

V103

Biegung elastischer Stäbe

Yanick Sebastian Kind
yanick.kind@udo.edu

Till Willershausen
till.willershausen@udo.edu

Durchführung: 25.05.2021

Abgabe: 31.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Durchbiegung eines homogenen Stabes einseitiger Einspannung	3
1.2	Durchbiegung eines Stabes zweiseitiger Auflage	4
2	Durchführung	5
3	Auswertung	5
3.1	Berechnung des Flächenträgheitsmoments	6
3.2	Bestimmung des Elastizitätsmodul bei einseitiger Einspannung	6
3.3	Bestimmung des Elastizitätsmodul bei beidseitiger Einspannung	9
4	Diskussion	13
	Literatur	14

1 Theorie

Das Ziel dieses Versuches ist es, die Elastizitätsmodule verschiedener Materialien zu ermitteln und die erhaltenen Werte mit den Literaturwerten zu vergleichen.

Die physikalische Größe der mechanischen Spannung σ_m ist definiert durch die wirkende Kraft F auf eine Fläche A . Eine auf einen Körper wirkende Spannung kann eine Gestalts- und Volumenveränderung hervorrufen. Unterteilt wird diese Größe in die senkrecht zur Oberfläche stehende Komponente, der sogenannten Normalspannung σ und die zur Oberfläche parallele Komponente, der sogenannten Tagential oder Schubspannung. wirkt durch Druck oder Zug eine Spannung in nur eine Körperdimension vor, so ist diese Proportional zur Längenänderung $\Delta L/L$ und es folgt das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

mit dem materialspezifischen Elastizitätsmodul E als Proportionalitätsfaktor. Mit Hilfe einer hinreichend genauen Messvorrichtung könnte das Elastizitätsmodul aus kleinen Längenänderungen ΔL eines stabförmigen Körpers bestimmt werden. In diesem Versuch wird jedoch mit Hilfe der Biegung, die bereits bei relativ geringen Kräften eine leicht messbare Veränderung am Probenstab hervorruft, der Elastizitätsmodul bestimmt. Dabei werden zwei unterschiedliche Arten der Biegung untersucht. Diese sind in Abbildung 1 dargestellt und unterscheiden sich in der Einspannung und der Positionierung des Gewichtes. Die dabei gemessene Messgröße D ist bei sonst gleichen Verhältnissen der

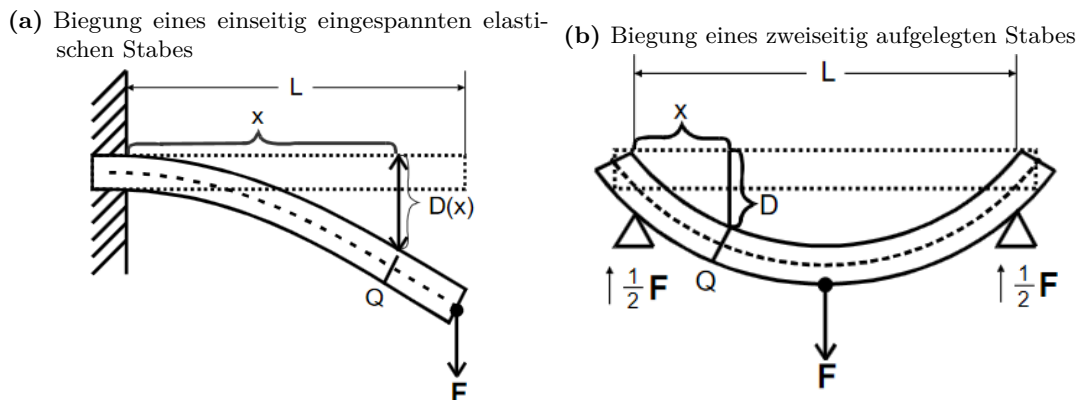


Abbildung 1: Biegung mit beid- und einseitiger Einspannung. Die gestrichelte Linie markiert die neutrale Faser, die ihre Länge beibehält [1]

Kraft und der Abmessungen des Stabes sehr viel größer als ΔL .

1.1 Durchbiegung eines homogenen Stabes einseitiger Einspannung

Bei der einseitigen Einspannung sind die Längenänderungen nicht mehr konstant. Daher muss die Durchbiegung $D(x)$ als Funktion des Ortes errechnet werden. Da in der Funktion

$D(x)$ der Elastizitätsmodul auftaucht, kann die Materialkonstante mit Hilfe einer Messreihe der Größen D und x bestimmt werden. Die am uneingespannten Ende des Stabes wirkende Gravitationskraft F eines aufgehängten Gewichtes bewirkt ein angreifendes Drehmoment

$$M_F = F(L - x) \quad (2)$$

mit der Länge des Hebelarms $(L - x)$. Es kommt zu einer Dehnung der oberen und eine Stauchung der unteren Stabschichten, sodass sich der Querschnitt in verdrehter Position befindet. Dabei behält die neutrale Faser in der Mitte des Querschnitts Q seine Länge bei. Die Zug- und Druckspannungen, die an Q angreifen sind entgegengesetzt gleich und bewirken so ein Drehmoment M_σ , welches sich durch Integration über Q mit

