

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Julian Hochhaus
julian.hochhaus@tu-dortmund.de

Niko Salewski
niko.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 13.12.2016

Abgabe: 20.12.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen	3
2.1.1 Der Schwingfall	4
2.1.2 Der Kriechfall	5
2.1.3 Der aperiodische Grenzfall	6
2.2 Erzwungene Schwingungen	6
3 Versuchsaufbau	7
4 Versuchsdurchführung	9
4.1 Bestimmung des Dämpfungswiderstands R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} .	9
4.2 Bestimmung des Widerstands R_{ap}	9
4.3 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit von Kondensatorspannung und Phase zwischen Kondensator-und Erregerspannung	10
5 Auswertung	10
5.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung	10
5.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{ap}	12
5.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanz- kreis	13
5.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	15
6 Diskussion	18
Literatur	20

1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch wird der gedämpfte Schwingkreis untersucht. Untersucht wird der Spannungsverlauf am Kondensator nach der Aufgabe eines Nadelimpulses, sowie der effektive Dämpfungswiderstand bestimmt.

Zudem wird die Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phasenverschiebung zwischen einer angelegten Generatorspannung und der Kondensatorspannung untersucht.

2 Theorie

Ein Serienresonanzkreis ist in Abbildung 1 dargestellt. Er besteht aus einer äußeren Spannungsquelle $U(t)$ und – in Serie geschaltet – einem ohmschen Widerstand R , einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator mit Kapazität C [2].

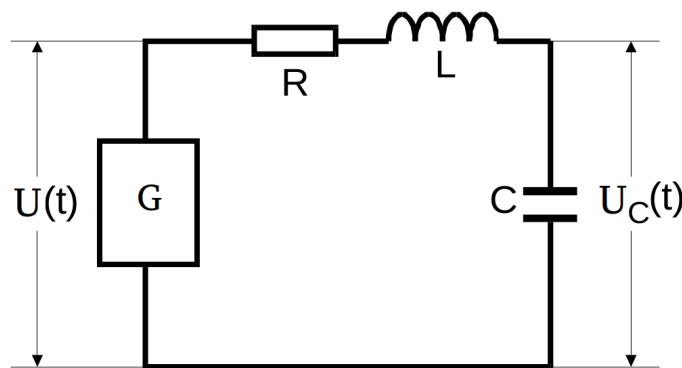


Abbildung 1: Schaltung eines Serienresonanzkreises. (vgl. [1])

2.1 Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen

Vorerst wird ein Serienresonanzkreis ohne äußere Spannungsquelle (Abbildung 1) – also ein RLC-Kreis – betrachtet.

Unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ ein bestimmter Energiebetrag im System vorhanden ist, werden elektrische Schwingungen erzeugt. Diese lassen sich kategorisieren in ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen.

Ungedämpfte Schwingungen lassen sich in der Realität nicht erzeugen, da über ohmsche Widerstände elektrische Energie irreversibel in Wärmeenergie umgewandelt wird. Sie entstehen also unter Vernachlässigung von ohmschen Widerständen. Es wird daher ein LC-Kreis betrachtet, der mit einer Spule und einem Kondensator aus zwei Energiespeichern besteht. Dann alterniert die Energie verlustfrei als elektrische bzw. magnetische Feldenergie zwischen dem Kondensator und der Spule.

Dies ist der Fall, da bei der Entladung des Kondensators ein Magnetfeld in der Spule

erzeugt wird, welches daraufhin abgebaut wird und wiederum zur Aufladung des Kondensators mit umgekehrter Polung führt. Dieser Vorgang wird periodisch fortgesetzt, sodass die Energie zwischen Spule und Kondensator oszilliert.

Gedämpfte Schwingungen treten hingegen auf, wenn ohmsche Widerstände nicht vernachlässigt werden. Dann wird die vom Strom transportierte Energie zum Teil irreversibel in Wärme umgewandelt und die Gesamtenergie im RLC-Kreis ist nicht erhalten. Im Folgenden sollen gedämpfte Schwingungen näher betrachtet werden.

Mit dem 2. Kirchhoffschen Gesetz ergibt sich aus dem Schaltkreis in Abbildung 1 die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0.$$

Mit dem Ohmschen Gesetz, dem Induktionsgesetz, der Spannung $U_C = \frac{Q(t)}{C}$ am Kondensator und dem Zusammenhang $I = \dot{Q}$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = 0, \quad (1)$$

also eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Diese lässt sich mit dem Ansatz

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

lösen, wobei $I_0, \omega \in \mathbb{C}$. Für ω ergibt sich

$$\omega_{1,2} = i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3)$$

Mit den Definitionen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \qquad 2\pi\nu := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4)$$

lässt sich die allgemeine Lösung von Gleichung (1) schreiben als

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (I_1 e^{i2\pi\nu t} + I_2 e^{-i2\pi\nu t}), \quad (5)$$

wobei $I_1, I_2, \nu \in \mathbb{C}$.

Nun lassen sich die drei signifikanten Fälle für ν unterscheiden in denen ν entweder reell, komplex mit $\text{Im } \nu \neq 0$ oder verschwindet.

