

V504

# Thermische Elektronenemission

Jannis Speer

jannis.speer@tu-dortmund.de

Kevin Talits

kevin.talits@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.04.18

Abgabe: 17.04.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
1.1	Austrittsarbeit und die Energieverteilung der Leitungselektronen . . . . .	3
1.2	Sättigungsstromdichte . . . . .	4
1.3	Die Hohvakuum-Diode . . . . .	5
1.4	Die Langmuir-Schottkysche Raumladungsgleichung . . . . .	5
1.5	Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode . . . . .	6
1.6	Kennlinie der Hochvakuumdiode . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Aufbau</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1	Kennlinien und Sättigungsstrom . . . . .	9
4.2	Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz . . . . .	11
4.3	Anlaufstrom und Kathodentemperatur . . . . .	11
4.4	Leistungsbilanz und Kathodentemperatur . . . . .	13
4.5	Austrittsarbeit . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Theorie

## 1.1 Austrittsarbeit und die Energieverteilung der Leitungselektronen

Metalle sind fast immer kristalline Festkörper, wo die auf den Kristallgitterplätzen sitzenden Atome ausnahmslos ionisiert sind. Somit ist ein wesentliches Kennzeichen von Metallen die gute elektrische Leitfähigkeit. Von den freigesetzten Elektronen wird dieses räumlich periodische Gitter umhüllt. Diese, nicht zu einem bestimmten Atom zugehörigen, Elektronen heißen Leitungselektronen. Das Gitterpotential muss einer periodischen Funktion des Ortes entsprechen, aber ist in grober Näherung als konstant anzunehmen. Somit hat das Metallinnere ein einheitlich positives Potential, welches um einen Betrag vom Außenraum verschieden ist. Es wirken keine Kräfte auf die Elektronen im Inneren. Sie können sich frei bewegen und somit eine hohe Leitfähigkeit erzeugen. Wenn ein Elektron jedoch den Verbund verlassen will, dann muss es gegen das Potential anlaufen können (Abb 1). Es muss die sogenannte Austrittsarbeit  $e_0\xi$  leisten können.

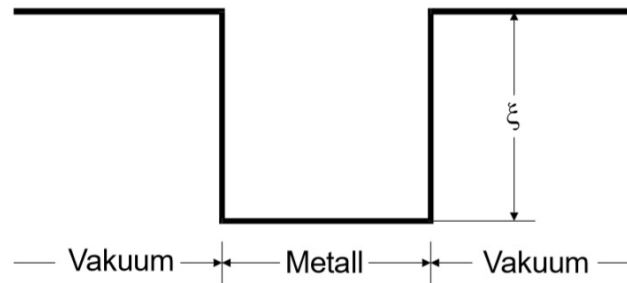


Abbildung 1: Potentialtopf-Modell eines Metalles. [1]

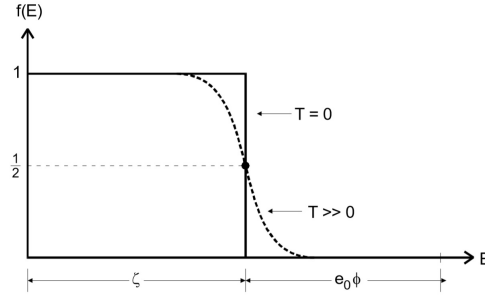
Die Elektronen können nur diskrete, wenn auch sehr dicht beieinander liegende Energiewerte annehmen. Als Teilchen mit halbzahligem Spin unterliegen die Elektronen eines Kristallgitters dem Pauli-Verbot, das besagt, dass jeder mögliche Zustand mit der Energie  $E$  von höchstens 2 Elektronen, die entgegengesetzten Spin haben müssen, eingenommen werden kann. Das hat zur Konsequenz, dass selbst am absoluten Nullpunkt die Elektronen noch eine endliche Energie besitzen müssen, ganz im Gegensatz zur klassischen Statistik, die jedem Elektron im Mittel die Energie  $\frac{3}{2}kT$  zuordnet. Die Maximalenergie der Elektronen bei  $T = 0$  ist abhängig von der Zahl  $n$  der Elektronen pro Volumeneinheit im Metall. Man bezeichnet sie als Fermische Grenzenergie. Bei Zimmertemperatur ist für alle Metalle  $\xi \gg kT$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im thermischen Gleichgewicht ein möglicher Zustand mit der Energie  $E$  besetzt ist, wird durch die Fermi-Diracsche Verteilungs-Funktion angegeben. Sie hat die Gestalt

