

V 47

Temperaturabhängigkeit der Molwärme in Festkörpern

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Henning Ptaszyk
henning.ptaszyk@udo.edu

Durchführung: 22. Oktober 2018
Abgabe: 1. Januar 1970

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Klassisches Modell	3
1.2	Einsteinsches Modell	3
1.3	Debye-Modell	4
2	Durchführung	6
3	Auswertung	7
3.1	Theoriewert der Debyetemperatur	13
4	Diskussion	14
	Literatur	15

1 Theorie

Zielsetzung

In dem hier beschriebenen Versuch wird untersucht, inwiefern die Molwärme von der Temperatur abhängt. Dazu werden zunächst drei Modelle zur theoretischen Beschreibung der Molwärme von Festkörpern diskutiert und weiterhin experimentelle Untersuchungen von Kupfer angestellt. Anhand der daraus gewonnen Erkenntnisse, wird die Konstante Θ_D , die Debye-Temperatur, sowohl theoretisch, anhand des Debye-Modells, als auch mit Hilfe der Messwerte bestimmt.

1.1 Klassisches Modell

Bei einer rein klassischen Betrachtung, wird jedem Atom pro Freiheitsgrad eine mittlere Energie von $k_B T/2$ zugeordnet. Die Atome im dreidimensionalen Festkörper sind auf drei Bewegungsrichtungen, also sechs Freiheitsgrade, eingeschränkt, sodass ein Mol eine mittlere Wärmeenergie von

$$U = 3k_B T N_L = 3RT \quad (1)$$

besitzt. Dabei bezeichnet N_L die Loschmidtsche Zahl und R die allgemeine Gaskonstante. Um die spezifische Molwärme C_V zu erhalten, wird die Energie eines Mols (siehe Gleichung (1)) nach der Temperatur T abgeleitet. Es ergibt sich also

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = 3R. \quad (2)$$

Dieses Ergebnis ist bekannt als das Dulong-Petit-Gesetz. Aus (2) wird klar, dass in der klassischen Theorie, die Molwärme sowohl unabhängig von der Beschaffenheit des Festkörpers, als auch der Temperatur ist.

1.2 Einsteinsches Modell

Im einsteinschen Modell wird, im Gegensatz zum klassischen Modell, berücksichtigt, dass die Energie, mit der die Atome im Festkörper Schwingen, quantisiert ist. Ausgehend von einer festgelegten Kreisfrequenz ω , werden nur Energien der Form

$$E_n = \hbar \omega n$$

zugelassen. Wobei n eine natürliche Zahl ist. Diese möglichen Energiezustände sollen der Boltzmann-Statistik folgen. Sodass der Energieerwartungswert für ein Atom durch

$$\langle u \rangle_{\text{Einstein}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{\frac{-E_n}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-E_n}{k_B T}}} \quad (3)$$

Damit ergibt sich dann für die Molwärme

$$C_{V,\text{Einstein}} = 3R \frac{\hbar^2 \omega^2}{k_B} \frac{1}{T^2} \frac{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}}}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad (4)$$

Dabei gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{V,\text{Einstein}} = 3R. \quad (5)$$

Es lässt sich also erkennen, dass für große Temperaturen das einsteinsche Modell in das Klassische übergeht und für kleine Temperaturen antiproportional zu T^2 verläuft.

1.3 Debye-Modell

Zur besseren Beschreibung der Realität, wird im Debye-Modell, nicht wie im Einsteinschen von einer konstanten Schwingungsfrequenz, sondern mehreren ausgegangen. Dazu wird eine Verteilungsfunktion $Z(\omega)$ eingeführt. Diese beschreibt das Spektrum der Schwingungsfrequenzen. Für die Molwärme gilt also

$$C_V = \frac{d}{dT} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega Z(\omega) \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}. \quad (6)$$

im Allgemeinen ist $Z(\omega)$ beliebig kompliziert. Allerdings, wird im Debye-Modell die Annahme getroffen, dass die Phasengeschwindigkeit unabhängig von Frequenz wie Ausbreitungsrichtung ist. Auf diese Weise vereinfacht sich $Z(\omega)$ derart, dass ausschließlich die Eigenschwingungen eines Würfels (Kantenlänge L) auf einem Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$ zu berücksichtigen sind. Damit ergibt sich

$$Z(\omega) d\omega = \omega^2 \frac{L^3}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3} \right) d\omega. \quad (7)$$

