

V28

## **Elektronenspin-Resonanz**

Ann-Sophie Schubert  
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke  
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 07. Juni 2017

Abgabe: 1. Januar 1970

TU Dortmund – Fakultät Physik



# 1 Ziel

Das Ziel dieses Experiments ist es, das magnetische Moment  $\mu_s$  resultierend aus dem Eigendrehimpuls, dem Spin, eines freien Elektrons mit Hilfe der Hochfrequenz-Spektroskopie zu bestimmen. Des weiteren soll die totale Flussdichte des Erdmagnetfelds ermittelt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Quantenmechanischer Zusammenhang von Bahndrehimpuls und magnetischem Moment

In der Einelektronnherung und in Polarkoordinaten lässt sich für ein Atom folgende Wellenfunktion aufstellen

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m}(\theta) \Phi(\phi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m}(\theta) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1)$$

Die Wellenfunktion setzt sich aus der radialabhngigen Funktion  $R$ , der breitenkreisabhngigen Funktion  $\Theta$  und der azimutalwinkelabhngigen Funktion  $\Phi$  zusammen. Dabei bezeichnet  $n$  die Hauptquantenzahl,  $l$  die Bahndrehimpulsquantenzahl und  $m$  die Orientierungsquantenzahl. Die drei Teile der Wellenfunktion sind normiert. Aus der Gleichung für die Stromdichte

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2m_0 i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (2)$$

mit  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  und  $h$  als Planck'schem Wirkungsquantum und  $m_0$  als Ruhemasse des Elektrons folgt, dass die radial- und breitenkreisabhngigen Anteile der Teilchenstromdichte gleich 0 sind, da die zugehörigen Wellenfunktionen reell sind. Somit ergibt sich die azimutale Teilchenstromdichte

$$S_\phi = \frac{\hbar}{m_0} \frac{R^2}{2\pi} \frac{\Theta^2}{r \sin \theta} \frac{m}{r \sin \theta}. \quad (3)$$

Nun soll aus dieser Stromdichte das entstehende magnetische Moment  $\mu_z$  berechnet werden. Es ergibt durch Multiplikation von Kreisstrom und umschlossener Fläche.

$$d\mu_z = F(\theta) dI_\phi \quad (4)$$

Eine Integration über die Querschnittsfläche der Elektronenhule unter Berücksichtigung der Normierungsbedingungen für die Anteile der Wellenfunktion führt zu

$$\mu_z = -\frac{1}{2} e_0 m_0 \hbar =: \mu_B m \quad (5)$$

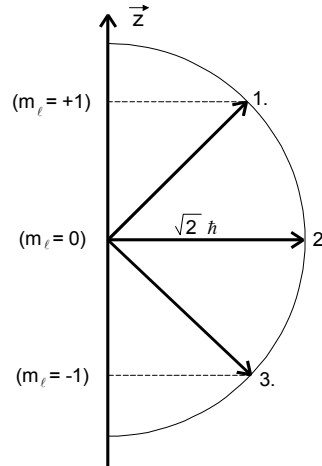
$\mu_B$  wird als Bohrsches Magneton bezeichnet.

## 2.2 Energieaufspaltung beim Anlegen eines äußeren Magnetfelds

Der Drehimpuls  $\vec{l}$  kann relativ zu einer festgelegten Achse verschiedene Orientierungen einnehmen. Bezeichnet man diese Achse mit  $\vec{z}$ , so gilt für die  $z$ -Komponente des Drehimpulses

$$l_z = m_l \hbar, \quad (6)$$

wobei die Orientierungsquantenzahl  $m_l$  alle ganzzahligen Werte zwischen  $-l$  und  $+l$  annehmen kann (siehe Abbildung 1). Daraus folgt, dass der Drehimpuls relativ zur



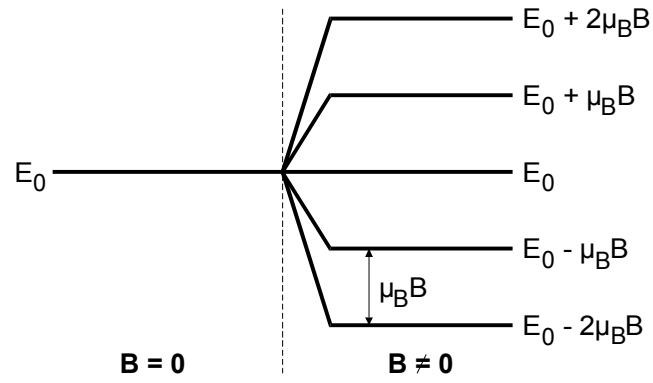
**Abbildung 1:** Richtungsquantelung des Bahndrehimpulses für  $l = 1$  [1].