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\xi}{kT}\right) + 1} \quad (1)$$

Ein Elektron muss mindestens die Energie  $\xi + e_0\Phi$  besitzen, um die Metalloberfläche zu verlassen, wie man im Verlauf der Gleichung (1) sieht in Abb. 2. Der Energiewert ist selbst

beim Schmelzpunkt von Wolfram noch groß gegenüber  $kT$ , sodass die Exponentialfunktion aus Gleichung (1) die Zahl 1 weit übertrifft. Für Elektronen mit höherer Energie als solche gilt in Näherung

$$f(E) \approx \exp\left(\frac{\xi - E}{kT}\right) \quad (2)$$



**Abbildung 2:** Verlauf der Fermi-Diracschen Verteilungsfunktion am absoluten Nullpunkt (durchgezogene Linie) und bei  $T \gg 0$  (gestrichelt). [1]

## 1.2 Sättigungsstromdichte

Aus Gleichung (2) soll die Sättigungsstromdichte  $j_s(T)$  in Abhängigkeit von der Temperatur errechnet werden. Dazu wird ein Koordinatensystem mit Z-Achse senkrecht zur Oberfläche des Metalls eingeführt. Durch die Zahl der Elektronen aus dem Volumenelement des Impulsraumes und einiger Beziehungen erhält man zuerst die Gleichung

$$d\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_z} n(E) dp_x dp_y dp_z = n(E) dE dp_x dp_y dp_z \quad (3)$$

Mit  $n(E)$  als Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit und  $d$  als die Zahl der Elektronen aus dem Volumenelement des Impulsraumes. Da jeder Quantenzustand im (sechsdimensionalen) Phasenraum das Volumen  $h^3$  einnimmt, ergibt sich für  $n(E)$  der Ausdruck

$$n(E) = \frac{2}{h^3} f(E) \quad (4)$$

Somit können mit Gleichung (3) alle Elektronen die Metalloberfläche verlassen, deren deren Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  so groß ist, dass

$$\frac{p_z^2}{2m_0} > \xi + e_0\Phi \quad (5)$$

gilt. Man erhält daher die gesuchte Stromdichte  $j_s(T)$  aus Gleichung (3), indem man alle Elektronen, deren Energiekomponente in Z-Richtung die Ungleichung (5) erfüllt, abzählt

und den erhaltenen Zahlenwert mit der Elementarladung  $e_0$  multipliziert. Somit ist

$$j_s(T) = 4\pi \frac{e_0 m_0 k^2}{h^3} T^2 \exp\left(\frac{-e_0 \Phi}{kT}\right) \quad (6)$$

Die Gleichung (6) wird als Richardson-Gleichung bezeichnet.

### 1.3 Die Hohvakuum-Diode

Die Messung des Sättigungsstromes einer emittierenden Metalloberfläche ist nur im Hochvakuum möglich, da sonst die freien Elektronen in Wechselwirkung mit den Gasmolekülen treten würden. Sie besteht aus einem evakuierten Glaskörper, mit einer Glühkatode. Durch einen Strom kann dieser auf eine Temperatur von 1000 bis 3000 K erhitzt werden. Die aus der Drahtoberfläche austretenden Elektronen werden durch ein elektrisches Feld, das man zwischen der Kathode und einer ihr gegenüberstehenden zweiten Elektrode, der Anode, durch Anlegen einer äußeren Spannung erzeugt, abgesaugt.

