

V602

Röntgenemission und -absorption

Tahir Kamcili
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 27.04.2021

Abgabe: 04.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	5
3.1 Überprüfung der Bragg Bedingung	5
3.2 Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgen-Röhre	5
3.3 Absorptionsspektren	5
4 Vorbereitung	6
5 Auswertung	7
5.1 Bragg Bedingung	7
5.2 Emissionsspektrum	7
5.3 Das Absorptionsspektrum	9
5.4 Bestimmung der Rydbergkonstante	13
6 Diskussion	15
Literatur	16

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es das Emissionsspektrum einer Kupfer-Röntgenröhre und verschiedenen Absorptionsspektren zu untersuchen.

2 Theorie

Röntgenstrahlung ist elektromagnetische Strahlung im Bereich von 10eV bis 200keV. Um diese zu erzeugen wird in einer Röhre, in welcher ein Vakuum vorherrscht, durch einen Draht mithilfe des Glühelektrischen Effektes freie Elektronen erzeugt und auf eine Anode hin beschleunigt. Beim Einschlag entsteht Röntgenstrahlung, die durch die charakteristischen Röntgenstrahlung des Anodenmaterials und dem kontinuierlichen Bremspektrum, welches beim Abbremsen des Elektrons im Coulombfeld des Atomkerns entsteht. Dabei setzt sich die Bremsstrahlung nicht nur aus der kinetische Energie des Elektrons zusammen, sondern auch teilweise der Eigenenergie von diesem. Diese wird dann, durch das Einfangen an der Anode in Form eines Photons, abgegeben. So lässt sich die resultierende minimale Wellenlänge, bzw. die maximal frei werdende Energie, beschreiben als

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e_0 U}, \quad (1)$$

mit h als das Plancksche Wirkungsquantum, c der Lichtgeschwindigkeit und U die anliegende Spannung zwischen Anode und dem Draht (auch Kathode genannt). Weil aber die kinetische Energie des Elektronen nicht immer vollständig in Röntgenstrahlung umgewandelt wird, handelt es sich bei der Bremsstrahlung um ein kontinuierliches Spektrum. Dieses ist jedoch, wie aus Gleichung 1 klar wird, durch die anliegende Spannung U begrenzt.

Da, wie bereits erwähnt nicht nur die Röntgenstrahlung nicht nur aus dem kontinuierlichen Bremspektrum, sondern auch aus dem charakteristischen Röntgenstrahlung des Anodenmaterials zusammensetzt. Diese wird bei der Ionisierung des Atoms durch das Elektron erzeugt. Da durch die Ionisierung des Atoms eine Lücke in einer energetisch günstigeren Lage entsteht, rückt ein Elektron aus einem erhöhten Energiezustand, unter der Emission eines Photons, nach. Da die einzelnen Energiewerte die das Elektron annehmen kann diskret sind ist die charakteristischen Röntgenstrahlung auch eine aus diskreten Frequenzen, welche sich beschreiben lassen können als

$$hf = E_m - E_n, \quad (2)$$

wo E den Energiezustand bezeichnet und der Index, der wievielte Energiezustand ist. Konvention ist es auch die im Röntgenspektrum entstehenden Linien durch eine Kombination aus griechischen und lateinischen Buchstaben zu beschreiben. Der lateinische Buchstabe bezeichnet den Energiezustand auf dem der Übergang endet und der griechische von wo der Übergang begonnen hat. Ein Beispiel für so eine Bezeichnung einer Linie wäre die K_α Linie. Die Bindungsenergie eines Elektrons kann dabei allgemeine durch die Formel

$$E_n = -R_\infty z_{\text{eff}}^2 \frac{1}{n^2} \quad (3)$$

angegeben werden. Hierbei ist $R_\infty = 13.6\text{eV}$ die Rydbergenergie und $z_{\text{eff}} = z - \sigma$ die effektive Kernladung mit der für das jeweilige Elektron im Atom charakteristischen Abschirmkonstante σ . Diese ist empirisch bestimmbar.

Da die äußeren Elektronen nicht alle dieselbe Bindungsenergie, aufgrund unterschiedlicher Bahndrehimpulse und Elektronenspins besitzen, kann jede charakteristische Linie in eine Reihe von eng beieinander liegenden Linien aufgelöst werden. Dies wird die Feinstruktur genannt.

Diese kann über die Sommerfeldschen Feinstrukturformel

$$E_{n,j} = -R_\infty \left[(z - \sigma_{n,l})^2 \frac{1}{n^2} + \alpha^2 (z - s_{n,l})^4 \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (4)$$

berechnet werden, mit j der Gesamtdrehimpuls des Elektrons und α die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