Mit der longitudinalen Phasengeschwindigkeit v_l und der transversalen v_{tr} . In einem aus N_L Atomen zusammengesetzten Festkörper, existieren im dreidimensionalen Raum $3N_L$ Eigenschwingungen. Aufgrund dieser Begrenzung, ist es notwendig, dass eine Frequenz ω_D , welche die obere Schranke der auftretenden Frequenzen darstellt, existiert. Diese wird als Debye-Frequenz bezeichnet und lässt sich aus dem Zusammenhang

$$\int_0^{\omega_D} d\omega = 3N_L \quad (8)$$

gewinnen. Es ergibt sich damit

$$\omega_D^3 = \frac{18\pi^2 N_L}{L^3} \frac{1}{\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}}. \quad (9)$$

Mithilfe von Gleichung 6, 7 und 9 lässt sich die spezifische Wärmekapazität als

$$C_{V, \text{ Debye}} = \frac{d}{dT} \frac{9N_L \hbar}{\omega_D^3} = \int_0^{\omega_0} d\omega \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (10)$$

schreiben. Mit den Definitionen

$$x := \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (11)$$

$$\frac{\theta_D}{T} := \frac{\hbar\omega_D}{k_B T} \quad (12)$$

wird der Ausdruck für die Wärmekapazität 10 zu

$$C_{V, \text{ Debye}} = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot \quad (13)$$

Bei einer Betrachtung von 13 im Grenzwert sehr großer Temperaturen, ergibt sich für C_V wieder die Konstante $3R$.

Da die Wärmekapazität kubisch mit der Temperatur ansteigt, kann der Beitrag freier Elektronen, der linear mit T anwächst, im Festkörper vernachlässigt werden. [2]

2 Durchführung

In der Abbildung 1 ist der Versuchsaufbau schematisch dargestellt. Bei dem Versuch ist die Kupfer Probe von einem Kupfer Zylindermantel umschlossen und befindet sich in einem Rezipienten, der sich wiederum in einem Dewargefäß befindet. Probe und Zylinder sind jeweils mit einem Heizdraht umwickelt und können so separat voneinander geheizt werden. Die Temperatur an Probe und Zylinder wird jeweils über ein Ohmmeter gemessen.

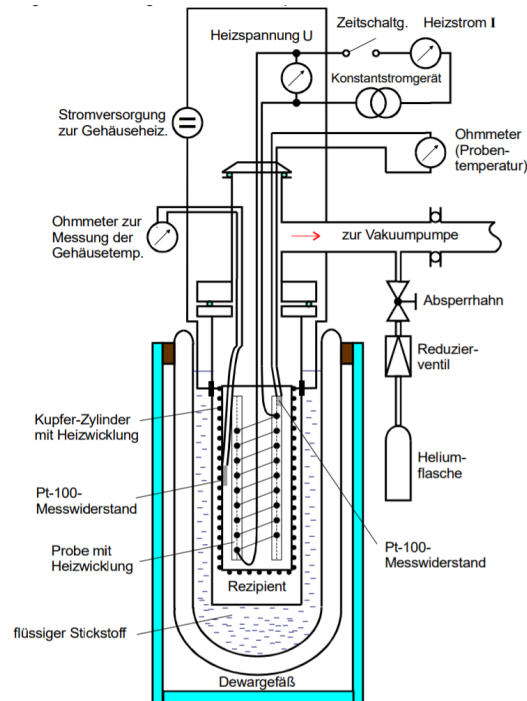


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Versuchsanordnung zur Bestimmung der Molwärme von Kupfer. [2]

Um die Probe zu kühlen, kann das Dewargefäß mit flüssigem Stickstoff befüllt werden. Zu Beginn der Messung wird die Probe auf 80 K heruntergekühlt. Um diesen Vorgang zu beschleunigen, wird vor dem Kühlvorgang ein Vakuum im Rezipienten erzeugt und dann der Rezipient mit Helium gefüllt, um Konvektion zu fördern. Bei einer Proben-temperatur von 80 K wird das Helium aus dem Rezipienten entfernt und wieder ein Vakuum im Rezipienten erzeugt, damit die erhaltene Wärmemenge unabhängig von Konvektion wird. Bei der eigentlichen Messung wird der Probe durch die Konstantstromquelle Energie zugeführt und in gleichen Zeitabständen δt die Temperatur T über das Ohmmeter gemessen. Der Zylinder wird so aufgewärmt, dass dieser stets die gleiche Temperatur besitzt wie die Probe. Diese dient dazu Energieverlust durch Wärmestrahlung der Probe zu minimieren. Bei Abweichung der Temperatur muss der Heizstrom des Zylinder nachgeregelt werden. Bei einer Temperatur von ungefähr 300 K ist die Messung abgeschlossen.