Feldrichtung  $2l + 1$  mögliche Orientierungen besitzt. Die Aufspaltung der Energieniveaus beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes  $\vec{B}$  kommt dadurch zustande, dass einem magnetischen Moment  $\vec{M}$  entsprechend  $E = \vec{M} \cdot \vec{B}$  Energie zugeführt wird und das magnetische Moment aufgrund der Richtungsquantelung  $2l + 1$  unterschiedliche Werte annehmen kann. Die Aufspaltung ist äquidistant, da es sich hier um den normalen Zeeman-Effekt handelt. Hier erfolgt die Aufspaltung nach der Orientierungsquantenzahl  $m_l$ , da freie Elektronen betrachtet werden. Sobald die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt werden muss, geschieht die Aufspaltung nach der Orientierungsquantenzahl  $m_j$  ( $J = L + S$ ). Dies wird als anomaler Zeeman-Effekt bezeichnet. In Abbildung 2 ist die Energieaufspaltung durch ein äußeres Magnetfeld für ein Hüllenelektron mit  $l = 2$  dargestellt.

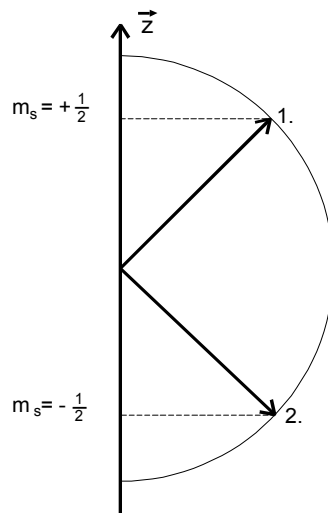
Nicht nur der Bahndrehimpuls  $l$  hat verschiedene Orientierungsmöglichkeiten. Der Eigendrehimpuls  $s$  eines Elektrons hat zwei Einstellmöglichkeiten. Die zugehörige Orientierungsquantenzahl  $m_s$  kann entsprechend die Werte  $\pm \frac{1}{2}$  annehmen. Für die  $z$ -Komponente des Spins gilt

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{\hbar}{2}. \quad (7)$$

Eine graphische Darstellung der Einstellmöglichkeiten des Spins ist in Abbildung 3 zu sehen.



**Abbildung 2:** Aufspaltung von  $E_0$  eines Hüllenelektrons mit  $l = 2$  durch ein äußeres Magnetfeld mit Flussdichte  $B$  [1].



**Abbildung 3:** Einstellmöglichkeiten des Spins relativ zum Magnetfeld in  $z$ -Richtung [1].

Das magnetische Moment des Elektrons, welches aus dem Spin resultiert lässt sich mit Hilfe des Landé-Faktors  $g$  in Einheiten des Bohrschen Magnetons angeben. Es gilt:

$$\mu_{S_z} = -g m_s \mu_B = -\frac{g}{2} \mu_B. \quad (8)$$

Der Landé-Faktor beschreibt das Verhältnis vom klassisch erwarteten magnetischen Moment  $\mu_B$  und dem tatsächlich gemessenen, welches aufgrund des in der klassischen Physik nicht erklärtem Spin, von der Erwartung abweicht.  $g$  ist somit dimensionslos und liegt in der Größenordnung 1.

### 2.3 Elektronenspin-Resonanz-Methode

Ein Stoff mit freien Elektronen befindet sich in einem Magnetfeld, wodurch das Energieniveau in zwei Niveaus aufgespalten wird. Die Energiedifferenz  $\Delta E$  zwischen den beiden Unterniveaus berechnet sich aus

$$\Delta E = g \mu_B B. \quad (9)$$

$B$  beschreibt das von außen angelegte Magnetfeld. Damit die Elektronen in den höheren Energiezustand übergehen, wird das System mit einer Frequenz angeregt, die dem Energieunterschied der beiden Niveaus entspricht. Dabei ändert die Orientierungsquantenzahl  $m_s$  ihr Vorzeichen. Für diesen Prozess gilt die Gleichung

$$h f = g \mu_B B. \quad (10)$$

Dieser Effekt wird Elektronenspin-Resonanz genannt und hat zur Folge, dass die zur Anregung verwendeten "Lichtquanten" bei Resonanz absorbiert werden. Die angeregten Elektronen verlieren ihre Energie durch Wechselwirkungsprozesse mit ihrer Umgebung. Das Magnetfeld einer Helmholtzspule, die zur Erzeugung des Magnetfelds verwendet wird, lässt sich aus

