

V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Jannis Vornholt

Mirjam Prayer

Durchführung: 18.05.2021

Abgabe: 25.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Relaxationsverhalten des RC-Kreises	3
1.2	Relaxationsverhalten unter Einfluss angelegter periodischer Spannung . .	3
1.3	Der RC-Kreis als Integrator	5
2	Durchführung	5
2.1	Bestimmung der Zeitkonstanten	5
2.2	Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatoramplitude	5
2.3	Bestimmung der Phasenverschiebung	5
2.4	Der RC-Kreis als Integrator	8
3	Messwerte	8
4	Auswertung	9
4.1	Aufladevorgang des Kondensators	9
4.2	Amplitude und Frequenz	10
4.3	Phasenverschiebung	11
5	Diskussion	13

1 Theorie

1.1 Relaxationsverhalten des RC-Kreises

Zwischen den Platten eines Kondensators liegt die Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (1)$$

an. Beim Ausgleich der Ladungen, sprich der Entladung des Kondensators entsteht der Strom

$$I = \frac{U_C}{R}. \quad (2)$$

Aus dem Zusammenhang $dQ = -I dt$ kann durch Einsetzen von 1 und 2 die Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q \quad (3)$$

gewonnen werden. Der Entladevorgang lässt sich offensichtlich durch

$$Q(t) = Q(0)e^{\frac{-t}{RC}} \quad (4)$$

beschreiben. Der die DGL ebenfalls lösende Term mit positivem Exponenten entfällt aufgrund der Bedingung $Q(\infty) = 0$.

Für den Aufladevorgang gilt die gleiche Differentialgleichung 4. Lediglich die Randbedingungen lauten nun $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$. Unter diesen Bedingungen lässt sich die Differentialgleichung durch

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) \quad (5)$$

lösen.

Die Zeitkonstante RC ist ein Maß für die Relaxationsgeschwindigkeit. Während des Zeitintervalls $\Delta T = RC$ sinkt die Ladung des Kondensators um den Faktor $\frac{Q(t=RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e}$.

1.2 Relaxationsverhalten unter Einfluss angelegter periodischer Spannung

Ist die Frequenz der angelegten Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos \omega t$ sehr niedrig, so verhält sich $U_C(t)$ wie $U(t)$. Bei höheren Frequenzen verzögert sich die Auf- und Entladung des Kondensators durch den Widerstand, sodass eine Phasenverschiebung ϕ zwischen dem Kondensator und der Spannungsquelle entsteht. Dadurch verringert sich auch die Amplitude der Kondensatorspannung. Im folgenden wird für die Kondensatorspannung der Ansatz $U_C(t) = A(\omega) \cos \omega t + \phi$ verwendet.

