

V103

Biegung elastischer Stäbe

Tahir Kamcili
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 25.05.2021

Abgabe: 01.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theoretische Grundlage	3
2.1 Einseitige Einspannung	3
2.2 Beidseitige Einspannung	4
3 Durchführung	5
4 Auswertung	7
4.1 Berechnung der Flächenträgheitsmomente	7
4.2 Bestimmung der Metalle	7
4.3 Einseitig eingehängt Stange	8
4.4 Beidseitig eingehängt Stange	11
5 Diskussion	17
Literatur	18

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Biegung elastischer Stäbe untersucht. Dazu sollen Elastizitätsmodule verschiedener Materialien bestimmt werden.

2 Theoretische Grundlage

Greift eine Kraft an der Oberfläche eines Körpers an und ruft Gestalts- oder Volumenveränderungen an ihm hervor, wird diese als Spannung bezeichnet. Die Komponente senkrecht zur Oberfläche wird als Normalspannung σ und die parallele Komponente wird als Schubspannung bezeichnet. Wenn die durch die Spannung hervorgerufene Längenänderung klein genug ist, ergibt sich durch das Hookesche Gesetz

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

der lineare Zusammenhang zwischen der Deformation $\frac{\Delta L}{L}$ und der angreifenden Spannung σ . Dabei ist der Proportionalitätsfaktor E das materialabhängige konstante Elastizitätsmodul, welches durch Messung der Längenänderung bestimmt werden kann. Durch geringen Kraftaufwand entsteht eine leichte Veränderung des Körpers, die Biegung, die gemessen werden kann. Zunächst wird zwischen zwei Arten der Biegung unterschieden.

2.1 Einseitige Einspannung

Wirkt auf einen einseitig eingespannten elastischen stabförmigen Körper eine Gravitationskraft F , entsteht eine Durchbiegung $D(x)$ nach Abbildung (1).

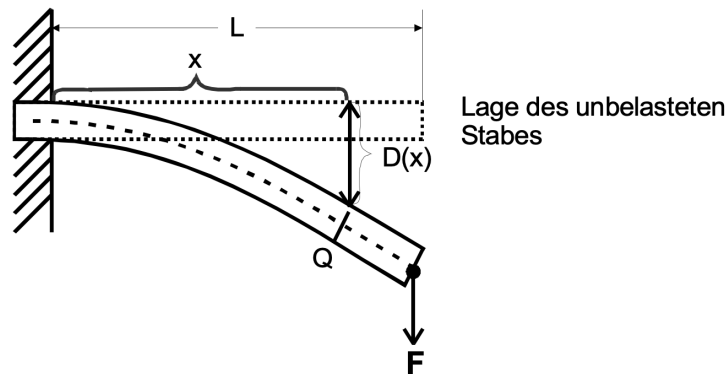


Abbildung 1: Durchbiegung eines einseitig eingespannten Stabes (Quelle: [11]).

Diese Durchbiegung bewirkt ein angreifendes Drehmoment

$$M_F = F \cdot (L - x) \quad (2)$$

mit der Länge $(L - x)$ des Hebelarms. In den oberen Schichten des Stabes treten Zugspannungen und in den unteren Schichten Druckspannungen auf, die der Deformation

entgegenwirken und ein Drehmoment M_σ bewirken, welches sich durch die Integration über Q berechnen lässt. Es gilt

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) \, dq$$

mit dem Abstand y des Flächenelementes dq von der neutralen Faser x . Es entsteht ein Gleichgewichtszustand mit

$$M_F = M_\sigma$$

aus dem sich der Ausdruck

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 \, dq = F(L - x) \quad (3)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$I := \int_Q y^2 \, dq(y). \quad (4)$$

ergibt. Nach Integration folgt

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (5)$$

für die Durchbiegung der einseitigen Einspannung.

2.2 Beidseitige Einspannung

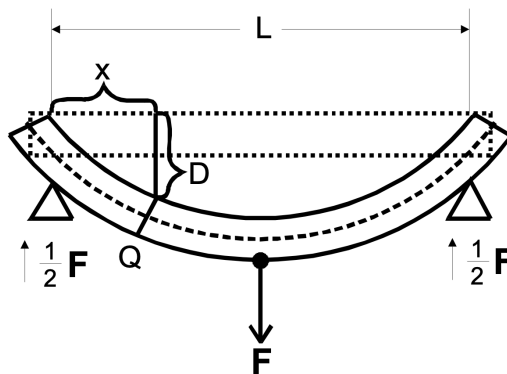


Abbildung 2: Durchbiegung eines beidseitig eingespannten Stabes (Quelle: [11]).