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) dq \quad (3)$$

berechnen lässt, worin y den Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser x bedeutet. Daraus lässt sich für die Durchbiegung die Formel

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \quad (4)$$

herleiten mit dem Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 dq(y). \quad (5)$$

1.2 Durchbiegung eines Stabes zweiseitiger Auflage

An den Auflagestellen des beidseitig aufgelegten Stabes wirkt nach Abbildung 1b die Gravitationskraft $F/2$ des Gewichtes in der Mitte der Querschnittsfläche mit einem Hebelarm der Länge x . Dadurch wirken die Drehmomente

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad \left(\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (6)$$

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x) \quad \left(\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \right) \quad (7)$$

woraus sich die Durchbiegung

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad \left(\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (8)$$

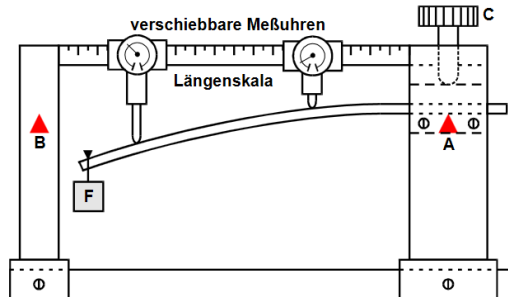
$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad \left(\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \right) \quad (9)$$

ergibt.

2 Durchführung

In Abbildung 2 ist der Schematische Aufbau der verwendeten Apperatur wiedergegeben. Mit dieser Apperatur wird sowohl die Messung mit einseitiger, als auch die mit beidseitiger Einspannung durchgeführt. Des weiteren werden vier Proben zur Vermessung benötigt. Dabei handelt es sich um zwei runde und zwei rechteckige Stäbe, von denen zunächst das Gewicht sowie die Maße vermessen werden. Für den ersten Versuchsteil wird ein

Abbildung 2: Schematische Darstellung einer Apperatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe [1]



Probestab an der Stelle $x = 0$ cm einseitig eingespannt. Eine verschiebbare Messuhr wird an der Stelle $x = 5$ cm auf null tariert. Danach wird das Gewicht der Masse $M = g$ an der Stelle $x = 53$ cm befestigt und die Differenz wird an der Messuhr abgelesen. Bei runden Stäben ist darauf zu achten, dass die Messuhr oben auf dem Stab drauf ist. Danach wird das Gewicht entfernt und die Messuhr wird um 5 cm verschoben. Es erfolgt eine erneute Messung der Differenz. Das Verfahren wird wiederholt bis die Messuhr in etwa bei 50 cm ist und dann für den nächsten Stab auch wieder durchgeführt. Für den zweiten Messteil wird ein Probestab beidseitig aufgelegt. Dabei wird eine Seite eingespannt und die andere nur aufgelegt. Dieses mal werden zwei Messuhren verwendet, wobei die erste sich an der Stelle $x = 5$ cm und die zweite an der Stelle $x \approx 50$ cm befindet. Es werden erneut die Uhren auf null tariert, sodass, nachdem das Gewicht $M = g$ in die Mitte angebracht wurde, die Differenz einfach abgelesen werden kann. Danach werden die Uhren um jeweils 5 cm aufeinander zu geschoben und die Messung wird wiederholt. Dieses Verfahren wird durchgeführt bis zehn Messwerte entnommen wurden und dann wird es für alle anderen Stäbe wiederholt.

3 Auswertung

Jegliche Fehlerrechnung wurde mit der python-Bibliothek uncertainties [4] absolviert. Trotz dessen sind die Formeln für die Unsicherheiten in den jeweiligen Abschnitten angegeben. Allgemeine Rechnungen wurden mit der python-Bibliothek numpy [5] automatisiert. Die graphischen Unterstützungen wurden mit Hilfe der python-Bibliothek matplotlib [3] erstellt.

3.1 Berechnung des Flächenträgheitsmoments

Das Flächenträgheitsmoment eines Stabes mit quadratischer Kantenlänge k wird gemäß Beziehung (5)

$$I = \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} y^2 \, dx \, dy = \frac{k^3}{12} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} dx = \frac{k^4}{12} \quad (10)$$

berechnet. Das Flächenträgheitsmoment eines Stabs mit kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius R wird mittels

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2(\theta) \, dr \, d\theta = \frac{R^4}{8} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos(2\theta)) \, d\theta = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (11)$$

berechnet.

