

Durchführung: 31.01.2017

Abgabe: 03.02.2017

2. Abgabe: 06.02.2017

PRAKTIKUMSPROTOKOLL V102

DREHSCHWINGUNGEN

Anneke Reinold¹,
Vanessa Sulaiman²

¹anneke.reinold@tu-dortmund.de

²vanessa.sulaiman@tu-dortmund.de

1 Einleitung

Mit einem Pendel sollen die elastischen Konstanten eines Metalls bestimmt werden. Zudem soll unter Benutzung dieser Werte das magnetische Moment eines Permanentmagneten bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Grundlegende Begriffe aus der Elastizitätstheorie

2.1.1 Normal- und Tangentialspannung

Es gibt zwei verschiedene Arten von Kräften auf Körper. Einerseits gibt es Kräfte, welche auf jedes Volumenelement des Körpers wirken und dadurch den Bewegungszustand des Körpers verändern. Andererseits gibt es Kräfte, die nur auf die Oberflächenelemente des Körpers wirken und ihn verzerren, also seine Gestalt oder sein Volumen ändern. Sie wirken allerdings nicht nur an der Oberfläche, sondern an jeder Querschnittsfläche durch den Körper. Ein Maß für letztere wird in Kraft pro Fläche angegeben und wird Spannung genannt. Diese wird in die Normalspannung σ bzw. Druck P und die Tangential- oder Schubspannung τ aufgeteilt, welche senkrecht bzw. parallel zur Oberfläche des Körpers sind.

2.1.2 Hookesches Gesetz

Der reversible Bereich der Verformung wird Hookescher Bereich genannt. Für entsprechend kleine Spannungen ist die Änderung der Länge oder des Volumens des Körpers proportional zur Spannung, es lässt sich also ein Hookesches Gesetz aufstellen:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

bzw.

$$P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (2)$$

Die Deformation lässt sich auch als Verringerung oder Erhöhung des Abstands zwischen den benachbarten Atomen verstehen. Solange der neue Abstand im Hookeschen Bereich liegt, ist die Deformation reversibel. Der Hookesche Bereich ist in Abbildung 1 dargestellt mit dem neuen Abstand r'_0 .

Die Kräfte zwischen den einzelnen Atomen in einem Kristall mit niedriger Symmetrie sind richtungsabhängig, sodass für die Beschreibung der Spannung und die Beschreibung der Deformation jeweils 6 Komponenten nötig sind, sodass letztendlich eine 6x6-Matrix mit 36 elastischen Konstanten nötig ist, um das Hookesche Gesetz vollständig aufzustellen. Durch das Energieprinzip lässt sich allerdings zeigen, dass die Matrix symmetrisch ist, sodass es nur 21 verschiedene Konstanten gibt. Durch zusätzliche Symmetrien lässt sich diese Zahl noch weiter reduzieren.

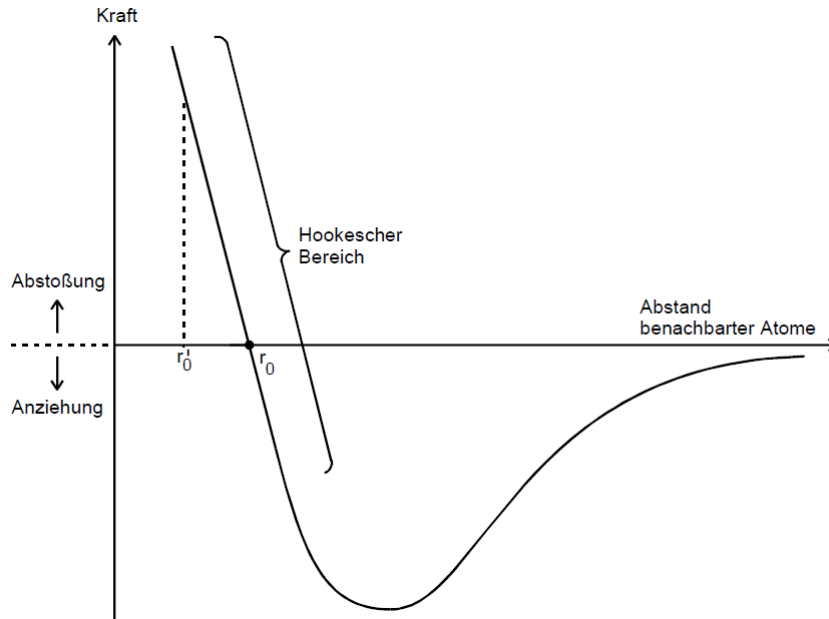


Abbildung 1: Eindimensionaler schematischer Kraftverlauf zwischen benachbarten Atomen im Kristallgitter.[1]