3 Auswertung

In der Tabelle 1 sind die Messwerte von R_{Probe} und R_{Mantel} zur Messzeit t aufgelistet. Aus dem Zusammenhang

$$T = 0,001\,34R_i^2 + 2,296R_i - 30,1 \quad (14)$$

kann aus den Messwerten der Widerstände die Temperatur der Probe und des Mantels errechnet werden, die ebenfalls in der Tabelle 1 enthalten sind. Die Abbildung 2 zeigt den Verlauf des Aufheizens sowohl von der Probe als auch des Mantels.

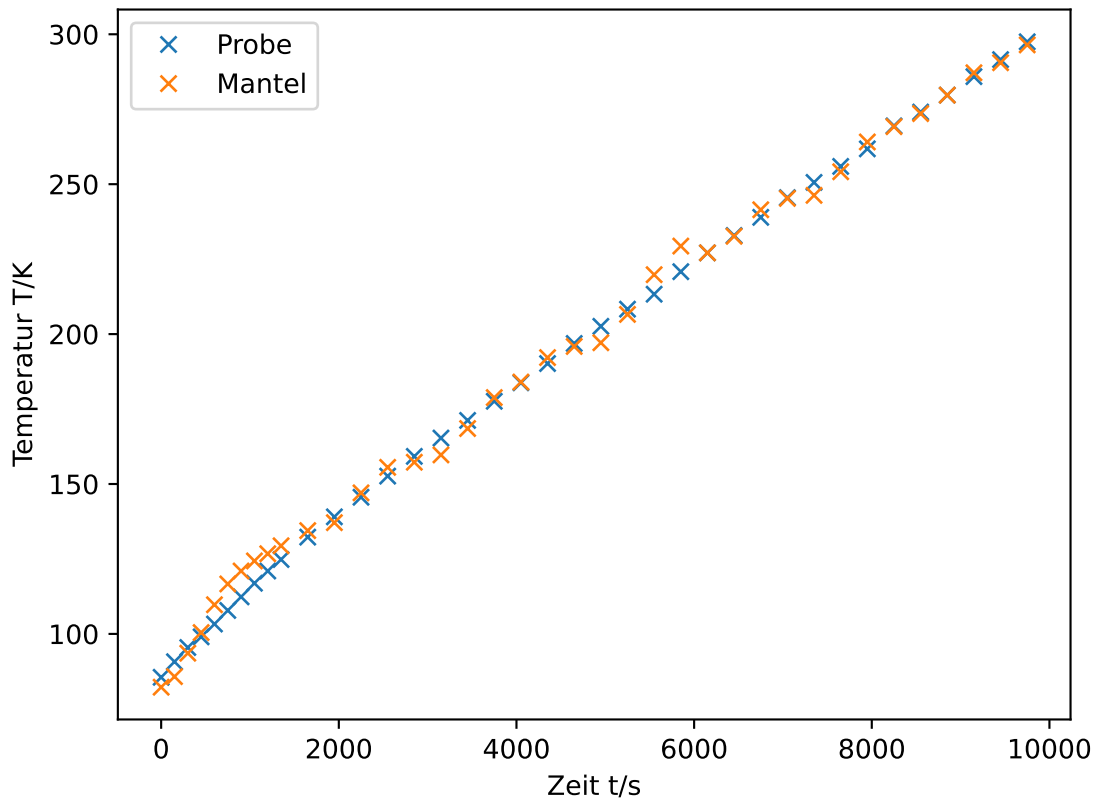


Abbildung 2: Temperatur von Mantel und Probe in Abhängigkeit der Zeit t .

Als Heizstrom und Heizspannung der Probe werden

$$I = (152 \pm 2) \text{ mA} \quad U = (16,0 \pm 0,5) \text{ V} \quad (15)$$

verwendet. Die Größe der Fehler auf Heizstrom und Heizspannung sind nicht der Messgeräten geschuldet, sondern resultieren daher, dass nicht zu jedem gemessenen Widerstandswert zusätzlich Heizstrom und Heizspannung aufgenommen wurden, jedoch später

Tabelle 1: Messwerte der Widerstände R_i und die daraus resultierenden Temperaturen T_i für Mantel und Probe und die Betragsmäßige Temperaturdifferenz zwischen Mantel und Probe.