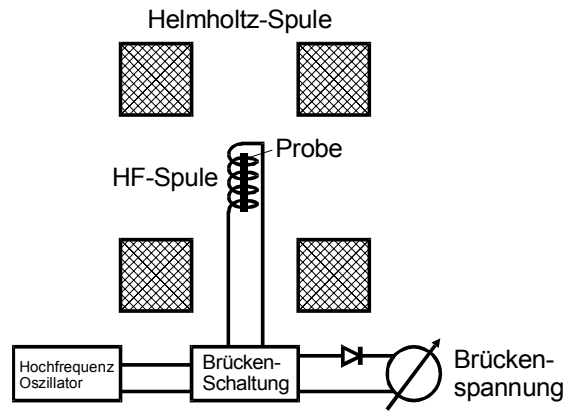
$$B(I) = \frac{8}{\sqrt{125}} \mu_0 \frac{n}{r} I \quad (11)$$

berechnen.  $\mu_0$  ist dabei die magnetische Feldkonstante,  $n = 156$  die Anzahl der Windungen,  $r = 0,1$  m und  $I$  der Feldstrom.

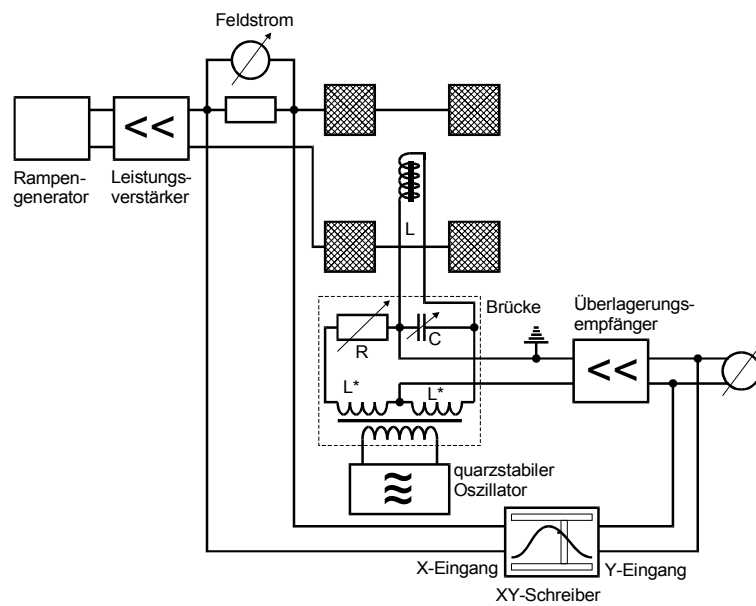
## 3 Aufbau und Durchführung

### 3.1 Aufbau

Der allgemeine Aufbau, dargestellt in Abbildung 4, besteht aus einer Helmholtzspule zur Erzeugung eines homogenen Magnetfelds, einer Hochfrequenzspule mit Probe, einem Hochfrequenz-Oszillator und einer Brückenschaltung. Durch das hochfrequente Magnetfeld, welches durch die Spule erzeugt wird, können die Elektronen in den höheren Energiezustand übergehen. Dies hat eine makroskopische Änderung der Magnetisierung



**Abbildung 4:** Prinzipieller Aufbau zur Elektronenspin-Resonanz [1].



**Abbildung 5:** Schematische Darstellung der Messapparatur [1].

der Probe zufolge, welches wiederum die Induktivität der Spule ändert, wodurch sich die gemessene Brückenspannung ändert.

Abbildung 5 zeigt den gesamten Aufbau. Durch einen quarzstabilisierten Generator wird hochfrequente Wechselspannung erzeugt, mit der die Brückenschaltung betrieben wird. Da die sehr kleine gemessene Brückenspannung nachverstärkt werden soll und Störsignale unterdrückt werden sollen, wird ein Überlagerungsempfänger am Ausgang der Brücke eingebaut. Abbildung 6 zeigt den Aufbau eines solchen Überlagerungsempfängers. Durch den auf die Signalfrequenz  $f_e$  abstimmbaren Vorverstärker werden Spannungen

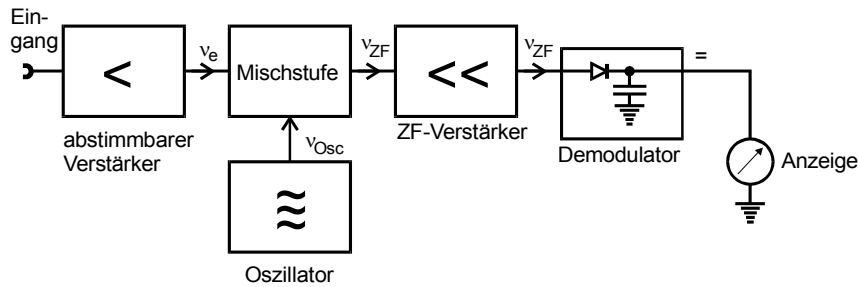


Abbildung 6: Schaltbild eines Überlagerungsempfängers [1].

