Durchführung: 24.01.2017
Abgabe: 31.01.2017

# Praktikumsprotokoll V101

# Das Trägheitsmoment

Anneke Reinold[1],
Vanessa Sulaiman[2]

[1]anneke.reinold@tu-dortmund.de
[2]vanessa.sulaiman@tu-dortmund.de

# 1 Einleitung

In diesem Versuch werden verschiedene Körper, welche um eine Drillachse in Schwingung versetzt werden, auf ihre Trägheitsmomente hin untersucht, wobei unter anderem zur Berechnung der Satz von Steiner verwendet wird.

# 2 Theorie

Im Generellen sind Trägheitsmomente immer bezüglich Achsen definiert. Dreht sich ein ausgedehnter Körper um eine festgelegte Achse, dann bewegt sich jedes Element dieser Masse mit derselben Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und für ein solches Gesamtträgheitsmoment gilt

$$I = \sum_i r_i^2 m_i. \tag{1}$$

Hierbei ist $r$ der Abstand eines Massenelements $m$.
Für umfangreichere Geometrien lassen sich diese in einfachere Teilkörper aufteilen und so, sofern sie sich alle auf dieselbe Achse beziehen, durch Addition auch das Trägheitsmoment bestimmen.
Sollte die Drehachse nicht mit der des Schwerpunkts übereinstimmen, sondern parallel um den Abstand $a$ verschoben sein, so lässt es sich, unter Verwendung des Satzes von Steiner, der da lautet

$$I = I_a + ma^2, \tag{2}$$

wobei $I_s$ gleich dem Trägheitsmoment zu der Drehachse durch den Schwerpunkt ist, das Trägheitsmoment in jenen Fällen berechnen.
Das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{3}$$

wirkt, wenn auf einen drehbar gelagerten Körper die Kraft $\vec{F}$ im Abstand $\vec{r}$ wirkt.
Bei einem schwingungsfähigen System wirkt der Drehung des Systems um den Winkel $\varphi$ aus seiner Ruhelage ein rücktreibendes Moment entgegen.
Führt der Körper harmonische Schwingungen durch, so ist die Schwingungsdauer über

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \tag{4}$$

definiert; die Winkelgröße $D$ ist durch

$$M = D \cdot \varphi \tag{5}$$

beschrieben.

# 3 Aufbau

Zur Versuchsdurchführung wird ein Aufbau verwendet, bei dem es möglich ist, anhand der gemessenen Schwingungsdauer $T$ das Trägheitsmoment zu bestimmen. Hier besteht das Gestell aus einer drehbar gelagerten Drillachse, wie in Abbildung 1 zu sehen. Über diese Achse können unterschiedliche Körper mit einer Spiralfeder ausgelenkt werden.