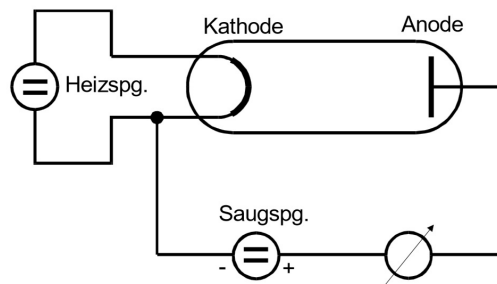


Abbildung 3: Beschaltung einer Hochvakuum-Diode. [1]

### 1.4 Die Langmuir-Schottkysche Raumladungsgleichung

Der Anodenstroms hängt noch von der Anodenspannung ab, denn bei zu niedriger Spannung erreichen nicht alle emittierten Elektronen die Anode. Erst bei hinreichend hoher Spannung wird ein von der Spannung unabhängiger Strom erreicht. Durch die beschleunigte Bewegung der Elektronen auf die Anode zu gilt auch bei kleiner Spannung nicht das Ohmsche Gesetz. Deswegen ist die Raumladungsdichte der Elektronen eine Funktion des Ortes. Diese wird zur Anode hin immer kleiner, aufgrund der Kontinuitätsbedingung, wobei  $j$  an jeder Stelle konstant ist.

$$j = -\rho v \quad (7)$$

Die Raumladungsdichte beeinflusst den Verlauf der Feldstärke zwischen Anode und Kathode, sie schirmt das Feld von der Kathode ab. Der gemessene Diodenstrom ist somit

kleiner als der nach Gleichung (6) zu erwartende Sättigungsstrom. Für den quantitativen Zusammenhang wird von der Potentialgleichung ausgegangen:

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (8)$$

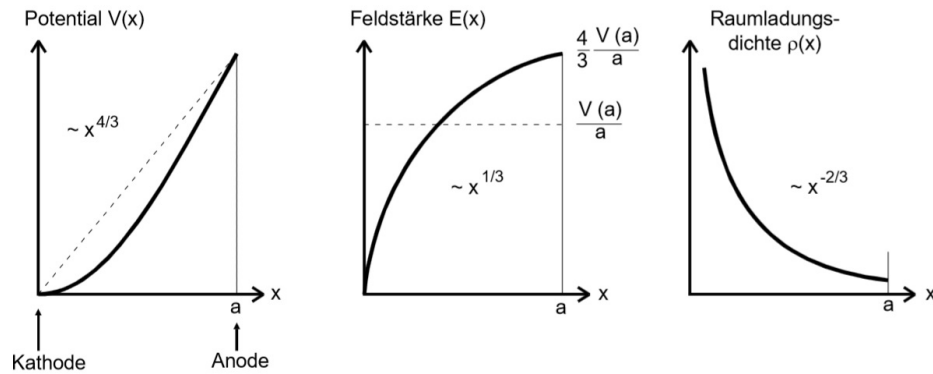
Zur Vereinfachung wird angenommen, dass Anode und Kathode unendlich ausgedehnt sind im Abstand  $a$  zueinander. Durch Gleichung (7), (8) und dem Energiesatz  $e_0 V = m_0/2v^2$  ergibt sich:

$$\sqrt[4]{V^3(x)} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{4j}{\epsilon_0 \sqrt{2e_0/m_0}}} x \quad (9)$$

Daraus folgt, dass das Potential nicht linear, sondern nach einem  $\sqrt[3]{x^4}$ -Gesetz ansteigt. Deswegen verläuft die Feldstärke proportional zu  $x^{\frac{1}{3}}$  und proportional zu  $x^{-\frac{2}{3}}$ , zu sehen in Abb. 4. Gestrichelt eingezeichnet ist der raumladungsfreie Fall. Aus Gleichung 9 ergibt sich:

$$j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{2e_0/m_0} \frac{V^{3/2}}{a^2} \quad (10)$$

Anstelle des ohmschen Gesetzes ( $j \propto V$ ) wächst hier  $j$  mit  $V^{3/2}$ . Die Gleichung (10) wird als Langmuir-Schottkysche Raumladungsgesetz bezeichnet.