t/s	R_{Probe}/Ω	T_{Probe}/K	R_{Mantel}/Ω	T_{Mantel}/K	$ T_{Mantel} - T_{Probe} /K$
0	23.8	85.5	22.4	82.2	-3.3
150	26.0	90.7	23.9	85.8	-5.0
300	28.0	95.5	27.2	93.6	-1.9
450	29.5	99.0	30.1	100.4	1.4
600	31.3	103.3	34.0	109.7	6.4
750	33.2	107.8	36.9	116.7	8.8
900	35.1	112.4	38.7	121.0	8.6
1050	37.0	116.9	40.1	124.3	7.4
1200	38.7	121.0	41.1	126.7	5.8
1350	40.3	124.8	42.2	129.4	4.6
1650	43.4	132.3	44.3	134.5	2.2
1950	46.2	139.0	45.4	137.1	-1.9
2250	48.9	145.6	49.5	147.0	1.5
2550	51.8	152.6	53.0	155.6	2.9
2850	54.5	159.2	53.7	157.3	-2.0
3150	57.0	165.3	54.7	159.7	-5.6
3450	59.4	171.2	58.3	168.5	-2.7
3750	62.0	177.6	62.5	178.8	1.2
4050	64.5	183.8	64.6	184.0	0.2
4350	67.1	190.2	67.9	192.2	2.0
4650	69.8	196.9	69.4	195.9	-1.0
4950	72.1	202.6	69.9	197.1	-5.5
5250	74.4	208.3	73.7	206.6	-1.7
5550	76.4	213.3	79.0	219.8	6.5
5850	79.4	220.8	82.8	229.4	8.5
6150	81.9	227.1	81.9	227.1	0.0
6450	84.2	232.9	84.1	232.6	-0.3
6750	86.6	238.9	87.6	241.5	2.5
7050	89.2	245.5	89.1	245.3	-0.3
7350	91.2	250.6	89.5	246.3	-4.3
7650	93.3	255.9	92.6	254.1	-1.8
7950	95.6	261.8	96.5	264.1	2.3
8250	98.6	269.4	98.5	269.2	-0.3
8550	100.4	274.1	100.2	273.5	-0.5
8850	102.6	279.7	102.6	279.7	0.0
9150	105.0	285.9	105.5	287.2	1.3
9450	107.2	291.5	106.8	290.5	-1.0
9750	109.5	297.5	109.1	296.5	-1.0

eine leichte Abhängigkeit der Größen festgestellt wurde. Über die Heizleistung $P = UI$ und die Zeitdifferenz δt kann die Energie, die der Probe zugeführt wird und diese um die Temperaturdifferenz δT aufwärmt, bestimmt werden. Für die Molwärme bei konstantem Druck C_p ergibt sich somit

$$C_p = \frac{dQ}{ndT} = \frac{UI \cdot \Delta t \rho V_m}{m \Delta T}. \quad (16)$$

Aus dem Zusammenhang

$$C_V = C_P - 9\alpha^2 \kappa V_0 T. \quad (17)$$

folgt die Molwärme bei konstantem Volumen. Der lineare Ausdehnungskoeffizient α besitzt dabei eine Temperatur Abhängigkeit die in der Tabelle 2 aufgelistet ist. Um für Temperaturzwischenwerte von α zu berechnen, wird an die Werte aus der Tabelle 2 eine Polynom 4. Grades

$$f(T) = aT^4 + bT^3 + cT^2 + dT + e \quad (18)$$

gefittet. Es ergeben sich die folgenden Fitparameter:

$$a = (-8,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-15} \quad b = (7,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-12} \quad c = (-2,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-9} \quad (19)$$

$$d = (4,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-7} \quad e = (-1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-5} \quad (20)$$

Tabelle 2: Linearer Ausdehnungskoeffizient von Kupfer in Abhängigkeit von der Temperatur.

T [K]	70	80	90	100	110	120	130	140
$\alpha [10^{-6} \text{ grd}^{-1}]$	7,00	8,50	9,75	10,70	11,50	12,10	12,65	13,15
T [K]	150	160	170	180	190	200	210	220
$\alpha [10^{-6} \text{ grd}^{-1}]$	13,60	13,90	14,25	14,50	14,75	14,95	15,20	15,40
T [K]	230	240	250	260	270	280	290	300
$\alpha [10^{-6} \text{ grd}^{-1}]$	15,60	15,75	15,90	16,10	16,25	16,35	16,50	16,65

Die Tabelle 3 enthält die berechneten Werte von C_p nach Gleichung (16) und C_V nach Gleichung (17). Wobei für die Temperatur bei der C_V Berechnung ein T_{mittel} verwendet wird, was sich aus den Temperaturen T_{probe} aus Tabelle 1 mit der Gleichung

$$T_{mittel} = \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2} \right) \pm \frac{T_2 - T_1}{2} \quad (21)$$

ergibt.