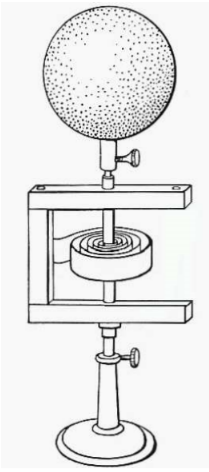

**Abbildung 1:** Versuchsaufbau zur Bestimmung von Trägheitsmomenten.[1]

# 4 Durchführung

Im Vorfeld werden für alle Körper und für die Drillachse das Gewicht und die geometrischen Maße ermittelt.
Zu Beginn wird die Winkelrichtgröße $D$ mithilfe eines Federkraftmessers und dem Zusammenhang $D = \frac{F \cdot r}{\varphi}$ bestimmt. Es folgt eine Messreihe, um das Eigenträgheitsmoment der Drillachse $I_D$ zu bestimmen, wobei eine Stange mit zwei Gewichten an jedem Ende auf die Achse gesetzt wird, und durch Verschiebung dieser Massen, das Eigenträgheitsmoment bestimmt werden kann.
Im Anschluss daran werden Messungen für zwei verschiedene Körper getätigt, bei der der Körper über die Achse ausgelenkt wird und wie oben schon erwähnt, die Schwingungsdauer $T$ gemessen wird, um daraus das Trägheitsmoment für beide Körper zu berechnen. Schlussendlich wird das Trägheitsmoment für eine Holzpuppe, die sich in zwei verschiedenen Stellungen befindet, bestimmt. Hierbei wird genauso wie bei der vorherigen Messung vorgegangen. Zur Bestimmung des Theoriewerts für die Puppe wird diese in mehrere kleinere Körper unterteilt und für diese mit dem Satz von Steiner das jeweilige Trägheitsmoment bestimmt, damit ein Vergleich mit dem experimentellen Wert erfolgen kann.

# 5 Auswertung

Im Folgenden wird der Mittelwert immer durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6}$$

und dessen Standardabweichung durch

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{7}$$

berechnet. Alle weiteren Fehler berechnen sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \dots}\,. \tag{8}$$

Der Plot und die Regression wurden mit python berechnet und erstellt.

## 5.1 Trägheitsmoment der Drillachse

**Tabelle 1:** Messwerte der statischen Methode.

| Auslenkung $\varphi$ | a in cm | F in N | D in Ncm |
|---|---|---|---|
| $\pi/2$ | 25 | 0,09 | 1,432 |
| $\pi$ | 25 | 0,32 | 2,546 |
| $3\pi/2$ | 25 | 0,45 | 2,387 |
| $2\pi$ | 25 | 0,62 | 2,467 |
| $\pi/2$ | 19 | 0,24 | 2,903 |
| $\pi$ | 19 | 0,41 | 2,480 |
| $3\pi/2$ | 19 | 0,59 | 2,379 |
| $2\pi$ | 19 | 0,66 | 1,996 |
| $\pi/2$ | 13 | 0,27 | 2,235 |
| $\pi$ | 13 | 0,54 | 2,235 |
| $3\pi/2$ | 13 | 0,78 | 2,152 |
| $2\pi$ | 13 | 0,97 | 2,007 |

Daraus ergibt sich der Mittelwert

$$D = (2{,}268 \pm 0{,}105)\,\mathrm{Ncm}\,.$$

Aus (4) folgt

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}(I_\mathrm{D} + I_\mathrm{Stab} + 2I_\mathrm{Zyl})\,, \tag{9}$$

**Tabelle 2:** Messwerte der dynamischen Methode.

| a in cm | 5T in s |
|---|---|
| 5,5 | 13,75 |
| 7,5 | 15,13 |
| 9,5 | 17,40 |
| 11,5 | 19,62 |
| 13,5 | 22,34 |
| 15,5 | 24,84 |
| 17,5 | 27,18 |
| 19,5 | 29,81 |
| 21,5 | 32,47 |
| 23,5 | 35,19 |

wobei sich das Trägheitsmoment der Zylinder nach dem Satz von Steiner zusammensetzt:

$$I_{\mathrm{Zyl}} = I_{\mathrm{Zyl,S}} + ma^2\,, \tag{10}$$

mit dem Abstand $a$ zwischen Schwerpunkt des Zylinders und der Drehachse. Zur Berechnung des Trägheitsmoments der Drillachse $I_{\mathrm{D}}$ wird eine Regression der Form

$$T^2 = ba^2 + c$$

mit

$$b = \frac{8\pi^2 m_{\mathrm{Zyl}}}{D} \tag{11}$$

$$c = \frac{4\pi^2}{D}(I_{\mathrm{D}} + I_{\mathrm{Stab}} + I_{\mathrm{Zyl,S}}) \tag{12}$$

durchgeführt. Sie liefert die Werte

$$b = (0{,}0808 \pm 0{,}0004)\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{cm}^2}$$
$$c = (4{,}9221 \pm 0{,}1302)\,\mathrm{s}^2\,.$$