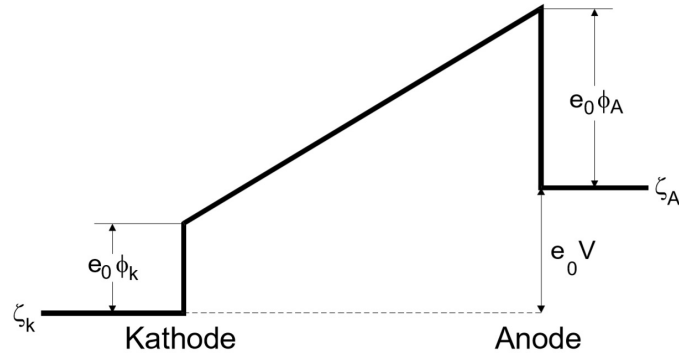
**Abbildung 4:** Ortsabhängigkeit des Potentials  $V$ , der Feldstärke  $E$  und der Raumladungsdichte im Raumladungsgebiet einer Hochvakuumdiodenkennlinie. [1]

## 1.5 Anlaufstromgebiet einer Hochvakuumdiode

Auch bei  $V=0$  wird noch ein geringer Anodenstrom gemessen. Dieser entsteht durch die Eigengeschwindigkeit der Elektronen, die sie beim Verlassen der Kathode besitzen. Nach Gleichung (1) gibt es bei  $T > 0$  endlich viele Elektronen, deren Energie größer als die Austrittsarbeit ist. Den Energieüberschuss

$$\Delta E = E - (\xi + e_0 \Phi)$$

findet man als kinetische Energie der emittierten Elektronen. Diesen Strom wird als Anlaufstrom bezeichnet. Es ist zu berücksichtigen, dass auch das Anodenmaterial eine Austrittsarbeit  $\Phi_A$  besitzt. Durch die elektrisch leitende Verbindung zwischen Anode und Kathode außerhalb der Diode werden die Fermi-Oberflächen (d.h. die Stelle  $E =$  auf der Energieachse) der Metalle auf die gleiche Höhe gebracht. Mit einem äußeren Potential  $V$  verschieben sich  $e_0 V$  gegeneinander.



**Abbildung 5:** Potentialverhältnisse in einer Hochvakuumdiode im Bereich ihres Anlaufstromgebietes [1]

Da die Zahl der Leitungselektronen, deren Energie zwischen  $E$  und  $E+dE$  liegt, nach Gleichung 2 angenähert exponentiell von  $E$  abhängt, besteht auch eine entsprechende Abhängigkeit der Anlaufstromstärke vom äußeren Potential  $V$ :

$$j(V) = j_0 \exp \left( \frac{e_0 \Phi_A + e_0 V}{y} \right)$$

## 1.6 Kennlinie der Hochvakuumdiode

Nach den vorherigen Ausführungen lässt sich die Kennlinie in drei Abschnitte unterteilen. Anlauf-, Raumladungs- und Sättigungsstromgebiet. Das erstere ist durch einen exponentiellen Zusammenhang zwischen  $I$  und  $V$  gekennzeichnet. Daran schließt sich das Raumladungsgebiet an, in dem eine  $\sqrt{V^3}$ -Abhängigkeit zu beobachten ist. Dieses Gebiet wird durch das Sättigungsstromgebiet abgelöst, weil die Raumladungsgleichung nicht für beliebig hohe Anodenspannungen gilt.

