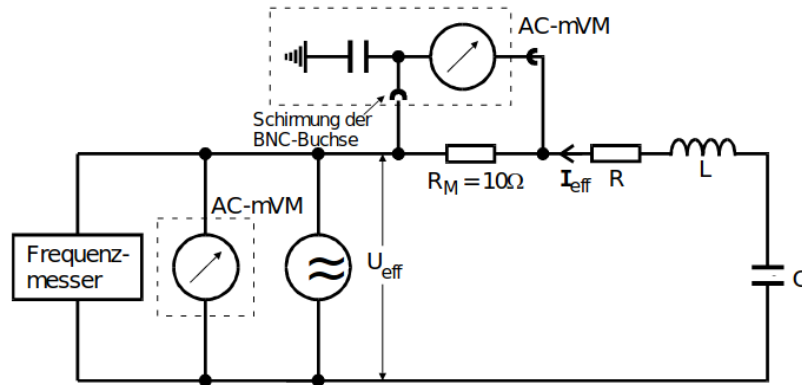


Abbildung 11: Schaltung zur Messung des Scheinwiderstandes.[2]

Anstelle eines Amperemeters wird zur Messung des hochfrequenten Stroms ein geringer Widerstand verwendet, sodass an ihm ein Spannungsabfall festgestellt werden kann. Das dazu genutzte Millivoltmeter wird am Sinusgenerator geerdet.

Eine weitere Möglichkeit, den Scheinwiderstand zu messen, ist mit einem Impedanzmeter. Die dazu nötige Schaltung ist in Abbildung 12 zu sehen.

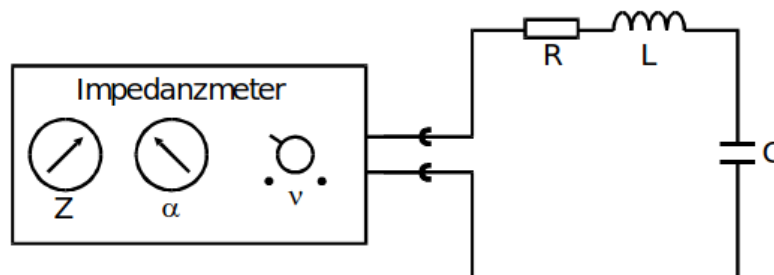


Abbildung 12: Messung des Scheinwiderstandes mit Impedanzmeter.[2]

### 3 Auswertung

#### 3.1 Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstand $R_{eff}$ und der Abklingdauer $T_{ex}$

Die bauteilspezifischen Werte lauten:

$$L = 12.78 \pm 0.09 \text{ mH}$$

$$C = 2.066 \pm 0.006 \text{ nF}$$

$$R_1 = 67,2 \pm 0.21 \Omega$$

$$R_2 = 682 \pm 11 \Omega$$

Die gemessenen Extrema nach einem elektrischen Nadelimpuls sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

**Tabelle 1:** Ausgangswerte

Zeit [sec]	Spannung [V]
0	-10
13	17
26	-8
40	13
52	-5
68	10
81	-3
95	9
110	0
120	7
132	1
147	6.5
162	2
175	6
185	2.5

Mit Numpy wird der Mittelwert  $m$  berechnet und anhand diesem die Minima gespiegelt, sodass sich die Werte wie in der folgenden Abbildung verhalten. Mit der Funktion  $U = U_0 \cdot e^{-2\pi\mu t}$  wird eine Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei ergeben sich folgende Regressionsparameter:

$$U_0 = 0.015 \pm 0.001V$$

$$\mu = 1849.3 \pm 119.03 \frac{1}{s}$$

Aus  $\mu$  lassen sich mittels

$$R_{eff} = 4\pi L\mu = 297 \pm 191 \Omega$$

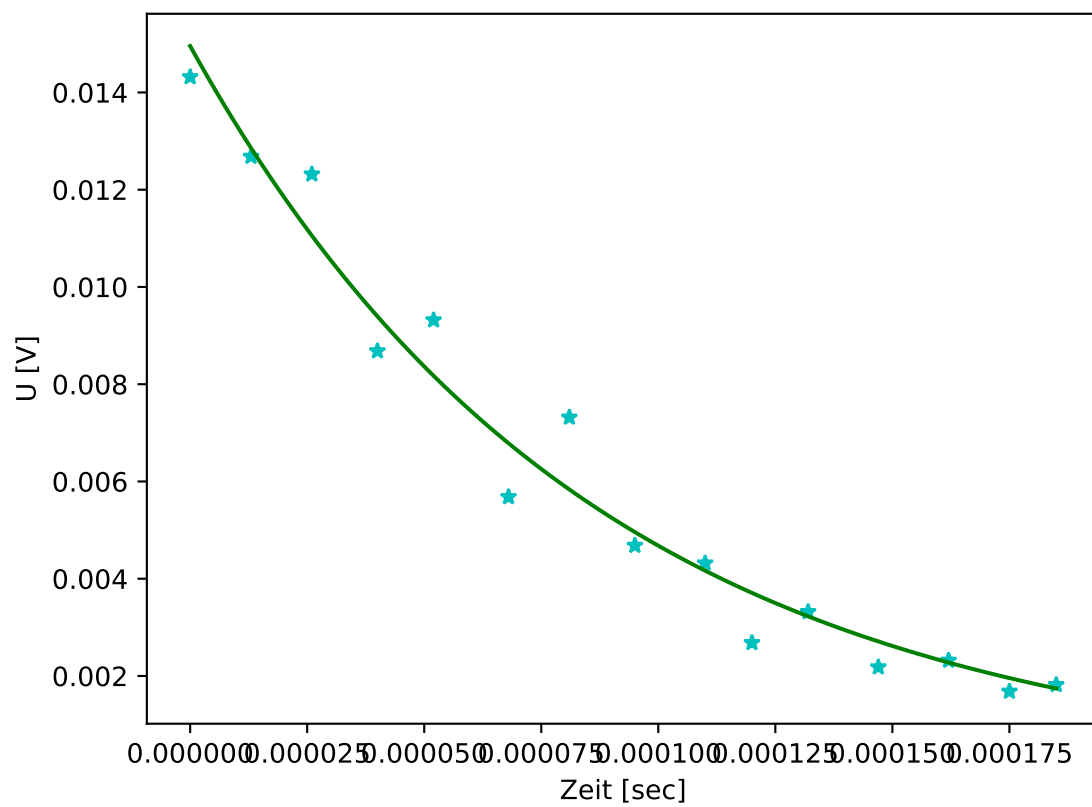


Abbildung 13: Plot.

der effektive Widerstand und die Abklingdauer

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = (8.6 \pm 0.6) \cdot 10^{-5} s$$

berechnen. Die Fehler wurden mittels numpy bestimmt.

### 3.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes beim aperiodischen Grenzfall

Der aperiodische Grenzfall tritt bei dem Dämpfungswiderstand

$$R_{ap} = 13001 \Omega$$

ein. Der theoretische Wert lautet

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 4974 \pm 191 \Omega.$$

### 3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die gemessene Kondensatorspannung und zugehörige Frequenz  $f$  bei der Erregerspannung  $U_0 = 50 Hz$  sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

**Tabelle 2:** Gemessene Kondensatorspannungen

Kondesatorspannung [V]	Frequenz [kHz]
5	50
7.5	45
10	42
12.5	38
12.5	36
12.5	34
10.5	30
8	26

In Abbildung 15 sind die Werte grafisch dargestellt. Die Breite der Resonanzkurve kann aus den gemessenen Daten nicht bestimmt werden. Das Maximum liegt bei 36 kHz.