2.1.3 Isotrope Körper und ihre elastischen Konstanten

In diesem Experiment werden nur isotrope Körper mit richtungsunabhängigen elastischen Konstanten betrachtet. Zur vollständigen Beschreibung dieser Körper sind nur zwei elastische Konstanten nötig, aus praktikablen Gründen werden jedoch vier voneinander abhängige elastische Konstanten definiert. Die beiden benötigten Konstanten sind der Schub- bzw. Torsionsmodul G , welcher ein Maß für die Gestaltselastizität ist, und der Kompressionsmodul Q , welcher ein Maß für die Volumenelastizität ist. Die beiden zusätzlichen Größen sind der Elastizitätsmodul E , welcher die Längenänderung in Spannungsrichtung angibt und schon in Gleichung (1) auftaucht, und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ , welche die Längenänderung senkrecht zur Spannungsrichtung angibt, wie in Abbildung 2 dargestellt. Sie ergibt sich aus

$$\mu = -\frac{\Delta B}{B} \frac{L}{\Delta L}. \quad (3)$$

Die beiden zusätzlichen Größen beziehen sich beide auf den Einfluss einer Normalspannung σ auf den Körper.

Für die vier elastischen Konstanten lassen sich die folgenden Zusammenhänge zeigen:

$$E = 2G(\mu + 1) \quad (4)$$

$$E = 3(1 - 2\mu)Q \quad (5)$$

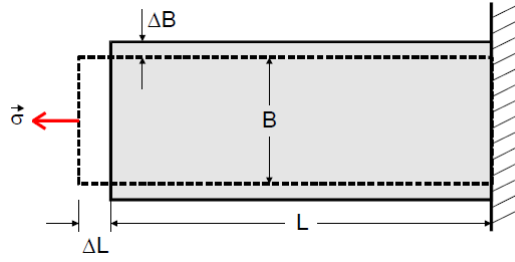


Abbildung 2: Erklärung der Querkontraktionszahl an einem gedehnten Stab.[1]

2.2 Bestimmung der Konstanten isotroper Stoffe

Nur der Elastizitätsmodul E und der Schubmodul G lassen sich experimentell an langen Stäben gut bestimmen. Die anderen beiden Größen können dann aus den Gleichungen (4) und (5) bestimmt werden. Bei Materialien mit niedrigem Schmelzpunkt muss zudem beachtet werden, dass elastische Nachwirkungen auftreten können. Dies bedeutet, dass sich die Deformation nicht unmittelbar nach der Belastung auf den endgültigen Wert einstellt und auch beim Verschwinden der Belastung kehrt die Probe nicht unmittelbar in ihre Ausgangsform zurück. Um Fehler durch die elastische Nachwirkung zu verhindern, wird eine dynamische Messmethode mit zeitlich periodischer Spannung durchgeführt.

In diesem Versuch wird lediglich der Schubmodul G gemessen. Dieser gibt die Gestaltselastizität an und lässt sich anhand einer Scherung oder einer Torsion messen. Eine Scherung ist eine Verschiebung der Oberseite gegenüber der Unterseite eines Körpers nach rechts oder links. Eine solche Deformation ist jedoch experimentell schwierig zu erzeugen und der dabei entstehende Winkel schwer zu messen. Stattdessen wird der Schubmodul mithilfe einer Torsion gemessen. Dazu wird ein zylindrischer Draht an einem Ende fest eingespannt und durch ein Kräftepaar verdreht, wie in Abbildung 3 dargestellt.

