V103 Biegung elastischer Stäbe

Tobias Rücker
tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock
paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019, Abgabe: 17.12.2019

Versuchsgruppe: **42**

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Die Eigenschaften von Werkstoffen bilden in der heutigen Wissenschaft und Industrie ein Grundwissen, um für gegebene Probleme die optimalen Materialien zu finden. Eine Eigenschaft, die unteranderem im Bau von Kränen oder Windkraftwerken relevant ist, bildet der Elastizitätsmodul. Daher werden im folgenden der Elastizitätsmodul von zwei metallischen Stäben anhand einer einseitig und doppeltseitig fixierten Biegung bestimmt.

2 Theorie

Ein Körper erfährt eine Volumenänderung, wenn an dessen Oberfläche eine Kraft angelegt wird. Diese Kraft hat einen engen Bezug zur Fläche des Körpers und wird in der Physik als Spannung σ bezeichnet.
Ein Beispiel für eine Volumenveränderung stellt die einseitige Biegung eines Stabes dar. Dabei wird ein Ende des Stabes fixiert, während auf dem anderen Ende des Stabes eine Gewichtskraft über eine zusätzliche Masse wirkt. Dadurch wird das fixierte Ende des Stabes gestreckt, das Mittelstück des Stabes gestaucht und das Ende mit der Masse bleibt gleich. Der Stab stellt dabei aufgrund der inneren Kräfte und der elastischen Eigenschaften eine konstante Auslenkung ein. Bei kleinen Veränderungen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Deformation ${}^{\delta x}/_{\Delta x}$. Dabei stimmen die Drehmomente der äußeren Kraft mit dem Drehmoment der inneren Zug- und Druckspannungen überein. Dadurch wird die Spannung $\sigma(y)$ zu [2]

$$\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}. \tag{1}$$

Diese Kraft wird auch das Hooksche Gesetz genannt. Der Faktor E in der Formel wird der Elastizitätmodul genannt und stellt eine Materialkonstante dar. Das durch die Biegung beschriebene Drehmoment führt nach einer Kleinwinkelnäherung zu folgender Momentengleichung [2]

$$E\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2}\int_Q y^2 \,\mathrm{d}q = F(L-x). \tag{2}$$

Dabei ist D die Durchbiegung des Stabes, L die Länge des Stabes beginnend an dem Fixpunkt, $F(L-x)$ der Betrag des Drehmoments und [2]

$$I := \int_Q y^2 \,\mathrm{d}q(y) \tag{3}$$

das Flächenträgheitsmoment.
Aus Gleichung (2) folgt für die Durchbiegung D [2]

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) (\text{für}\, 0 \leq x \leq L). \tag{4}$$

Eine weitere mögliche Biegungsart stellt die beidseitig fixierte Biegung dar. Bei dieser wird der Stab an beiden Enden aufgelegt und die Gewichte werden an die Stabmitte gehangen.
Für die Beschreibung der Durchbiegung wird in diesem Fall zwischen den Bereichen $0 \leq x \leq L/2$ und $L/2 \leq x \leq L$ unterschieden.
Für den Bereich $0 \leq x \leq L/2$ ergibt sich für D [2]

$$D(x) = \frac{F}{48\,E\,I}(3L^2x - 4x^3) \tag{5}$$

und für den anderen Bereich $L/2 \leq x \leq L$ ergibt sich entsprechend [2]

$$D(x) = \frac{F}{48\,E\,I}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3). \tag{6}$$

Bei der Doppelbiegung stellt L den Abstand der Auflagepunkte voneinander dar.

3 Fehlerrechnung

Für eventuell anfallende Fehler in der Auswertung werden folgende Formeln verwendet:

Für den Mittelwert wird die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{7a}$$

verwendet. Der Fehler des Mittelwerts wird mit der Formel

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{1-N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}, \tag{7b}$$

berechnet, und die Gaußsche Fehlerfortpflanzung wird wie folgt bestimmt:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \tag{7c}$$

Die für eine lineare Regression benötigte Ausgleichsgerade wird mit den folgenden Parametern berechnet:

$$y = m \cdot x + b \tag{7d}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{7e}$$

$$b = \frac{\overline{y}\cdot\overline{x^2} - \overline{xy}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{7f}$$