Bei Röntgenstrahlen unter einem 1 MeV treten hauptsächlich Effekte auf, welche das Resultat aus dem Comptoneffekt und dem Photoeffekt sind. Die Fähigkeit eines Materials Röntgenstrahlung zu absorbieren wird durch den Absorptionskoeffizienten beschrieben. Dieser nimmt mit sinkender Wellenlänge ab und steigt plötzlich an, wenn die Energie der Strahlung gerade größer ist als die Bindungsenergie eines Elektrons in dem nächsten Energiezustand. Diese Fälle können durch Absorptionskanten der Form

$$\lambda_{\text{abs}} = \frac{hc}{E_n} - E_\infty \quad (5)$$

beschrieben werden. Dabei ist $E_n - E_\infty$ die Bindungsenergie des Elektrons. Für Elektronen aus dem K-Energiezustand, also $n = 1$, lässt sich die Abschirmkonstante σ_K mit der Sommerfeldschen Feinstrukturformel berechnen als

$$\sigma_K = Z - \left(\frac{E_\alpha}{R_\infty} - \frac{\alpha^2 Z^4}{4} \right)^{0.5}. \quad (6)$$

Um im Versuch auch die Abschirmkonstante σ_L an der L-Kante zu berechnen, wird um die Berechnung zu vereinfachen die Energiedifferenz zwischen zwei L-Kanten bestimmt als ΔE_L . Da jedoch im Versuch die L_I und L_{II} nicht bestimmt werden können lässt sich die Abschirmkonstante σ_L berechnen als

$$\sigma_L = Z - \left(\frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E_L}{R_\infty}} - \frac{5\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{0.5} \left(1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{\Delta E_L}{R_\infty} \right)^{0.5}. \quad (7)$$

Dabei ist Z die Ordnungszahl und $\Delta E_L = E_{L, II} - E_{L, III}$ die Energiedifferenz zwischen den beiden L-Kanten.

Die Energie der Röntgenstrahlen kann aber auch experimentell durch die Bragg'sche Reflexion untersucht werden. Dabei fällt die Röntgenstrahlung in einen Kristall mit der Gitterkonstante d und wird an jedem einzelnen Atom gebeugt. Dadurch kommt es zu Interferenz der Strahlen wodurch nur beim Winkel Θ , auch Glanzwinkel genannt, konstruktive interferiert wird. Durch diese Überlegung kann die Bragg'schen Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (8)$$

geschlussfolgert werden. Dabei beschreibt n die Ordnung des Maximums.

3 Durchführung

Das Experiment ist aufgebaut durch eine Kupfer-Röntgenröhre, einem LiF-Kristall und einem Geiger-Müller-Zählrohr. Diese sind in einem Gehäuse verbaut. Der LiF-Kristall kann sich um sich selbst rotieren. Auf einer Kreisbahn um den Kristall kann das Geiger-Müller-Zählrohr bewegt werden. Der Aufbau ist in der Abbildung 1 dargestellt.

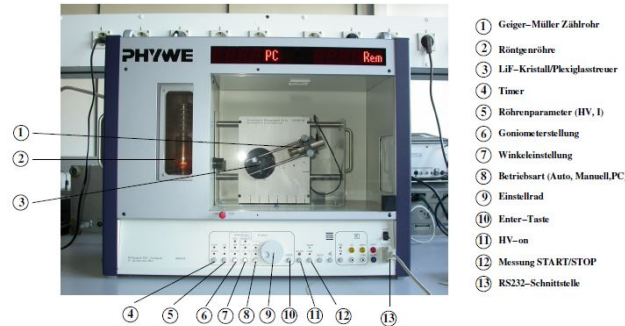


Abbildung 1: Aufbau zur Untersuchung der Röntgenstrahlung

Die Steuerung der einzelnen Elemente kann Wahlweise per Hand oder Computer erfolgen, jedoch ist es sinnvoll die unterschiedlichen Spektren mit dem Computer aufzunehmen. Die Beschleunigungsspannung und der Emissionsstrom werden bei allen Messungen auf $U = 35 \text{ kV}$ und $I = 1 \text{ mA}$ eigestellt.

3.1 Überprüfung der Bragg Bedingung

Um die Bragg Bedingung zu Überprüfung wird zunächst der Kristall auf einen festen Winkel 14° eingestellt. Dann wird das Geiger-Müller-Zählrohr fährt dann einen Winkelbereich von 26° und 30° in $0,1^\circ$ -Schritten mit einer Integrationszeit von 5 s pro Winkel ab.

3.2 Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgen-Röhre

Um das Emissionsspektrum der Kupfer-Röntgen-Röhre zu untersuchen wird ebenfalls in $0,1^\circ$ -Schritten in einem Winkelbereich von 8° bis 25° und mit einer Integrationszeit von 10 s gemessen. Deshalb wird kein Detailspektrum der K_α und K_β -Linie aufgenommen.

3.3 Absorptionsspektren

Nun wird um die Absorptionsspektren zu untersuchen ein Zinkabsorber vor das Geiger-Müller-Zählrohr gesetzt und das Absorptionsspektrum in $0,1^\circ$ -Schritten gemessen. Diesmal ist jedoch die Messzeit pro Winkel 20 s. Zusätzlich wird diese Messung für fünf weitere Absorber wiederholt. Bei Brom wird im Winkelbereich von $12,8^\circ$ bis $14,3^\circ$, bei Gallium

von 17° bis 19° , bei Rubidium im Bereich von $11,2^\circ$ bis $12,5^\circ$, bei Strontium von $10,5^\circ$ bis 12° und bei Zink von 18° bis $19,5^\circ$ gemessen.