mit anderen Frequenzen herausgefiltert. Außerdem wird das Eingangssignal bereits leicht verstärkt. In der darauffolgenden Mischstufe findet eine Überlagerung aus Eingangssignal und einer Spannung der Frequenz  $f_{osz}$ , welche durch den darunter eingezeichneten Oszillator erzeugt wird, statt. Dadurch kommt es zu Schwebungen. Die hauptsächliche Verstärkung und Unterdrückung von Störspannungen erfolgt durch den ZF-Verstärker. Die Demodulatorstufe richtet die Wechselspannung gleich und glättet diese.

### 3.2 Durchführung

Zunächst wird die Resonanzfrequenz gesucht, also die Frequenz, bei der die Brückenspannung maximal wird. Dann wird die Brücke abgeglichen, zuerst mit  $C_{grob}$  anschließend mit  $C_{fein}$  und  $R$ . Anschließend wird die Brücke mittels  $R$  auf etwa 200 mV verstimmt, um Überlagerungseffekte in der Resonanzkurve zu vermeiden. Dann wird die Resonanzkurve mit einem XY-Schreiber aufgenommen. Dabei wird die Stromstärke auf der  $x$ -Achse und die Brückenspannung auf der  $y$ -Achse aufgetragen. Da der Einfluss des Erdmagnetfelds berücksichtigt werden soll, wird der Aufbau einmal parallel und einmal antiparallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet. Die Messung wird für insgesamt fünf Frequenzen wiederholt. Da nach der ersten Messung kein XY-Schreiber mehr zur Verfügung stand, wurden für die anderen Frequenzen jeweils Brückenspannung und Stromstärke in einem Bereich um das Maximum von Hand aufgenommen. Anschließend wird ein Fit durchgeführt, um so das Maximum zu bestimmen.



## 4 Auswertung

Für die Kalibrierung des XY-Schreibers wird eine lineare Regression mit fünf Stromstärken (Tabelle 1) durchgeführt, diese ergibt den in Abbildung 7 sichtbaren Verlauf. Daraus ergeben sich Steigung und Ordinatenabschnitt

$$m = (3,09 \pm 0,11) \text{ mA mm}^{-1} \quad (12)$$

und

$$n = (-10 \pm 14) \text{ mA}. \quad (13)$$

**Tabelle 1:** Daten der XY-Schreiber-Kalibrierung.

$l/\text{mm}$	$I/\text{mA}$
18,5	53
56	161
101	298
152	448
200,5	619

Mithilfe dieser Kalibrierung lassen sich bei der grafischen Messung die Stromstärken