2.1.1 Der Schwingfall

Damit ν reell ist, muss der Term in der Wurzel in der zweiten Gleichung (4) positiv sein, also $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ gelten. Ist dies der Fall, ergibt sich als reelle Lösungsfunktion

$$I(t) = I_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (6)$$

Dieser Fall entspricht einer gedämpften Schwingung mit der Frequenz ν und der Dämpfung bedingt durch die monoton fallende Exponentialfunktion und wird daher als Schwingfall

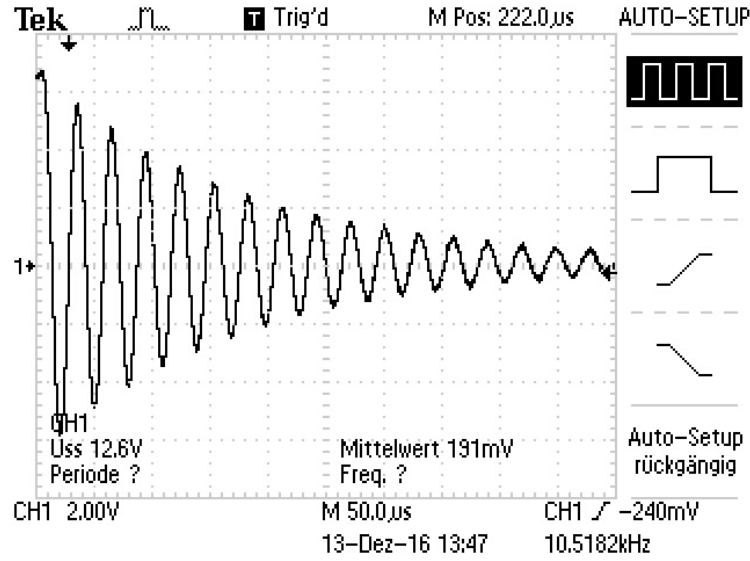


Abbildung 2: Zeitlicher Verlauf der gedämpften Spannungsamplitude am Kondensator.

bezeichnet. Weiterhin strebt die Amplitude von $I(t)$ wegen der Beschränktheit vom Kosinus für $t \rightarrow \infty$ gegen Null. Die gedämpfte Schwingung ist in Abbildung 2 dargestellt. Für die Periodendauer T ergibt sich

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (7)$$

Für den Fall $\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{4L^2}$, gilt

$$T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (8)$$

die Thomsonsche Schwingungsformel. Die Periodendauer entspricht dann der Periodendauer der ungedämpften Schwingung.

Die Abnahmegeschwindigkeit der Amplitude ist durch $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$ festgelegt. Die Abklingdauer T_{ex} wird definiert durch

$$T_{\text{ex}} := \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (9)$$

2.1.2 Der Kriechfall

Damit ν komplexwertig ist, muss $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ gelten. Dieser Fall wird Kriechfall oder auch aperiodische Dämpfung genannt. Dann gilt für $I(t)$ die Proportionalität

$$I(t) \sim \exp\left(-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t\right), \quad (10)$$

es liegt also kein Schwingungsvorgang vor, sondern es treten Relaxationsphänomene auf.

2.1.3 Der aperiodische Grenzfall

Der aperiodische Grenzfall tritt auf, wenn ν verschwindet, also wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \quad (11)$$

gilt. Somit ergibt sich

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} = I_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{LC}}t}. \quad (12)$$

Dieser Fall entspricht dem Fall mit der stärksten Dämpfung, die Amplitude nimmt monoton ab und konvergiert gegen Null.

2.2 Erzwungene Schwingungen

Erzwungene Schwingungen können mit einem Serienresonanzkreis realisiert werden (siehe Abbildung 1). Dafür gibt der Spannungsgenerator eine Wechselspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ ab, mit der sich analog zu Gleichung (1) die Differentialgleichung

$$LC\ddot{U}_C + RC\dot{U}_C + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

ergibt, mit der Kondensatorspannung $U_C = \frac{Q(t)}{C}$. Diese lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung lässt sich mit dem Ansatz $U_C = U_{C,0} e^{i\omega t}$ lösen, wobei $U_{C,0} \in \mathbb{C}$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$U_{C,0} = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + i\omega RC} \quad (14)$$

und damit wegen $|U_C| = |U_{C,0}|$ ($\omega \in \mathbb{R}$) die frequenzabhängige Kondensatorspannung zu

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (15)$$

Weiterhin gilt für die Phase $\phi(\omega)$ zwischen Kondensator- und Erregerspannung mit $\tan(\phi(\omega)) = \frac{\text{Im } U_{C,0}}{\text{Re } U_{C,0}}$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (16)$$

Die Frequenzabhängigkeit von U_C in Gleichung (15) wird als Resonanzkurve bezeichnet. Die Kondensatorspannung U_C konvergiert für $\omega \rightarrow 0$ gegen die Erregeramplitude U_0 und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null. Des Weiteren hat U_C ein Maximum, bei der Frequenz

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}, \quad (17)$$

der Resonanzfrequenz.

In dem Fall $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ liegt nur eine schwache Dämpfung und es gilt $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$. Damit folgt $U_{C,\text{max}} > U_0$ mit

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0. \quad (18)$$

Weiterhin heißt der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ Güte q oder auch Resonanzüberhöhung eines Schwingkreises.

Eine weitere wichtige Kenngröße eines Schwingkreises ist die Breite der Resonanzkurve. Sie ist ein Maß für die Schärfe der Resonanz und ergibt sich aus der Differenz von ω_+ und ω_- , den beiden Frequenzen, bei denen die Kondensatorspannung U_C den Wert $U_C = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{C,\text{max}}$ annimmt. Mit der Näherung $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ ergibt sich für die Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}, \quad (19)$$

also auch der Zusammenhang zwischen Güte q und Breite der Resonanzkurve zu

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (20)$$

Zur Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung lässt sich anmerken, dass sie gemäß Gleichung (16) für $\omega \rightarrow 0$ gegen Null geht und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen π konvergiert. An der Stelle $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ist die Phasenverschiebung $\phi = -\frac{\pi}{2}$ und es gilt $\phi = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\phi = \frac{3\pi}{4}$ bei

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (21)$$

Damit gilt $\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}$ und damit lässt sich bei schwacher Dämpfung der Zusammenhang

$$\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_+ - \omega_- \quad (22)$$

erkennen.