Auf den Draht wirkt dadurch ein Drehmoment M , welches eine Scherung der Mantelflächen des Zylinders um den Winkel α hervorruft. Wie in Abbildung 4 deutlich wird, wird der Zylinder in infinitesimale Hohlzylinder zerlegt, um das Drehmoment zu berechnen, da dieses vom Hebelarm, also vom Abstand des Massepunkts zur Drehachse abhängt. Durch Integration über den gesamten Zylinderradius R lässt sich dann das Gesamtdrehmoment

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{L} \varphi r^3 dr = \frac{\pi G R^4}{2L} \varphi \quad (6)$$

berechnen, wobei φ der Torsionswinkel und L die Länge des Drahts ist. Aus dem Vergleich dieses Zusammenhangs mit dem Hookschen Gesetz $M = D\varphi$ ergibt sich für die Winkelrichtgröße D der Zusammenhang

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L} . \quad (7)$$

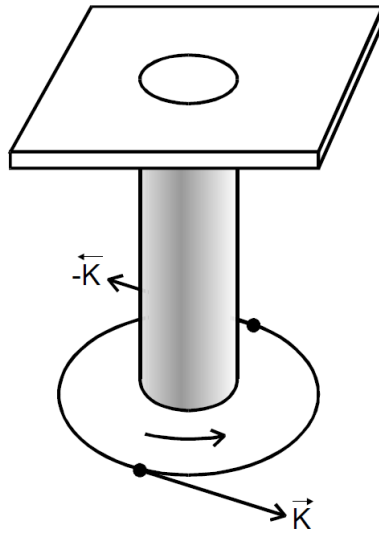


Abbildung 3: Torsion eines Stabs.[1]

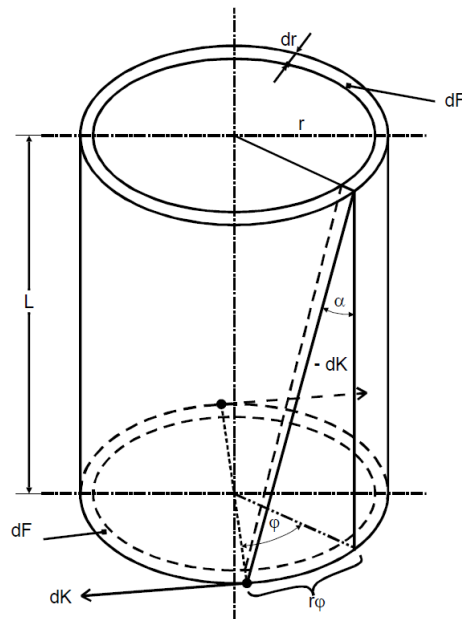


Abbildung 4: Zusammenhang zwischen Drehmoment M und Torsionswinkel φ . [1]

Aufgrund der zuvor erwähnten elastischen Nachwirkungen werden nicht einfach mit einer statischen Messung sämtliche erforderliche Größen gemessen, um daraus den Torsionsmodul G zu berechnen, obwohl diese Größen alle leicht messbar sind. Stattdessen wird eine dynamische Methode benutzt, indem ein Körper mit großem Trägheitsmoment I an den Draht gehängt wird und das System zu Drehschwingungen angeregt wird.

Auf den Draht wirken nun zwei Drehmomente: Das durch die Torsion entstehende und das durch die Trägheit des Körpers entstehende. So ergibt sich für die Schwingung die Bewegungsgleichung

$$D\varphi + I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (8)$$

Aus der Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich für die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (9)$$

aus welcher nun durch Einsetzen der Winkelrichtgröße nach Formel (7) der Torsionsmodul G bestimmt werden kann. Durch Umformen ergibt sich der Zusammenhang

$$G = \frac{8\pi L}{T^2 R^4} (I_K + I_H). \quad (10)$$

wobei I_K das Trägheitsmoment des Körpers und I_H das Trägheitsmoment der Halterung ist. Hier wird als Körper eine Kugel verwendet, deren Trägheitsmoment sich nach

$$I_K = \frac{2}{5}m_k R_k^2 \quad (11)$$

berechnet.

2.3 Messung des magnetischen Moments eines Permanentmagneten

Mit der dynamischen Methode lässt sich auch das magnetische Moment \vec{m} eines Permanentmagneten messen, welches als

$$\vec{m} = p\vec{a} \quad (12)$$

definiert ist. Auf einen Permanentmagneten in einem homogenen Magnetfeld wirken Kräfte auf die beiden Pole, wie in Abbildung 5 dargestellt.

