

## **Geometrische Optik**

Ann-Sophie Schubert  
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke  
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 21.06.2016

Abgabe: 28.06.2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Ziel</b>	<b>4</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>4</b>
2.1 Brechung . . . . .	4
2.2 Linsen . . . . .	4
2.3 Abbildungsfehler . . . . .	5
<b>3 Aufbau und Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1 Messung der Gegenstandsweite und Bildweite . . . . .	6
3.2 Methode von Bessel . . . . .	6
3.3 Methode von Abbe . . . . .	7
<b>4 Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1 Fehlerrechnung . . . . .	7
4.1.1 Mittelwert und Standardabweichung . . . . .	7
4.1.2 Lineare Regression . . . . .	8
4.2 Linsengleichung . . . . .	8
4.3 Bessel-Methode . . . . .	12
4.4 Abbe-Methode . . . . .	12
<b>5 Diskussion</b>	<b>15</b>
<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Ziel

Ziel dieses Experiments ist es, die Brennweite von Linsen sowie Linsensystemen mittels Messung der Gegenstandsweite und Bildweite, der Methode von Bessel und der Methode von Abbe zu ermitteln. Außerdem sollen die Abbildungsgleichung (2) und die Linsengleichung (3) für eine Sammellinse bestätigt werden. Des Weiteren wird chromatische Aberration an einer Sammellinse betrachtet.

## 2 Theorie

### 2.1 Brechung

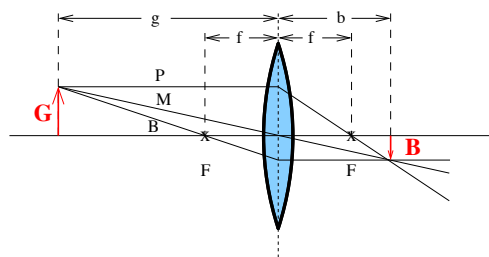
Beim Übergang eines Lichtstrahls von zwei Medien unterschiedlicher optischer Dichte, wird dieser gebrochen. Es gilt das Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta). \quad (1)$$

$n_1$  und  $n_2$  entsprechen den Brechungszahlen der beiden Medien,  $\alpha$  ist der Einfallswinkel vor der Brechung und  $\beta$  der Winkel nach der Brechung. Geht der Lichtstrahl von einem optisch dünneren in ein dichteres Medium über ( $n_1 < n_2$ ), wird der Strahl zum Lot hin gebrochen. Beim umgekehrten Fall ( $n_1 > n_2$ ) erfolgt die Brechung vom Lot weg.

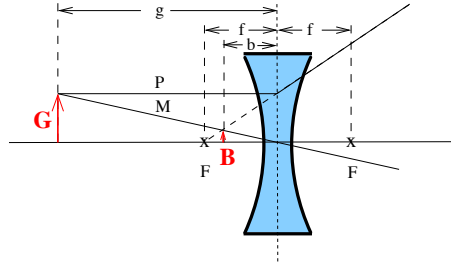
### 2.2 Linsen

Es gibt Sammel- und Zerstreuungslinsen, welche beide als dünn angenommen werden. Somit gilt näherungsweise, dass die Brechung des Strahls lediglich an der Mittelebene der Linse erfolgt. Zur Bildkonstruktion gibt es bei allen Linsen einen Parallelstrahl  $P$  einen Mittelpunktstrahl  $M$  und einen Brennpunktstrahl  $F$ . Der Parallelstrahl wird nach der Brechung zum Brennpunktstrahl; der Mittelpunktstrahl verläuft durch die Mitte der Linse und bleibt unverändert; der Brennpunktstrahl durchläuft den Brennpunkt und ist nach der Brechung parallel zur optischen Achse. Zunächst soll die Sammellinse, welche in Abbildung 1 dargestellt ist, genauer betrachtet werden. Bei Sammellinsen

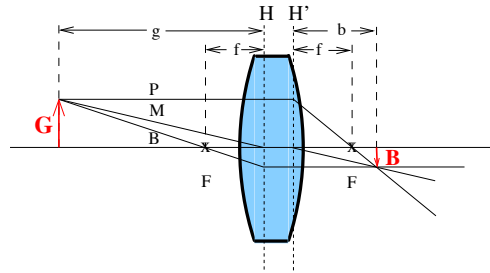


**Abbildung 1:** Darstellung des Strahlenverlaufs an einer Sammellinse [1].

erfolgt die Bündelung des einfallenden Lichts im Brennpunkt  $f$ . Sowohl bei der Bildweite  $b$  als auch bei der Gegenstandsweite  $g$  handelt es sich um positive Größen. Bei dem