3 Versuchsaufbau

Die Schaltung wird zunächst wie in Abbildung (3) aufgebaut. Diese besteht aus einem Funktionengenerator, dem RLC-Glied und dem Zweikanal-Oszilloskop mit dem Tastkopf zum Abgreifen der Kondensatorspannung.

Der Widerstand R kann im vorliegenden Schaltkreis zwischen drei verschiedenen Widerständen variiert werden. Die Widerstände R_1 und R_2 fest und der Widerstand R_3 ist als variierbarer Widerstand im Bereich von $0 - 10000 \Omega$ realisiert.

An dem Funktionengenerator lassen sich verschiedene Spannungstypen realisieren. Unter anderem kann dieser die verwendete Nadelimpuls- sowie Sinusspannung erzeugen.

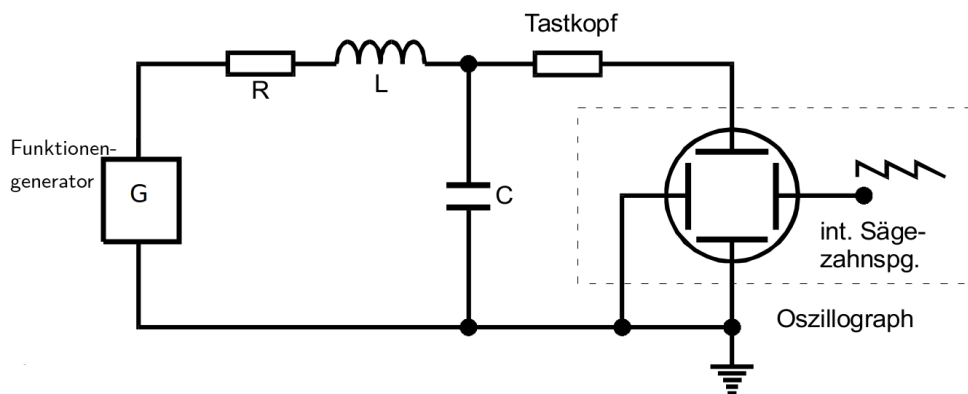


Abbildung 3: Prinzipieller Aufbau des RLC-Schwingkreises zur Untersuchung der zeitabhängigen Spannungsamplitude am Kondensator und des Widerstandes im aperiodischen Grenzfall. (vgl. [1])

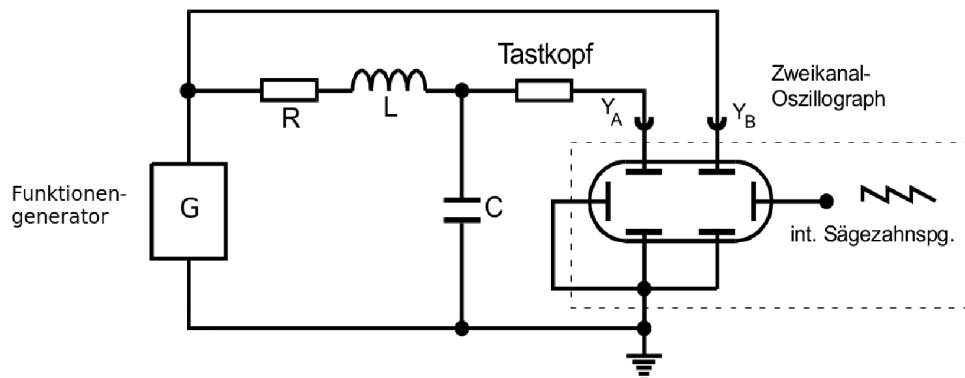


Abbildung 4: Aufbau des RLC-Schwingkreises zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude und der Phasenverschiebung zwischen Kondensatorspannung und Erregerspannung. (vgl. [1])

Die Größen der Induktivität L und des Kondensators C sind hierbei ebenso bekannt wie die Widerstände R_1 und R_2 .

Zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude und der Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Kondensatorspannung wird der Aufbau etwas modifiziert.

Das Zweikanal-Oszilloskop dient nun nicht mehr nur zum Aufzeichnen der Kondensatorspannung sondern der Versuchsaufbau wird wie in Abbildung (4) dargestellt, verändert, sodass auf dem zweiten Kanal des Oszilloskops die Generatorspannung aufgenommen wird. Die Generatorspannung und die Kondensatorspannung können nun zugleich am Oszilloskop aufgezeichnet werden.

4 Versuchsdurchführung

Vor Beginn der Messung werden die Kenngrößen der verwendeten Bauteile notiert.

4.1 Bestimmung des Dämpfungswiderstands R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex}

Zur Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes R_{eff} und der Abklingdauer T_{ex} wird die Abnahme der Spannungsamplitude der Kondensatorspannung U_C untersucht. Dazu wird am Funktionengenerator ein Nadelimpuls eingestellt. Es wird der kleinere der beiden fixen Widerstände des Schaltkreises, $R_1 = (48.1 \pm 0.1) \Omega$, verwendet.