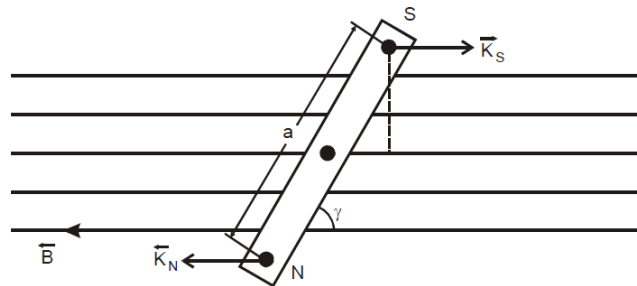


Abbildung 5: Permanentmagnet im äußeren Magnetfeld.[1]

Da die Kräfte in entgegengesetzte Richtungen zeigen, ergibt sich keine Translationsbewegung, sondern eine Drehbewegung mit dem Drehmoment

$$M_{\text{mag}} = mB \sin \gamma, \quad (13)$$

wobei B die Feldstärke des Magnetfelds ist. Sofern diese bekannt ist, lässt sich aus dem Drehmoment das magnetische Moment \vec{m} bestimmen. Dazu wird in die Kugel aus dem dynamischen Aufbau ein Stabmagnet eingebaut, welcher in der Ruhelage parallel zur Feldrichtung steht. Zur Erzeugung eines bekannten Magnetfelds wird ein Helmholtzspulenpaar um die Kugel herum aufgestellt. Unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung ergibt sich dann eine etwas veränderte Bewegungsgleichung für die Drehschwingung, aus der sich die veränderte Periodendauer

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{I_K + I_H}{mB + D}} \quad (14)$$

ergibt. Das Magnetfeld der Helmholtzspulen berechnet sich dabei nach

$$B = \mu_0 \frac{8I_B n}{\sqrt{125} R_{Sp}} . \quad (15)$$

3 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau der dynamischen Methode ist in Abbildung 6 dargestellt. Unterhalb der Kugel ist noch eine Dämpfung angebracht, um Pendelbewegungen zu verhindern und nur reine Drehschwingungen zu messen.

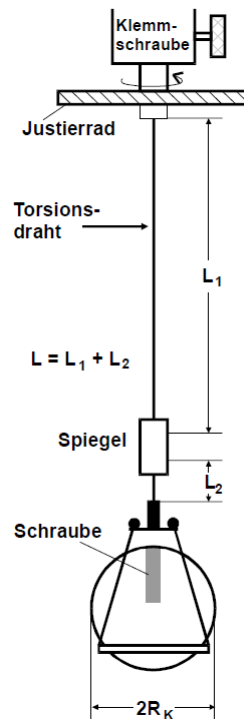


Abbildung 6: Aufbau des Versuchs.[1]

Zudem ist noch eine Messapparatur zur Bestimmung der Periodendauer angebracht, welche in Abbildung 7 schematisch dargestellt ist. Eine Lichtquelle erzeugt einen durch Spalt und Sammellinse fokussierten Strahl, welcher vom Spiegel reflektiert wird. Der Spiegel dreht sich bei der Schwingung mit, sodass der Lichtstrahl zwischen den Umkehrpunkten auf der Mattscheibe schwingt. Die Messung der Periodendauer beginnt, sobald der Lichtstrahl den Lichtdetektor das erste Mal überstreicht und endet, wenn der Lichtstrahl den Detektor das dritte Mal überstreicht. Beim vierten Überstreichen wird die elektronische Uhr zurückgesetzt und die Messung kann erneut beginnen. Die digitale Schaltung sorgt dafür, dass die Messung beginnt und stoppt. Dabei ist darauf zu achten, dass das zweite Signal kein Signal an die Uhr geben soll, da dann erst eine Teilperiode vergangen ist. Die Schaltung setzt sich aus zwei Flip-Flops und einer monostabilen Kippstufe zusammen, mit welcher die Uhr zurückgesetzt wird.