**Abbildung 2:** Darstellung des Strahlenverlaufs an einer Zerstreuungslinse [1].



**Abbildung 3:** Darstellung des Strahlenverlaufs an einer dicken Linse [1].

entstehenden Bild handelt es sich um ein reelles Bild. Im Gegensatz zur Sammellinse besitzen die Bildweite  $g$  sowie die Gegenstandsweite  $b$  einer Zerstreuungslinse (siehe Abbildung 2) negative Werte. Bei dem konstruierten Bild handelt es sich um ein virtuelles Bild. Bei dicken Linsen (dargestellt in Abbildung 3) gilt die Näherung, dass der Lichtstrahl nur einmal an der Mittelebene gebrochen wird, nicht mehr. Aus diesem Grund wird angenommen, dass zwei Hauptebenen  $H$  und  $H'$  existieren, an denen die Brechung erfolgt. Mit Hilfe der Strahlensätze folgt das Abbildungsgesetz:

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2)$$

mit  $B$  als Bildgröße,  $G$  als Gegenstandsgröße,  $b$  als Bildweite und  $g$  als Gegenstandsweite. Somit ist  $V$  der Abbildungsmaßstab. Für dünne Linsen gilt zusätzlich die Linsengleichung.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (3)$$

### 2.3 Abbildungsfehler

Die Annahme, dass die Brechung nur an der Mittelebene oder an den Hauptebenen stattfindet, ist nur für achsnahe Strahlen gültig. Für achsferne Strahlen treten Abbildungsfehler auf. Diese bestehen darin, dass der Gegenstand nicht mehr scharf abgebildet werden kann. Werden achsferne Strahlen stärker gebrochen als achsnahe, wird dies als sphärische Aberration bezeichnet. Unter chromatischer Aberration wird verstanden, dass

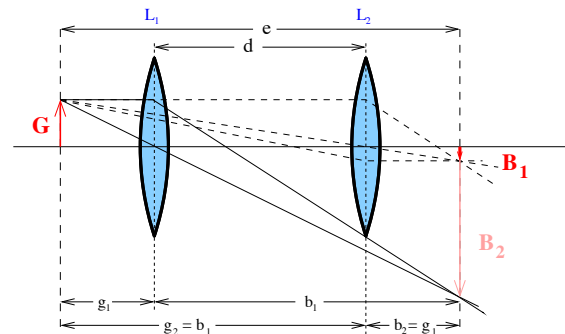
der Brennpunkt des blauen Lichts näher an der Linse liegt als der des roten. Die Brechung ist somit abhängig von der Wellenlänge (Dispersion).

### 3 Aufbau und Durchführung

#### 3.1 Messung der Gegenstandsweite und Bildweite

Bei fester Gegenstandsweite  $g$  wird der Schirm so lange verschoben, bis auf diesem ein scharfes Bild erkennbar ist. Dies wird für 10 verschiedene Gegenstandsweiten wiederholt und dazugehörige Bildweite  $b$  wird aufgenommen.

#### 3.2 Methode von Bessel



**Abbildung 4:** Schematischer Aufbau zur Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Bessel [1].

In Abbildung 4 ist der Aufbau für die Methode von Bessel schematisch dargestellt. Hier ist der Abstand  $e$  zwischen Gegenstand und Schirm fest. Die Position der Linse wird so verändert, dass auf dem Schirm ein scharfes Bild zu sehen ist. Die Werte für die Bildweite  $b_1$  und die Gegenstandsweite  $g_1$  werden notiert. Dann wird die Linse erneut verschoben, bis ein scharfes Bild auf dem Schirm erkennbar ist. Erneut werden die zugehörigen Werte  $b_2$  und  $g_2$  aufgenommen. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$b_1 = g_2 \quad (4)$$

$$b_2 = g_1 \quad (5)$$

$$e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2 \quad (6)$$

$$d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2 \quad (7)$$

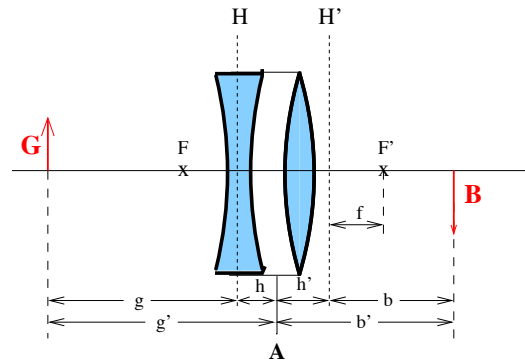
Daraus lässt sich die Brennweite  $f$  berechnen:

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (8)$$

Die Messung wird für insgesamt 10 verschiedene Abstände  $e$  zwischen Gegenstand und Schirm durchgeführt.