Die Kondensatorspannung wird hierbei auf den ersten Kanal des Oszilloskops gegeben. Auf dem Bildschirm des Oszilloskops ist die Abnahme der Spannungsamplitude der Kondensators zu sehen.

Der Nadelimpuls soll so eingestellt werden, dass sich die Spannungsamplitude am Kondensator zwischen zwei Impulsen mindestens um den Faktor 3 bis 8 ändert. Dazu werden die Frequenz und Amplitude des Nadelimpulses ebenso wie das Triggerlevel am Oszilloskop variiert, bis sich der gewünschte Spannungsverlauf auf dem Bildschirm des Oszilloskops zeigt.

Mit der Cursorfunktion werden die positiven Spannungsamplituden mit den zugehörigen Zeitdifferenzen zum auslösenden Nadelimpuls bestimmt und der Spannungsverlauf über die USB-Ausgabe des Oszilloskops gespeichert.

4.2 Bestimmung des Widerstands R_{ap}

Für die zweite Messung zur Bestimmung des Widerstands R_{ap} im aperiodischen Grenzfall wird der regelbare Widerstand R_3 verwendet. Dieser wird zunächst auf seinen maximalen Wert gestellt. Am Oszilloskop zeigt sich lediglich die erwartete stetig abfallende Spannung am Kondensator.

Der Widerstand R_3 wird so weit heruntergeregelt, dass am Spannungsverlauf Überschwinger sichtbar werden. Der Widerstand R_3 wird langsam so weit wieder hoch geregelt, dass die Überschwinger soeben verschwinden. Der Wert des Widerstandes R_3 entspricht dem Widerstand für den aperiodischen Grenzfall des Schaltkreises und wird notiert.

4.3 Bestimmung der Frequenzabhängigkeit von Kondensatorspannung und Phase zwischen Kondensator- und Erregerspannung

Zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phase zwischen Kondensator- und Erregerspannung wird am Funktionengenerator eine Sinusspannung eingestellt und die Generatorspannung $U(t)$ über den zweiten Kanal des Oszilloskops abgegriffen.

Am Oszilloskop werden beide Spannungsverläufe übereinander gelegt. Zunächst wird die Frequenz einmal über den Bereich 1 kHz bis etwa 100 kHz variiert und dabei die Spannungsverläufe am Oszilloskop beobachtet, sodass der Bereich der Resonatorfrequenz bestimmt werden kann. Für Frequenzen nahe der Resonatorfrequenz wird im Weiteren in höherer Auflösung gemessen.

Es werden ungefähr 20 Datensätze aus Generatorspannung $U(t)$, Kondensatorspannung U_C , dem Abstand a zwischen den Nulldurchgängen der beiden Spannungen und der jeweiligen Frequenz ω der Sinusspannung aufgenommen.

Die Spannungsmaxima beider Spannungen werden jeweils über die Measure-Funktion des Oszilloskops bestimmt.

Der Abstand zwischen den Nulldurchgängen der beiden Spannungsverläufe wird mit der Cursorfunktion bestimmt. Die Periodendauer b , welche zusätzlich zur Berechnung der Phasendifferenz ϕ benötigt wird, muss nicht gemessen werden, da sie über den Kehrwert der verwendeten Frequenz berechnet werden kann.

5 Auswertung

Die zu Beginn notierten Werte für die Komponenten des Schaltkreises lauten:

$$L = (10.11 \pm 0.03) \text{ mH},$$

$$C = (2.098 \pm 0.006) \cdot 10^{-9} \text{ F},$$

$$R_1 = (48.1 \pm 0.1) \Omega,$$

$$R_2 = (509.5 \pm 0.5) \Omega.$$

5.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung

In Tabelle 1 befinden sich die gemessenen Daten der Spannungsamplituden U_C und die zugehörigen Zeiten t . Der Verlauf der Spannungsamplitude ist in Abbildung 6 abgebildet. Die zugehörige Einhüllende ist in Abbildung 5 dargestellt. Da sich U_0 nach dem Ohmschen Gesetz nur um einen Faktor von I_0 unterscheidet, ergibt sich nach Gleichung (6) die Einhüllende mittels

$$A = A_0 e^{-2\pi\mu t}. \quad (23)$$

Tabelle 1: Messdaten des zeitlichen Verlaufs der Kondensatorspannung zur Bestimmung der Einhüllenden.

U_C/V	$t / 10^{-6}s$
6.64	0.0
5.68	30.0
4.80	58.0
4.08	88.0
3.44	118.0
2.96	148.0
2.56	176.0
2.16	206.0
1.84	236.0
1.60	266.0
1.36	294.0
1.20	324.0
1.04	354.0
0.88	382.0
0.80	412.0
0.72	442.0