Zu Bestimmung der Debyetemperatur werden nur Messwerte von $C_V(T)$ bis zur einer Temperatur $T_{max} = 170 \text{ K}$ benutzt werden, dabei werden noch stark abweichende Messwerte vernachlässigt. Welche Messwerte verwendet werden, ist noch mal genau

Tabelle 3: Molwärem C_P bei konstantem Druck und alle benötigten Werte, um nach Gleichung (17) die Molwärme C_V zu bestimmen und der berechnete Wert von C_V selbst .

$\Delta t/s$	$\Delta T/K$	$C_p/J/(\text{mol K})$	T_{mittel}/K	$\alpha/1/K$	$C_V/J/(\text{mol K})$
150	5.2	13.02 \pm 0.44	88.1 \pm 2.6	9.44 \pm 0.29	12.95 \pm 0.44
150	4.7	14.29 \pm 0.48	93.1 \pm 2.4	9.97 \pm 0.24	14.20 \pm 0.48
150	3.6	19.01 \pm 0.64	97.2 \pm 1.8	10.38 \pm 0.17	18.92 \pm 0.64
150	4.3	15.81 \pm 0.54	101.2 \pm 2.1	10.74 \pm 0.19	15.71 \pm 0.54
150	4.5	14.95 \pm 0.51	105.6 \pm 2.3	11.11 \pm 0.18	14.83 \pm 0.51
150	4.5	14.92 \pm 0.51	110.1 \pm 2.3	11.47 \pm 0.17	14.79 \pm 0.51
150	4.5	14.89 \pm 0.50	114.6 \pm 2.3	11.79 \pm 0.16	14.74 \pm 0.50
150	4.1	16.60 \pm 0.56	118.9 \pm 2.0	12.08 \pm 0.13	16.45 \pm 0.56
150	3.8	17.61 \pm 0.60	122.9 \pm 1.9	12.33 \pm 0.11	17.44 \pm 0.60
300	7.5	18.13 \pm 0.61	128.6 \pm 3.7	12.65 \pm 0.20	17.95 \pm 0.61
300	6.8	20.01 \pm 0.68	135.7 \pm 3.4	13.00 \pm 0.16	19.80 \pm 0.68
300	6.5	20.69 \pm 0.70	142.3 \pm 3.3	13.30 \pm 0.14	20.46 \pm 0.70
300	7.0	19.20 \pm 0.65	149.1 \pm 3.5	13.57 \pm 0.13	18.95 \pm 0.65
300	6.6	20.56 \pm 0.70	155.9 \pm 3.3	13.81 \pm 0.11	20.29 \pm 0.70
300	6.1	22.14 \pm 0.75	162.3 \pm 3.1	14.02 \pm 0.09	21.86 \pm 0.75
300	5.9	23.00 \pm 0.78	168.3 \pm 2.9	14.19 \pm 0.08	22.70 \pm 0.78
300	6.4	21.18 \pm 0.72	174.4 \pm 3.2	14.36 \pm 0.08	20.85 \pm 0.72
300	6.2	21.96 \pm 0.74	180.7 \pm 3.1	14.51 \pm 0.08	21.62 \pm 0.74
300	6.4	21.06 \pm 0.71	187.0 \pm 3.2	14.66 \pm 0.07	20.70 \pm 0.71
300	6.7	20.22 \pm 0.69	193.5 \pm 3.3	14.81 \pm 0.07	19.84 \pm 0.69
300	5.7	23.67 \pm 0.80	199.7 \pm 2.9	14.94 \pm 0.06	23.28 \pm 0.80
300	5.7	23.62 \pm 0.80	205.4 \pm 2.9	15.06 \pm 0.06	23.20 \pm 0.80
300	5.0	27.10 \pm 0.92	210.8 \pm 2.5	15.17 \pm 0.05	26.66 \pm 0.92
300	7.5	18.02 \pm 0.61	217.1 \pm 3.8	15.30 \pm 0.07	17.56 \pm 0.61
300	6.3	21.56 \pm 0.73	224.0 \pm 3.1	15.44 \pm 0.06	21.08 \pm 0.73
300	5.8	23.37 \pm 0.79	230.0 \pm 2.9	15.55 \pm 0.06	22.87 \pm 0.79
300	6.1	22.34 \pm 0.76	235.9 \pm 3.0	15.67 \pm 0.06	21.82 \pm 0.76
300	6.6	20.57 \pm 0.70	242.2 \pm 3.3	15.79 \pm 0.06	20.03 \pm 0.70
300	5.1	26.68 \pm 0.90	248.1 \pm 2.5	15.90 \pm 0.05	26.11 \pm 0.90
300	5.3	25.35 \pm 0.86	253.3 \pm 2.7	15.99 \pm 0.05	24.77 \pm 0.86
300	5.9	23.09 \pm 0.78	258.9 \pm 2.9	16.09 \pm 0.05	22.49 \pm 0.78
300	7.7	17.66 \pm 0.60	265.6 \pm 3.8	16.20 \pm 0.06	17.03 \pm 0.60
300	4.6	29.35 \pm 1.00	271.8 \pm 2.3	16.30 \pm 0.03	28.71 \pm 1.00
300	5.6	23.97 \pm 0.81	276.9 \pm 2.8	16.37 \pm 0.04	23.30 \pm 0.81
300	6.2	21.92 \pm 0.74	282.8 \pm 3.1	16.45 \pm 0.04	21.23 \pm 0.74
300	5.7	23.85 \pm 0.81	288.7 \pm 2.8	16.51 \pm 0.03	23.15 \pm 0.81
300	5.9	22.76 \pm 0.77	294.5 \pm 3.0	16.56 \pm 0.02	22.04 \pm 0.77