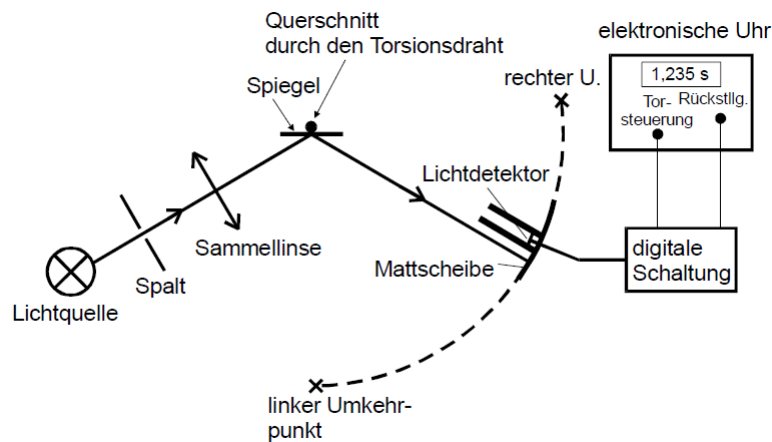


Abbildung 7: Messung der Periodendauer.[1]

Bei der Messung der Schwingungsdauer ohne Einfluss des Magnetfelds wird der Permanentmagnet wie in Abbildung 6 dargestellt senkrecht zum Erdmagnetfeld ausgerichtet und zehn Messungen durchgeführt. Zur Bestimmung des magnetischen Moments wird der Magnet parallel zum Magnetfeld der Helmholtzspulen ausgerichtet und die Schwingungsdauer für zehn verschiedene Stromstärken der Spulen gemessen. Um mithilfe des Aufbaus die Feldstärke des Erdmagnetfelds zu bestimmen, wird der Magnet parallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet und die Spulen werden ausgeschaltet. Aus der zehn Mal gemessenen Schwingungsdauer dieses Aufbaus kann mithilfe des zuvor bestimmten magnetischen Moments des Permanentmagneten nun die Erdmagnetfeldstärke berechnet werden.

4 Auswertung

Im Folgenden wird der Mittelwert immer durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (16)$$

und dessen Standardfehler durch

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (17)$$

berechnet. Alle weiteren Fehler berechnen sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots} \quad (18)$$

Der Plot und die Regression wurden mit python berechnet und erstellt.

In Tabelle 1 sind die Messwerte zu sehen, die bei der Messung der Periodendauer T mit und ohne Einfluss des Erdmagnetfeldes B_{Erde} entstanden.

Tabelle 1: Messergebnisse der Periodendauer T unter und ohne Einfluss des Erdmagnetfeldes B_{Erde}

Messung	T / s ohne B_{Erde}	T / s mit B_{Erde}
1	18,116	17,362
2	18,096	17,350
3	18,102	17,354
4	18,097	17,349
5	18,097	17,377
6	18,097	17,352
7	18,094	17,380
8	18,093	17,359
9	18,130	17,360
10	18,133	17,365

Für die berechneten Mittelwerte ergeben sich $\bar{T} = (18,106 \pm 0,005) \text{ s}$ für die Messung ohne das Magnetfeld und $\bar{T} = (17,361 \pm 0,003) \text{ s}$ für die mit B_{Erde} .

Tabelle 2: Apparaturgrößen

Kugelmasse	$m_K = (588,3000 \pm 0,0004) \text{ g}$
Kugelradius	$R_K = (25,5150 \pm 0,0002) \text{ mm}$
Trägheitsmoment Kugelhalterung	$I_H = 22,5 \text{ gcm}^2$
Windungszahl der Helmholtzspule	$n = 80$
Radius der Helmholtzspule	$R_{\text{Sp}} = 72 \text{ mm}$
Drahtlänge	$L = 64 \text{ cm}$
Drahtdicke	$d_D = (0,17 \pm 0,00) \text{ mm}$

Mit den Werten aus Tabelle 1 und 2 und Formel 10 wird der Schubmodul G berechnet. Es ergibt sich

$$G = (146,11 \pm 0,08) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}.$$

Der Theoriewert folgt aus [2] und ist gegeben durch

$$G_{\text{theo}} = 81 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}.$$

Es liegt eine Abweichung von 55,5% vor.