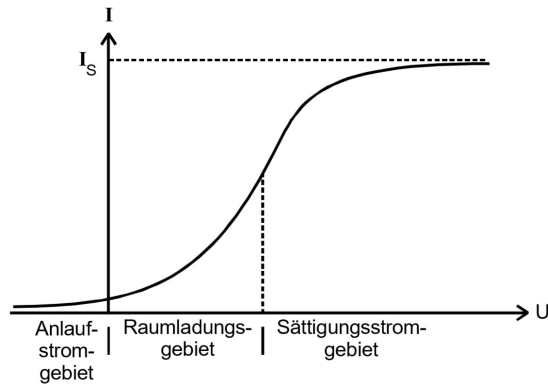


Abbildung 6: Kennlinie einer Hochvakuumdiode [1]

## 2 Aufbau

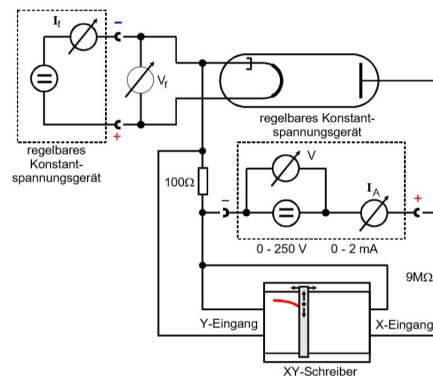


Abbildung 7: Schaltung zur Aufnahme von Diodenkennlinien [1]

Das Schaltbild für diesen Versuch ist in Abbildung 7 zu sehen. Der in dieser Abbildung dargestellte XY-Schreiber wird nicht verwendet. Von einem Konstantspannungsgerätes wird ein Heizstrom  $I_f$  von ca. 2-3 A erzeugt. Über ein seperates Voltmeter wird die Heizspannung  $V_f$  abgelesen. Die Anodenspannung  $V_A$  und die Anodenstromstärke  $I_A$  werden einem weiteren regelbaren Konstantspannungsgerät entnommen, in das entsprechende Messgeräte eingebaut sind.

## 3 Durchführung

Durch Variation der Heizleistung wird eine Kennlinienschar einer Hochvakuumdiode mit mindestens 5 Kennlinien erstellt. Darauf wird der jeweilige Sättigungsstrom  $I_s$  abgelesen. Danach wird für die maximal mögliche Heizleistung versucht den ungefähren Gültigkeitsbereich des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes zu finden. Dort wird aus den gemessenen Wertepaaren der Exponent der Strom-Spannungs-Beziehung



berechnet. Als nächstes wird das Anlaufstromgebiet der Diode für die maximal mögliche Heizleistung untersucht und daraus die Kathodentemperatur bestimmt. Aus einer Leistungsbilanz des Heizstromkreises wird dann die Kathodentemperatur, bei den am Anfang verwendeten Heizleistungen, geschätzt. Zuletzt wird aus den verschiedenen T- und zugehörigen  $I_s$ -Werten die Austrittsarbeit errechnet.

## 4 Auswertung

### 4.1 Kennlinien und Sättigungsstrom

Für 5 verschiedene Heizleistungen werden Anodenspannung und -strom gemessen, um entsprechende Kennlinien zu erstellen. Die erfassten Daten sind in folgender Tabelle 1 dargestellt und können für eine Berechnung des Sättigungsstroms genutzt werden. Der

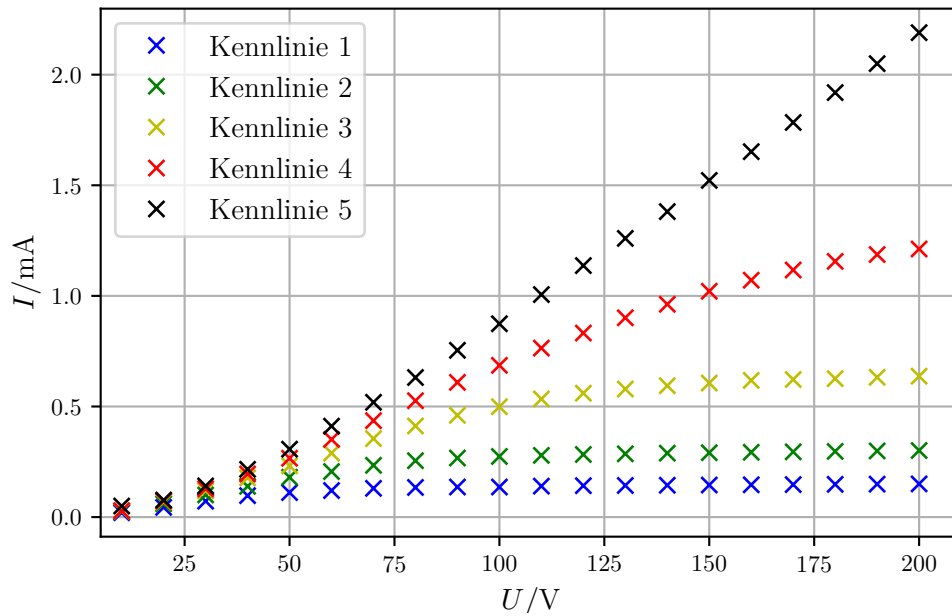
**Tabelle 1:** Für 5 verschiedene Heizleistungen gemessene Anodenspannungen und -ströme.