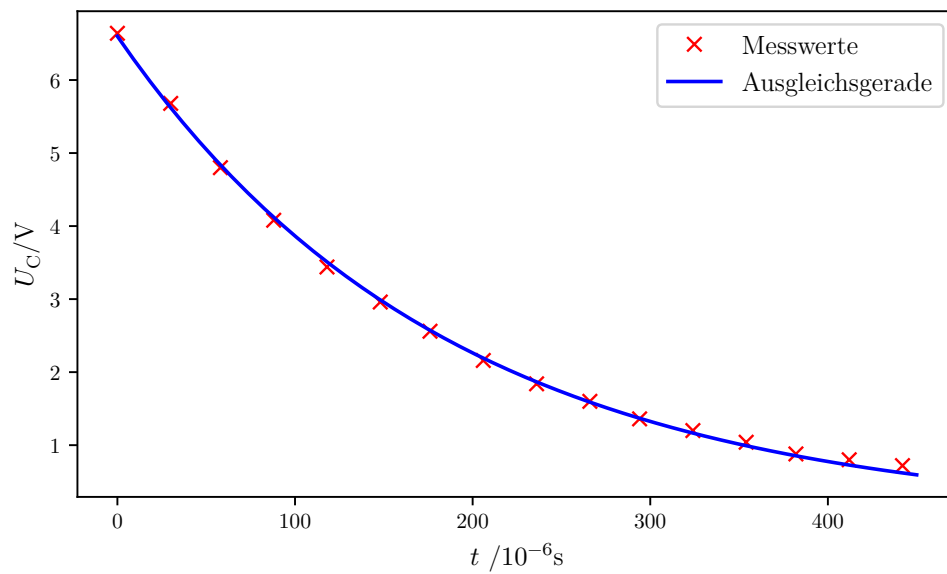


Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung und die berechnete Einhüllende aufgetragen gegen die Zeit.

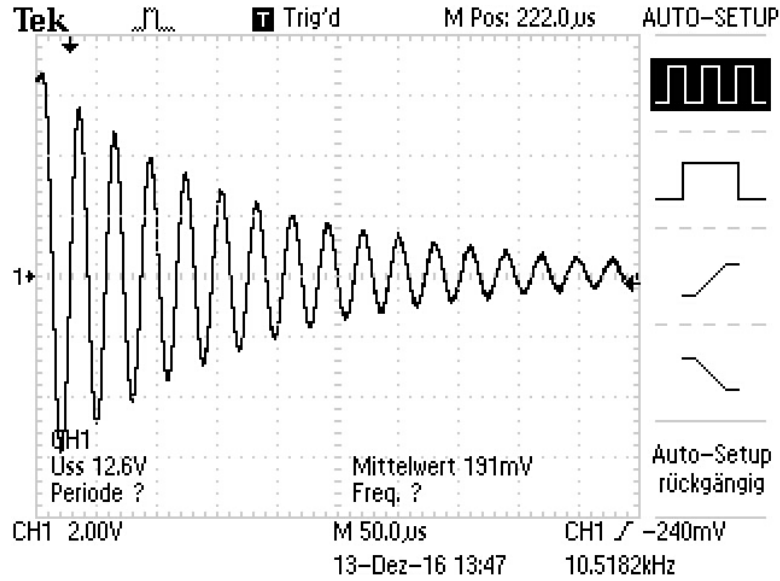


Abbildung 6: Zeitlicher Verlauf der Spannungsamplitude am Kondensator nach Anregung durch einen Nadelimpuls.

Die Ausgleichsrechnung mittels Scipy und Python liefert die Werte:

$$A_0 = (6.60 \pm 0.04) \text{ V},$$

$$\mu = (851.8 \pm 7.5) \frac{1}{\text{s}}.$$

R_{eff} lässt sich mittels μ über Gleichung (4) ermitteln. T_{ex} ergibt sich nach Gleichung (9). Mittels Scipy und Python ergeben sich die Größen samt ihrer Fehler zu:

$$T_{\text{ex}} = (18.7 \pm 0.2) \cdot 10^{-5} \text{ s},$$

$$R_{\text{eff}} = (108.2 \pm 1.0) \Omega.$$

Der effektive Widerstand R_{eff} weicht somit von $R_1 = 48.1 \Omega$ um $\Delta R = 60.1 \Omega$ ab. Diese Abweichung wird verursacht durch den bisher vernachlässigten Innenwiderstand des Generators. Für die Berechnung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung wird der Innenwiderstand des Generators von $R_{\text{Generator}} = 50 \Omega$ daher mitbetrachtet.

5.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{ap}

Nach Gleichung (11) ergibt sich der Widerstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt zu

$$R_{\text{ap}} = \pm \sqrt{\frac{4L}{C}}, \quad (24)$$

wobei der positive Wert – also die physikalisch relevante Größe – betrachtet wird. Mit den notierten Werten und Gauß'scher Fehlerfortpflanzung erhält man schließlich

$$R_{\text{ap}} = (4390 \pm 9) \Omega.$$

Der experimentell bestimmte Wert ist $R_{\text{ap}} = 3400 \Omega$.

5.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis

Die gemessenen Daten zur Bestimmung der Resonanzüberhöhung und der Breite $\omega_1 - \omega_2$ der Resonanzkurve befinden sich in Tabelle 2. In Abbildung 7 ist die normierte Kondensatorspannung $\frac{U_C}{U_0}$ gegen die Frequenz ω halblogarithmisch aufgetragen.