Die Messwerte und die Regression sind in Abbildung 2 aufgetragen. Die Trägheitsmomente des Stabs und der Zylinder werden mit

$$I_{\mathrm{Stab}} = \frac{ml^2}{12} \tag{13}$$

$$I_{\mathrm{Zyl}} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{14}$$

berechnet, wobei die Körper die Maße

$$m_{\text{Stab}} = 96{,}26\,\text{g}$$
$$l_{\text{Stab}} = 60\,\text{cm}$$
$$m_{\text{Zyl}} = 222{,}50\,\text{g}$$
$$r_{\text{Zyl}} = 1{,}745\,\text{cm}$$
$$h_{\text{Zyl}} = 3{,}000\,\text{cm}$$

haben. Aus den Ergebnissen der Regression und den berechneten Trägheitsmomenten lassen sich nun die Winkelrichtgröße und das Trägheitsmoment der Drillachse berechnen und es folgt:

$$D = (2{,}174 \pm 0{,}011)\,\text{Ncm}$$
$$I_{\text{D}} = (-0{,}18 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2$$

Die Winkelrichtgröße $D$ aus der dynamischen Methode hat einen kleineren Fehler als die aus der statischen Methode, deshalb wird im Folgenden immer der aus der dynamischen Methode bestimmte Wert verwendet. Da das Trägheitsmoment negativ ist, wird für die folgenden Rechnungen $I_{\text{D}} = 0$ angenommen.

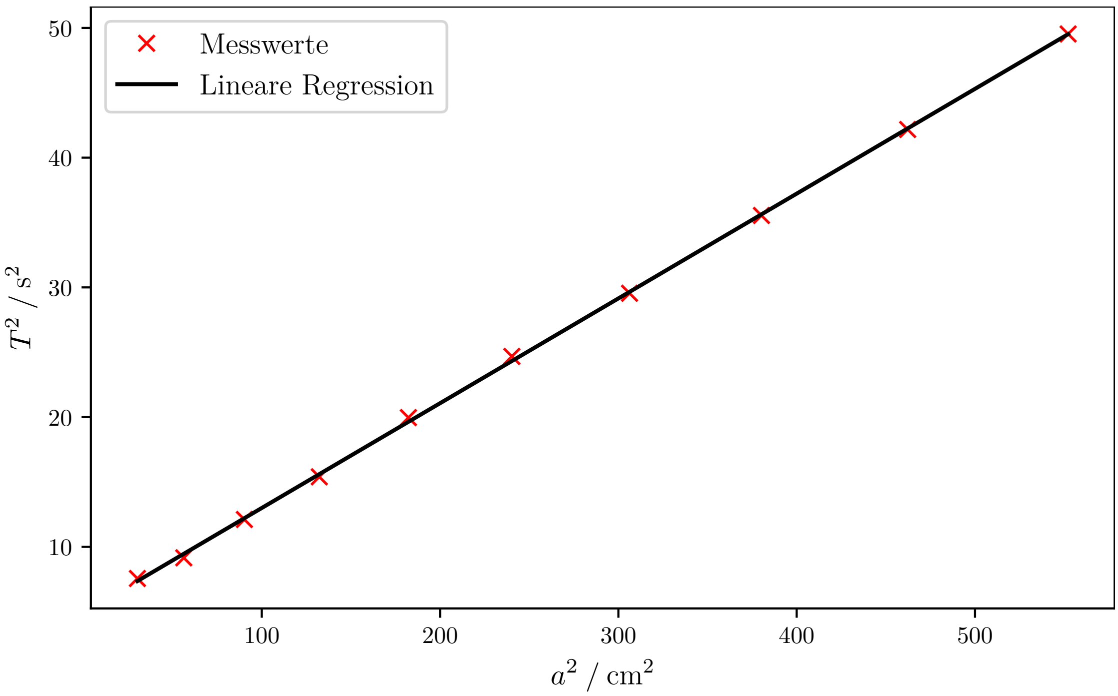


**Abbildung 2:** Plot der dynamischen Methode.

## 5.2 Trägheitsmomente einfacher Körper

Untersucht werden ein Zylinder, dessen Rotationsachse durch die Mantelfläche geht und ein Zylinder, dessen Rotationsachse durch die Grundfläche geht. Die Trägheitsmomente der beiden Zylinder berechnen sich nach

