

Versuch V606

## **Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe**

Richard Leven  
richard.leven@udo.edu

Joell D. Jones  
joell-david.jones@udo.edu

Abgabe: 23.06.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Ziel</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Theorie</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen . . . . .   | 3         |
| 2.2      | Suszeptibilität von Seltenen-Erd-Verbindungen . . . . . | 6         |
| 2.3      | Berechnung mittels einer Brückenschaltung . . . . .     | 6         |
| <b>3</b> | <b>Durchführung</b>                                     | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Auswertung</b>                                       | <b>7</b>  |
| <b>5</b> | <b>Diskussion</b>                                       | <b>10</b> |
|          | <b>Literatur</b>  | <b>11</b> |

# 1 Ziel

Bestimmung der Suszeptibilität von drei Selten-Erd-Elementen  $Nd_2O_3$ ,  $Gd_2O_3$  und  $Dy_2O_3$ .

## 2 Theorie

### 2.1 Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen

Für das magnetische Feld im Vakuum lässt sich die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  durch die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ausdrücken:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1)$$

Hierbei ist  $\mu_0$  die Induktionskonstante.

Passiert das magnetische Feld Materie, so kommt zu  $\vec{B}$  noch die Magnetisierung  $\vec{M}$  dazu:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (2)$$

Die Magnetisierung kann über die Suszeptibilität  $\chi$  berechnet werden:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H} \quad (3)$$

Die Suszeptibilität ist hierbei keine Konstante, sondern stark von der Temperatur abhängig.

Die meiste Materie ist diamagnetisch, nur solche Materie mit nicht verschwindendem Drehimpuls in dessen Atomen ist paramagnetisch. Da die Bewegung der Atome hauptsächlich thermisch ist, verändern sich die Drehmomente mit der Temperatur.

Der atomare Drehimpuls setzt sich aus drei Komponenten zusammen:

- Bahndrehimpuls der Elektronenhülle
- Spin der Elektronen
- Kerndrehimpuls

Wenn das Magnetfeld, welches die Materie durchdringt nicht allzu stark ist, kann der Kerndrehimpuls vernachlässigt werden. Für den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  muss nun die Vektorsumme des Gesamtbahndrehimpulses  $\vec{L}$  und der Spins  $\vec{S}$  addiert werden.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (4)$$

Aus den Impulsen lassen sich die magnetischen Momente berechnen:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \quad (5)$$

und

$$\vec{\mu}_S = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \quad (6)$$

Dabei ist  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton mit

$$\mu_B = \frac{1}{2} \frac{e_0}{m_0} \hbar \quad (7)$$

und  $g_S$  das gyromagnetische Verhältnis.

Um den Betrag des magnetischen Moments von  $\vec{\mu}_J$  zu erhalten, müssen zunächst die Beträge von  $\vec{\mu}_S$  und  $\vec{\mu}_L$  ermittelt werden und gemäß der geometrischen Anordnung der Drehmomente und magnetischen Momente verrechnet werden.

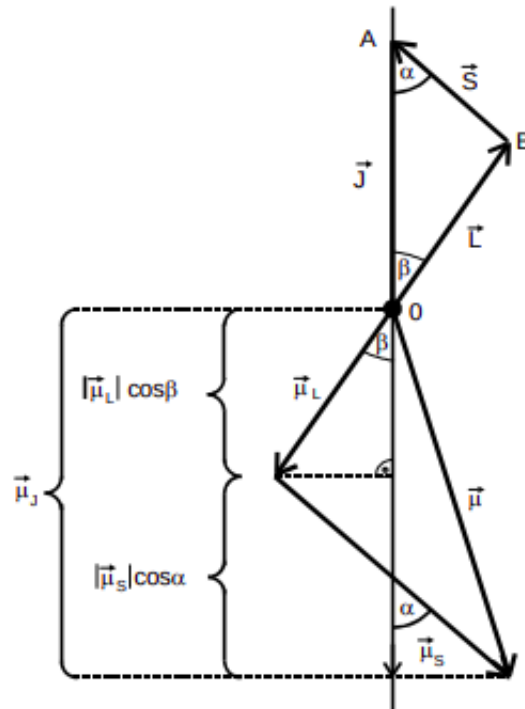
Die Formeln für  $|\vec{\mu}|$  lauten:

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)}$$

und

$$|\vec{\mu}_S| = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}$$

Anhand Abbildung 1 lässt sich die Berechnung von  $|\vec{\mu}_J|$  nachvollziehen.