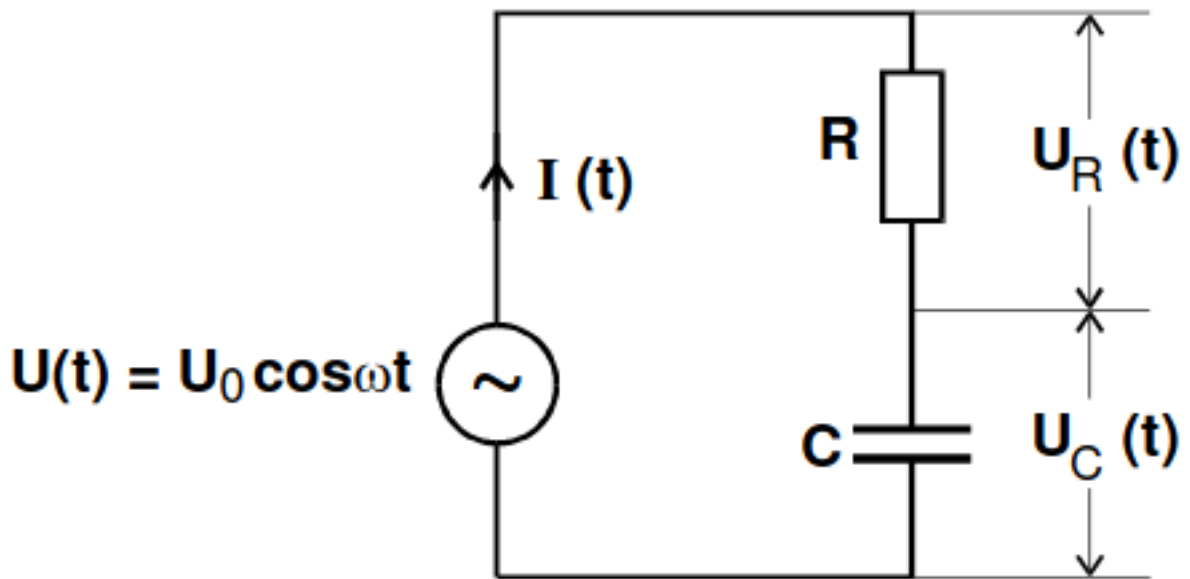


Abbildung 1: Der RC-Schaltkreis mit angelegter Cosinus-Spannung

Die Spannung des in Abbildung 1 dargestellten Stromkreises kann nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz durch

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) \Leftrightarrow U_0 \cos \omega t = I(t)R + A(\omega) \cos \omega t + \phi \quad (6)$$

bestimmt werden. Wird sich nun erneut des Zusammenhangs $\frac{dQ}{dt} = -I$ und Gleichung 1 bedient, ergibt sich

$$U_0 \cos \omega t = -A(\omega)\omega RC \sin \omega t + \phi + A(\omega) \cos \omega t + \phi \quad (7)$$

Wird nun $\omega = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, wird diese Gleichung zu

$$0 = -\omega RC \sin \frac{\pi}{2} + \phi + \cos \frac{\pi}{2} + \phi$$

Wird nun ausgenutzt, dass $\sin \phi + \frac{\pi}{2}$, entsteht die Beziehung

$$\phi(\omega) = \arctan -\omega RC \quad (8)$$

zwischen Phase und verwendeter Frequenz. Nun wird der Fall $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$ betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} U_0 \cos \frac{\pi}{2} - \phi &= -A(\omega)\omega RC \\ \Leftrightarrow A(\omega) &= -\frac{\sin \phi}{\omega RC} U_0 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von 8 kann die Beziehung $\sin \phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$ hergeleitet und in die Gleichung eingesetzt werden. Dadurch ergibt sich

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

Während kleine Frequenzen nur eine geringe Abweichung von der angelegten Spannung aufweisen, verschwindet die Amplitude für sehr große Frequenzen. RC-Glieder stellen also einen Tiefpass im elektrischen Schaltkreis dar.

1.3 Der RC-Kreis als Integrator

Ein anderer möglicher Effekt des RC-Kreises ist die Integration der Spannung. Wir betrachten erneut Gleichung 6.

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t)R + U_C(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t)$$

Falls nun $\omega \ll \frac{1}{RC}$ ist die Spannung $|U_C| \ll |U_R|$ Näherungsweise ist dann

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \Leftrightarrow U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (10)$$

2 Durchführung

2.1 Bestimmung der Zeitkonstanten

Zur Bestimmung der Zeitkonstanten wird der Versuchsaufbau von Abbildung 2 verwendet. Mit einer Rechteckfrequenz werden periodisch Auf- und Entladevorgänge des Kondensators generiert. Mittels eines Oszilloskops wird die Spannung am Kondensator über mehrere Auf- und Entladevorgänge gemessen. Mit Hilfe dieser Daten kann dann anhand der in der Theorie hergeleiteten Formeln die Zeitkonstante RC bestimmt werden.

2.2 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatoramplitude

Für diesen Versuchsteil wird der Stromkreis von Abbildung 3 verwendet. Es wird eine Sinusspannung angelegt und die Kondensatorspannung in Abhängigkeit der angelegten Frequenz bestimmt. Die Kondensatorspannung wird nun unter Zuhilfenahme eines Millivoltmeters gemessen.

2.3 Bestimmung der Phasenverschiebung

Nun wird sowohl die angelegte Sinusspannung als auch die Kondensatorspannung mit einem Oszilloskop aufgezeichnet, so wie in Abbildung 4 dargestellt. Dadurch entsteht ein Schirmbild gleich jenem in Abbildung 5. Die Phase kann dann durch $\phi = \frac{a}{b} 2\pi$ berechnet werden, wobei a den zeitlichen Abstand der Nulldurchgänge und b der Periodendauer entspricht.