Wird der Stab beidseitig aufgelegt, wirkt nach Abbildung (2) die Kraft F in der Mitte und der Stab lässt sich in zwei Bereiche mit verschiedenen Drehmomenten unterteilen. Es gilt:

$$M_{F1} = -\frac{F}{2}x \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2})$$

$$M_{F2} = -\frac{F}{2}(L - x) \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L)$$

Daraus folgen nach Überlegungen aus der Differentialgeometrie und Integrationen analog zu Kapitel (2.1) die Funktionen der Durchbiegung

$$D_1(x) = \frac{F}{48EI} \cdot (3L^2x - 4x^3) \quad (6)$$

und

$$D_2(x) = \frac{F}{48EI} \cdot (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3). \quad (7)$$

3 Durchführung

Zuerst werden die zwei runden und zwei eckigen Stäbe unterschiedlichen Materials vermessen und gewogen.

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung (3) dargestellt.

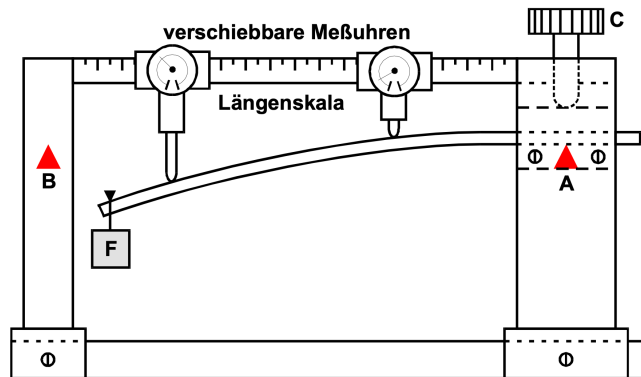


Abbildung 3: Aufbau zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls (Quelle: [11]).

Zur Untersuchung der einseitigen Einspannung wird der Stab im Punkt B befestigt. Die beiden Messuhren werden tariert und die Masse wird an das nicht eingespannte Ende bei $x = 52\text{cm}$ eingehangen. Nach kurzer Zeit kann die Durchbiegung an den beiden Messuhren sowie deren Position an der Skala abgelesen werden. Die Masse wird abgehängt und die Positionen der Messuhren wird verändert. Der Vorgang wird wiederholt, bis zehn Wertepaare aufgenommen wurden.

Für die beidseitige Einspannung wird der Stab zusätzlich auf Punkt B aufgelegt. Die beiden Messuhren werden tariert und die Masse wird in die Mitte bei $x = 27.5\text{cm}$ eingehängt. Analog zur einseitigen Einspannung wird die Durchbiegung und Position

abgelesen, die Masse abgehängt, die Messuhren verschoben und der Vorgang viermal wiederholt.

Beide Verfahren werden für alle vier Stäbe durchgeführt.

4 Auswertung

In diesem Abschnitt wird der Versuch ausgewertet.

4.1 Berechnung der Flächenträgheitsmomente

Zunächst müssen die Flächenträgheitsmomente der Stäbe berechnet werden. Es liegen drei Arten von Stäben vor. Zwei mit runder und jeweils einer mit rechteckiger und quadratischer Querschnittsfläche.

Für den runden Stab gilt, mit d als den Durchmesser,

$$I_R = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} (r \cdot \sin(\varphi))^2 \cdot dr d\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{2}\right)^4 \int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2 d\varphi \quad (8)$$

$$= \frac{d^4}{64} \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(\varphi) \cos \varphi}{2} \Big|_0^2 \pi = \frac{\pi}{64} d^4. \quad (9)$$

Für einen Stab mit rechteckiger Querschnittsfläche folgt dann äquivalent mit den Seitenlängen a und b

$$I_{\text{Recht}} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{a^3}{12} dz = b \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^4}{12} \quad (10)$$

und speziell für eine quadratische Flächen

$$I_Q = \frac{a^4}{12}. \quad (11)$$

4.2 Bestimmung der Metalle

Um die Metalle später vergleichen zu können ist es hilfreich über die Dichte diese zu bestimmen. Dies kann mit dem Zusammenhang