Zusätzlich soll die chromatische Aberration betrachtet werden. Dazu wird einmal ein blauer und einmal ein roter Filter eingesetzt und der zuvor erläuterte Messvorgang für jeweils 5 Abstände  $e$  zwischen Gegenstand und Schirm durchgeführt.

### 3.3 Methode von Abbe



**Abbildung 5:** Schematischer Aufbau zur Bestimmung der Brennweite mit der Methode von Abbe [1].

Wie Abbildung 5 zeigt, besteht der Aufbau aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse. Hier soll die Brennweite des Linsensystems ermittelt werden. Über den Abbildungsmaßstab  $V$  kann sowohl die Brennweite als auch die Lage der Hauptebenen bestimmt werden. Es wird ein beliebiger Referenzpunkt  $A$  ausgesucht, weil nicht bekannt ist, wo die Hauptebenen liegen. Die Längen  $b'$  und  $g'$  sind die gemessene Bild- beziehungsweise Gegenstandsweite. Damit kann der Brennpunkt und die Position der Hauptebenen ermittelt werden.

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (9)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (10)$$

Die Messung wird für 10 Gegenstandsweiten durchgeführt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Fehlerrechnung

#### 4.1.1 Mittelwert und Standardabweichung

Der Mittelwert mehrerer Messwerte wird berechnet durch

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i, \quad (11)$$

dabei ist die Standardabweichung

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (v_j - \langle v \rangle)^2}, \quad (12)$$

wobei  $v_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) die Messwerte sind.

#### 4.1.2 Lineare Regression

Bei einer linearen Regression über den Messdaten  $x_i, y_i$  wird für die Steigung

$$m = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (13)$$

und für den  $y$ -Achsenabschnitt

$$b = \langle y \rangle - m \cdot \langle x \rangle \quad (14)$$

angenommen. Für die Standardabweichung gelten

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - b - mx_i)^2} \quad (15)$$

und

$$s_b = s_m \cdot \sqrt{\frac{1}{N(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}}. \quad (16)$$

## 4.2 Linsengleichung

Es gilt, die Linsengleichung (3), sowie die Abbildungsgleichung (2) zu verifizieren. Dazu werden die gemessenen Längen (siehe Tabelle 1 und 2) dort eingesetzt. Für die Gegenstandsgröße wurde