3.2 Bestimmung des Elastizitätsmodul bei einseitiger Einspannung

In der Tabelle 1 sind die zu den Weglängen x gemessenen Durchbiegungen D_1 bis D_4 aufgelistet. Die Indizes stehen jeweils für die Nummerierung des verwendeten Stabs. Die zu den Stäben gehörigen Gewichte und Abmessungen sind in der Tabelle 2 aufgeführt. Dabei steht h für die Höhe, b für die Breite, L für die Länge und D für den Durchmesser, falls der Stab rund ist. In den Abbildungen 3, 4, 5 und 6 sind die zu den jeweiligen Stäben gehörenden Messwerte graphisch dargestellt. Jedoch sind die Durchbiegungen D nicht gegen x sondern gegen $Lx^2 - x^3/3$ aufgetragen, welcher als Linearisierungsterm dient. Die Gleichung (4) lässt sich in eine Regressionsgerade

$$y = mz + b \quad (12)$$

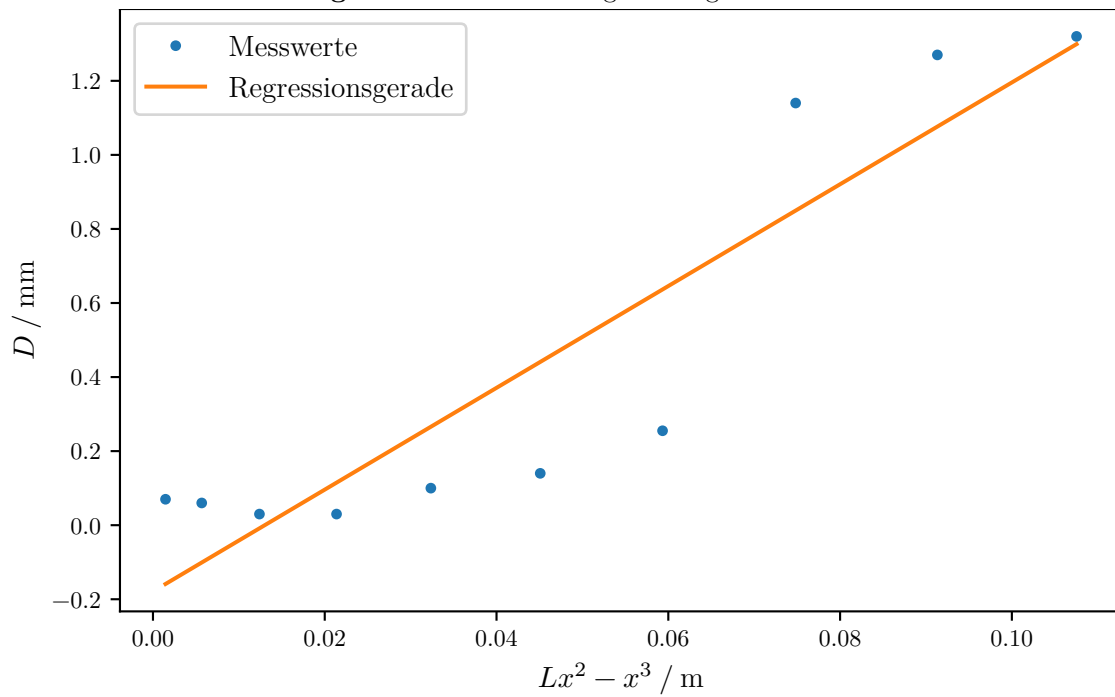
umschreiben, wobei $y = D$, $m = F/2EI$ und $z = Lx^2 - x^3/3$ gilt. Somit lässt sich der Elastizitätsmodul mit $E = F/2mI$ ermitteln. In der Tabelle 3 sind zu allen Stäben die Regressionsparameter und der damit errechnete Elastizitätsmodul aufgetragen. Der

Tabelle 1: Messwerte bei einseitiger Einspannung

x / cm	D_1 / mm	D_2 / mm	D_3 / mm	D_4 / mm
5	0,07	0,075	0,17	0,15
10	0,06	0,2	0,52	0,58
15	0,03	0,39	1,7	1,11
20	0,03	0,49	1,76	1,95
25	0,1	0,99	2,58	2,62
30	0,14	1,33	3,56	4,05
35	0,255	1,72	4,63	4,55
40	1,14	2,13	5,6	6,26
45	1,27	2,55	6,78	6,43
49,7	1,32	2,82	7,3	7,18

Tabelle 2: Abmessungen der Stäbe

	M / g	h / cm	b / cm	D / cm	L / cm
Stab 1	365,1	-	-	1	60,1
Stab 2	463,7	1	1	-	60,1
Stab 3	166,8	1	1	-	60,1
Stab 4	378,5	-	-	1	60,1

Abbildung 3: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 1**Tabelle 3:** Regressionsparamter und Elastizitätsmodul der Stäbe

	$m / \text{m}^{-2} \cdot 10^{-3}$		$b / \text{m} \cdot 10^{-4}$	E / GPa
Stab 1	$1,37 \pm 0,22$		$1,79 \pm 1,25$	$759,77 \pm 12,08$
Stab 2	$2,69 \pm 0,07$		$0,54 \pm 0,42$	$228,52 \pm 6,29$
Stab 3	$6,8 \pm 0,26$		$3,88 \pm 1,47$	$90,4 \pm 3,41$
Stab 4	$6,87 \pm 0,38$		$3,89 \pm 2,19$	$152,09 \pm 8,47$