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (12)$$

erfolgen. Die Stäbe werden gewogen und abgemessen dem Durchmesser d , der Masse m und der Länge l , sowie den Seitenlängen a und b

Tabelle 1: Messwerte zu den Rundenstäben.

d / cm	m / g	l / cm
1	393.8	60.0
1	416.6	60.1

Das Volumen der runden Stäbe ist gegeben durch $V_r = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot l$ und das Volumen der eckigen Stäbe durch $V_e = a \cdot b \cdot l$.

Tabelle 2: Messwerte zu den eckigen Messtäben.

a / cm	b / cm	m / g	l / cm
1	1	163.4	59.1
1	1.2	603.8	60.4

Daraus folgt für die Dichten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} m = 393.8 \text{ g} : \rho &= 8.356 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ m = 416.6 \text{ g} : \rho &= 8.840 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ m = 163.4 \text{ g} : \rho &= 2.764 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ m = 603.8 \text{ g} : \rho &= 8.330 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Mit der Dichte lässt sich die Stange mit einer Masse von $m = 393.8 \text{ g}$ und die mit einer Masse von $m = 603.8 \text{ g}$ als Messing ([6]), die Stange mit einer Masse von $m = 416.6 \text{ g}$ als Kupfer ([5]) und die Stange mit einer Masse von $m = 163.4 \text{ g}$ als Aluminium ([4]) identifizieren. Diese Identifikationen stimmt auch mit den beobachteten Farben der Stangen überein.

4.3 Einseitig eingehängt Stange

Als erstes werden die Stangen nur an einer Stelle eingehangen und am anderen Ende werden Gewichte befestigt. Dann wird die Krümmung an mehreren Stellen gemessen. Dabei steht cr für die runde Kupferstange, mr für die runde Messingstange, ms für die eckige Messingstange und as für die quadratische Aluminiumstange. Für die eingehangenen Stangen gilt

$$\begin{aligned} cr : m &= 750 \text{ g}; x = 52 \text{ cm}; L = 54.6 \text{ cm} \\ mr : m &= 750 \text{ g}; x = 52 \text{ cm}; L = 54.3 \text{ cm} \\ ms : m &= 747.2 \text{ g}; x = 52 \text{ cm}; L = 54.8 \text{ cm} \\ as : m &= 550 \text{ g}; x = 52 \text{ cm}; L = 53.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Messwerte sind in den folgenden Tabellen aufgelistet.

Tabelle 3: Messwerte zu der runden Kupferstange.

x / cm	$D / \mu\text{m}$
23	1340
30	2445
47	4270
16	740
42	4150
12	550
8	269
40	3812
6	157
35	3080

Tabelle 4: Messwerte zu der runden Messingstange.

x / cm	$D / \mu\text{m}$
6	200
30	3462
10	500
35	4450
14	872
40	5351
22	1865
37	4891
25	2462
33	3929

Tabelle 5: Messwerte zu der eckige Messingstange.

x / cm	$D / \mu\text{m}$
12.1	256
28.1	1000
34	1371
16	393
22.8	700
40	1745
11	199
45	2100
50	2410
38	1620

Tabelle 6: Messwerte zu der eckige Aluminiumstange.

x / cm	$D / \mu\text{m}$
40	2929
15.4	569
34	2251
15	530
10	283
49	3570
21.1	1028
31	2004
17.5	695
38	2671