$$I_\text{G} = \frac{mr^2}{2} \tag{15}$$

und

$$I_\text{M} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{16}$$

mit Masse $m$, Radius $r$ und Höhe $h$. Die beiden Zylinder haben die Maße

$$\begin{aligned} m_\text{G} &= 1119{,}4\,\text{g} \\ r_\text{G} &= 3{,}7525\,\text{cm} \\ h_\text{G} &= 3{,}040\,\text{cm} \\ m_\text{M} &= 1118{,}1\,\text{g} \\ r_\text{M} &= 3{,}755\,\text{cm} \\ h_\text{M} &= 3{,}040\,\text{cm}\,, \end{aligned}$$

woraus sich die Theoriewerte für die Trägheitsmomente berechnen lassen:

$$\begin{aligned} I_\text{G,theo} &= 0{,}7881 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2 \\ I_\text{M,theo} &= 0{,}4802 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2 \end{aligned}$$

Die gemessenen Schwingungsdauern für die beiden Zylinder sind in Tabelle 3 aufgetragen. Aus diesen werden die Mittelwerte bestimmt und aus Formel (4) die Trägheitsmomente mit

$$I_\text{Zyl} = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_\text{D} \tag{17}$$

bestimmt.

**Tabelle 3:** Messwerte der Trägheitsbestimmung einfacher Körper.

| $T_\text{G}$ in s | $T_\text{M}$ in s |
|---|---|
| 1,188 | 0,938 |
| 1,185 | 0,938 |
| 1,194 | 0,932 |
| 1,197 | 0,938 |
| 1,194 | 0,937 |
| 1,209 | 0,940 |

Als Mittelwerte ergeben sich

$$\begin{aligned} T_\text{G} &= (1{,}1945 \pm 0{,}0034)\,\text{s} \\ T_\text{M} &= (0{,}9372 \pm 0{,}0011)\,\text{s} \end{aligned}$$

und daraus die Trägheitsmomente

$$I_{\mathrm{G,exp}} = (0{,}7860 \pm 0{,}0060) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$$
$$I_{\mathrm{M,exp}} = (0{,}4837 \pm 0{,}0027) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2\,.$$

Die Abweichungen von den Theoriewerten betragen

$$\Delta I_{\mathrm{G}} = 0{,}27\,\%$$
$$\Delta I_{\mathrm{M}} = -0{,}73\,\%\,.$$

## 5.3 Trägheitsmoment einer Modellpuppe

Zur Bestimmung der Trägheitsmomente der Puppe müssen zunächst die Massen der Einzelteile bestimmt werden. Hierzu wird angenommen, dass die Puppe näherungsweise als Zusammensetzung mehrerer Zylinder betrachtet werden kann und eine homogene Massenverteilung besitzt. Zunächst werden die Volumina der Einzelteile mit

$$V = \pi r^2 h \tag{18}$$

bestimmt und deren prozentualer Anteil am Gesamtvolumen. Danach wird der entsprechende Anteil an der Gesamtmasse bestimmt. Die Gesamtmasse beträgt

$$m_{\mathrm{ges}} = 160\,\mathrm{g}$$

und die geometrischen Abmessungen sowie die daraus berechneten Größen sind in Tabelle 4 aufgetragen. Es ergibt sich ein Gesamtvolumen von

$$V = 256{,}1241\,\mathrm{cm}^3\,.$$

**Tabelle 4:** Volumen- und Massenanteile der Modellpuppe.

| Körperteil | $r$ in cm | $h$ in cm | $V$ in $\mathrm{cm}^3$ | Anteil in % | $m$ in g |
|---|---|---|---|---|---|
| Arm | 0,7225 | 13,740 | 22,5327 | 8,798 | 14,0768 |
| Bein | 0,8725 | 15,000 | 35,8734 | 14,006 | 22,4096 |
| Kopf | 1,3725 | 5,490 | 32,4898 | 12,685 | 20,2960 |
| Körper | 1,8500 | 9,935 | 106,8221 | 41,707 | 66,7312 |