Abbildung 4: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 2

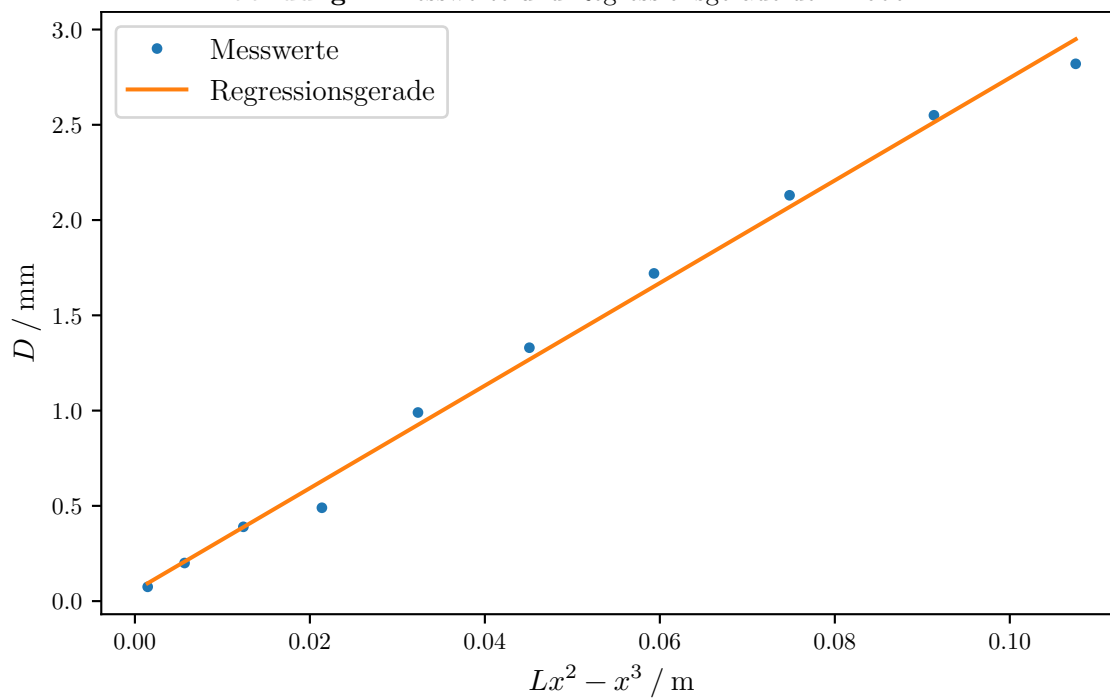


Abbildung 5: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 3

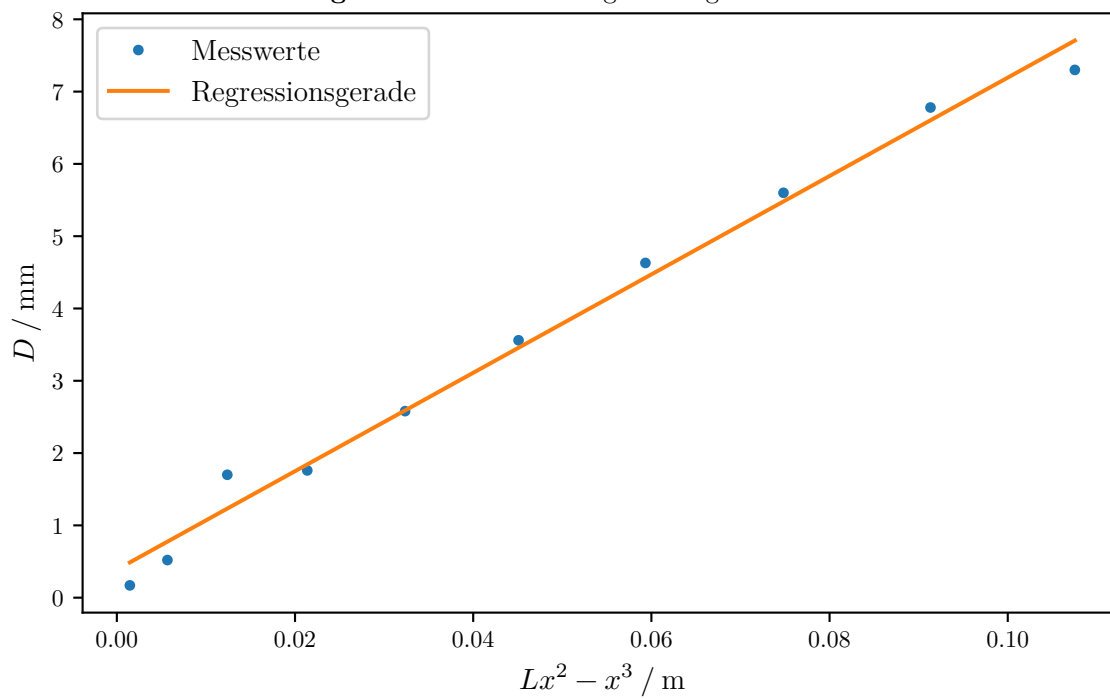
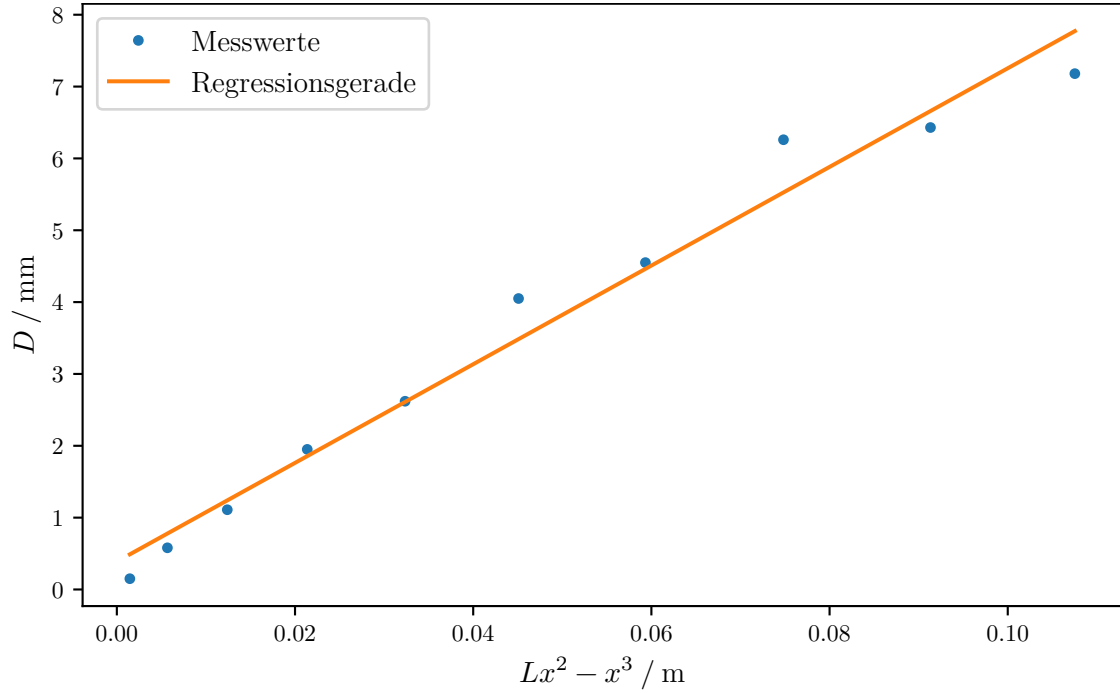