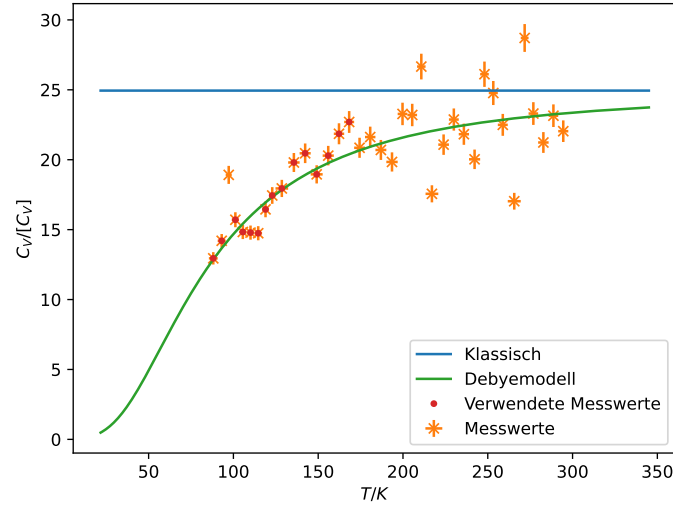


Abbildung 3: C_V in Abhängigkeit der Temperatur der Messwert und die verschiedenen Theoriekurven. So wie die Messwerte, die zur Bestimmung der Debyetemperatur verwendet werden und in der Tabelle 5 nochmals aufgelistet sind.

in Abbildung 3 zu sehen, sowie der klassische Wert von $C_V = 3R$ und die Werte der Debyefunktion für den Literaturwert von $\theta_D = 345$ K [1]

Um aus den verwendeten Werten von C_V aus Abbildung 3 die Debyetemperatur θ_D von Kupfer zu bestimmen, werden die benötigten Werte der Debyefunktion mit Hilfe von **Python 3** und der Funktion **numpy.interp** [3] berechnet. Als Grundlage der interpolation dienen die Werte der Debyefunktion aus der Tabelle 4.

Die Abbildung 4 enthält sowohl die Werte der Debyefunktion aus der Tabelle 4 und die bestimmten interpolierten Werte, die ebenfalls noch in der Tabelle 5 aufgelistet sind.

Die Debyetemperatur θ_D ergibt sich somit aus

$$\theta_D = \frac{C_V}{T}. \quad (22)$$

Die Tabelle 5 enthält alle Temperatur bis zur Temperatur T_{max} und die nach Gleichung (22) bestimmte Debyetemperatur θ_D .

Als Mittelwert ergibt sich aus den Werten aus der Tabelle 5 für die Debyetemperatur von Kupfer

$$\theta_{D_{Kupfer}} = (330 \pm 41) \text{ K}. \quad (23)$$

Tabelle 4: Werte für die Debye-funktion.