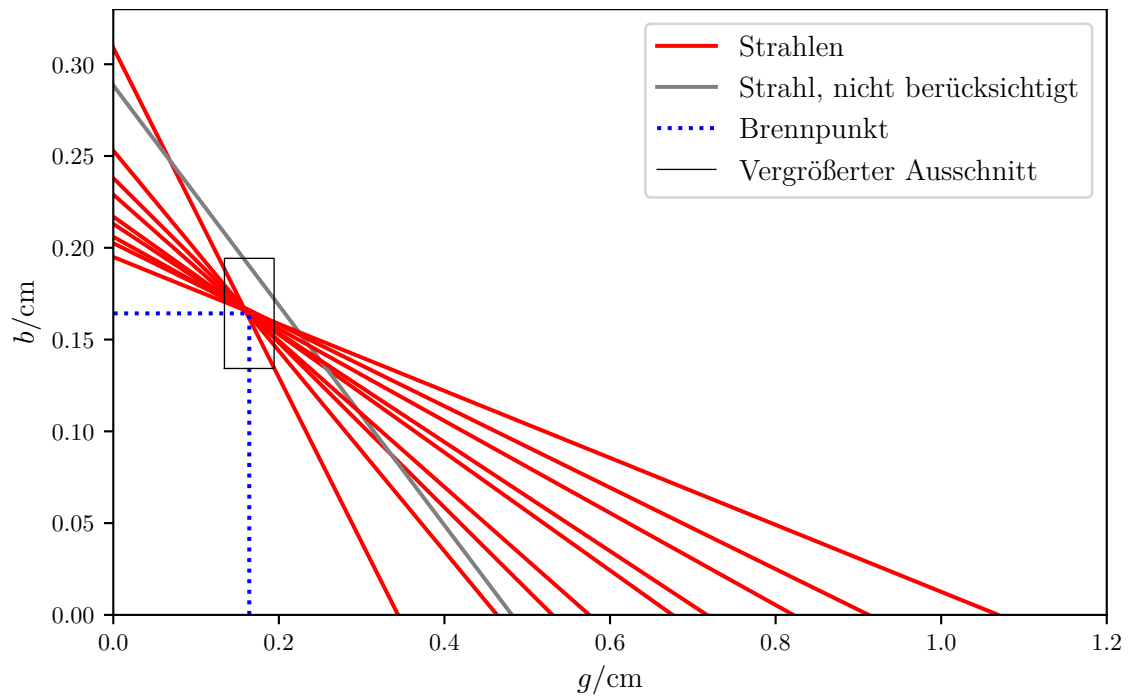
$$G = 2,8 \text{ cm} \quad (17)$$

gemessen. Als Mittelwerte ergeben sich

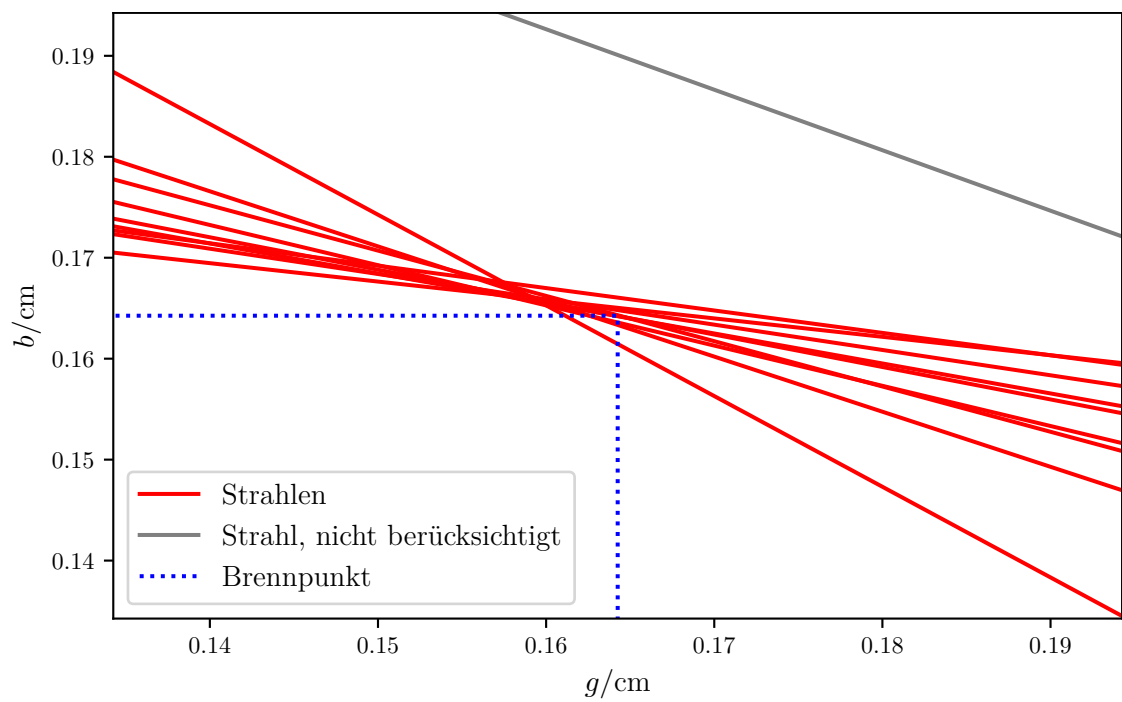
$$\begin{aligned} \langle f_1 \rangle &= (164,3 \pm 0,3) \text{ mm} \\ \langle f_2 \rangle &= (99,8 \pm 0,5) \text{ mm} \end{aligned}$$

wobei  $f_n$  die Messung an zwei verschiedenen Linsen darstellen, die eine vom Hersteller angegebene Brennweite von  $f_1^{\text{man}} = 150 \text{ mm}$  bzw.  $f_2^{\text{man}} = 100 \text{ mm}$  besitzen. Zusätzlich sind in Abb. 6–9 Plots zu finden, bei denen zwischen den auf Abszisse und Ordinate aufgetragenen Messwerten Geraden gezogen wurden. Im idealisierten Fall würden sich diese in einem Punkt, eben dem Brennpunkt, schneiden. Hierbei ist aufgefallen, dass ein Messwert aus der  $f_1$ -Reihe diesen Brennpunkt deutlich weiter verfehlt als alle anderen. Daher wurde dieser (vierte) Wert von den weiteren Berechnungen, insbesondere der Mittelung, ausgeschlossen.