4 Vorbereitung

Als Vorbereitung zu dem Versuch sollte der Glanzwinkel zu verschiedenen Elementen ermittelt werden. Dieser kann mit Gleichung 8, den gegebenen Literaturwerten der K-Kante E_K^{Lit} [7] und der Gitterkonstante $d = 201,4 \text{ pm}$ berechnet werden mit

$$\theta_{\text{glanz}} = \arcsin\left(\frac{h \cdot c}{E \cdot 2d}\right). \quad (9)$$

Daraus folgen die Werte, die in der Tabelle 1 aufgeführt sind.

Tabelle 1: Literaturwerte und daraus errechnete Größen verschiedener Elemente

	Z	$E_K^{\text{Lit}} / \text{keV}$	$\theta_{\text{glanz}}^{\text{Lit}} / ^\circ$	σ_k
Zn	30	9,65	18.60042993	3,56
Ge	32	11,10	16.09910447	3,68
Br	35	13,47	13.20934876	3,85
Rb	37	15,2	11.68329037	3,95
Sr	38	16,10	11.02175704	4,01
Zr	40	17,99	9.851577763	4,11

Zusätzlich dazu sollten die Energien bei denen die $\text{Cu-}K_\alpha$ und $\text{Cu-}K_\beta$ erwartet werden ermittelt werden. Diese liegen bei $E_{K_\alpha} = 8,046 \text{ keV}$ und $E_{K_\beta} = 8,904 \text{ keV}$. Dazu lässt sich ebenfalls der Glanzwinkel jeweils bestimmen zu $\theta_{K_\alpha} = 22,49^\circ$ und $\theta_{K_\beta} = 20,22^\circ$.

5 Auswertung

5.1 Bragg Bedingung

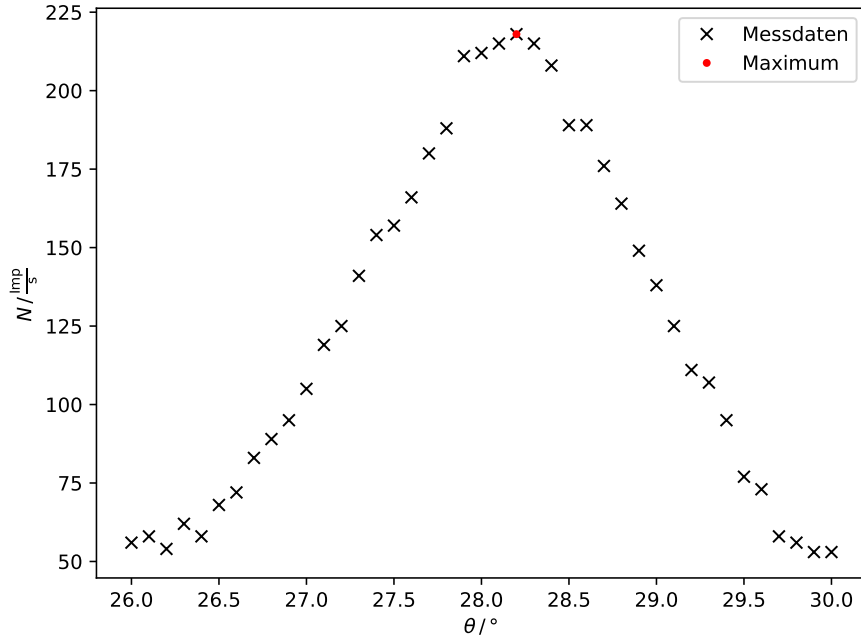


Abbildung 2: N gegen θ aufgetragen.

Aus (2) wird ein Maximum bei einem Winkel von $\theta = 28.2^\circ$ ermittelt. Daraus lässt sich die absolute und relative Abweichung vom Sollwinkel bestimmen.

$$\Delta\theta_{\text{abs}} = 0.2^\circ$$

$$\Delta\theta_{\text{rel}} = 0.0071 = 0.7\%$$

5.2 Emissionsspektrum

Aus den Messdaten lässt sich das Emissionsspektrum einer Kupferröntgenröhre in (3) graphisch darstellen.

Zu erkennen sind die ermittelten Peaks, die die K_α und K_β Linie darstellen, sowie der rot markierte Bremsberg.

Die maximale Energie E_{max} und die minimale Wellenlänge lassen sich aus der Beschleunigungsspannung $U=35$ kV bestimmen. Mit

$$\theta_{\text{Grenz}} = \arcsin\left(\frac{hc}{2dUe_0}\right) \quad (10)$$

ergibt sich für den Grenzwinkel dann:

$$\begin{aligned}
E_{\max} &= 35 \text{ keV} \\
\lambda_{\min} &= 354.241 \text{ nm} \\
\theta_{\text{Grenz}} &= 5.045^\circ
\end{aligned}$$