**Abbildung 1:** Vektordiagramm der Drehimpulsvektoren und den daraus hervorgehenden magnetischen Momenten.

Demnach ergibt sich für  $|\vec{\mu}_J|$ :

$$|\vec{\mu}_J| = |\vec{\mu}_S| \cos \alpha + |\vec{\mu}_L| \cos \beta \quad (8)$$

Werden die Werte für  $|\vec{\mu}_{S,L}|$  zusammen mit den geometrischen Formeln für  $\cos \alpha$  und  $\cos \beta$  eingesetzt und beachtet, dass  $g_S \approx 2$ , dann ergibt sich eine neue Formel für  $|\vec{\mu}_J|$ :

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B \underbrace{\sqrt{J(J+1)} \frac{3J(J+1) + [S(S+1) - L(L+1)]}{2J(J+1)}}_{:=g_J} \quad (9)$$

Da der Versuch mit makroskopischen Messungen zu tun hat, wird eine Berechnung der makroskopischen Magnetisierung benötigt.

$$M = \mu_0 N \bar{\mu} \quad (10)$$

$$\bar{\mu} = -\mu_B g_J \frac{\sum_{m=-J}^J m \cdot \exp\left(\frac{-\mu_B g_J m B}{kT}\right)}{\sum_{m=-J}^J \exp\left(\frac{-\mu_B g_J m B}{kT}\right)} \quad (11)$$

Hierbei ist  $\bar{\mu}$  das mittlere magnetische Moment und wird nach Gleichung 11 berechnet. Nach Anwendung einer Hochtemperaturnäherung lässt sich schließlich eine Formel für  $\chi$  bestimmen:

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT} \quad (12)$$

Aus dieser Formel geht hervor, dass  $\chi \sim 1/T$ . Dies ist das Curiesche Gesetz des Paramagnetismus.

## 2.2 Suszeptibilität von Seltenen-Erd-Verbindungen

Seltene-Erd-Verbindungen zeigen einen starken Paramagnetismus, was bedeuten muss, dass die Atome große Drehimpulse besitzen. Diese Drehimpulse können nur die inneren Elektronen Erzeugen, genauer die sogenannten 4f-Elektronen. Das 4f ist dabei eine Zuordnung zu einer Schale in der die Elektronen energetisch liegen.

Der von ihnen erzeugte Drehimpuls  $\vec{J}$  kann mit den Hundschen Regeln bestimmt werden. Diese sagen aus:

- Die Spins  $\vec{s}_i$  kombinieren zum maximalen Gesamtspin  $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$ , der nach dem Pauli-Prinzip möglich ist.
- Die Bahndrehimpulse  $\vec{l}_i$  setzen sich so zusammen, dass der maximale Drehimpuls  $\vec{L} = \sum \vec{l}_i$ , der mit dem Pauli-Prinzip und der Regel 1 verträglich ist, entsteht.
- Der Gesamtdrehimpuls ist  $\vec{J} = \vec{L} - \vec{S}$ , wenn die Schale weniger als halb und  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , wenn die Schale mehr als halb gefüllt ist.

Mit diesen Regeln lässt sich  $g_J$  aus Gleichung 12 bestimmen.