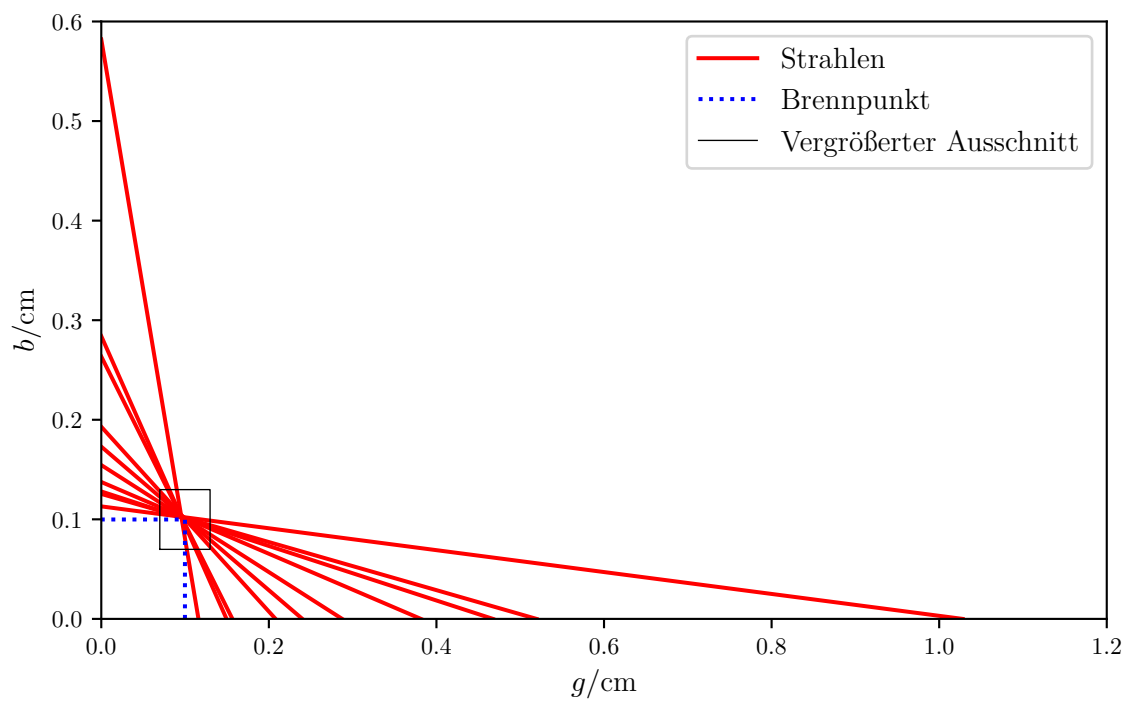




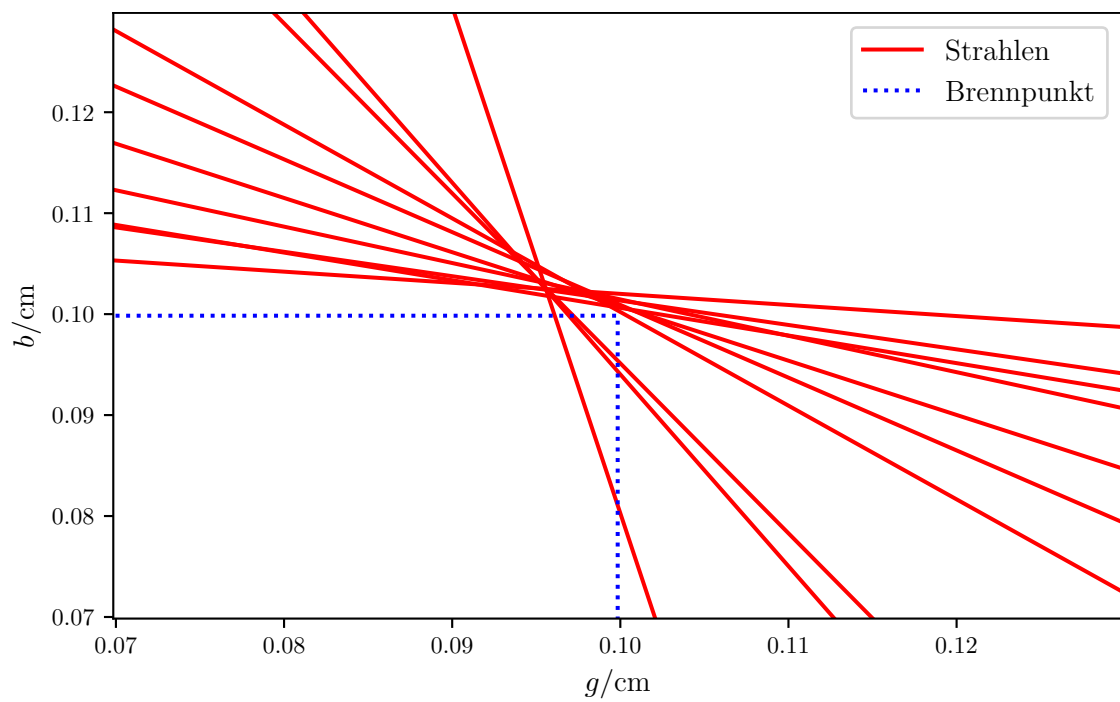
**Abbildung 6:** Grafische Darstellung der  $f_1$ -Messreihe. Die Messwerte wurden auf den Achsen aufgetragen und verbunden.