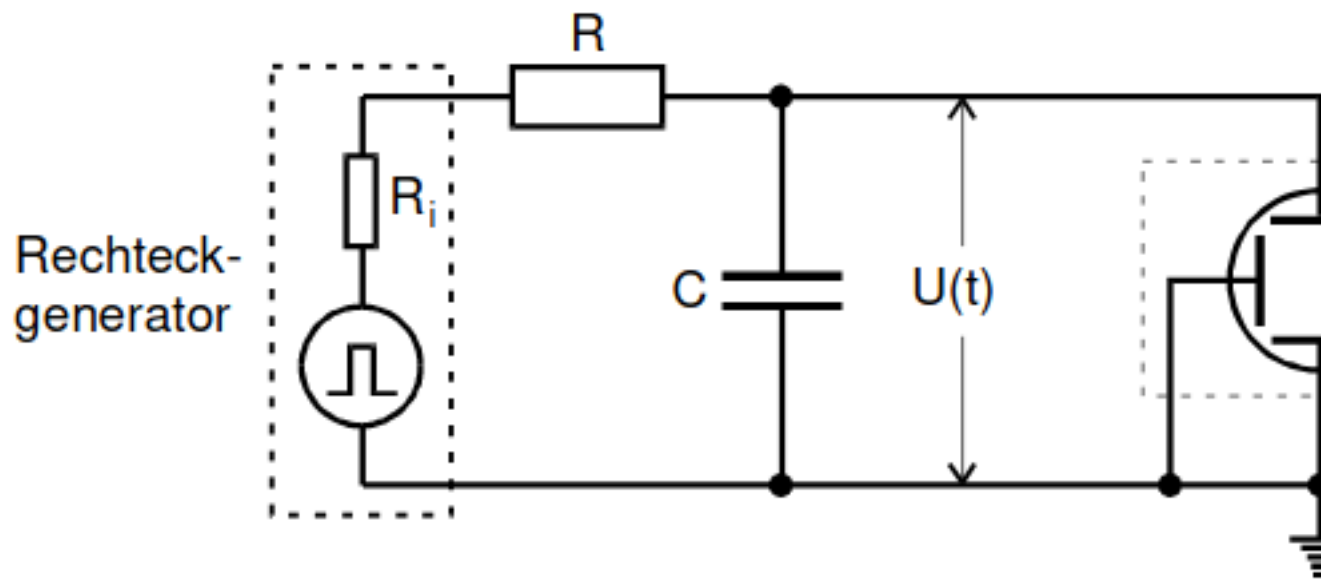


Abbildung 2: Schaltkreis zur Bestimmung der Zeitkonstanten

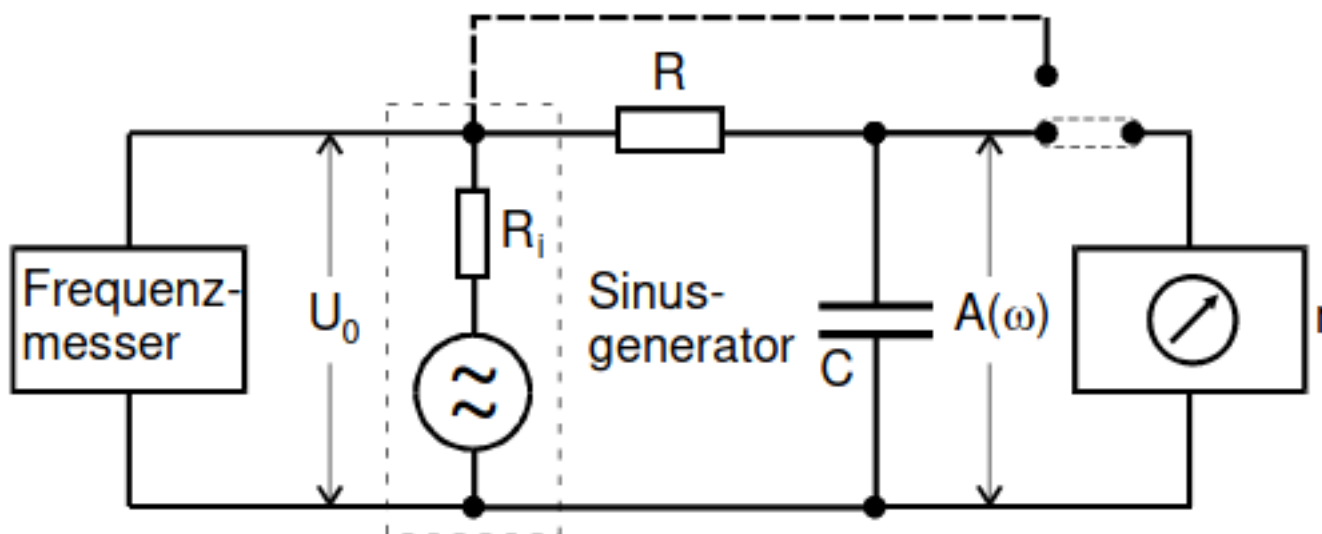


Abbildung 3: Schaltkreis zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

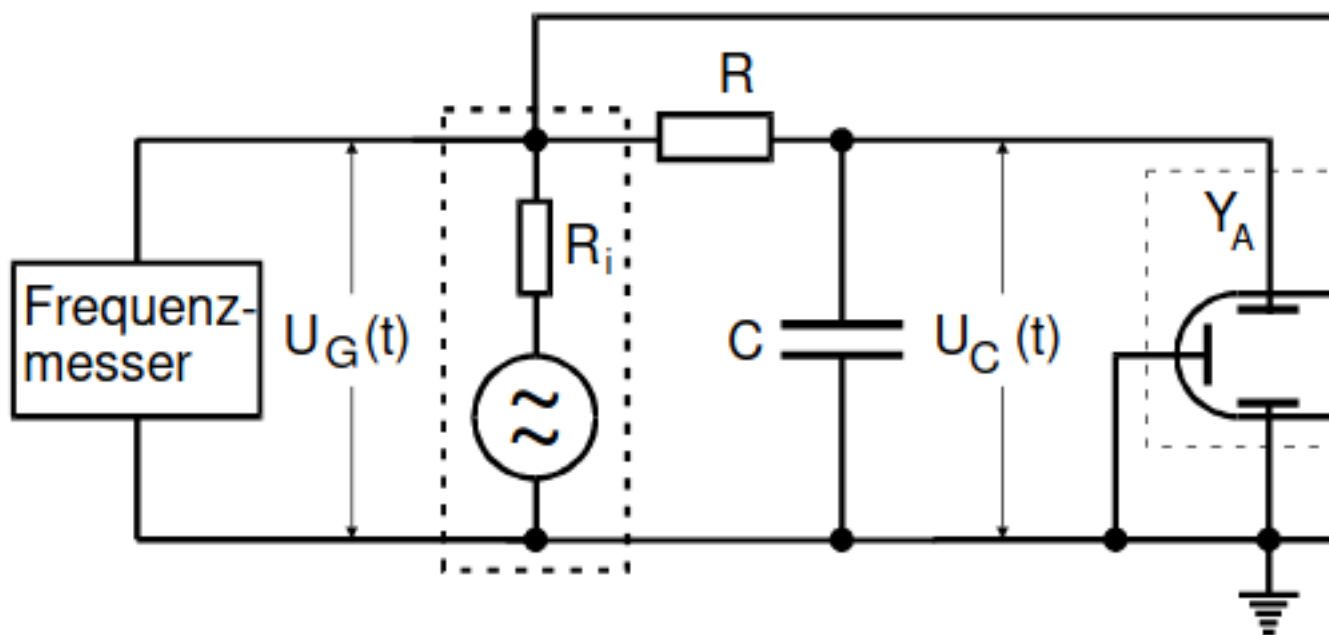


Abbildung 4: Schaltkreis zur Messung der Phasenverschiebung

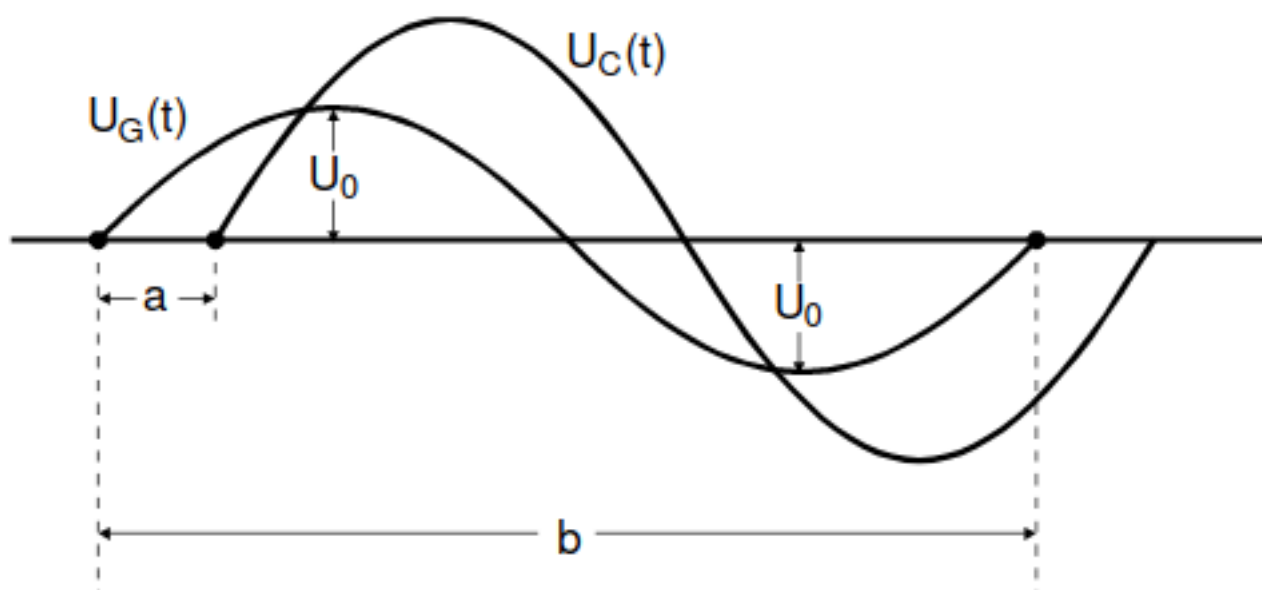


Abbildung 5: theoretisches Schirmbild des Oszilloskops

2.4 Der RC-Kreis als Integrator

Für diesen Aufgabenteil kann erneut Schaltkreis 5 verwendet werden. Nachdem eine geeignete Frequenz ausgewählt wurde kann die Kondensatorspannung bei Rechteck-, Sinus- und Dreiecksspannung bestimmt werden.