$$I_1 = 374,2 \text{ mA} \quad (14)$$

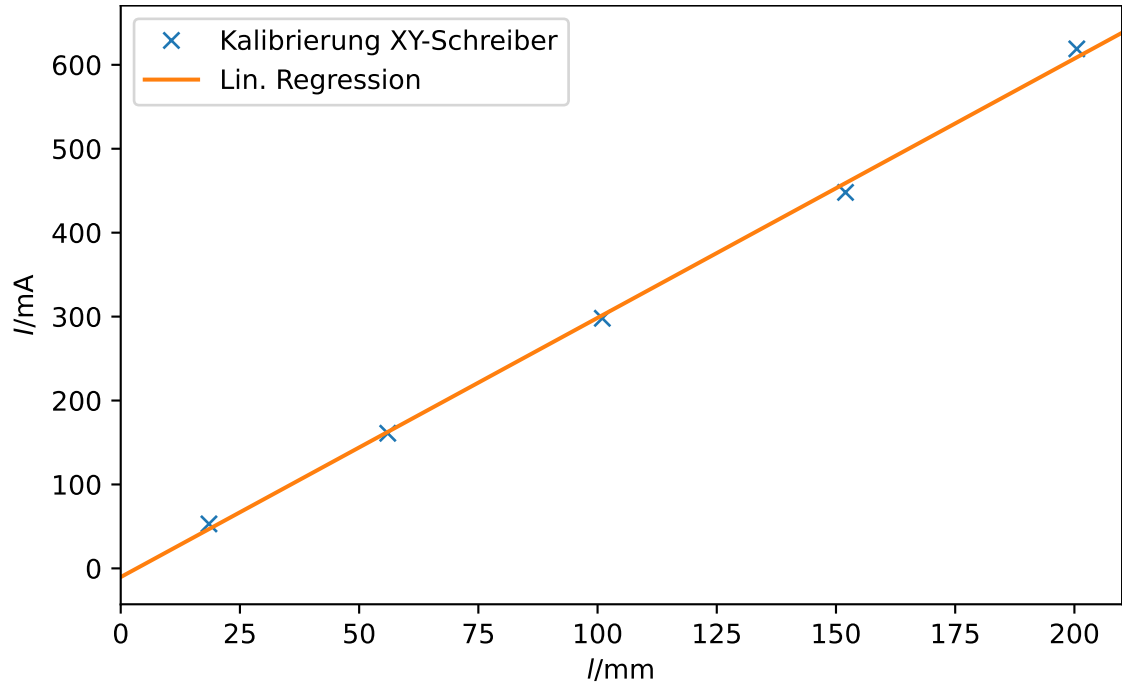
und

$$I_2 = 437,5 \text{ mA} \quad (15)$$

ermitteln, wobei die beiden Werte jeweils für eine Magnetfeldrichtung stehen. Für die von Hand aufgenommenen Messreihen wurde jeweils ein nichtlinearer Fit an eine Lorentzkurve

$$U_B(I) = A \cdot \frac{s}{s^2 + (I - t)^2} + b \quad (16)$$

durchgeführt. Diese Ergebnisse sind in den Abbildungen 8, 9, 10 und 11 zu finden. Von Interesse ist jeweils der  $t$ -Parameter, der die Lage des Extremums kennzeichnet.  $A$  bezeichnet die Amplitude der Kurve,  $s$  die Steilheit und  $b$  eine absolute Verschiebung. Die sich ergebenden Stromstärken der Minima finden sich in Tabelle 2. Diese Spulenstromstärken lassen sich über (11) in eine magnetische Flussdichte umrechnen. Wenn man nun die Messungen paarweise mittelt, hebt sich der Einfluss des Erdmagnetfelds auf. Mit in (10) eingesetzter Frequenz lässt sich dann daraus das gyromagnetische Verhältnis  $g$  bestimmen. Ebenfalls folgt aus dem halben Betrag der Flussdichtendifferenz die totale



**Abbildung 7:** Messdaten und lineare Regression der Kalibrierung.

Flussdichte  $B_{\oplus}$  des Erdmagnetfelds. Diese Ergebnisse finden sich in Tabelle 3. Mithilfe der in Abbildung 12 dargestellten linearen Regression ergibt sich über

$$g = \frac{h}{m\mu_b} \quad (17)$$

ein Landé-Faktor von

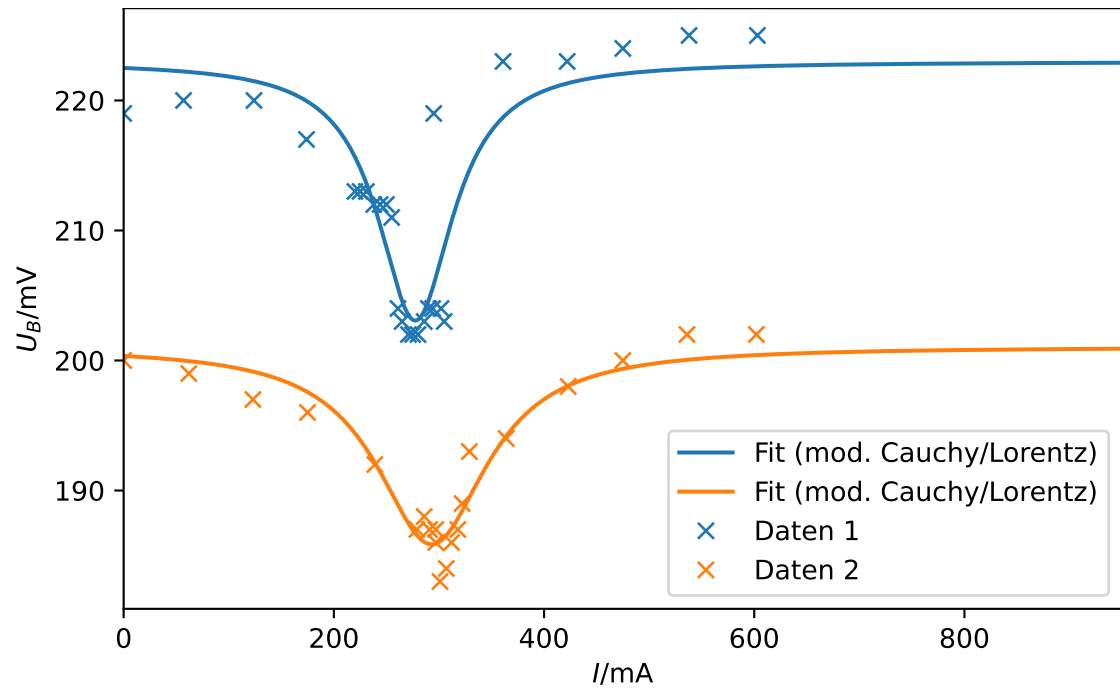
$$\langle g \rangle = 2,12 \pm 0,15 \quad (18)$$