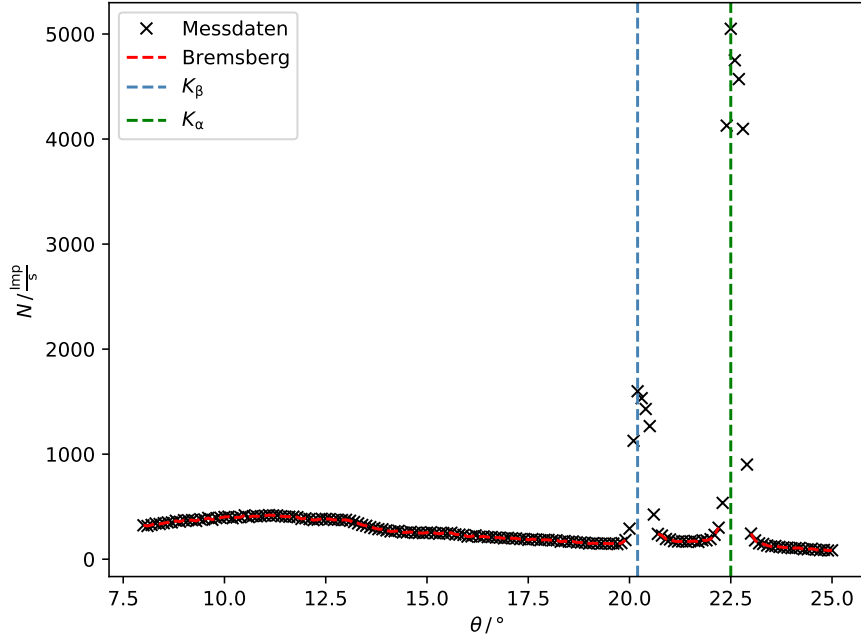


Abbildung 3: Emissionsspektrum einer Cu-Röntgenröhre.

Das Detailspektrum um die Peaks ist in (4) dargestellt, wobei der grüne Bereich die Full Width at Half Maximum markiert.

Hieraus lässt sich ΔE_{FWHM} bestimmen und daraus das Auflösungsvermögen A mit

$$A = \frac{E_{\max}}{\Delta E_{\text{FWHM}}}$$

für die K_α und K_β Linie berechnen. So ergibt sich:

$\theta_\alpha = 20.2^\circ$	$\theta_\beta = 22.5^\circ$
$E_\alpha = 8.0434 \text{ keV}$	$E_\beta = 8.9142 \text{ keV}$
$\Delta E_{\text{FWHM}\alpha} = 165.63 \text{ V}$	$\Delta E_{\text{FWHM}\beta} = 205.58 \text{ V}$
$A_\alpha = 48.56$	$A_\beta = 43.36$

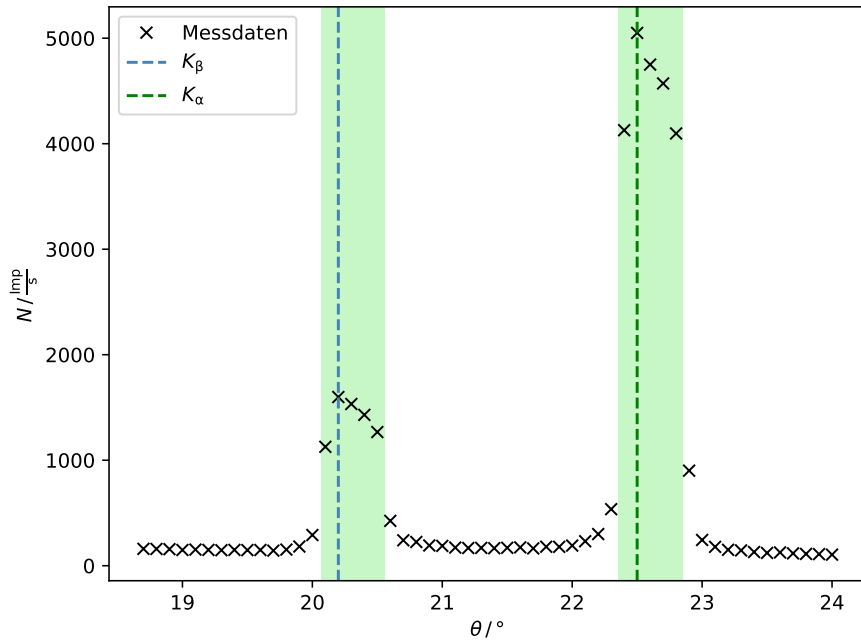


Abbildung 4: Emissionsspektrum einer Cu-Röntgenröhre mit der FWHM.

Mithilfe der aus der Literatur entnommenen Absorptionsenergie $E_{K,abs} = 8980.476 \text{ eV}$ können die Abschirmkonstanten für Kupfer mit den Formeln

$$\sigma_1 = Z - \sqrt{\frac{E_{Kabs}}{R_y}}$$

$$\sigma_2 = Z - \sqrt{\frac{m^2}{n^2}(Z - \sigma_1)^2 - \frac{m^2}{R_\infty}E_{K\alpha}}$$

$$\sigma_3 = Z - \sqrt{\frac{l^2}{n^2}(Z - \sigma_1)^2 - \frac{l^2}{R_\infty}E_{K\beta}}$$

bestimmt werden. Mit $n=1$, $m=2$ und $l=3$ ergeben sie sich zu:

$$\sigma_1 = 3.3031^\circ$$

$$\sigma_2 = 12.3981^\circ$$

$$\sigma_3 = 22.3776^\circ$$

5.3 Das Absorptionsspektrum

Im Folgenden werden die Maxima und Minima der Impulshöhen von Zink, Gallium, Brom, Rubidium, Strontium und Zirkonium gekennzeichnet.