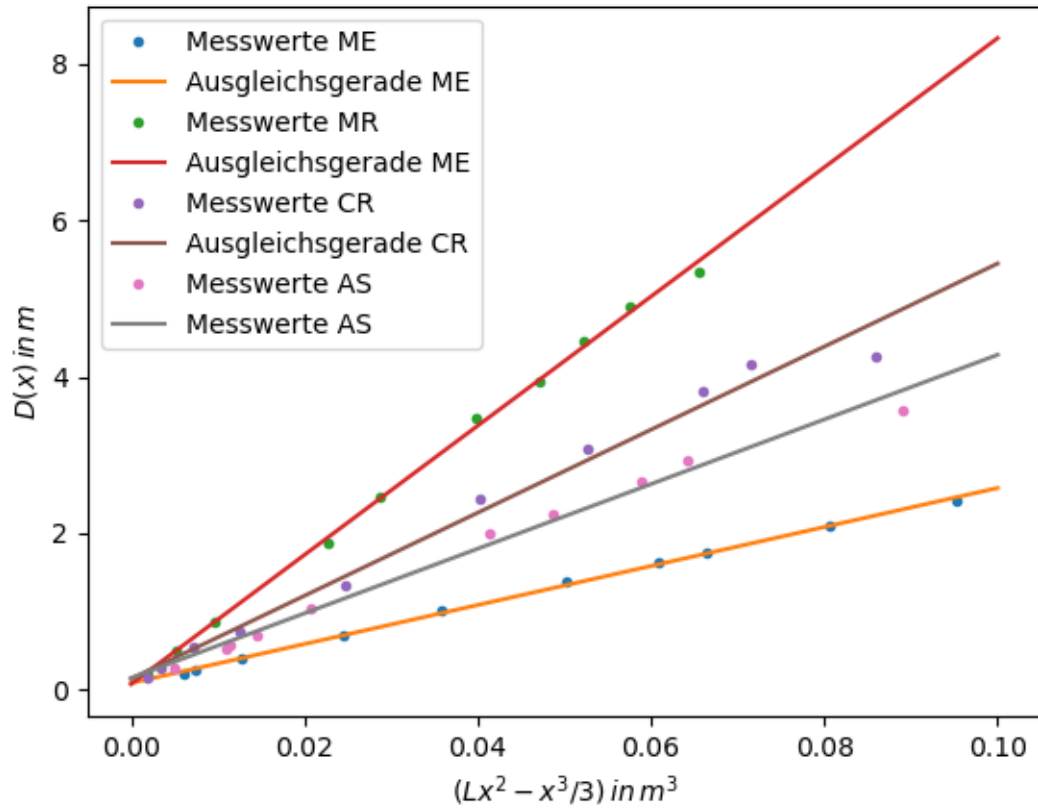


Abbildung 4: Messdaten und Fit für das einseitige einhängen der Stangen.

Die Messwerte lassen sich nun in die Abbildung 4 eintragen und Mithilfe einer Regressionsgerade der Form

$$D = a * x + b$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{für cr : } a &= (53.1455 \pm 2.21684) \, 1/\text{m}^2; \, b = (0.13443 \pm 0.10422) \, \text{m} \\ \text{für mr : } a &= (82.6638 \pm 1.11642) \, 1/\text{m}^2; \, b = (0.06684 \pm 0.04410) \, \text{m} \\ \text{für ms : } a &= (24.9591 \pm 0.29885) \, 1/\text{m}^2; \, b = (0.08105 \pm 0.08105) \, \text{m} \\ \text{und für as : } a &= (41.3532 \pm 1.54561) \, 1/\text{m}^2; \, b = (0.14570 \pm 0.06994) \, \text{m} . \end{aligned}$$

Mithilfe der Gleichung 5 lässt sich der Zusammenhang

$$E = \frac{F_G}{2a_x \mathbf{I}}.$$

bestimmen, wobei $F_G = m \cdot g$ die Gewichtskraft mit $g = 9,81 \, \text{m/s}^2$ ist, sodass sich das Elastizitätsmodul berechnen lässt zu

$$\begin{aligned} \text{cr : } E &= (1.41 \pm 0.06) \cdot 10^{11} \, \text{N/m}^2 \\ \text{mr : } E &= (0.907 \pm 0.012) \cdot 10^{11} \, \text{N/m}^2 \\ \text{ms : } E &= (1.468 \pm 0.018) \cdot 10^{11} \, \text{N/m}^2 \\ \text{as : } E &= (0.783 \pm 0.029) \cdot 10^{11} \, \text{N/m}^2 . \end{aligned}$$

Der statistische Fehler ergibt sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial m_1} \cdot \Delta m_1 = \frac{-F_G}{2\mathbf{I}m^2} \cdot \Delta m_1, .$$

4.4 Beidseitig eingehängt Stange

Das vorgehen ist äquivalent zum Kapitel nur das diesmal die Stangen an zwei Stellen eingespannt werden in einem Abstand von $L = 55 \, \text{cm}$. Diesmal wird bei den Stangen folgende Massen bei der Länge x eingehangen. Die Messergebnisse befinden sich in den folgenden Tabellen.