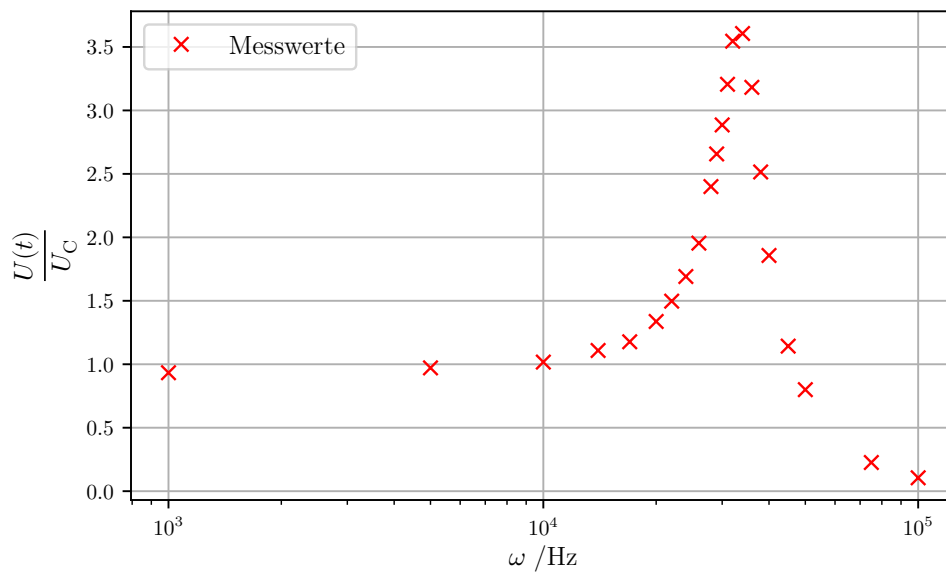


Abbildung 7: Frequenzabhängigkeit der normierten Kondensatorspannung in halblogarithmischer Darstellung.

Aus den Messdaten wird die Resonanzüberhöhung q abgelesen zu

$$q_{\text{Experiment}} = 3.61.$$

Aus Formel (18) ergibt sich q zu

$$q_{\text{Theorie}} = (3.923 \pm 0.009).$$

Zur Untersuchung der Breite der Resonanzkurve wird der Bereich um die Resonanzfrequenz wie in Abbildung 8 linear dargestellt. Zusätzlich wird $\frac{q_{\text{Experiment}}}{\sqrt{2}}$ eingezeichnet,

Tabelle 2: Messdaten zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung zur Bestimmung der Güte q und Breite $\omega_+ - \omega_-$.

$f/\cdot 10^3 \text{Hz}$	U_C/V	$\frac{U(t)}{U_C}$
1.0	2.52	0.93
5.0	3.40	0.97
10.0	3.56	1.02
14.0	3.88	1.11
17.0	4.12	1.18
20.0	4.68	1.34
22.0	5.24	1.50
24.0	5.92	1.69
26.0	6.84	1.95
28.0	8.40	2.40
29.0	9.30	2.66
30.0	10.10	2.89
31.0	10.90	3.21
32.0	11.70	3.55
34.0	11.90	3.61
36.0	10.50	3.18
38.0	8.30	2.52
40.0	6.50	1.86
45.0	4.00	1.14
50.0	2.80	0.80
75.0	0.75	0.23
100.0	0.35	0.11

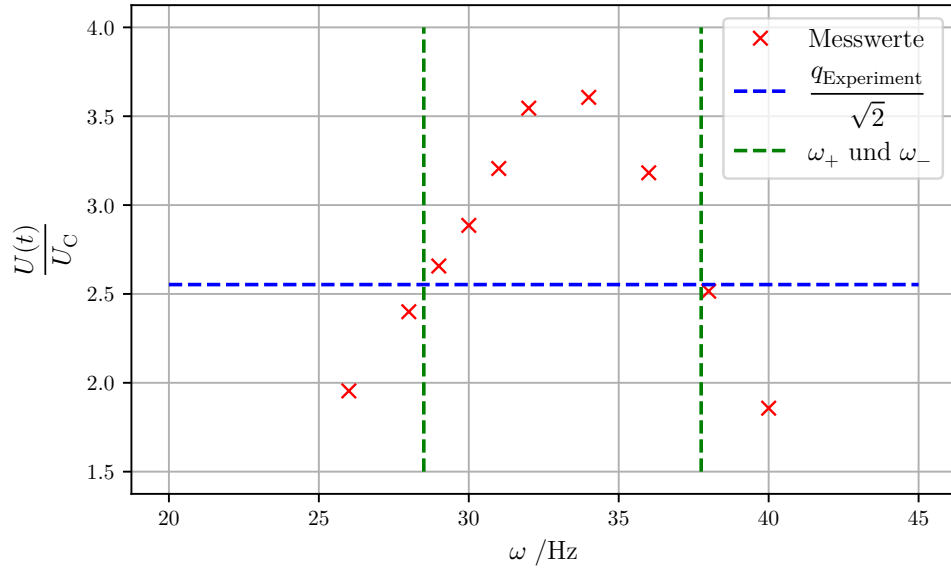


Abbildung 8: Linearer Plot der normierten Kondensatorspannung gegen die Frequenz zur Bestimmung der Güte und der Breite der Resonatorfrequenz.

sodass die Breite der Resonatorfrequenz abgelesen werden kann. Aus der Abbildung wurde die Breite abgelesen zu:

$$\text{Abgelesen : } \omega_+ - \omega_- \approx 9.25 \cdot 10^3 \text{ Hz},$$

nach Formel (19) ergibt sich:

$$\text{Theorie : } \omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} = (8.81 \pm 0.03) \cdot 10^3 \text{ Hz}.$$

Hierbei entspricht $R = R_{\text{Generator}} + R_2 = (559.5 \pm 0.5) \Omega$, also dem Gesamtwiderstand der Schaltung bestehend aus Innenwiderstand $R_{\text{Generator}}$ des Generators und dem eingebauten Widerstand R_2 .

5.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Die Messwerte zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung sind in Tabelle 3 aufgetragen. In Abbildung 9 sind diese halblogarithmisch dargestellt. Hier sei angemerkt, dass die Phasenverschiebung ϕ mittels $\phi = 2\pi \frac{a}{b}$ bestimmt wird, wobei a der gemessenen Zeitdifferenz zwischen zwei Nulldurchgängen und b der Periodendauer also $\frac{1}{\omega}$ entspricht.