θ_D/T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	24,9430	24,9310	24,8930	24,8310	24,7450	24,6340	24,5000	24,3430	24,1630	23,9610
1	23,7390	23,4970	23,2360	22,9560	22,6600	22,3480	22,0210	21,6800	21,3270	20,9630
2	20,5880	20,2050	19,8140	19,4160	19,0120	18,6040	18,1920	17,7780	17,3630	16,9470
3	16,5310	16,1170	15,7040	15,2940	14,8870	14,4840	14,0860	13,6930	13,3050	12,9230
4	12,5480	12,1790	11,8170	11,4620	11,1150	10,7750	10,4440	10,1190	9,8030	9,4950
5	9,1950	8,9030	8,6190	8,3420	8,0740	7,8140	7,5610	7,3160	7,0780	6,8480
6	6,6250	6,4090	6,2000	5,9980	5,8030	5,6140	5,4310	5,2550	5,0840	4,9195
7	4,7606	4,6071	4,4590	4,3160	4,1781	4,0450	3,9166	3,7927	3,6732	3,5580
8	3,4468	3,3396	3,2362	3,1365	3,0403	2,9476	2,8581	2,7718	2,6886	2,6083
9	2,5309	2,4562	2,3841	2,3146	2,2475	2,1828	2,1203	2,0599	2,0017	1,9455
10	1,8912	1,8388	1,7882	1,7393	1,6920	1,6464	1,6022	1,5596	1,5184	1,4785
11	1,4400	1,4027	1,3667	1,3318	1,2980	1,2654	1,2337	1,2031	1,1735	1,1448
12	1,1170	1,0900	1,0639	1,0386	1,0141	0,9903	0,9672	0,9449	0,9232	0,9021
13	0,8817	0,8618	0,8426	0,8239	0,8058	0,7881	0,7710	0,7544	0,7382	0,7225
14	0,7072	0,6923	0,6779	0,6638	0,6502	0,6368	0,6239	0,6113	0,5990	0,5871
15	0,5755	0,5641	0,5531	0,5424	0,5319	0,5210	0,5117	0,5020	0,4926	0,4834

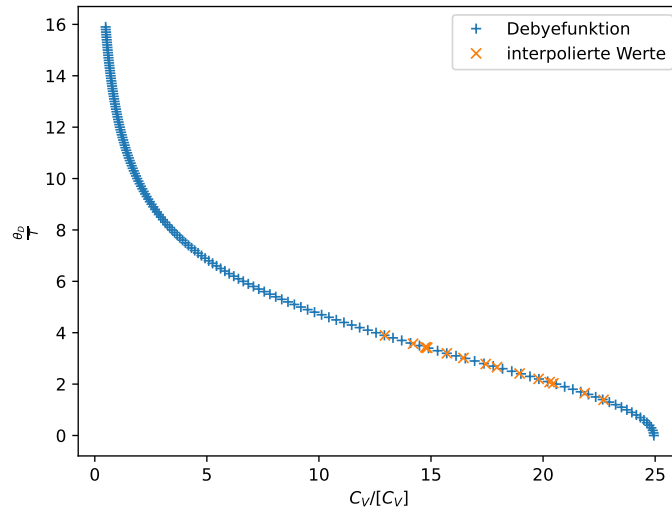


Abbildung 4: Werte der Debye-funktion und die interpolierten Werte in der Form θ_D/T in Abhängigkeit von C_V .

Tabelle 5: Berechnete Werte von C_V und entsprechendes Verhältnis von θ_D/T und die gemessene Temperatur T und die über (22) berechnete Debyetemperatur θ_D .

$C_V/\text{J}/(\text{mol K})$	θ_D/T	T/ K	θ_D/K
12.95 ± 0.44	3.89	88.1 ± 2.6	343.1 ± 10.1
14.20 ± 0.48	3.57	93.1 ± 2.4	332.4 ± 8.5
15.71 ± 0.54	3.20	101.2 ± 2.1	323.6 ± 6.8
14.83 ± 0.51	3.41	105.6 ± 2.3	360.3 ± 7.7
14.79 ± 0.51	3.42	110.1 ± 2.3	377.0 ± 7.8
14.74 ± 0.50	3.44	114.6 ± 2.3	393.8 ± 7.8
16.45 ± 0.56	3.02	118.9 ± 2.0	359.2 ± 6.2
17.44 ± 0.60	2.78	122.9 ± 1.9	341.8 ± 5.3
19.80 ± 0.68	2.20	135.7 ± 3.4	298.9 ± 7.4
20.46 ± 0.70	2.03	142.3 ± 3.3	289.4 ± 6.6
18.95 ± 0.65	2.41	149.1 ± 3.5	360.0 ± 8.5
20.29 ± 0.70	2.08	155.9 ± 3.3	323.9 ± 6.8
21.86 ± 0.75	1.65	162.3 ± 3.1	267.5 ± 5.0
22.70 ± 0.78	1.39	168.3 ± 2.9	233.4 ± 4.1