Mithilfe von Quelle [2] lässt sich feststellen, dass der Wert des Elastizitätsmoduls E in etwa mit dem des ferristischen Stahls übereinstimmt. Im Folgenden wird nun mithilfe des berechneten Werts für G , der Formeln 4 und 5 und des angegebenen Werts für den Elastizitätsmodul $E = (210,0 \pm 0,5) \text{ GPa}$ der Kompressionsmodul Q und die Querkontraktionszahl μ bestimmt. Es ergibt sich

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = -0,281 \pm 0,002$$

und

$$Q = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = (44,810 \pm 0,160) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}.$$

Wird ein Wert für Q und μ mit den Theoriewerten von E und G errechnet, so folgt daraus, dass

$$\mu_{\text{theo}} = 0,296 \pm 0,003$$

und

$$Q_{\text{theo}} = (171,80 \pm 2,60) \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}.$$

Tabelle 3 zeigt die Messwerte der Periodendauern in Abhängigkeit der Stromstärke an den Helmholtzspulen. Mit Formel 15 wird die jeweilige magnetische Flussdichte B aus der Stromstärke I_B berechnet.

Tabelle 3: Messergebnisse der Periodendauer T in Abhängigkeit des anliegenden Spulenstroms I_B

I_B / A	T_1 / A	T_2 / A	T_3 / A	T_4 / A	T_5 / A	\bar{T} / s	B / mT
0,1	17,064	17,047	17,050	17,049	17,048	$17,052 \pm 0,003$	0,100
0,2	15,417	15,412	15,410	15,406	15,399	$15,410 \pm 0,003$	0,200
0,3	14,003	13,975	13,971	13,959	13,960	$13,974 \pm 0,008$	0,300
0,4	12,973	12,973	12,963	12,960	12,952	$12,964 \pm 0,004$	0,400
0,5	12,078	12,076	12,075	12,072	12,071	$12,074 \pm 0,001$	0,500
0,6	11,353	11,353	11,346	11,337	11,331	$11,344 \pm 0,008$	0,600
0,7	10,626	10,622	10,623	10,616	10,610	$10,619 \pm 0,003$	0,700
0,8	10,168	10,166	10,160	10,154	10,153	$10,160 \pm 0,003$	0,800
0,9	9,695	9,693	9,684	9,683	9,685	$9,688 \pm 0,002$	0,900
1,0	9,248	9,242	9,229	9,233	9,226	$9,236 \pm 0,004$	1,000

Zur Ermittlung des magnetischen Moments m werden die Werte für $1/T^2$ und B in einem Graphen gegeneinander aufgetragen, der als Abbildung 8 zu sehen ist. Des Weiteren wird eine lineare Ausgleichsgerade der Form

$$y = ax + b$$

bestimmt, wobei die Steigung durch $a = 4\pi I/m$ gegeben ist. Als Parameter ergeben sich

$$\begin{aligned} a &= (108,31 \pm 1,35) \text{ mTs}^2 \\ b &= (-0,25 \pm 0,01) \text{ mT}. \end{aligned}$$

Es folgt durch Umstellen von Formel 14, dass

$$m = \frac{4\pi^2(\frac{2}{5}m_K R_K^2 + I_H)}{a} = (0,0567 \pm 0,0007) \text{ Am}^2.$$