## 2.3 Berechnung mittels einer Brückenschaltung

Die Suszeptibilität kann auch anders berechnet werden, indem eine Brückenschaltung mit integrierter Spule aufgebaut wird und die paramagnetischen Materialien das Magnetfeld direkt beeinflussen und somit auch die Brückenspannung und erforderlichen Widerstand. Ist die Messfrequenz dabei deutlich höher als der fest verbaute Widerstand in der Brückenschaltung, so lässt sich bei bekannter Brücken- und Speisespannung  $\chi$  ausrechnen:

$$\chi_U = 4 \frac{F U_{Br}}{Q U_{Sp}} \quad (13)$$

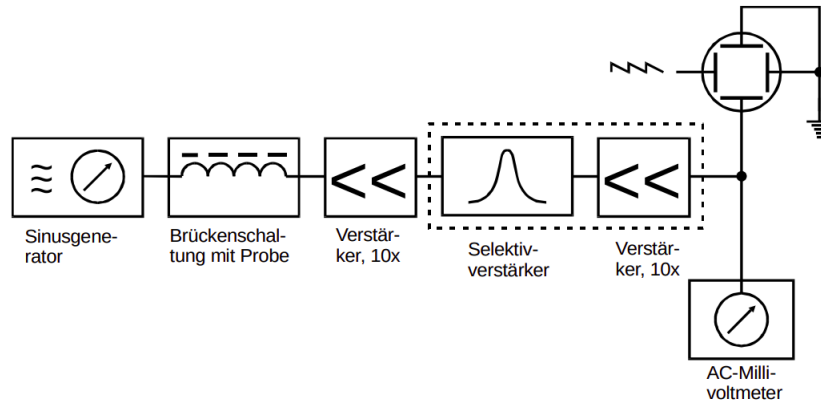
Hierbei ist F der Spulenquerschnitt und Q der Probenquerschnitt.

Eine weitere Messmethode funktioniert über den verstellbaren Widerstand, üblicherweise  $R_3$ , und dessen Unterschied im Wert, mit und ohne Probe,  $\Delta R$ .

$$\chi_R = 2 \frac{\Delta R}{R_3} \frac{F}{Q} \quad (14)$$

### 3 Durchführung

Der Aufbau zur Ermittlung der Suszeptibilität beinhaltet einen Sinusgenerator, eine Brückenschaltung mit Spule und den Proben, einen Selektivverstärker und ein AC Millivoltmeter. Die Abbildung 2 zeigt den Aufbau.



**Abbildung 2:** Dies ist der Aufbau des Versuchs zur Ermittlung der Suszeptibilität von seltenen Erden.

Zunächst wird auf dem Sinusgenerator eine Speisespannung generiert, die in die Brückenschaltung geleitet wird. Hierbei wird eine Spannung gesucht, die bei ca. 35 kHz liegt und beim Millivoltmeter einen maximalen Ausschlag anzeigt. Ist diese Spannung gefunden, wird das Minimum der Brückenspannung mittels des verstellbaren Widerstands auf der Brückenschaltung ermittelt und zusammen mit dem Widerstand notiert. Wenn eine Probe in die Spule gelegt wird, muss dies ebenfalls gemacht werden. Für drei Proben soll so je drei Mal die Brückenspannung mit und ohne Probe ermittelt werden.

### 4 Auswertung

Für drei Erd-Verbindungen wurden jeweils drei Messungen vorgenommen. In Tabelle 1 sind die gemessenen Widerstände und Brückenspannungen aufgelistet. Die verwendete Speisespannung betrug 0,72 V bei allen Messungen. Die Spannungen sind jeweils in mV und die Widerstände in  $m\Omega$ .

**Tabelle 1:** Messdaten der drei seltenen Erden.

| $U_{Br}^{leer}$ | $R^{leer}$ | $U_{Br}^{Dy}$ | $R^{Dy}$ | $U_{Br}^{leer}$ | $R^{leer}$ | $U_{Br}^{Gd}$ | $R^{Gd}$ | $U_{Br}^{leer}$ | $R^{leer}$ | $U_{Br}^{Nd}$ | $R^{Nd}$ |
|-----------------|------------|---------------|----------|-----------------|------------|---------------|----------|-----------------|------------|---------------|----------|
| 2.25            | 3097.5     | 3.5           | 1555     | 2.4             | 3077.5     | 2.3           | 2315     | 2.65            | 3085       | 2.6           | 2978.5   |
| 2.3             | 3112.5     | 3.5           | 1555     | 2.5             | 3100       | 2.3           | 2315     | 2.65            | 3085       | 2.65          | 2995     |
| 2.35            | 3087.5     | 3.5           | 1537.5   | 2.6             | 3082.5     | 2.25          | 2315     | 2.7             | 3085       | 2.6           | 2990     |