Es wird das Trägheitsmoment der Puppe für die beiden unterschiedlichen Stellungen berechnet, welche in Abbildung 3 dargestellt sind.

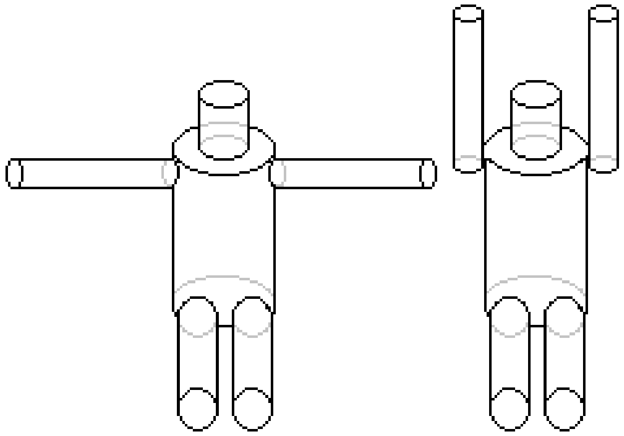

**Abbildung 3:** Beide Stellungen der Puppe.

Der Oberkörper und der Kopf rotieren um ihre Schwerpunktachse, welche durch ihre Grundfläche geht. Die Beine rotieren um eine Achse, die parallel zu ihrer Schwerpunktsachse durch die Mantelfläche sind. Die Arme drehen sich in der ersten Position ebenfalls wie die Beine, in der zweiten Position parallel zu der Schwerpunktachse durch ihre Grundfläche. Die Trägheitsmomente des Oberkörpers und des Kopfes werden also mit Gleichung (15) berechnet. Das Trägheitsmoment der Arme in der zweiten Position wird ebenfalls mit dieser Gleichung bestimmt, aber es kommt noch der Term $+ma^2$ durch das Gesetz von Steiner hinzu. Die Trägheitsmomente der Beine und der Arme in der ersten Position ergeben sich aus Gleichung (16) und ebenfalls dem Satz von Steiner. Mit den Abständen zur Drehachse

$$
\begin{aligned}
a_{\text{Bein}} &= 7{,}7248\,\text{cm} \\
a_{\text{Arm},1} &= 8{,}7200\,\text{cm} \\
a_{\text{Arm},2} &= 7{,}1147\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

ergeben sich die einzelnen Trägheitsmomente

$$
\begin{aligned}
I_{\text{Körper}} &= 114{,}1937\,\text{gcm}^2 \\
I_{\text{Kopf}} &= 19{,}1164\,\text{gcm}^2 \\
I_{\text{Bein}} &= 1761{,}6825\,\text{gcm}^2 \\
I_{\text{Arm},1} &= 1074{,}0514\,\text{gcm}^2 \\
I_{\text{Arm},2} &= 935{,}8504\,\text{gcm}^2
\end{aligned}
$$

und daraus folgen die Gesamtträgheitsmomente

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_{\text{Körper}} + I_{\text{Kopf}} + 2I_{\text{Bein}} + 2I_{\text{Arm},1} = 5804{,}7779\,\text{gcm}^2 \\
I_2 &= I_{\text{Körper}} + I_{\text{Kopf}} + 2I_{\text{Bein}} + 2I_{\text{Arm},2} = 5528{,}3759\,\text{gcm}^2\,.
\end{aligned}
$$

Bei der experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente wird analog zu den Zylindern vorgegangen. Die gemessenen Schwingungsdauern sind in Tabelle 5 aufgetragen. Aus diesen werden die Mittelwerte bestimmt und aus Formel (4) die Trägheitsmomente mit

$$I_{\text{Puppe}} = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_{\text{D}} \tag{19}$$

bestimmt.