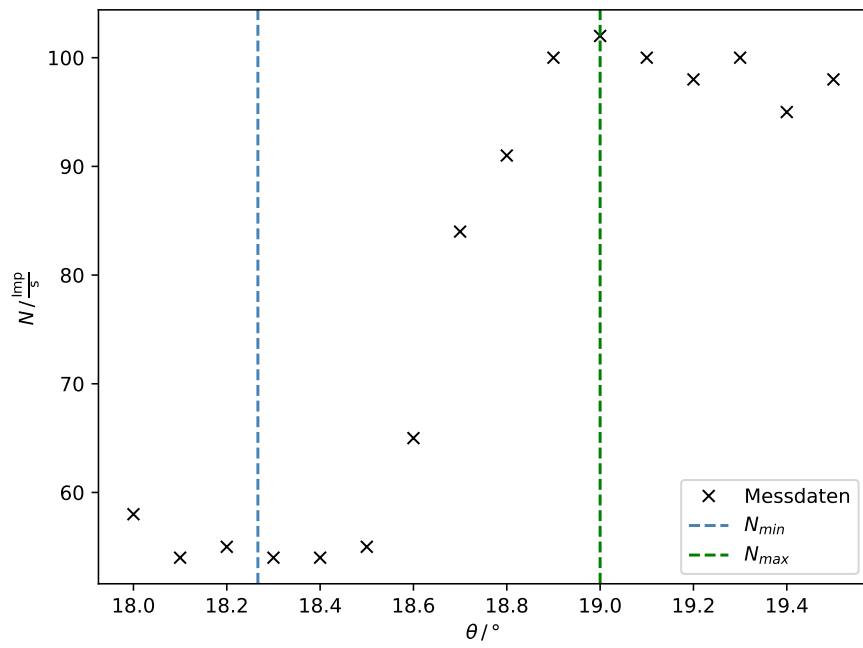


Abbildung 5: Absorptionsspektrum eines Zinkabsorbers.

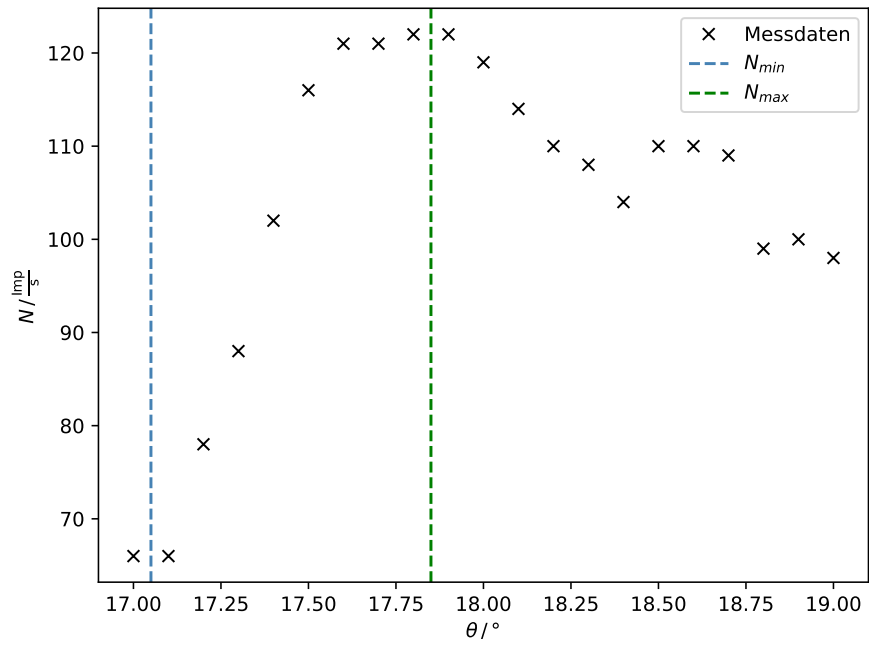


Abbildung 6: Absorptionsspektrum eines Galliumabsorbers.