Abbildung 6: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 4



Fehler des Elastizitätsmoduls ergibt sich nach Gauß durch

$$\Delta E = \left| \frac{\partial E}{\partial m} \Delta m \right|. \quad (13)$$

3.3 Bestimmung des Elastizitätsmodul bei beidseitiger Einspannung

In der Tabelle 4 sind die gemessenen Durchbiegungen D für gemessene Weglängen x_R , welche sich auf die rechte Seite beziehen, aufgeführt. In der Tabelle 5 sind die Messwerte analog zur ebend genannten Tabelle für die linke Seite aufgelistet. Bei den Messwerten rechts von der mitte ($0 \leq x \leq L/2$) lautet der Linearisierungsterm $3L^2x - 4x^3$. Die linken Messwerte ($L/2 \leq x \leq L$) werden mit Hilfe von $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ linearisiert. Zu den jeweiligen Stäben wurden die Abbildungen 7, 8, 9 und 10 erstellt, welche die Messwerte und die Regressionsgeraden enthalten. Die Regressionsvorschrift für die rechten und linken Messwerte lautet ähnlich wie in Abschnitt 3.2

$$y = mz + b. \quad (14)$$

wobei $m = F/48EI$ gilt. Je nach Linearisierung gilt $z = 3L^2x - 4x^3$ oder $z = 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$. Nach Durchführung der Regression lässt sich der Elastizitätsmodul mit Hilfe von $E = F/48mI$ ermitteln. In der Tabelle 6 sind die Regressionsparameter und der dazugehörige Elastizitätsmodul für die rechte Seite aufgelistet. Für die linke Seite dient die Tabelle 7. Die Unsicherheit der beiden Elastizitätsmodulen wird genau so wie in Abschnitt 3.2 mit Hilfe von der Gleichung (13) berechnet.

Tabelle 4: Messwerte bei beidseitiger Einspannung für $0 \leq x \leq L/2$

x_R / cm	D_1 / mm	D_2 / mm	D_3 / mm	D_4 / mm
5	0,03	0,04	0,38	0,06
10	0,09	0,12	0,65	0,22
15	0,17	0,17	0,93	0,41
20	0,26	0,2	1,12	0,59
25	0,35	0,26	1,15	0,75

Tabelle 5: Messwerte bei beidseitiger Einspannung für $L/2 \leq x \leq L$

x_L / cm	D_1 / mm	D_2 / mm	D_3 / mm	D_4 / mm
55	0,02	0,07	0,03	0,12
50	0,14	0,14	0,39	0,25
45	0,26	0,22	0,71	0,46
40	0,35	0,25	0,98	0,66
35	0,36	0,27	1,1	0,81