$$\begin{aligned} \text{cr : } m &= 747.2 \, \text{g}; \, x = 28 \, \text{cm} \\ \text{mr : } m &= 1238.5 \, \text{g}; \, x = 27.5 \, \text{cm} \\ \text{ms : } m &= 1238.5 \, \text{g}; \, x = 27.5 \, \text{cm} \\ \text{as : } m &= 747.2 \, \text{g}; \, x = 28 \, \text{cm} \end{aligned}$$

Tabelle 7: Messwerte zu der eckige Kupferstange, beidseitig eingehangen.

Seite des Gewichts	x / cm	$D / \mu\text{m}$
Links	35	315
	40	265
	45	180
	47	141
	50	105
Rechts	9	72
	12	115
	15	161
	19	230
	23	268

Tabelle 8: Messwerte zu der runden Messingstange, beidseitig eingehangen.

Seite des Gewichts	x / cm	$D / \mu\text{m}$
Links	33	570
	37	650
	40	575
	43	515
	46	500
Rechts	5	35
	9	125
	13	220
	18	360
	23	472

Tabelle 9: Messwerte zu der eckigen Messingstange, beidseitig eingehangen.

Seite des Gewichts	x / cm	$D / \mu\text{m}$
Links	49.65	37
	47	72
	45	81
	40	112
	35	139
Rechts	9	40
	11.3	57
	15	78
	19	99.5
	21	112

Tabelle 10: Messwerte zu der eckigen Aluminiumstange, beidseitig eingehangen.

Seite des Gewichts	x / cm	$D / \mu\text{m}$
Links	45	88
	37.3	195
	51.05	60
	33.8	210
	40	179
Rechts	14	85
	13.7	100
	18.41	129
	18.4	131
	8.01	35

Nun lassen sich die rechte und linke Seite unabhängig von einander in den Abbildung 5 und Abbildung 6 darstellen und wie schon zuvor mittels einer Regressionsgeraden fitten. Im weiteren Verlauf der Auswertung wird jedoch nur die rechte Stabseite betrachtet, also die für die $0 \leq x \leq L/2$.