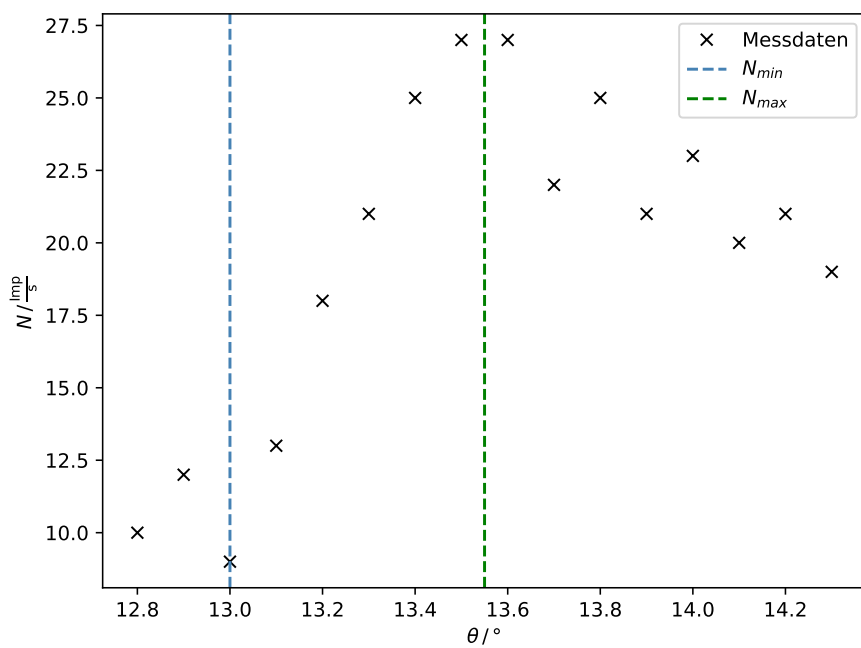


Abbildung 7: Absorptionsspektrum eines Bromabsorbers.

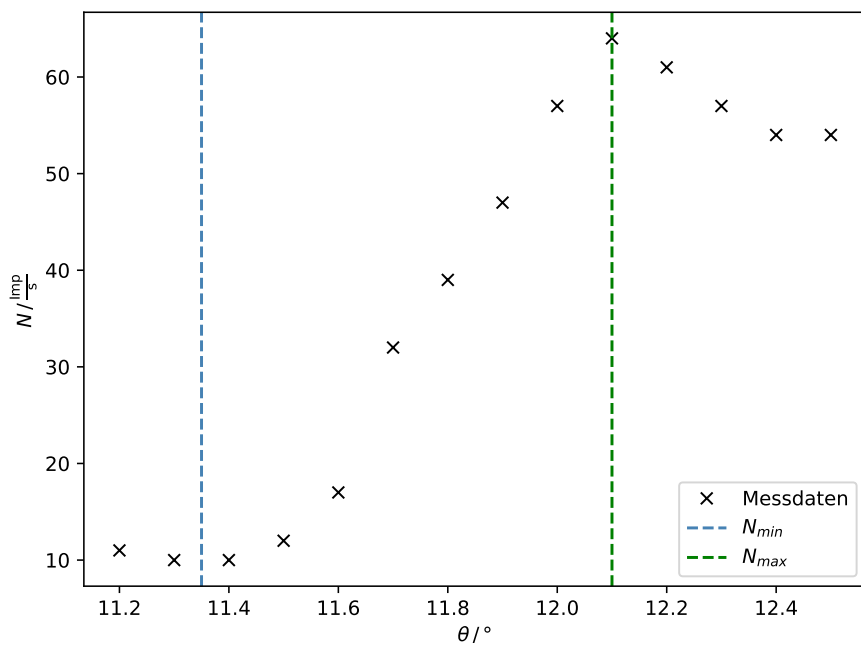


Abbildung 8: Absorptionsspektrum eines Rubidiumabsorbers.

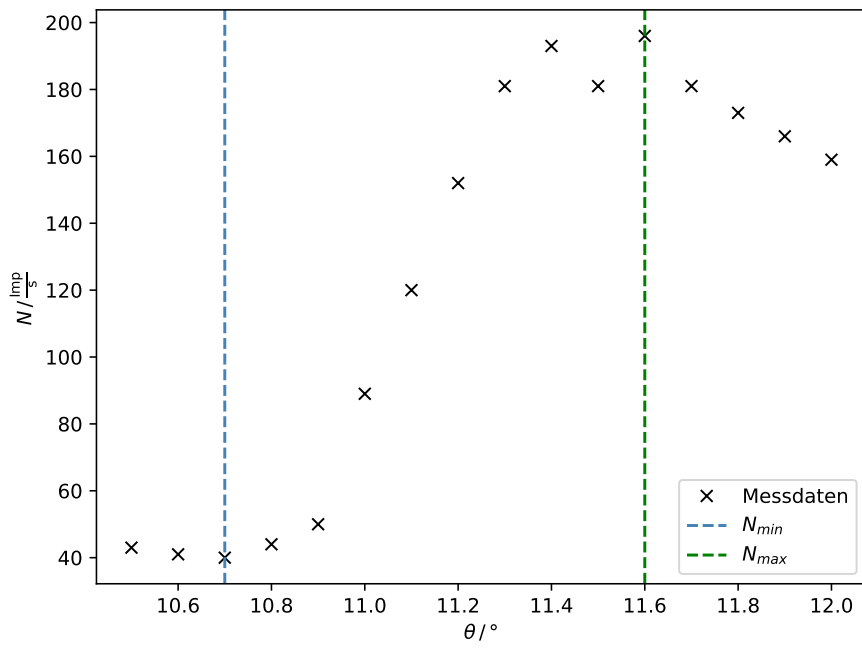


Abbildung 9: Absorptionsspektrum eines Strontiumabsorbers.