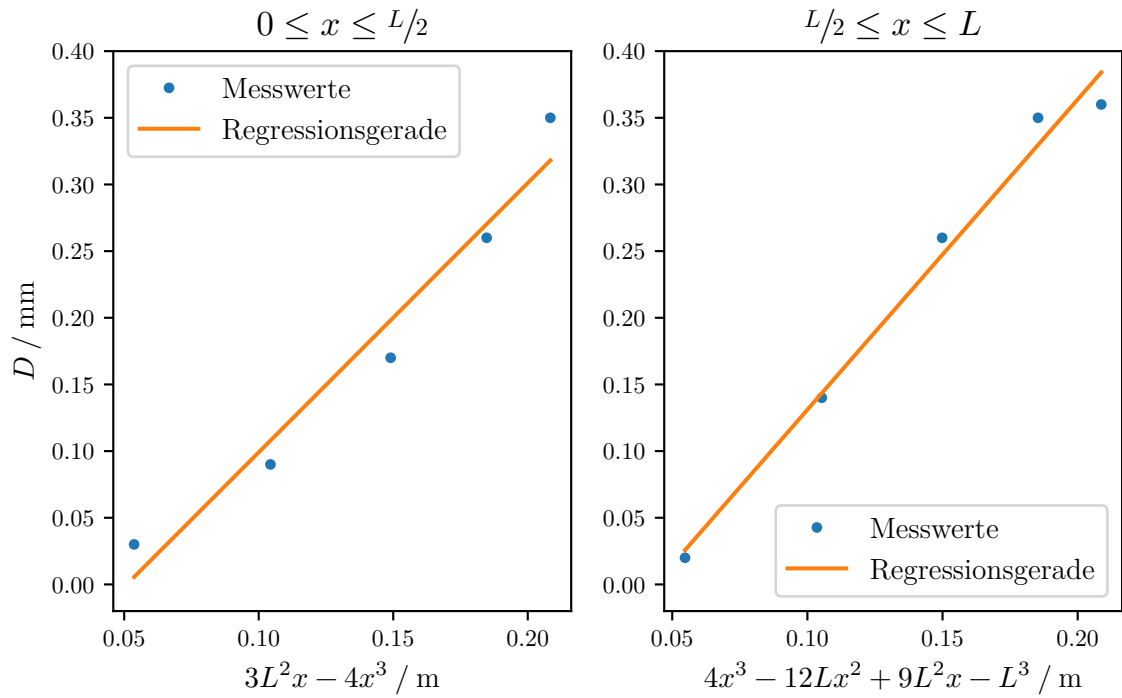


Abbildung 7: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 1

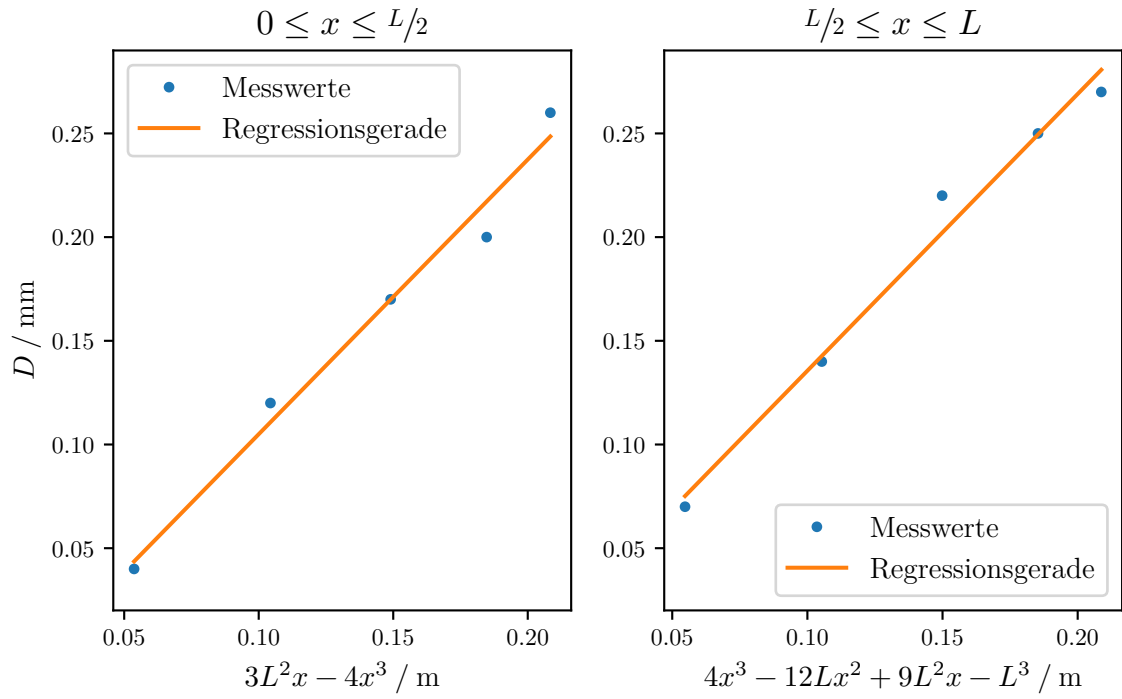


Abbildung 8: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 2

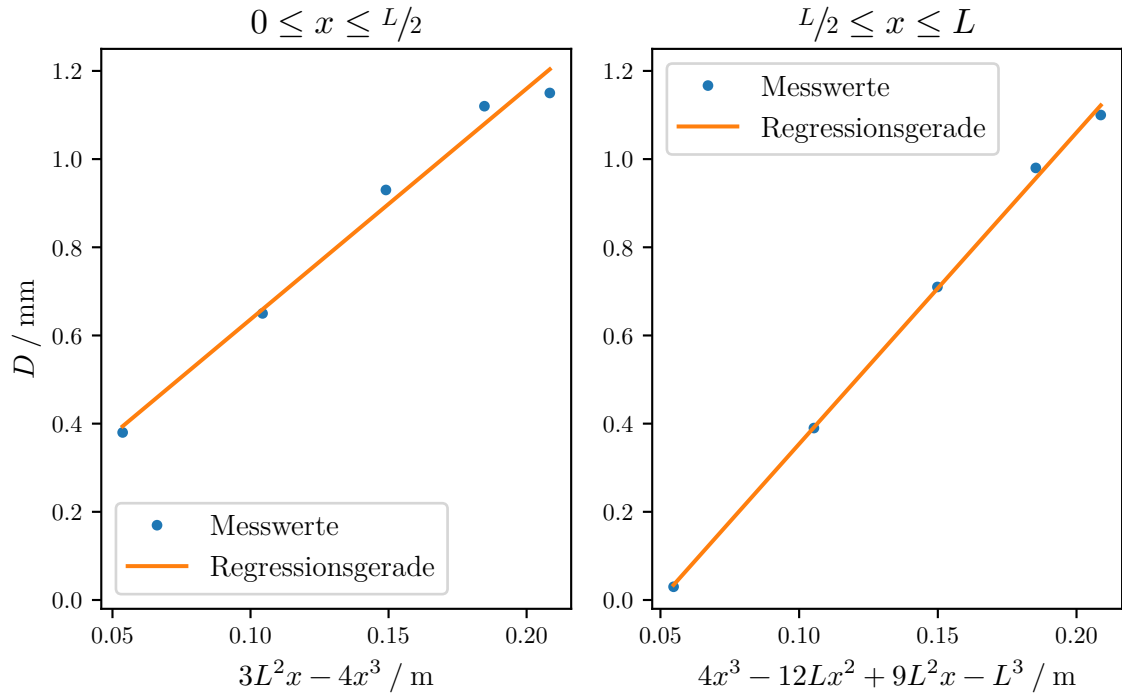