3 Messwerte

Tabelle 1: Aufladekurve des Kondensators.

Spannung [V]	Zeit [ms]
0	0
0,5	0,1
1	0,19
1,5	0,23
2	0,3
2,5	0,42
3	0,6
3,5	0,8
4	1
4,5	1,3
5	1,6
5,5	2,09
6	3,2
6,15	4
6,25	6
6,25	8

Tabelle 2: Messwerte zu Aufgabe b) und c).

Frequenz [Hz]	Spannung [V]	a [μs]	b [μs]
20	3,25	/	/
120	2,3	800	8000
220	1,7	550	4200
320	1,325	450	3000
420	1,025	375	2300
620	0,73	280	1570
820	0,59	220	1160
$1,02 \cdot 10^3$	0,48	190	960
$5,02 \cdot 10^3$	0,105	45	195
$10,02 \cdot 10^3$	$52 \cdot 10^{-3}$	24	96
$20,02 \cdot 10^3$	$26 \cdot 10^{-3}$	11,5	48
$30,02 \cdot 10^3$	$17,75 \cdot 10^{-3}$	7,5	31
$40,02 \cdot 10^3$	$13,5 \cdot 10^{-3}$	6	24

4 Auswertung

4.1 Aufladevorgang des Kondensators

Durch die in Tabelle ?? aufgenommenen Spannungs- und Zeitwerte des Aufladevorgangs des Kondensators lässt sich der RC Wert bestimmen. Dafür werden die Messwerte in Graphik 6 geplottet und eine Ausgleichskurve bestimmt. Die Ausgleichskurve hat die Form

$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (11)$$

und ergibt sich aus Gleichung ?? und $Q = CU$. Aus dieser Rechnung ergeben sich die Werte $RC = 0.000931 \pm 0.000032s$ und $U_0 = 6,20 \pm 0,07V$.