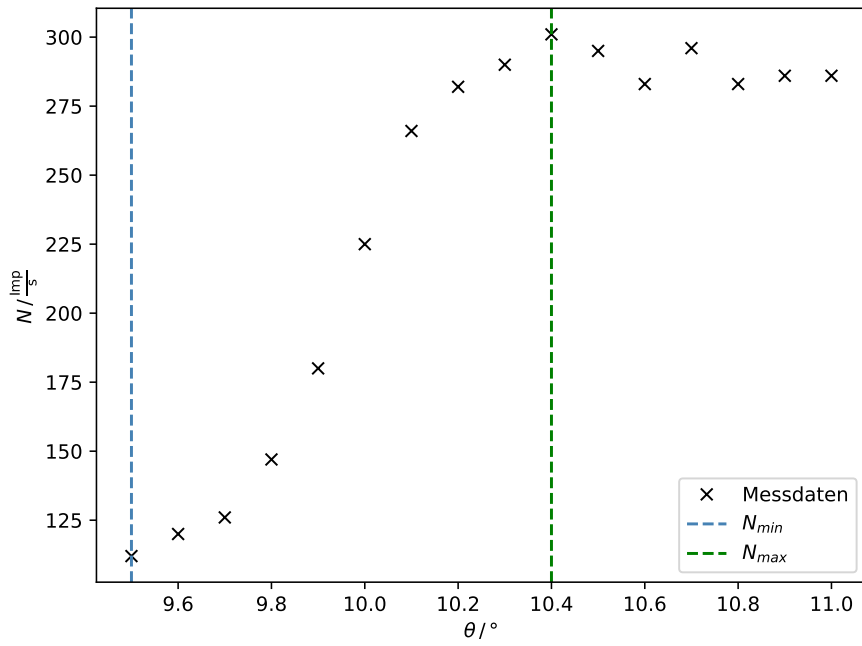


Abbildung 10: Absorptionsspektrum eines Zirkoniumabsorbers.

Aus diesen lassen sich die Bragg-Winkel θ_K durch Mittelung der Minima und Maxima sowie die Energieübergänge bestimmen, woraus sich die Abschirmzahlen σ_K nach Formel (6) bestimmen lassen.

Tabelle 2: Messwerte der Energieübergänge E_K , Bragg-Winkel θ_K und Abschirmzahlen σ_K

	Z	E_K / keV	$\theta_K / ^\circ$	σ_K
Zn	30	9.6503	18.6	3.5652
Ga	31	10.3508	17.5	3.6359
Br	35	13.4795	13.3	3.8365
Rb	37	15.1788	11.7	3.9677
Sr	38	15.8471	11.2	4.2737
Zr	40	17.7258	10	4.3729

5.4 Bestimmung der Rydbergkonstante

Aus der Beziehung $E_K \sim Z^2$ nach Moseley kann die Rydbergenergie aus der Steigung des $\sqrt{E_K} - Z$ Diagramms aus (11) bestimmt werden.

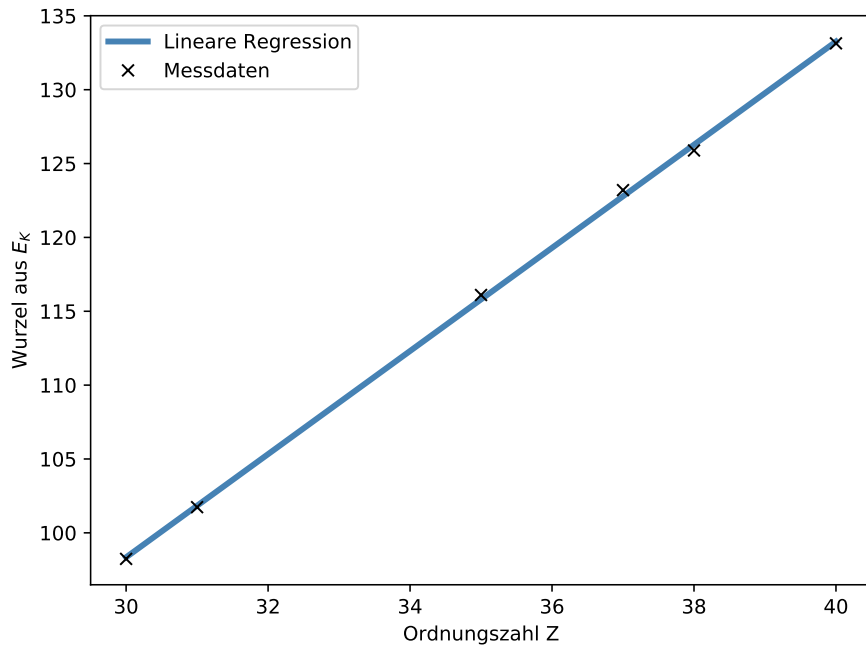


Abbildung 11: $\sqrt{E_K} - Z$ Diagramm.