**Abbildung 7:** Vergrößerte Darstellung von Abb.6.



**Abbildung 8:** Grafische Darstellung der  $f_2$ -Messreihe. Die Messwerte wurden auf den Achsen aufgetragen und verbunden.



**Abbildung 9:** Vergrößerte Darstellung von Abb.8.

**Tabelle 1:** Messreihe zur Linse mit  $f = 150$  mm.

$B/\text{cm}$	$g/\text{cm}$	$b/\text{cm}$	$f/\text{mm}$	$b_1/g_1$	$B/G$
6,30	23,80	53,05	164,3	2,229	2,250
3,10	30,90	34,40	162,8	1,113	1,107
8,80	21,70	67,55	164,2	3,113	3,143
3,80	28,85	48,15	180,4	1,669	1,357
7,10	22,90	57,50	163,8	2,511	2,536
15,5	19,50	106,9	164,9	5,482	5,536
5,20	25,30	46,35	163,7	1,832	1,857
11,3	20,60	82,15	164,7	3,988	4,036
9,50	21,30	71,70	164,2	3,366	3,393
12,9	20,25	91,25	165,7	4,506	4,607

**Tabelle 2:** Messreihe zur Linse mit  $f = 100$  mm.

$g/\text{cm}$	$b/\text{cm}$	$f/\text{mm}$	$g/\text{cm}$	$b/\text{cm}$	$f/\text{mm}$
15,45	28,75	100,5	17,30	24,00	100,5
19,30	20,80	100,1	11,30	102,8	101,8
26,35	15,65	98,19	58,20	11,60	96,72
12,80	46,75	100,5	28,40	14,95	97,94
12,55	51,95	101,1	13,75	38,15	101,1

### 4.3 Bessel-Methode

Die Brennweite einer Linse soll nun auf andere Art und Weise bestimmt werden. Bei der (zuvor beschriebenen) Bessel-Methode ergibt sich die Brennweite zu

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (18)$$

Die Größen sind in Abschnitt 3.2 beschrieben. Da drei Messreihen durchgeführt wurden, einmal ohne Filter und jeweils eine mit rotem und blauem Filter, ergeben sich drei Mittelwerte:

$$\begin{aligned} \langle f_{\text{ohne}} \rangle &= (100,6 \pm 0,2) \text{ mm} \\ \langle f_{\text{rot}} \rangle &= (101,9 \pm 0,3) \text{ mm} \\ \langle f_{\text{blau}} \rangle &= (101,1 \pm 0,3) \text{ mm}, \end{aligned}$$

wobei die Messreihe mit einer Linse mit einer Herstellerangabe  $f^{\text{man}} = 100 \text{ mm}$  durchgeführt wurde. Die Messdaten sowie die einzelnen Brennweiten finden sich in Tab. 3.

### 4.4 Abbe-Methode

Zuletzt soll noch die Brennweite und die Lage der Hauptebenen eines Linsensystems aus Zerstreuungs- und Sammellinse mit der Abbe-Methode bestimmt werden. Die Linsen haben die vom Hersteller angegebenen Brennweiten

$$\begin{aligned} f_1^{\text{man}} &= -100 \text{ mm} \\ f_2^{\text{man}} &= 100 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Sie sind in einem Abstand von

$$d = 60 \text{ mm}$$

aufgebaut, die Gegenstandsgröße beträgt

$$G = 28 \text{ mm}.$$

Um die gesuchten Größen zu ermitteln, werden lineare Regressionen der Messdaten (siehe Tab. 4) an die Gleichungen (9) durchgeführt, welche auch grafisch in Abb. 10 und 11 dargestellt sind. Daraus folgen die Ergebnisse

$$\begin{aligned} f_{\text{I}} &= (162 \pm 2) \text{ mm} \\ f_{\text{II}} &= (168 \pm 1) \text{ mm} \\ \langle f_{\text{I/II}} \rangle &= (165 \pm 1) \text{ mm} \\ h &= (-12,0 \pm 0,4) \text{ cm} \\ h' &= (19,4 \pm 0,3) \text{ cm}. \end{aligned}$$