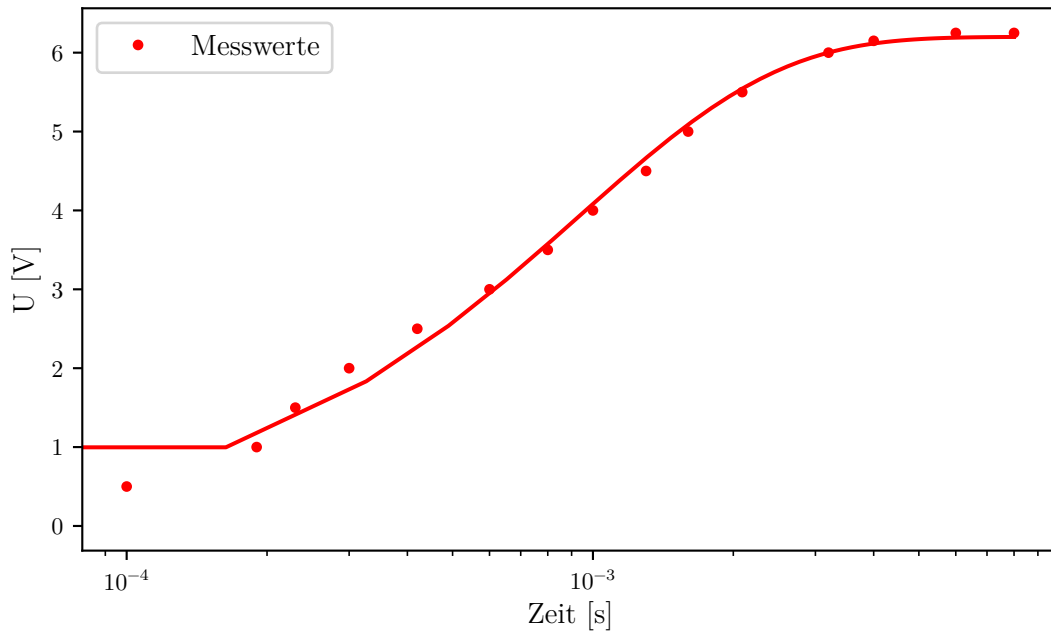


Abbildung 6: Aufladekurve des Kondensators.

4.2 Amplitude und Frequenz

Bei der zweiten Methode zur Bestimmung von der Zeitkonstanten RC werden die gemessenen Amplituden abhängig von den Frequenzen, aus Tabelle ?? genutzt. Diese Wertepaare werden ebenfalls in einem halb logarithmischen Graphen aufgetragen, wobei die Amplituden $A(\omega)$ vorher durch U_0 dividiert werden zudem wird wieder eine Ausgleichsrechnung durchgeführt. Der Ansatz der Ausgleichsrechnung ergibt sich aus Gleichung ?? zu

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2(RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2(RC)^2}} \quad (12)$$

Der aus der Rechnung ergebene Graph ist zusammen mit den Wertepaaren in Graphik 7 dargestellt. Zudem ergibt sich aus der Rechnung $RC = 0.007222 \pm 0.002084\text{s}$.