**Tabelle 5:** Schwingungsdauern zur experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente der Puppe.

| $T_1$ in s | $T_2$ in s |
|---|---|
| 0,922 | 0,737 |
| 0,928 | 0,744 |
| 0,918 | 0,747 |
| 0,928 | 0,744 |
| 0,912 | 0,753 |
| 0,925 | 0,747 |
| 0,921 | 0,760 |

Als Mittelwerte ergeben sich

$$T_1 = (0{,}9220 \pm 0{,}0022)\,\text{s}$$
$$T_2 = (0{,}7474 \pm 0{,}0028)\,\text{s}$$

und daraus die Trägheitsmomente

$$I_{1,\text{exp}} = (4681 \pm 33)\,\text{gcm}^2$$
$$I_{2,\text{exp}} = (3076 \pm 28)\,\text{gcm}^2\,.$$

Die Abweichungen von den Theoriewerten betragen

$$\Delta I_1 = 19{,}36\,\%$$
$$\Delta I_2 = 44{,}36\,\%\,.$$

# 6 Diskussion

Die Abweichung zwischen den Winkelrichtgrößen aus der statischen und der dynamischen Methode ist mit ca. 4 % relativ gering, lässt also auf gute Messungen schließen. Der Fehler der dynamischen Methode ist jedoch geringer als der der statischen Methode, deshalb wird für weitere Rechnungen dieser Wert verwendet. Das Trägheitsmoment der Drillachse ist negativ, aber betragsmäßig sehr klein. Dies liegt vermutlich an Messfehlern, sodass das gemessene Gesamtträgheitsmoment kleiner als die berechneten Teilträgheitsmomente des Stabs und der beiden Zylinder ist. Die Messfehler liegen höchstwahrscheinlich an der Zeitmessung, da nur die Zeiten für jeweils fünf Perioden gemessen wurden und die Reaktionszeit einen großen Einfluss hat.
Bei der Bestimmung der Trägheitsmomente der einfachen Körper sind die Abweichungen zu den Theoriewerten mit

$$\Delta I_{\mathrm{G}} = 0{,}27\,\%$$
$$\Delta I_{\mathrm{M}} = -0{,}73\,\%$$

sehr gering. In diesem Fall wurden die Zeiten für zehn Perioden gemessen, sodass die Messfehler durch Reaktionszeit geringer wurden. In beiden Fällen dürften die bestimmten Theoriewerte sehr realistisch sein, da sich die Abmessungen der einzelnen Teile problemlos sehr genau bestimmen ließen. Dies war bei der Modellpuppe nicht der Fall. Ihr Körper wurde lediglich mit wenigen Zylindern genähert, sodass die Theoriewerte etwas zu groß sein dürften. Besonders großen Einfluss könnte das Trägheitsmoment der Beine haben, da die Oberschenkel einen deutlich größeren Radius als die Unterschenkel haben und deutlich näher an der Drehachse waren. Da der Radius über die Beinlänge gemittelt wurde und die Beine einen großen Anteil am Gesamtträgheitsmoment hatten, werden diese die größte Fehlerquelle sein. Es ergeben sich für die Modellpuppe Abweichungen von

$$\Delta I_1 = 19{,}36\,\%$$
$$\Delta I_2 = 44{,}36\,\%\,.$$

Da bei der Puppe ebenfalls die Schwingungsdauer für zehn Perioden gemessen wurde, ist davon auszugehen, dass die experimentell bestimmten Werte näher an den richtigen Werten liegen als die Theoriewerte.

# Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 101.* URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf` (besucht am 24. 12. 2016).