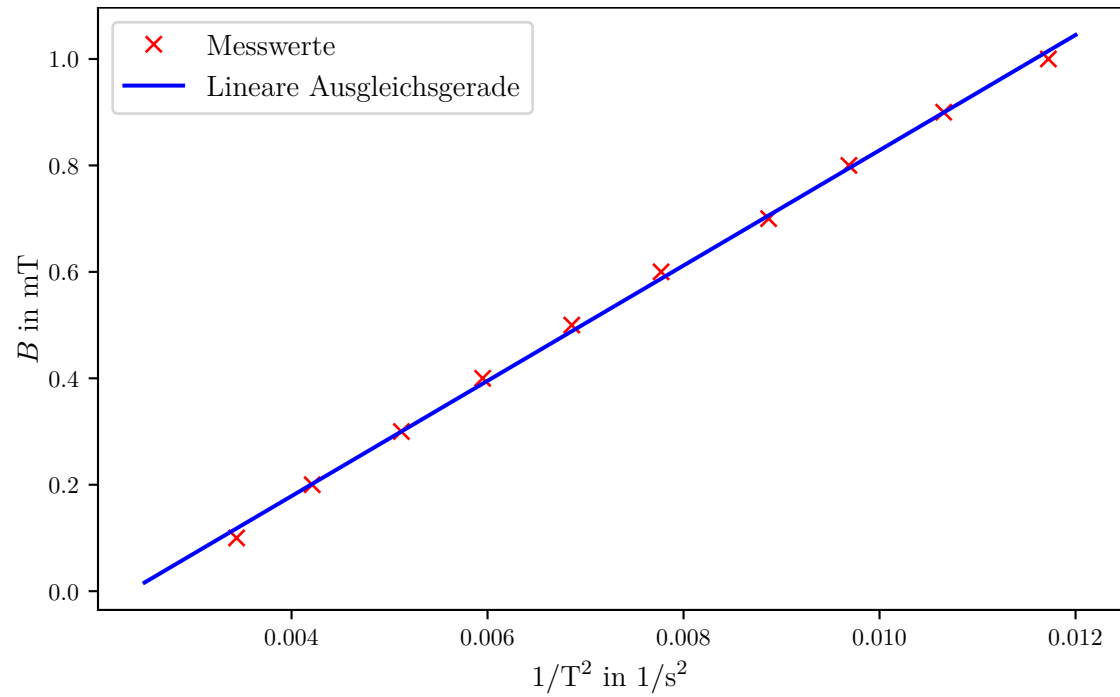


Abbildung 8: Graph zur Bestimmung des magnetischen Moments aus der Periodendauer und der Helmholtzspulen.

Durch die Messreihe unter Einfluss des Erdmagnetfelds B_{Erde} lässt sich schließlich eben dieses bestimmen. Es gilt:

$$B_{\text{Erde}} = \frac{4\pi^2 I}{mT^2} - \frac{\pi G R_D^4}{2Lm}$$

Und es ergibt sich ein Wert von

$$B_{\text{Erde}} = (29,0 \pm 0,4) \mu\text{T}.$$

5 Diskussion

Schon zu Beginn der Betrachtung der in der Auswertung bestimmten Werte fällt auf, dass die des experimentell bestimmten von dem aus der Theorie genommenen Wertes für den Schubmodul G stark abweichen. Mögliche Ursachen können ungenaue Angaben der Messapparatur, wie dem Trägheitsmoment oder auch Ungenauigkeiten während der Messung, wie dem Pendeln der Kugel oder des Spiegels sein. Somit weichen die aus G bestimmten Größen μ und Q ebenfalls stark ab. Über die eigentlichen Messungen der Periodendauer kann bemerkt werden, dass sich nur kleine Abweichungen im Vergleich zu der erstellten linearen Ausgleichsgeraden ergeben, sodass direkte Messfehler bei der Durchführung nicht den größten Anteil der Ungenauigkeiten ausmachen. Lediglich ist anzumerken, dass mehrere Messungen wiederholt werden mussten, da die Messschaltung aus Logikbauteilen nicht auslöste und auch das Auslenken mithilfe des Justierrades ungenau passierte. Auch etwaige Reibungsverluste während der Schwingungsdauer können sich auf die Messergebnisse ausgewirkt haben.

Die Intensität des Erdmagnetfelds, welcher vom Deutschen Geo-Forschungszentrum mit $B_{\text{Erde}} = 48\,977\text{ nT}$ [3] für Dortmund angegeben ist, liegt in derselben Größenordnung, nämlich im μ -Bereich. Insgesamt liegt hier eine Abweichung von 59% vor. Da in der Berechnung schon mehrere experimentelle Werte verwendet wurden, die wie zuvor schon erwähnt, Messungenauigkeiten unterlagen, kann der Wert als gut und die Abweichungen zum Literaturwert als gerechtfertigt angesehen werden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 102*. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf> (besucht am 24.12.2016).
- [2] R. Kindmann. *Stahl- und Verbundkonstruktionen*. 1999.
- [3] GFZ Potsdam. *IGRF-Deklinationsrechner*. URL: <http://www.gfz-potsdam.de/deklinationsrechner/> (besucht am 03.02.2017).