Die theoretische Brennweite ergibt sich als

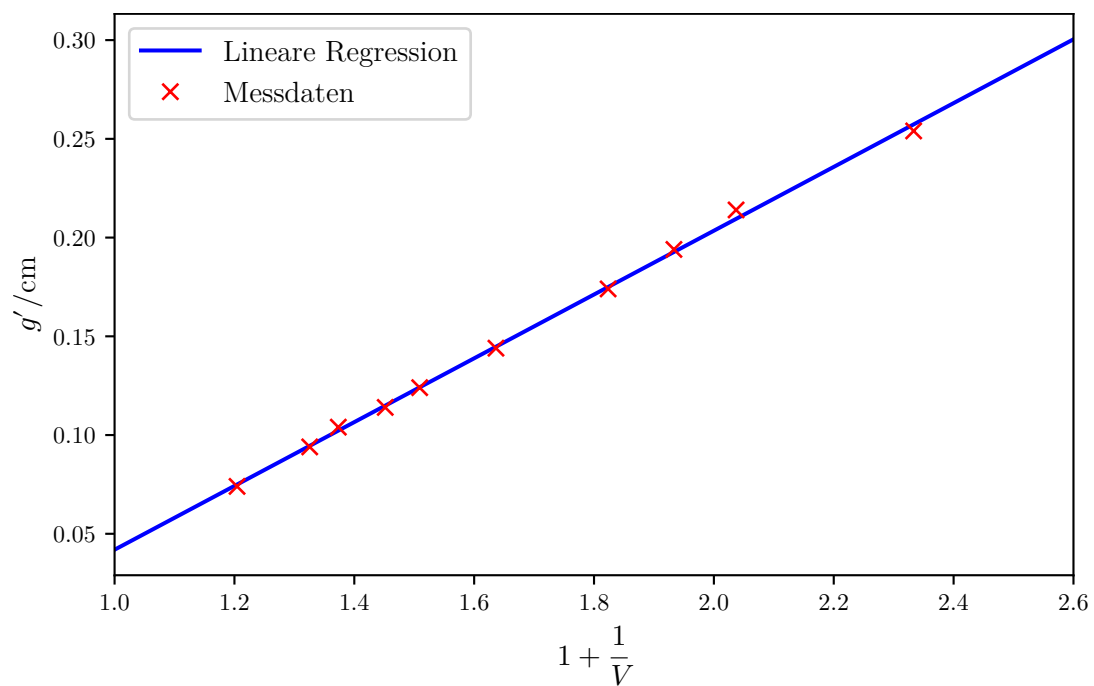
$$\frac{1}{f_{\text{th}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} = 166,67 \text{ mm}. \quad (19)$$

**Tabelle 3:** Messreihe zur Bessel-Methode

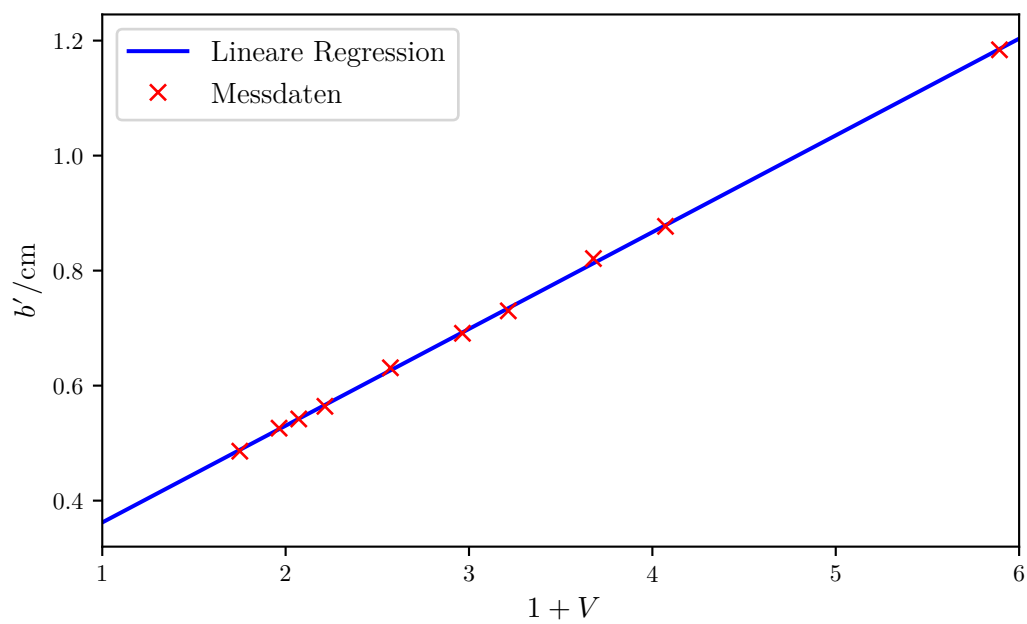
$e/\text{cm}$	$b_1/\text{cm}$	$g_1/\text{cm}$	$b_2/\text{cm}$	$g_2/\text{cm}$	$f/\text{mm}$
Ohne Filter					
54,90	41,40	13,50	12,90	42,00	100,3
59,90	46,70	13,20	12,60	47,30	101,2
64,90	52,00	12,90	12,10	52,80	100,9
69,90	57,30	12,60	11,75	58,15	100,5
74,90	62,90	12,00	11,90	63,00	100,4
49,90	35,70	14,20	13,50	36,40	100,1
44,90	29,40	15,50	15,00	29,90	100,7
57,40	44,35	13,05	12,90	44,50	100,4
67,40	55,00	12,40	12,00	55,40	99,92
72,40	59,70	12,70	11,80	60,60	101,8
Roter Filter					
75,10	62,80	12,30	11,70	63,40	100,8
70,10	57,45	12,65	12,10	58,00	101,9
65,10	52,15	12,95	12,50	52,60	102,4
60,10	46,60	13,50	12,75	47,35	102,6
55,10	41,20	13,90	13,10	42,00	101,9
Blauer Filter					
75,10	62,50	12,60	11,70	63,40	101,8
70,10	57,60	12,50	11,90	58,20	100,8
65,10	52,50	12,60	12,20	52,90	100,4
60,10	46,90	13,20	12,50	47,60	101,0
55,10	41,45	13,65	13,15	41,95	101,4