und eine totale Flussdichte des Erdmagnetfelds von

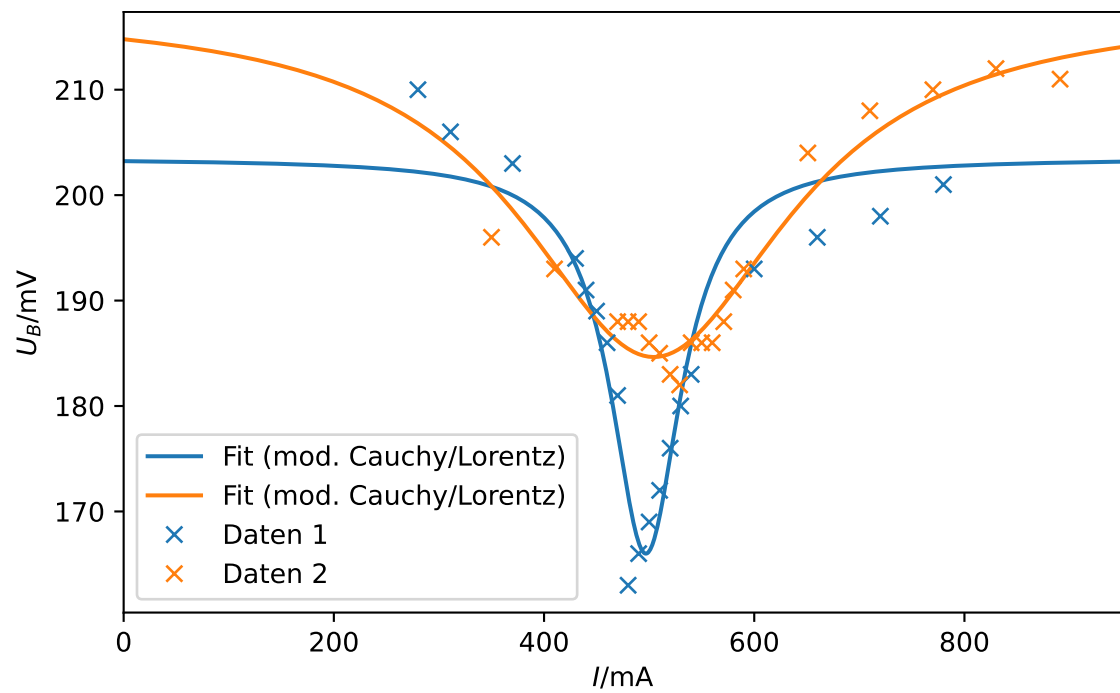
$$\langle B_{\oplus} \rangle = (40 \pm 37) \mu\text{T}. \quad (19)$$

**Tabelle 2:** Ermittelte Extremstellen, entsprechen der Resonanzfeldstärke.

$f/\text{MHz}$	$I_1/\text{mA}$	$I_2/\text{mA}$
10,62	$277,4 \pm 4$	$293,1 \pm 5$
20,56	$496,9 \pm 3$	$504,4 \pm 7$
25,00	$609,2 \pm 9$	$658,4 \pm 3$
29,42	$737,9 \pm 6$	$743,5 \pm 10$