$U_A$ in V	$I_1$ in mA	$I_2$ in mA	$I_3$ in mA	$I_4$ in mA	$I_5$ in mA
10	0.020	0.026	0.028	0.029	0.050
20	0.044	0.060	0.069	0.073	0.077
30	0.072	0.100	0.119	0.128	0.141
40	0.097	0.139	0.177	0.195	0.216
50	0.111	0.180	0.232	0.266	0.307
60	0.120	0.206	0.289	0.351	0.411
70	0.130	0.234	0.355	0.436	0.519
80	0.134	0.255	0.412	0.526	0.631
90	0.136	0.267	0.460	0.609	0.754
100	0.136	0.274	0.499	0.686	0.874
110	0.140	0.279	0.534	0.764	1.006
120	0.142	0.283	0.560	0.832	1.137
130	0.143	0.286	0.579	0.901	1.260
140	0.144	0.289	0.594	0.962	1.381
150	0.145	0.291	0.606	1.021	1.522
160	0.146	0.293	0.618	1.071	1.652
170	0.147	0.295	0.622	1.117	1.784
180	0.148	0.297	0.626	1.156	1.919
190	0.149	0.299	0.632	1.187	2.050
200	0.150	0.301	0.637	1.212	2.190

Sättigungsstrom wird an den in Abbildung 8 dargestellten Kennlinien abgelesen. Für die Kennlinie mit der maximalen Heizleistung kann kein Sättigungsstrom bestimmt werden, da die Kennlinie noch nicht im Sättigungsstromgebiet verläuft. Dies ist in Abbildung 8 eindeutig an der fehlenden Rechtskrümmung der Kennlinie 5 zu erkennen. Die abgelesenen Sättigungsströme sind in folgender Tabelle 2 aufgeführt.

**Tabelle 2:** Für die verschiedenen Heizspannungen abgelesenen Sättigungsströme.

Kennlinie	Heizspannung $U_H$	$I_S$
1	4,3 V	0,148 mA
2	4,6 V	0,308 mA
3	5 V	0,750 mA
4	5,3 V	1,240 mA
5	6,2 V	kein Wert



**Abbildung 8:** Kennlinien einer Hochvakuumdiode für 5 verschiedene Heizleistungen.

## 4.2 Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz

Kennlinie 5 (siehe Abb. 8) verläuft, wie an der Linkskrümmung zu erkennen ist, im Raumladungsgebiet. Mit einer doppelt logarithmischen Ausgleichsrechnung kann diese Kennlinie also betrachtet werden, um den Exponenten des Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetzes zu überprüfen.

$$y = a \cdot x^n$$

Wird der natürliche Logarithmus angewendet, folgt:

$$\lg(y) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$$

$$Y = n \cdot X + C$$

$$\text{mit } \lg(y) = Y \quad \lg(x) = X \quad \lg(a) = C$$

Die Ausgleichsrechnung (siehe Abb. 9) liefert für den Exponenten  $n = 1,369 \pm 0,029$ .