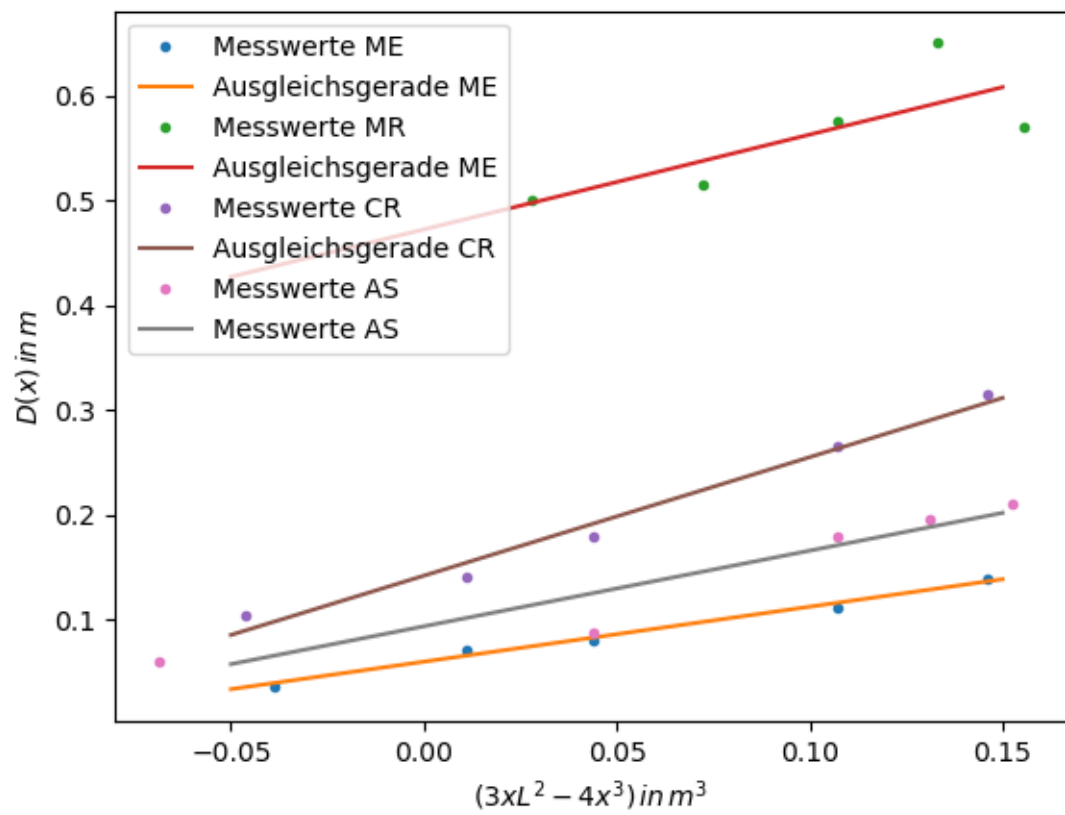


Abbildung 5: Messdaten und Fit für das beidseitige einhängen der Stangen, rechts.

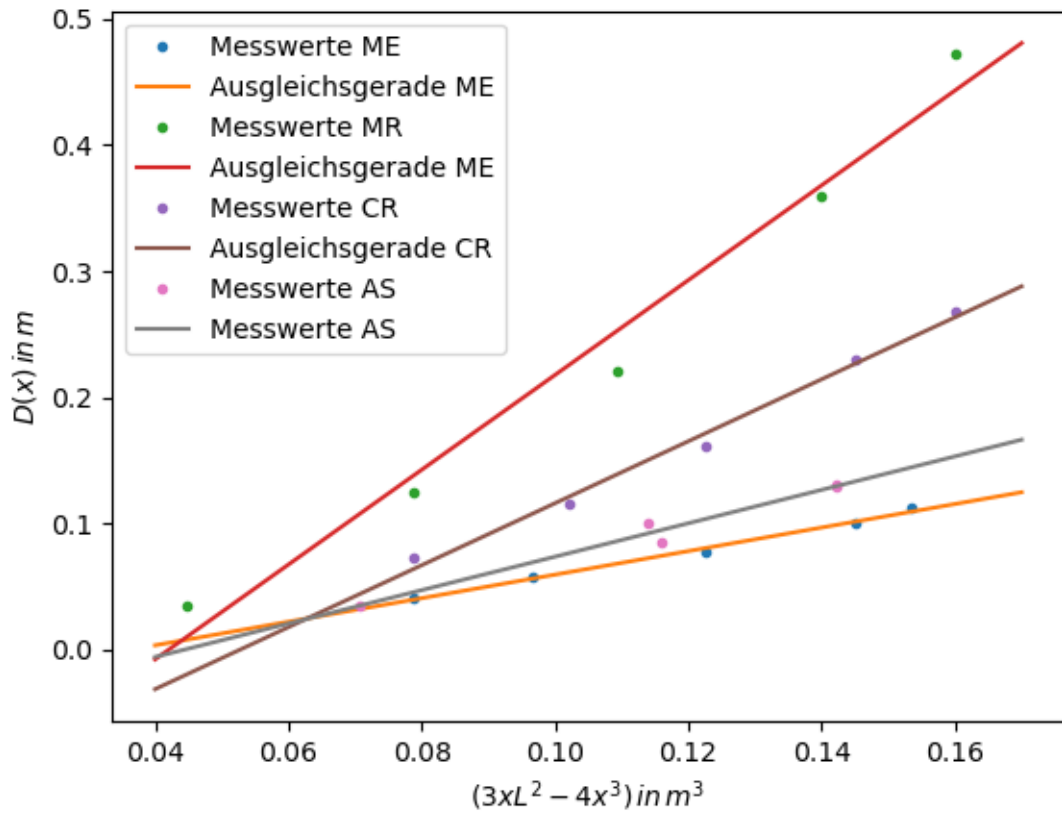


Abbildung 6: Messdaten und Fit für das beidseitige einhängen der Stangen, links.