**Abbildung 8:** Von Hand aufgenommene Messreihe bei  $f = 10,62 \text{ MHz}$  mit Fit.



**Abbildung 9:** Von Hand aufgenommene Messreihe bei  $f = 20,56 \text{ MHz}$  mit Fit.

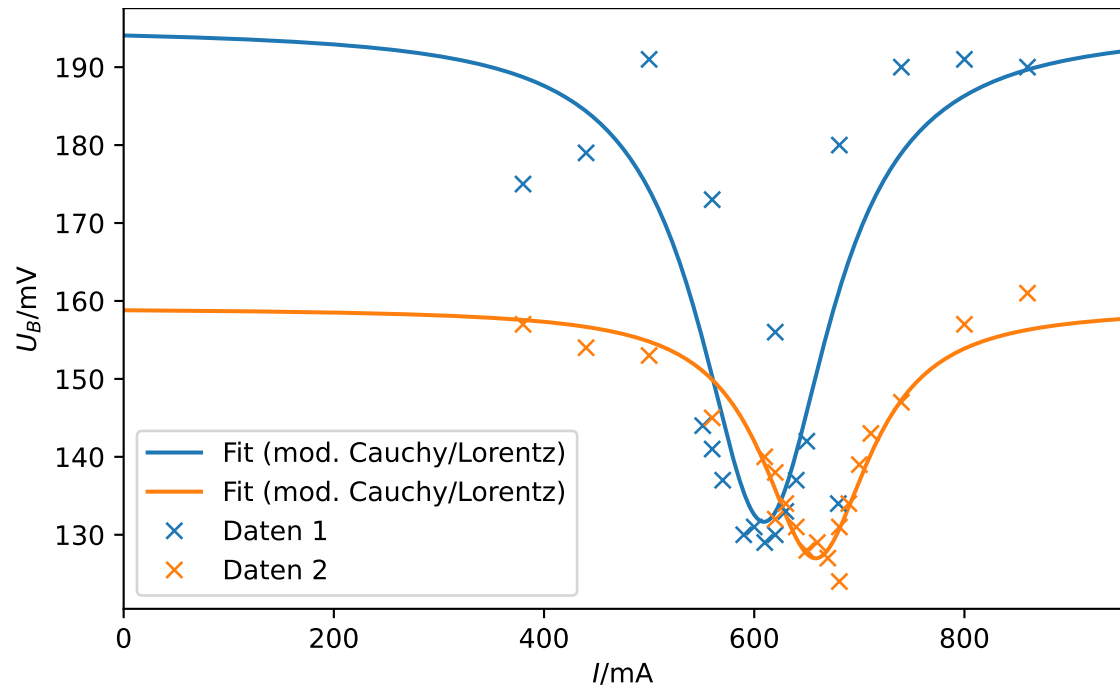


Abbildung 10: Von Hand aufgenommene Messreihe bei  $f = 25.00$  MHz mit Fit.

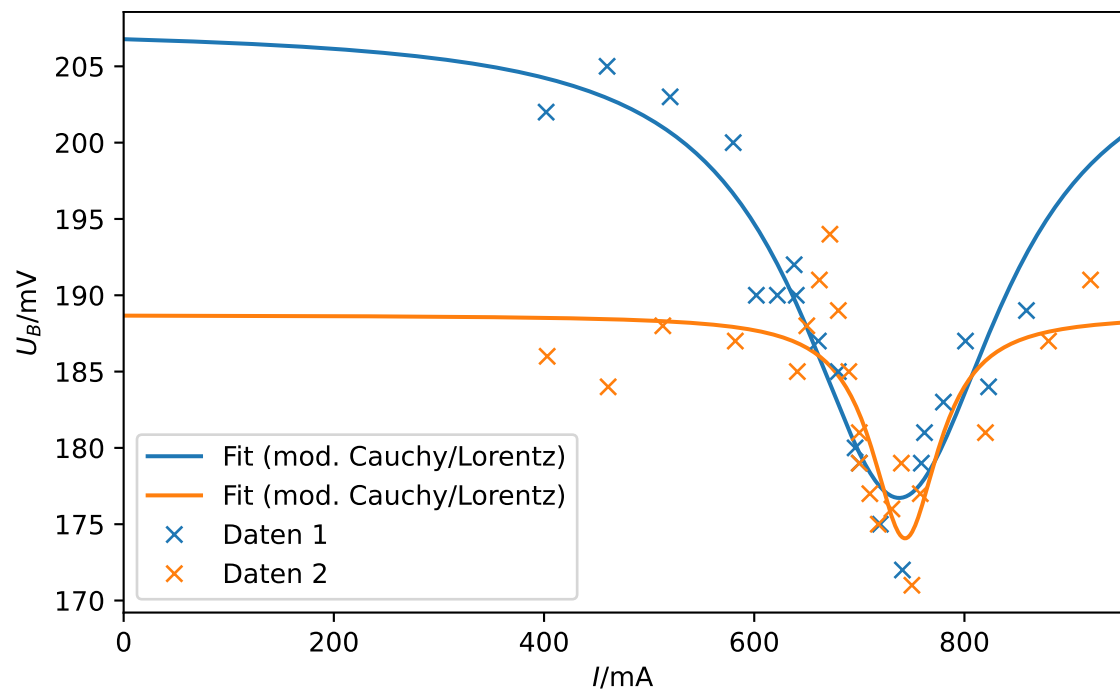
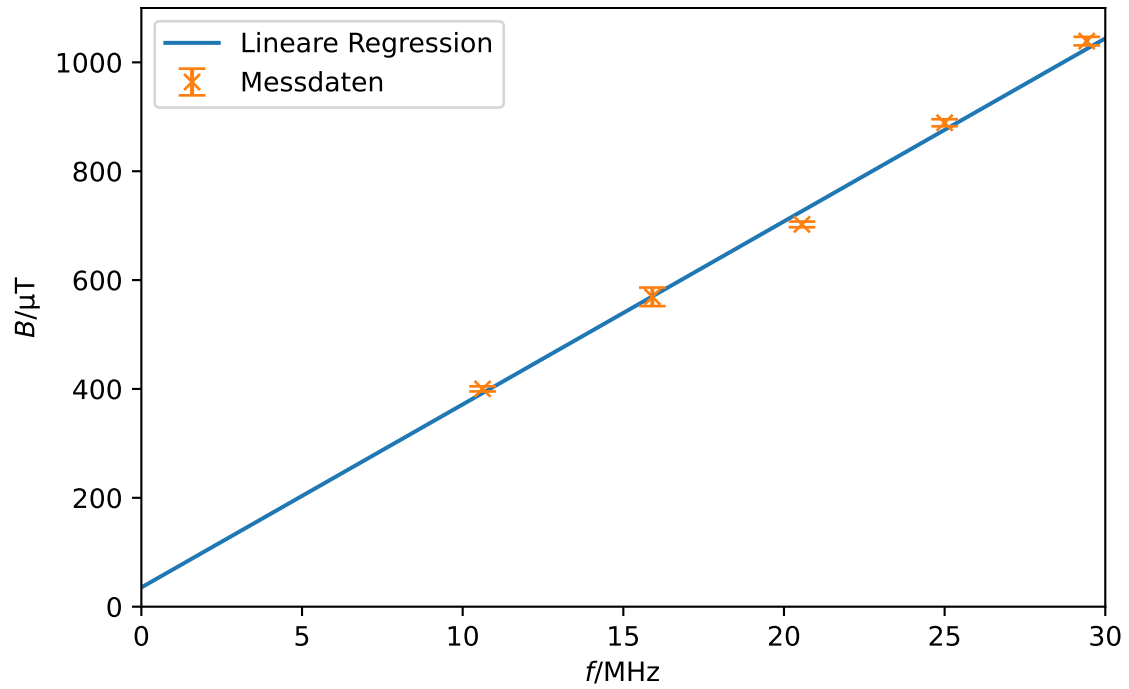