Abbildung 9: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 3

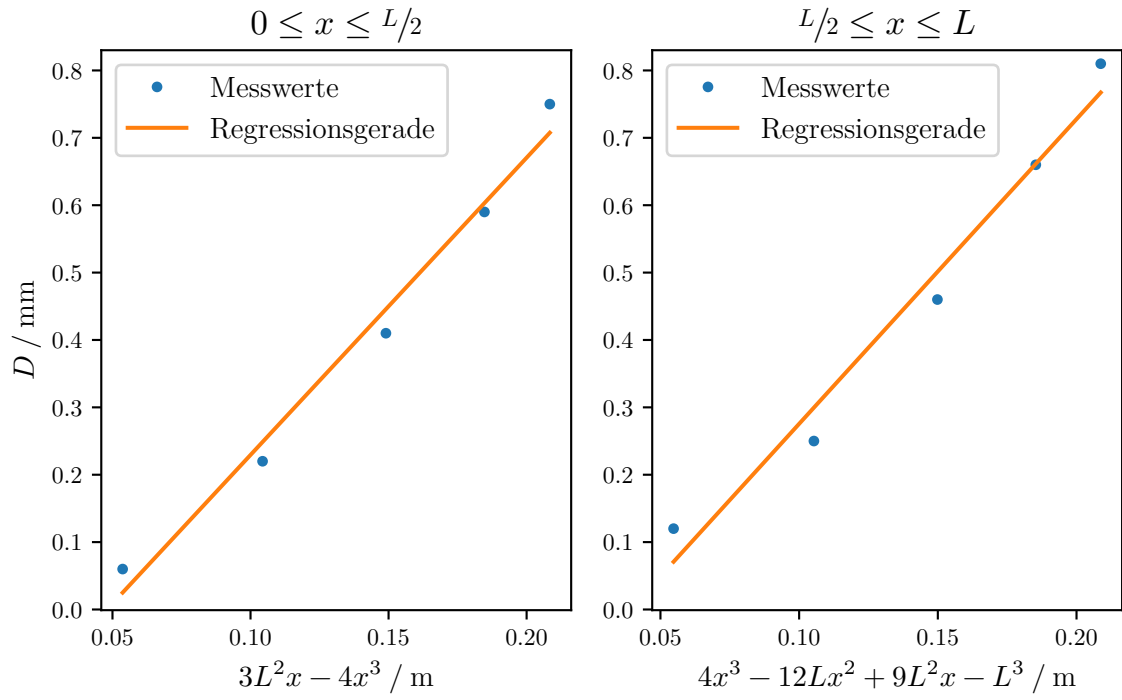


Abbildung 10: Messwerte und Regressionsgerade der Probe 4

Tabelle 6: Regressionsparameter und Elastizitätsmodul der Stäbe (rechts)