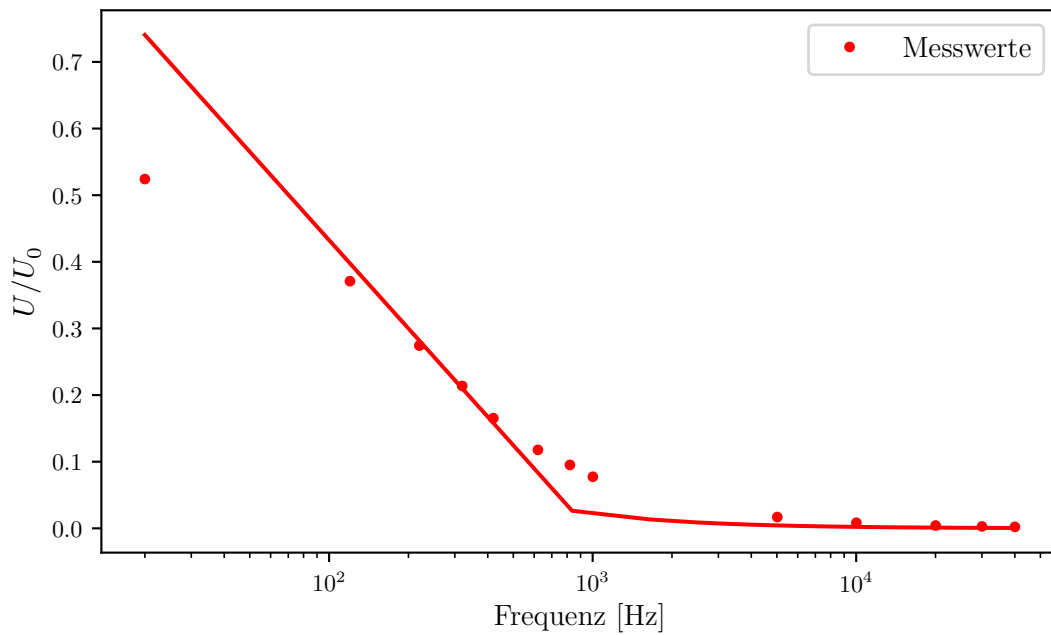


Abbildung 7: $\frac{A(\omega)}{U_0}$ abhängig von der Frequenz f .

4.3 Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung wird nach Abbildung 5 bestimmt. Aus den so bestimmten Werten in Tabelle ?? lassen sich die Phasenverschiebungen ϕ wie folgt berechnen

$$\phi = \frac{a}{b} 2\pi. \quad (13)$$

Die Werte für ϕ werden in Diagramm 8 gegen die Frequenz f aufgetragen und wie in der Aufgabe zuvor eine Ausgleichskurve hinzugefügt. Die Ausgleichskurve ergibt sich hierbei aus Gleichung 8. Aus dieser Ausgleichskurve ergibt sich wieder ein Wert RC , $RC = 0.000680 \pm 0.000052s$.

Zudem werden die Werte mit Hilfe der gemessenen Amplituden und Frequenzen, in einem Polarkoordinatensystem (Graphik 9) dargestellt.

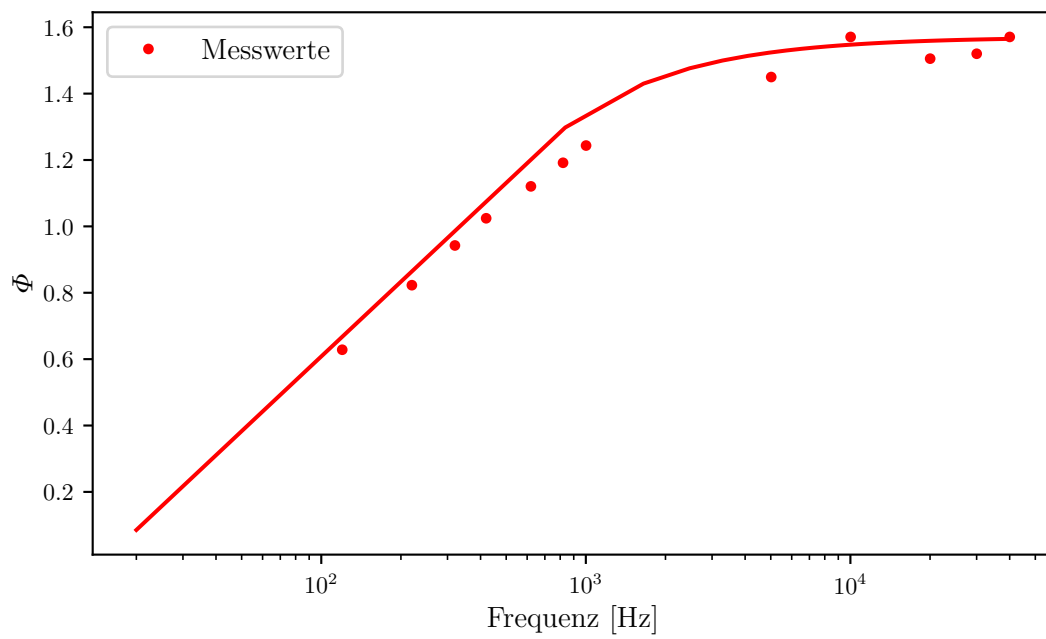


Abbildung 8: Phasenverschiebung zwischen Generator und Kondensatorspannung abhängig von der Frequenz.