Abbildung 11: Von Hand aufgenommene Messreihe bei  $f = 29.423$  MHz mit Fit.



**Abbildung 12:** Lineare Regression der Abhängigkeit von  $B$  und  $f$ .

**Tabelle 3:** Berechnete Messergebnisse.

$f/\text{MHz}$	$B/\mu\text{T}$	$B_{\oplus}/\mu\text{T}$
10,62	$400,1 \pm 5$	$21,93 \pm 9$
20,56	$702,3 \pm 5$	$10,58 \pm 10$
25,00	$889,0 \pm 6$	$68,98 \pm 10$
29,42	$1039 \pm 8$	$7,916 \pm 20$
15,90	$569,3 \pm 20$	$88,81 \pm 2$

## 5 Diskussion

Der ermittelte  $g$ -Faktor von

$$g = -2,12 \pm 0,15 \quad (20)$$

liegt trotz der Unzulänglichkeiten unserer Durchführung nah am Literaturwert

$$g_{\text{lit}} = -2,002\,319\,304\,361\,82(52) \quad (21)$$

aus [2]. Die händische Aufnahme der Messdaten ist insoweit problematisch, als die Brückenspannung mit der Zeit nach oben driftet. Dies fällt bei einer (schnellen) Messung mit dem XY-Schreiber nicht auf, führt aber zu Resonanzkurven, die nicht dem erwarteten Verlauf entsprechen. Möglicherweise spielen auch die Überlagerungseffekte der Resonanzkurven eine Rolle, die durch die anfängliche Verstimmung verhindert werden sollen.

Die ermittelte totale magnetische Flussdichte von

$$B_{\oplus} = (40 \pm 37) \mu\text{T} \quad (22)$$

liegt ebenfalls nah am Literaturwert

$$B_{\oplus}^{\text{lit}} = 49,2 \mu\text{T} \quad (23)$$

von [3], jedoch mit großer Standardabweichung. Auch dies ist wahrscheinlich durch die verzerrte Kurvenform begründet. Außerdem konnte mit der Bussole nicht die korrekte Ausrichtung eingestellt werden, es wurde die vorgegebene Ausrichtung beibehalten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 28: Elektronenspin-Resonanz*. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/ESR.pdf> (besucht am 12.06.2017).
- [2] Peter J. Mohr, Barry N. Taylor und David B. Newell. „CODATA recommended values of the fundamental physical constants“. In: (2014). URL: <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/>.
- [3] Wolfram/Alpha. URL: <http://www.wolframalpha.com/input/?i=magnetic+field+Dortmund> (besucht am 13.06.2017).
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [6] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.