Um die Resonatorfrequenz bzw. ω_1 und ω_2 besser ablesen zu können, wird der Bereich um die Resonatorfrequenz linear geplottet. Der zugehörige Plot befindet sich in Abbildung 10.

Tabelle 3: Messdaten zur Untersuchung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung.

ω / Hz	a / μs	b / μs	ϕ / rad
1.0	4.0	1000.0	0.02513
5.0	6.0	200.0	0.18850
10.0	3.4	100.0	0.21363
14.0	2.6	71.4	0.22871
17.0	2.4	58,8	0.25635
20.0	2.4	50.0	0.30159
22.0	2.6	45.5	0.35940
24.0	3.0	41.7	0.45239
26.0	3.2	38.5	0.52276
28.0	3.2	35.7	0.56297
29.0	3.2	34.5	0.58308
30.0	4.0	33.3	0.75398
31.0	4.6	32.3	0.89598
32.0	5.6	31.3	1.12595
34.0	7.8	29.4	1.66630
36.0	9.2	27.8	2.08099
38.0	10.0	26.3	2.38761
40.0	10.2	25.0	2.56354
45.0	10.2	22.2	2.88398
50.0	9.8	20.0	3.07876
75.0	6.7	13.3	3.15730
100.0	5.3	10.0	3.33009

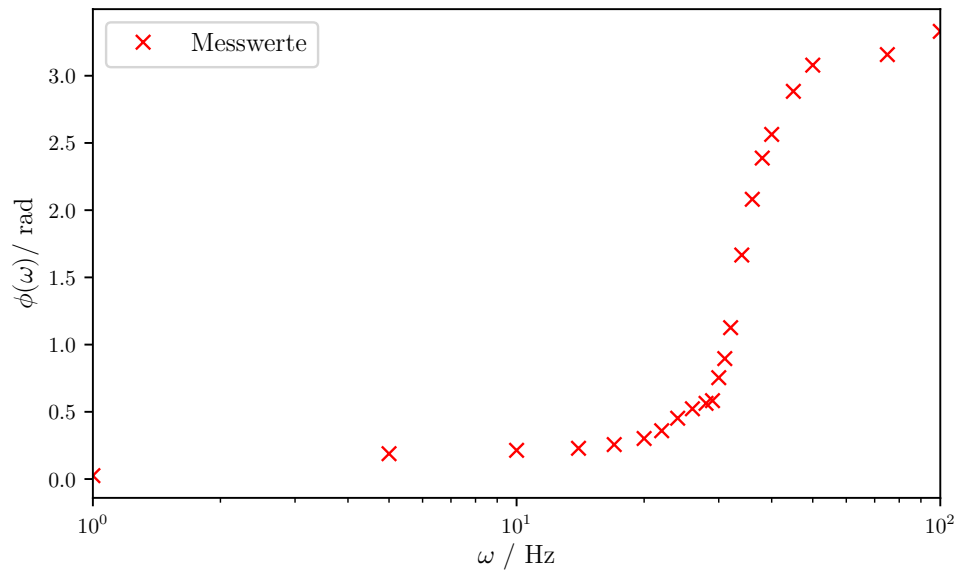


Abbildung 9: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung halblogarithmisch aufgetragen.

Aus dem Plot werden die entsprechenden Werte abgelesen und die Theoriewerte werden nach Gleichung (21) bzw. (17) bestimmt. Die abgelesenen bzw. berechneten Werte sind in Tabelle 4 aufgetragen.

Tabelle 4: Experimentell und theoretisch bestimmte Werte für die Resonatorfrequenz und $\omega_{1,2}$.

	ω_1 / kHz	ω_{res} / kHz	ω_2 / kHz
Abgelesen	30.2	33.7	37.7
Theoriewert	30.4 ± 0.1	34.0 ± 0.1	39.2 ± 0.1

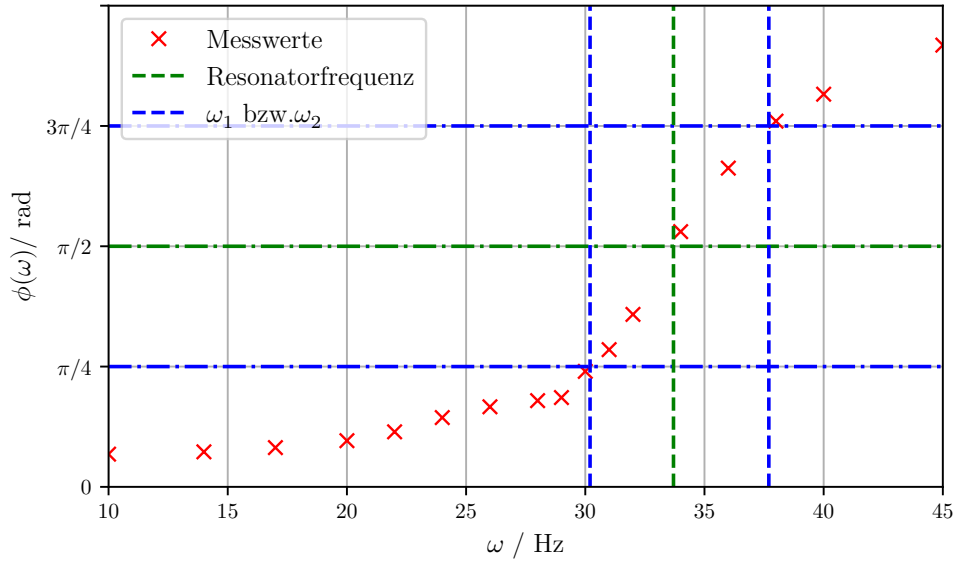


Abbildung 10: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung linear dargestellt.