Aus der Linearen Regression ergibt sich die Ausgleichsgerade

$$g = 3.4913 x - 6.3950.$$

Aus dem Quadrat der Steigung wird nun die Rydbergenergie zu

$$R_{\infty} = 12.1894 \text{ eV}$$

bestimmt. Daraus kann nun die Rydbergkonstante R_y mit

$$R_y = \frac{R_{\infty}}{hc}$$

zu

$$R_y = 9831438.62 \frac{1}{\text{m}}.$$

bestimmt werden.

6 Diskussion

Da wir den Versuch nicht selbst durchgeführt, sondern lediglich die Anleitung und die Messdaten bekommen haben, können wir mögliche Fehlerquellen während der Durchführung schwer einschätzen. Jedoch ist eine mögliche Fehlerquelle, dass bei der Messung die Tür des Gehäuses nicht richtig geschlossen war, wodurch Fehler entstehen können.

Eine weitere Fehlerquelle kann in der Abschätzung zur Berechnung der Abschirmkonstante σ_L liegen, da für die Berechnung dieser die L_I - Kante, aufgrund der fehlenden Auflösung, nicht in die Berechnung mit eingeflossen ist.

Bei der Untersuchung der Bragg Bedingung aus Kapitel (5.1) beträgt die absolute Abweichung vom Sollwinkel 0.2° und liegt somit deutlich unter dem Toleranzwert von 1° . Nun werden die Ergebnisse der Untersuchung des Emissionsspektrums einer Kupfer-Röntgen-Röhre aus Kapitel (5.2) diskutiert. Im Vergleich mit den in Kapitel (3.2) aufgeführten Literaturwerten ergeben sich die in Tabelle (3) befindenden relativen Abweichungen.

Tabelle 3: Relative Abweichungen der Messwerte von den Literaturwerten.

$\Delta_{rel}E_\alpha / \%$	$\Delta_{rel}\theta_\alpha / \%$	$\Delta_{rel}E_\beta / \%$	$\Delta_{rel}\theta_\beta / \%$
0.03	0.099	0.11	0.04

Aufgrund der geringen Abweichungen ist diese Messung als gelungen und aussagekräftig zu betrachten. Aus den gegebenen Messwerten kann die minimale Wellenlänge λ_{min} nicht bestimmt werden, da der Grenzwinkel nicht ermittelt werden kann. Der theoretisch bestimmte Grenzwinkel von $\theta_{Grenz} = 5.045^\circ$ erscheint realistisch, da der Kurvenverlauf um diesen Winkel zwar außerhalb des Intervalls von Abbildung (3) liegt, aber ein Abfall auf Null dort möglich ist.

Im Folgenden werden die Messwerte aus Tabelle (2) mit den Literaturwerten aus Tabelle (1) verglichen. Dafür werden die relativen Abweichungen in Tabelle (4) notiert.

Tabelle 4: Relative Abweichungen der Messwerte von den Literaturwerten.

	$\Delta_{rel}E_K / \%$	$\Delta_{rel}\theta_K / \%$	$\Delta_{rel}\sigma_K / \%$
Zn	0.003	0.002	0.15
Ga	0.19	1.35	1.2
Br	0.07	0.69	0.35
Rb	0.14	0.14	0.45
Sr	1.57	1.62	6.57
Zr	1.47	1.51	6.4

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass allgemein nur kleine Abweichungen auftreten. Wird $\Delta_{rel}\theta_K$ betrachtet, fällt auf, dass die Abweichungen für Zinn, Brom und Robidium im Rahmen der in Kapitel (5.1) ermittelten Abweichung liegen. Gallium, Strontium und

Zirkonium liegen knapp über der ermittelten Abweichung von 0.7%. Auffällig ist, dass die Abweichung bei größer werdender Ordnungszahl zunimmt und bei Strontium und Zirkonium deutlich höhere Fehler, vorallem bei der Abschirmkonstante, auftreten.

Wird die Rydbergkonstante mit der Literatur verglichen, fällt auf, dass die absolute Abweichung $\Delta_{\text{abs}} R_y = 1142292.94 \frac{1}{\text{m}}$ und die relative Abweichung $\Delta_{\text{rel}} R_y = 10.41\%$ betragen. Diese hohe Abweichung könnte der quantitativen Ausgleichsgeraden geschuldet sein.

Literatur

- [1] *Absorptionsenergie für Kupfer*. 2021. URL: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/XrayTrans/search.pl?element=Cu&trans=All&lower=&upper=&units=eV> (besucht am 03.05.2021).
- [2] *Energien der K-Linien Kupfer*. 2021. URL: https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p6/p6354_d.pdf (besucht am 04.05.2021).
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] *Literaturwert für spezifische Wärmekapazität von Wasser*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html (besucht am 01.11.2020).
- [7] *Literaturwerte der K-Kanten*. 2021. URL: <https://wissen.science-and-fun.de/tabellen-fur-spektroskopiker/wellenlaengen-und-anregungsenergien-von-k-und-l-absorptionskanten/> (besucht am 04.05.2021).
- [8] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [9] *Versuchsanleitung zu Versuch V602 V602: Röntgenemission und -absorption*. Fakultät Phyik, TU Dortmund. 2021.