Nach Gleichung 14 ergeben sich daraus folgende Werte für  $\chi_R$ :

**Tabelle 2:** Experimentelle Werte für  $\chi_R$  der drei Erden, über die Widerstände berechnet.

| $\chi_{Dy}$ | $\chi_{Gd}$ | $\chi_{Nd}$ |
|-------------|-------------|-------------|
| 0.0240      | 0.0176      | 0.0012      |
| 0.0243      | 0.0181      | 0.0010      |
| 0.0241      | 0.0177      | 0.0010      |

Die Formel zur Berechnung des Mittelwerts lautet:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (15)$$

Der Fehler des Mittelwerts lautet:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (16)$$

Daraus ergeben sich die Mittelwerte mit Fehler, laut Gleichung 16:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{Dy} &= 0.02413 \pm 0.00015 \\ \bar{\chi}_{Gd} &= 0.01780 \pm 0.00026 \\ \bar{\chi}_{Nd} &= 0.00107 \pm 0.00012 \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit ist  $\chi$  über die Speisespannung und die Brückenspannung zu ermitteln, nach Gleichung 13. In Tabelle 3 sind die Werte für  $\chi_U$  eingetragen.

**Tabelle 3:** Experimentelle Werte für  $\chi_U$  der drei Erden, über die Brückenspannung berechnet.

| $\chi_{Dy}$ | $\chi_{Gd}$ | $\chi_{Nd}$ |
|-------------|-------------|-------------|
| 0.1511      | 0.1474      | 0.0793      |
| 0.1468      | 0.1474      | 0.0808      |
| 0.1425      | 0.1442      | 0.0793      |

Dessen Mittelwerte sind:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{Dy} &= 0.147 \pm 0.004 \\ \bar{\chi}_{Gd} &= 0.1463 \pm 0.0018 \\ \bar{\chi}_{Nd} &= 0.0798 \pm 0.0009 \end{aligned}$$



Die theoretischen Werte berechnen sich über Gleichung 12 zu<sup>1</sup>:

$$\chi_{Dy}^{theo} = 0.0257$$

$$\chi_{Gd}^{theo} = 0.0146$$

$$\chi_{Nd}^{theo} = 0.0027$$

---

<sup>1</sup>Die Werte zur Masse und Anzahl der Momente N wurden hier[1] entnommen.

## 5 Diskussion

Die prozentualen Unterschiede zu den theoretischen Werten sind in Tabelle 4 aufgeführt.

**Tabelle 4:** Tabelle mit den ermittelten Werten für  $\chi$  und deren prozentualer Abweichung vom Theoriewert.

| Stoff     | $\chi_{theo}$ | $\chi_U$            | Abw. $\chi_U$ [%] | $\chi_R$              | Abw. $\chi_R$ [%] |
|-----------|---------------|---------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|
| $Dy_2O_3$ | 0.0257        | $0.147 \pm 0.004$   | 571.98            | $0.02413 \pm 0.00015$ | 6.11              |
| $Nd_2O_3$ | 0.0146        | $0.1463 \pm 0.0018$ | 1002.05           | $0.01780 \pm 0.00026$ | 21.92             |
| $Gd_2O_3$ | 0.0027        | $0.0798 \pm 0.0009$ | 2955.56           | $0.00107 \pm 0.00012$ | 60.37             |

## Literatur

- [1] *V606, Altprotokoll Database*. Eingesehen am 22.06.2020. URL: <https://fachschaft-physik.tu-dortmund.de/wordpress/wp-content/uploads/altprotokolle/ap/V606.pdf>.