	$m_R / \text{m}^{-2} \cdot 10^{-3}$		$b_R / \text{m} \cdot 10^{-4}$		E_R / GPa
Stab 1	$2,02 \pm$	0,24	$-1,02 \pm$	0,37	$485,49 \pm 59,40$
Stab 2	$1,32 \pm$	0,11	$-0,27 \pm$	0,16	$436,15 \pm 35,01$
Stab 3	$5,23 \pm$	0,36	$1,13 \pm$	0,54	$110,04 \pm 7,67$
Stab 4	$4,41 \pm$	0,34	$2,11 \pm$	0,51	$222,31 \pm 2,05$

Tabelle 7: Regressionsparameter und Elastizitätsmodul der Stäbe (links)

	$m_L / \text{m}^{-2} \cdot 10^{-3}$		$b_L / \text{m} \cdot 10^{-4}$		E_L / GPa
Stab 1	$2,32 \pm$	0,16	$-1,01 \pm$	0,25	$421,36 \pm 29,32$
Stab 2	$1,33 \pm$	0,1	$0,02 \pm$	0,15	$432,82 \pm 32,72$
Stab 3	$7,06 \pm$	0,15	$-3,52 \pm$	0,23	$81,78 \pm 7,67$
Stab 4	$4,52 \pm$	0,42	$-1,77 \pm$	0,65	$216,84 \pm 2,05$

4 Diskussion

Der Stab 1 ist braun und quaderförmig, die Probe 2 braun und rund, der Stab 3 quaderförmig und silber und der vierte Stab braun/gelb und rund. Bei Betrachtung der Tabelle 3 fällt auf, dass der Stab 1 ein besonders großes Elastizitätsmodul aufweist, wobei die Elastizitätsmodule der anderen drei Stäbe in einem Bereich von ca. 90 bis 230 GPa bleiben. Ebenfalls werden hohe Abweichung in der Abbildung des ersten Stabs 3 ersichtlich, da die Messwerte ein beinahe oszillatorisches Verhalten aufweisen anstatt linear auf einer Geraden zu verlaufen. Somit lässt sich sagen, dass der hohe Elastizitätsmodul durch eine Messungenauigkeit entstanden sein könnte. Dies wird durch die Tatsache gestärkt, dass der Stab bereits vor der Versuchsdurchführung stark verbogen war, so dass dort systematische Fehler aufgekommen sein könnten. Dieser hohe Elastizitätsmodul des ersten Stabs wird ebenfalls in der Tabelle 6 und 7 ersichtlich. Jedoch weist auch der zweite Stab in diesen Tabellen ein hohes Elastizitätsmodul auf. Aufgrund des hohen Elastizitätsmoduls des ersten Stabs kann auf kein Material geschlossen werden. Bei dem zweiten Stab lässt sich aufgrund des Elastizitätsmodul und der Farbe lässt sich das Material Nickel vermuten. Der dritte Stab lässt sich aufgrund des Gewichts, der Farbe und des Elastizitätsmoduls als Aluminium identifizieren. Die Farbe und der Elastizitätsmodul des vierten Stabs deuten auf Messing hin. In der Tabelle 8 sind die Abweichungen der Elastizitätsmodule bei der einseitigen Einspannung von den Literaturwerten[2] der vermuteten Materialien aufgetragen. In der Tabelle 9 sind die Abweichungen bei beidseitiger Einspannung zu

Tabelle 8: Vergleich der berechneten Elastizitätsmodule mit den Literaturwerten der vermuteten Materialien bei einseitiger Einspannung

	E / GPa	$E_{\text{Lit}} / \text{GPa}$	$\eta / \%$
Stab 1	759,77	-	-
Stab 2	228,52	205	11,47
Stab 3	90,4	70	29,14
Stab 4	152,09	123	23,65

den Literaturwerten[2] von den vermuteten Materialien aufgeführt. Bei dem Vergleich

Tabelle 9: Vergleich der berechneten Elastizitätsmodule mit den Literaturwerten der vermuteten Materialien bei beidseitiger Einspannung

	$E_{\text{R}} / \text{GPa}$	$E_{\text{L}} / \text{GPa}$	$E_{\text{Lit}} / \text{GPa}$	$\eta_{\text{R}} / \%$	$\eta_{\text{L}} / \%$
Stab 1	485,49	421,36	-	-	-
Stab 2	436,15	432,82	205	112,76	111,13
Stab 3	110,04	81,78	70	57,2	16,83
Stab 4	222,31	216,84	123	80,73	76,29

von den beiden Methoden wird auffällig, dass die beidseitige Einspannung bis auf den ersten Stab größere Elastizitätsmodule aufweist, so dass sich die Vermutung aufstellen

lässt, dass dort ein systematischer Zusammenhang vorliegt. Im Allgemeinen lässt sich anmerken, dass die Messuhren sehr empfindlich waren und der Messvorgang bei den runden Stäben dadurch erschwert wurde, dass der Taster der Messuhren von den runden Stäben abrutschte, so dass dort Abweichungen entstanden sein könnten.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V103, Biegung elastischer Stäbe*.
- [2] *Elastizitätsmodul*. 2021. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4tsmodul> (besucht am 31.05.2021).
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.