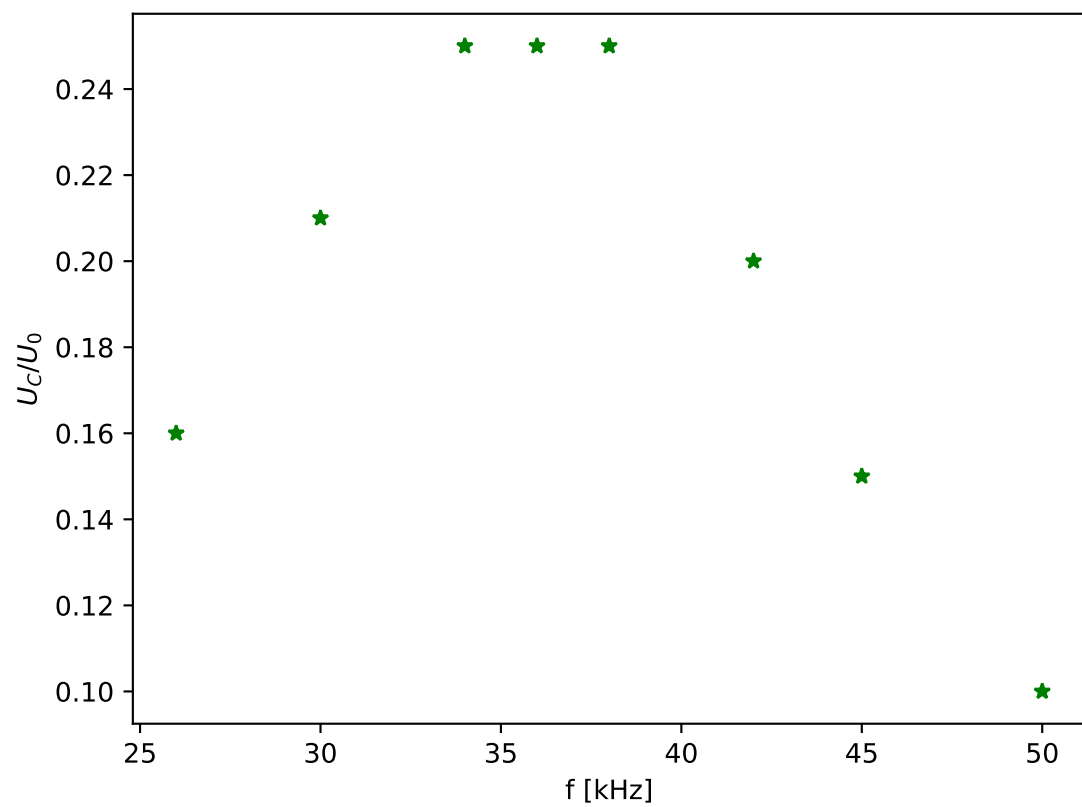


Abbildung 14: Resonanzkurve



## 4 Diskussion

Zunächst muss bemerkt werden, dass die Kabel nicht vollständig widerstandsfrei sind. Die Abweichung der Theoriewerte des Dämpfungswiderstandes von dem effektiven Dämpfungswiderstand kann dadurch teilweise erklärt werden. Zudem muss der Innenwiderstand des Frequenzoperators berücksichtigt werden. Dadurch addiert sich zum Widerstand  $R_1$  ein unbekannter Widerstand. Da  $R_{eff}$  größer ist, als  $R_1$ , kann nur gesagt werden, dass der ermittelte Wert für den Dämpfungswiderstand nicht zwingend falsch ist.

Der Widerstand des aperiodischen Grenzfalles liegt ebenfalls deutlich unter den Theoriewerten. Auch dies kann durch die oben genannten Faktoren verursacht worden sein.

Bei der Messung des Dämpfungswiderstandes wurde außerdem festgestellt, dass sich die Frequenz der Nadelimpuls immer wieder ohne Zutun der Versuchsdurchführenden verstellt. Auf den Dämpfungswiderstand hat das zunächst keine Einwirkung und danach wurde darauf geachtet, dass sich die Frequenz nicht verstellt.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch V353 - Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2021.
- [2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch V354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2021.

$f$	$U_c$
25 <del>kHz</del> Hz	5



$f$ [kHz]	$U_c$
50.61	
45.99	

V354 - gestämpfte & er

ta

Zeit  $\mu$ s

0

13

26

40

52

68

81

85

110

120