3.1 Theoriewert der Debyetemperatur

Aus der Gleichung

$$\int_0^{\omega_D} z(\omega) d\omega = 3N_L \quad (24)$$

ergibt sich die Debyefrequenz ω_D zu

$$\omega_D^3 = \frac{18\pi^2 N_L}{L^3} \frac{1}{\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3}\right)} \quad (25)$$

mit dem Probevolumen L^3 und der Teilchenzahl in der Probe N_L . Das Probevolumen ergibt sich über die Masse der Probe $m = 0,342 \text{ kg}$ und der Dichte von Kupfer $\rho = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ [4] zu $L^3 = m\rho$. Über die Molaremasse von Kupfer $M = 63,546 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ [4] und die Avogadro-Konstante N_A berechnet sich die Teilchenzahl zu $N_L = \frac{mN_A}{M}$. Nach Gleichung (25) folgt somit für die theoretische Debyefrequenz

$$\omega_D = 4,35 \cdot 10^{13} \text{ Hz}. \quad (26)$$

Über den Zusammenhang

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} \quad (27)$$

folgt für die theoretische Debyetemperatur

$$\theta_D = 332,5 \text{ K}. \quad (28)$$

4 Diskussion

Aus der Messung ergibt sich ein Wert für die Debyetemperatur von Kupfer

$$\theta_{D_{Kupfer}} = (330 \pm 41) \text{ K.} \quad (29)$$

Die hohe Ungenauigkeit resultiert zum Einen daraus, dass für die Temperatur zur Berechnung von C_V ein T_{mittel} verwendet wird und dabei ein Fehler resultiert, der proportional zu den Temperaturschritten ΔT ist. Zum Anderen wurde nur zu Beginn der Messung der Heizstrom I und die Heizspannung U gemessen und die auftretenden Abweichungen während der Messung als Fehler betrachtet. Um die Ungenauigkeit auf die gemessene Debyetemperatur zu verringern muss somit die Temperatur in geringeren Abständen gemessen werden und I und U zu jedem Messwert erneut gemessen werden. Wobei jedoch zu kleine Messabstände die Messung durch thermische Fluktuationen ebenfalls verfälschen können. Ein weiteres Problem ist die thermische Isolation der Probe, um Wärmeverluste zu minimieren. Insbesondere das Kompensieren der Wärmestrahlung über den Zylinder, stellt sich als Problematisch heraus, da Temperatur von Zylinder und Probe, um Kompensation zu gewährleisten, identisch sein müssen. In der Tabelle 1 wird die Abweichung zwischen den Temperaturen aufgetragen, die bis zu 8,8 K beträgt. Um eine genauere Messung zu erhalten, sollte diese Abweichung verringert werden.

Über die Gleichung (25) und (27) ergibt sich ein Theoriewert der Debyetemperatur für Kupfer von

$$\theta_{D_{theo}} = 332,5 \text{ K.} \quad (30)$$

Der Literaturwert für die Debyetemperatur von Kupfer beträgt

$$\theta_{D_{lit}} = 345 \text{ K}[1]. \quad (31)$$

Die relative Abweichung des gemessenen Wertes beträgt zum Theoriewert somit

$$a_{theo} = (1 \pm 12) \% \quad (32)$$

und zum Literaturwert

$$a_{lit} = (4 \pm 12) \%. \quad (33)$$

Der Theoriewert besitzt eine relative Abweichung von

$$a_{theo,lit} = 3,6 \% \quad (34)$$

zum Literaturwert. Aufgrund der Abweichung der Messwerte zum Theoriewert scheinen die Messwerte die Theorie zu bestätigen. Allerdings ist die hohe Ungenauigkeit zu beachten. Jedoch zeigt der Literaturwert eine geringe Abweichung zu dem Theoriewert. Dies deutet darauf hin, dass die Theorie möglicherweise noch nicht alle Effekte berücksichtigt. Weiter weicht der gemessene Wert ebenfalls leicht von Literaturwert ab, mögliche Ursachen dafür sind einmal die zuvor beschriebene Problematik der Kompensation von Wärmestrahlung und weitere systematische Fehler. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es bei genauerer Messung durchaus möglich sein könnte, über den Versuchsaufbau die Molwärme einer Probe zu bestimmen.

Literatur

- [1] *Debye-Temperatur*. 9. Nov. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Debye-Temperatur>.
- [2] TU Dortmund. *Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern*. 9. Nov. 2018.
- [3] *numpy.interp*. 22. Nov. 2018. URL: <https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.15.0/reference/generated/numpy.interp.html>.
- [4] *WolframAlpha*. 9. Nov. 2018. URL: <https://www.wolframalpha.com/>.