**Tabelle 4:** Messreihe zur Abbe-Methode.

$B/\text{cm}$	$V$	$g'/\text{cm}$	$b'/\text{cm}$	$B/\text{cm}$	$V$	$g'/\text{cm}$	$b'/\text{cm}$
3,40	1,214	17,40	56,40	2,70	0,9643	21,40	52,60
4,40	1,571	14,40	63,10	2,10	0,7500	25,40	48,60
5,50	1,964	12,40	69,10	13,7	4,893	7,400	118,4
7,50	2,679	10,40	82,10	8,60	3,071	9,400	87,70
3,00	1,071	19,40	54,20	6,20	2,214	11,40	73,00



**Abbildung 10:** Die Gegenstandsweite aufgetragen über  $1 + \frac{1}{V}$ , dazu lineare Regression zur Ermittlung von  $f_I$  und  $h$ .



**Abbildung 11:** Die Bildweite aufgetragen über  $1 + V$ , dazu lineare Regression zur Ermittlung von  $f_{II}$  und  $h'$ .

## 5 Diskussion

Die Messergebnisse, Theoriewerte und Abweichungen sind noch einmal in Tab. 5 zusammengefasst, wobei sich die Abweichungen über

$$\Delta f^{\text{rel}} = \frac{|f - f^{\text{man}}|}{f^{\text{man}}} \quad (20)$$

berechnen. Es ist zu erkennen, dass die Linse mit  $f^{\text{man}} = 100 \text{ mm}$  sowohl mit der Lin-

**Tabelle 5:** Vergleich der Messdaten mit den Herstellerangaben, beziehungsweise berechneten Werten.

Messreihe	$f/\text{mm}$	$f^{\text{man}}/\text{mm}$	Abweichung/%
Linsengleichung	$164,0 \pm 0,8$	150,0	9,3
Linsengleichung	$99,80 \pm 2$	100,0	0,2
Bessel-Methode	$100,6 \pm 0,6$	100,0	0,6
Abbe-Methode	$165,0 \pm 1$	166,7	1,0

sengleichung, als auch mit der Bessel-Methode sehr genau bestimmt werden konnte. Die  $f^{\text{man}} = 150 \text{ mm}$ -Linse hingegen zeigt ein unpräziseres Ergebnis, obwohl eine Messung, die sich anhand von Abb. 6 als fehlerhaft erwiesen hatte, vom Ergebnis ausgeschlossen wurde. Im Vergleich von Abb. 7 und 9 ist zu erkennen, dass die Geradenschnittpunkte ungefähr gleich viel vom Brennpunkt abweichen, daher ist das Problem eher bei unbekannten systematischen Fehlern oder einer unpräzisen Herstellerangabe zu suchen. Die Abbildungsgleichung kann im Rahmen der Messgenauigkeit als validiert angesehen werden, da, wie in Tab. 1 abzulesen ist,  $B/G$  und  $b/g$  jeweils annähernd den gleichen Wert annehmen.

In der Messreihe zur chromatischen Aberration ist zu erkennen, dass das blaue Licht mit

$$f_{\text{blau}} = (101,1 \pm 0,6) \text{ mm}$$

eine kürzere Brennweite hat, also stärker gebrochen wird, als das rote Licht mit

$$f_{\text{rot}} = (101,9 \pm 0,7) \text{ mm}.$$

Erstaunlicherweise liegen beide Werte jedoch über der Brennweite ohne Farbfilter.

Bei der Abbe-Methode ist (im Vergleich zum berechneten Wert) ebenfalls eine genaue Bestimmung der Brennweite möglich, die bestimmte Lage  $h, h'$  der Hauptebenen ist plausibel. Die linearen Regressionen in Abb. 10 und 11 passen gut zu den Werten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 408: Geometrische Optik.*