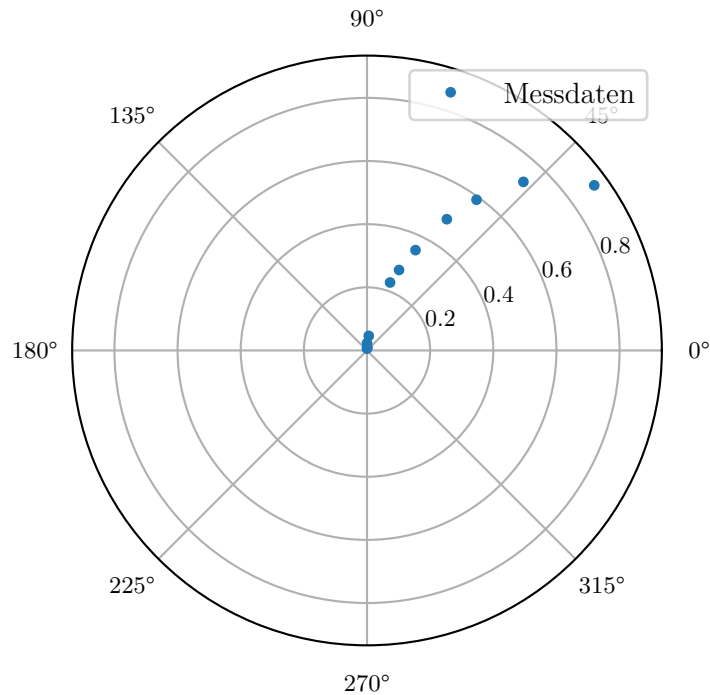


Abbildung 9: Polarplot zur veranschaulichung der Phasenverschiebung zwischen der Generator und Kondensatorspannung.

5 Diskussion

Die zu berechnenden Werte für RC sind mit

$$RC_1 = 0.000931 \pm 0.000032s$$

$$RC_2 = 0.007222 \pm 0.002084s$$

$$RC_3 = 0.000680 \pm 0.000052s$$

um bis zu einer Größenordnung verschieden. Auffällig ist, dass der durch die frequenzabhängigen Amplituden bestimmte Wert RC_2 stärker von den beiden anderen Werten abweicht. RC_2 ist 7,76 mal so groß wie RC_1 und 10,62 mal so groß wie RC_3 . Wohingegen RC_1 lediglich 36,91% größer als RC_3 ist, also 1,3691 mal so groß ist. Dies ist zum einen durch Messungenauigkeiten zu erklären, da Werte an einem Oszilloskop Ablesen relativ ungenau ist. Zum anderen sind die Messpunkte nicht optimal gewählt, wodurch die Ausgleichsrechnungen nicht optimal sind. Anhand der Graphen sieht man, dass die Ausgleichskurven im Bereich der kleinen Frequenzen, vorallem bei Abbildung 8, stärker von den Messwerten abweicht als bei größeren Frequenzen. Hier hätten mehr Messpunkte bei geringeren Frequenzen gewählt werden müssen, um bessere Ausgleichskurven zu erhalten. Die Phasenverschiebung, in Abbildung 9 dargestellt, bewegt sich wie erwartet zwischen 0 und $\pi/2$, sowohl bei dem Theoretischen Praphen als auch bei den eingetragenen

Messwerten. Zudem stimmen die Messwerte und die Kurve nahezu überein. Allerdings sieht man auch hier wieder, dass die Messwerte nicht optimal gewählt wurden. Dies ist unter anderem dem geschuldet, dass bei 20Hz auf dem Oszilloskop kein Bild angezeigt wurde, welches ein Ablesen von Werten möglich gemacht hätte.