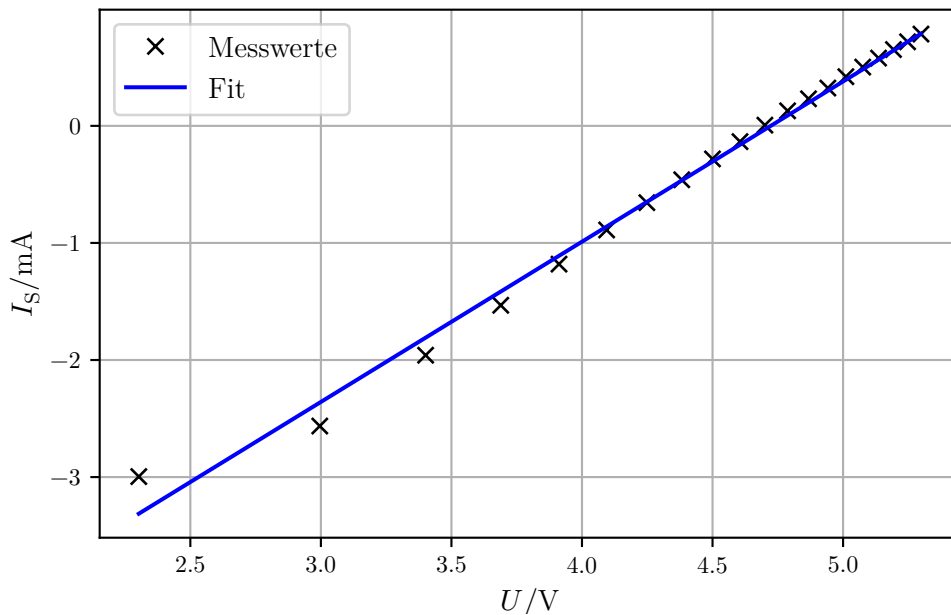


Abbildung 9: doppelt logarithmische Darstellung der Kennlinie 5.

## 4.3 Anlaufstrom und Kathodentemperatur

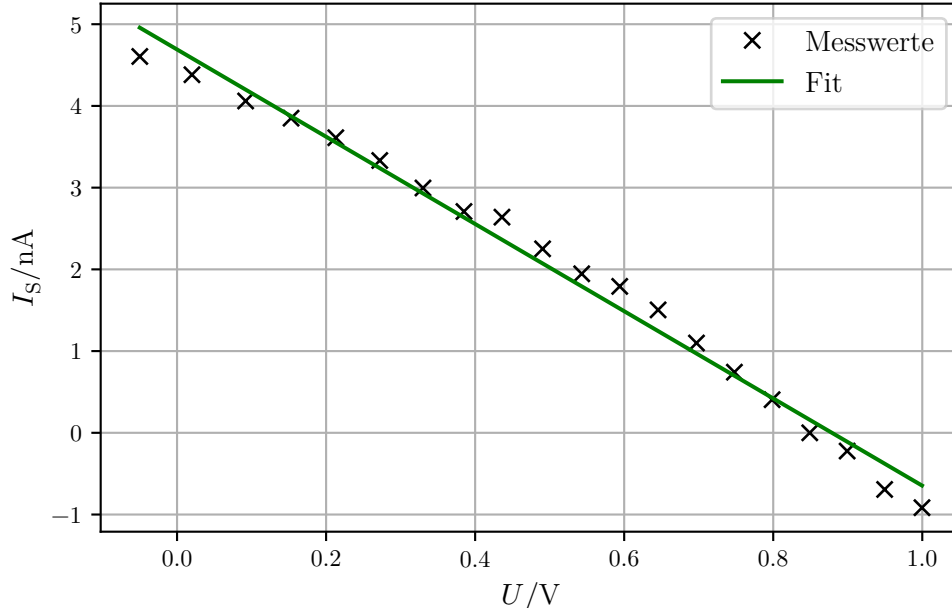
Die gemessenen Anlaufströme in Abhängigkeit der Gegenspannung sind in folgender Tabelle 3 abgebildet. Die gemessenen Spannungen entsprechen jedoch nicht der Spannung zwischen Anode und Kathode, da der Innenwiderstand des Nanoamperemeters ( $1 \text{ M}\Omega$ ) einen Spannungsabfall hervorruft. Eine wie folgend aussehende Korrektur ist notwendig:

$$U_{\text{korr}} = U - R_{\text{Innen}} I_A$$

**Tabelle 3:** Anlaufströme und Gegenspannungen.

Gegenspannung $U$ in V	Anlaufströme $I_A$ in nA
0.05	100
0.1	80
0.15	58
0.2	47
0.25	37
0.3	28
0.35	20
0.4	15
0.45	14
0.5	9.5
0.55	7
0.6	6
0.65	4.5
0.7	3
0.75	2.1
0.8	1.5
0.85	1
0.9	0.8
0.95	0.5
1	0.4

Anschließend kann über eine Ausgleichsrechnung (siehe Abb. 10) die Kathodentemperatur bestimmt werden. Dafür wird eine halb logarithmische Ausgleichsrechnung durchgeführt, über die sich der Exponent berechnen lässt. Für die Kathodentemperatur berechnet sich so  $T = (2470 \pm 40) \text{ K}$ .



**Abbildung 10:** gemessener Anlaufstrom in Abhängigkeit der Gegenspannung.

#### 4.4 Leistungsbilanz und Kathodentemperatur

Aus den eingestellten Heizspannungen und -strömen lässt sich mit (11) die Kathodentemperatur berechnen.

$$T = \sqrt[4]{\frac{I_H U_H - N_{WL}}{f \sigma \eta}} \quad (11)$$

Alle Konstanten werden der Anleitung entnommen. Die Temperaturen sind in der anschließenden Tabelle 4 dargestellt.

**Tabelle 4:** Kathodentemperatur.

Kennlinie	Heizspannung $U_H$	Heizstrom $I_H$	Temperatur $T$
1	4,3 V	2 A	1964 K
2	4,6 V	2,1 A	2029 K
3	5 V	2,2 A	2103 K
4	5,3 V	2,3 A	2163 K
5	6,2 V	2,5 A	2308 K

## 4.5 Austrittsarbeit

Die Austrittsarbeit kann nun über die Richardson-Gleichung bestimmt werden. Dafür werden die Temperaturen aus Kapitel 4.4 und die Sättigungsströme aus Kapitel 4.1 verwendet. Folgende Werte für die Austrittsarbeit werden berechnet.

**Tabelle 5:** Austrittsarbeit.

Kennlinie	Temperatur $T$	Sättigungsstrom $I_S$	Austrittsarbeit $e_0\phi$
1	1964 K	0,148 mA	4,6769 eV
2	2029 K	0,308 mA	4,7152 eV
3	2103 K	0,750 mA	4,740 eV
4	2163 K	1,240 mA	4,642 eV

## 5 Diskussion

Der berechnete Exponent des Langmuir-Schottkysches-Gesetzes (siehe 4.2) und der theoretische Wert von 1.5 weichen um 9,5 % ab. Die Kathodentemperatur bei maximaler Heizleistung variiert je nach Methode. Der Literaturwert der Austrittsarbeit des Wolframs (4,5 eV) weicht nur minimal von den berechneten Werten ab. Zwischen Mittelwert und Literaturwert liegen nur 4,3 %. Ungenauigkeiten können auf die nicht berücksichtigten Innenwiderstände der Leitungen und Netzgeräte oder die beschränkte Genauigkeit der Messgeräte zurückgeführt werden. Aber auch Vereinfachungen in der Theorie wie z.B. die Annahme, dass Anode und Kathode unendlich ausgedehnte ebene Oberflächen darstellen, spielen eine Rolle. Bei der Messung des Anlaufstroms ist außerdem noch die hohe Empfindlichkeit des Nanoamperemeters anzumerken. Selbst bei kleinsten Änderungen des Versuchsaufbaus änderte sich der gemessene Strom. Dieser Umstand könnte die abweichenden Kathodentemperaturen erklären.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V504 Thermische Elektronenemission*. 2014.