Aus den Fitts folgt

$$\begin{aligned}
 &\text{für cr : } a = (1.1304 \pm 0.09432) \, 1/m^2; \, b = (0.1419 \pm 0.00811) \, 1/m^2 \\
 &\text{für mr : } a = (0.9044 \pm 0.43141) \, 1/m^2; \, b = (0.4722 \pm 0.04703) \, 1/m^2 \\
 &\text{für ms : } a = (0.5242 \pm 0.52424) \, 1/m^2; \, b = (0.0599 \pm 0.00279) \, 1/m^2 \\
 &\text{und für as : } a = (0.7214 \pm 0.13761) \, 1/m^2; \, b = (0.0937 \pm 0.01487) \, 1/m^2.
 \end{aligned}$$

Mithilfe der Gleichung 6 lässt sich der Zusammenhang

$$E = \frac{F_G}{48a_x \mathbf{I}}$$

feststellen. Damit folgt für das Elastizitätsmodul

$$\text{cr} : E = (2.75 \pm 0.23) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\text{mr} : E = (5.7 \pm 2.7) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\text{ms} : E = (4.83 \pm 0.03) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\text{as} : E = (2.5 \pm 0.5) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2.$$

5 Diskussion

Die Elastizitätsmodule der Literatur ([8]) sind gegeben durch

$$\begin{aligned}E_{\text{Messing,lit}} &= (0.78 - 1.23) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\E_{\text{Kupfer,lit}} &= 1.20 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\E_{\text{Aluminium,lit}} &= 0.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 .\end{aligned}$$

Dadurch das Messing eine Legierung ist gibt es kein eindeutiges Elastizitätsmodul, daher wird das um es leichter vergleichen zu können gemittelt zu $1.005 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Der relative Fehler lässt sich im allgemeinen berechnen mit

$$\Delta p = \left| \frac{f - g}{f} \right| .$$

Es fällt auf, dass das Elastizitätsmodul, welches mittels der doppelteingespannten Stäbe, um mindestens den Faktor 2 bis 3 größer ist als das Elastizitätsmodul, welches durch das einseitige einhängen bestimmt wurde. Daher wird die Angabe des relativen Fehlers verzichtet, da dieser sehr groß ist. Die Fehler des einseitigen einhängens lässt sich bestimmen zu

$$\begin{aligned}p_{\text{Messung,ms}} &= 46.07\% \\p_{\text{Messung,mr}} &= 9.75\% \\p_{\text{Messung,as}} &= 11.85\% \\p_{\text{Messung,cr}} &= 17.5\% .\end{aligned}$$

Gründe für die Fehler kann zum einen sein, dass die Messuhren sehr ungenau sind, da diese immer wieder mit dem Zeiger verhaken und sich immer wieder umstellen, wodurch diese immer wieder genullt werden müssen. Daher mussten unter anderem die Gewichte immer wieder runtergenommen und wieder drauf getan werden, wodurch ebenfalls eine Fehlerquelle entsteht. Zudem hat schon leichtes wackeln am Tisch für große Schwankungen an den Messuhren gesorgt. Zudem ist die Waage relativ ungenau, denn wenn die Gewichte als genormt angenommen werden, hat die bei einem genormten Gewicht von 500g ein Gewicht von 498.8g angezeigt.

Eine weitere große Fehlerquelle, welche den großen Fehler beim beidseitigen einhängen erklären könnte, ist dass die Stäbe nicht wirklich auf beiden Seiten eingespannt wurden, sondern lediglich aufgelegt, wodurch ein großer systematischen Fehler entstanden sein könnte. Es lässt sich aus dem Versuch schließen, dass eine Berechnung des Elastizitätsmodul durch beidseitiges einspannen der Stangen nicht empfehlenswert ist.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für die Dichte von Aluminium*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Aluminium.html> (besucht am 30.05.2021).
- [5] *Literaturwert für die Dichte von Kupfer*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Kupfer.html> (besucht am 30.05.2021).
- [6] *Literaturwert für die Dichte von Messing*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Messing.html> (besucht am 30.05.2021).
- [7] *Literaturwert für die Dichte von Silber*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Silber.html> (besucht am 30.05.2021).
- [8] *Literaturwert für die Elastizitätsmodule*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html> (besucht am 30.05.2021).
- [9] *Literaturwert für spezifische Wärmekapazität von Wasser*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%ACrmekapazit%C3%ACA4t.html (besucht am 01.11.2020).
- [10] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [11] *Versuchsanleitung zu Versuch V103 Biegung elastischer Stäbe*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.