6 Diskussion

Die Differenz zwischen dem berechneten R_{eff} und dem in der Schaltung eingebauten Widerstand R_1 beträgt $\Delta R = 60.1 \Omega$. Diese lässt sich auf Innenwiderstand des Funktionsgenerators von $R_{\text{Generator}} = 50 \Omega$ zurückführen. Daher wird, wie in der Auswertung erwähnt, der Generatorinnenwiderstand bei der Berechnung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung berücksichtigt. Die verbleibende Differenz $\Delta R - R_{\text{Generator}} = 10.1 \Omega$ lässt sich mit kleinen Messunsicherheiten – also statistischen Fehlern – begründen und liegt annähernd im Toleranzbereich.

Bei der Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{ap} zeigt sich eine Abweichung des experimentell bestimmten Wertes von 23% zum Theoriewert. Dies lässt sich einerseits auf das Vernachlässigen von den Innenwiderständen der weiteren Bauteile und andererseits auf Schwierigkeiten beim Ablesen des Widerstandes zurückführen. Im Grenzbereich zeigten sich keine erkennbaren Unterschiede im Verlauf der Kondensatorspannung.

Beim Vergleich der gemessenen beziehungsweise aus den Plots abgelesenen Messgrößen zeigen sich nur geringe Abweichungen gegenüber den Theoriewerten. Im Detail zeigt ein Vergleich zwischen der theoretisch aus den Kenngrößen des Schwingkreises berechneten Güte q_{Theorie} mit der experimentell bestimmten Güte $q_{\text{Experiment}}$ eine Abweichung von 8%. Für die Breite der Resonanzkurve ergibt sich eine Abweichung von 5%.

Für die bestimmten Werte bei der Beobachtung der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz zeigt sich für ω_1 und ω_{res} eine Abweichung kleiner als 1%. Für ω_2 erhält man selbige zu 4%.

Die abgelesenen Werte liegen alle absolut im Rahmen der Toleranz und sind auf

statistische Fehler und Ablesefehler zurückzuführen.

Allerdings fiel bereits zu Beginn der Messung auf, dass der Funktionengenerator keinen richtigen Nadelimpuls lieferte. Stattdessen lieferte der Generator einen Rechteckimpuls. Vergleiche dazu Abbildung 11. Wahrscheinlich wird dies allerdings wenig Einfluss auf die Messung gehabt haben.

Alle bestimmten Messgrößen finden sich in Tabelle 5. Falls ein Theoriewert bestimmt wurde, ist zudem die prozentuale Abweichung zwischen Experiment und Theorie angegeben.

Abbildung 11: Spannungsverlauf der Generatorspannung bei eingestellter Nadelimpulsfunktion.

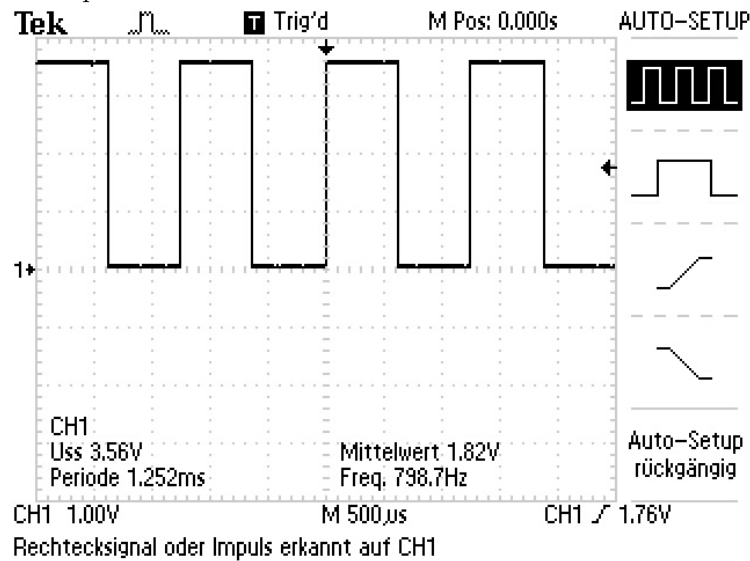


Tabelle 5: Tabelle aller bestimmen/abgelesenen Werte

Messgröße	Experiment	Theorie	Abweichung
Abklingdauer T_{ex}	$(18.7 \pm 0.2) \cdot 10^{-5} \text{ s}$	—	—
Schaltungswiderstand R_{eff}	$(108.2 \pm 1.0) \Omega$	—	—
R_{ap}	3400Ω	$(4390 \pm 9) \Omega$	22.6%
Resonanzüberhöhung q	3.61	(3.923 ± 0.009)	8%
$\omega_+ - \omega_-$	$9.25 \cdot 10^3 \text{ Hz}$	$(8.81 \pm 0.03) \cdot 10^3 \text{ Hz}$	5%
ω_{res}	$33.7 \cdot 10^3 \text{ Hz}$	$(34.0 \pm 0.1) \cdot 10^3 \text{ Hz}$	0.9%

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf> (besucht am 16.12.2016).
- [2] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3*. 10. Aufl. Berlin, Deutschland: Springer, 2013.