4 Versuchsaufbau/Durchführung

Benötigt werden: *Eine ca.* 60 cm *lange,* 530 g *schwere, rechtreckige Metallstange, eine ca.* 60 cm *lange, runde Metallstange, eine Apperatur zur Biegung der Stäbe mit zwei Fixpunkten, zwei schiebbare Messuhren im* µm*-Bereich, eine* 55 cm *lange Skala für die Messuhren, eine Aufhängung (*19 g*), acht Gewichte (*4× *ca.* 1160 g*,* 2× *ca.* 500 g*,* 1× *ca.* 225 g*), eine Bindung für die Gewichte (hier eine Schraube (*22,1 g*)) ein Maßband, eine Waage.*

Zuerst wird die Aperatur wie in der folgenden Abbildung 1 aufgebaut.

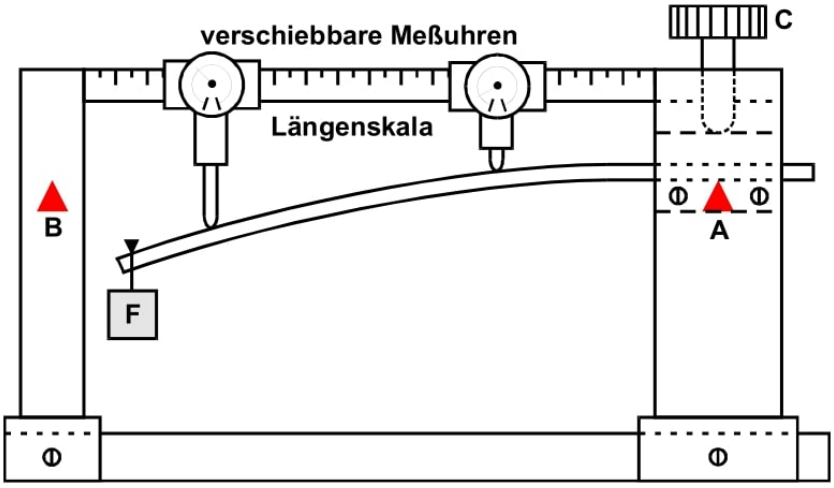


Abbildung 1: Aufbau der einseitigen Biegung [2]

Anschließend wird die eckige Stange an dem Skalennullpunkt eingespannt. Die Messuhren werden über der Stange auf der Skala platziert. Nun werden mit einer Messuhr 19 Messwerte der Durchbiegung in einem Abstand von 2,5 cm (von 2,5 cm bis 47,5 cm) bestimmt. Nach den Messungen ohne Gewicht, werden zwei Gewichte an das lose Ende gehangen und die Messungen wiederholt. Anschließend werden die Gewichte abgenommen und die eckige Stange an beiden Enden fixiert. Dabei ist zu beachten, dass beide Enden lose eingespannt werden, sodass die Stange nur auf den Fixpunkten aufliegt. Nun wird die Durchbiegung an 14 Stellen mit einem Abstand von 3 cm gemessen. Danach werden vier Gewichte mittig an die Stange gehangen und die Messungen wiederholt. Anschließend werden die Länge und Breite des Stabs an zehn verschiedenen Stellen gemessen.

Der obige Prozess wird für die runde Stange wiederholt. Zu Beginn wird die Stange einseitig eingespannt. Die Durchbiegung wird ohne Gewichte 19-mal in einem Abstand von 2,5 cm gemessen. Dann wird ein Gewicht an das lose Ende gehangen und die Messung wiederholt. Anschließend wird das Gewicht abgenommen und die Stange an beiden Seiten fixiert. Auch hier dürfen die beiden Enden nicht fest eingespannt werden. Abschließend werden 14 Messungen ohne Gewichte und 14 Messungen mit drei Gewichten durchgeführt.

Wie bei der eckigen Stange wird auch hier der Durchmesser an zehn verschiedenen Stellen des Stabs abgenommen.

5 Auswertung

5.1 Kupfer einfach fixiert

Es handelt sich bei der Eckigen Stange um Kupfer, da das Material auf den Stab geschrieben wurde. Wird die Dichte mit den folgenden Werten (8a), (8b) und (8c) und der Formel $\rho = {}^{m}/_{V}$ berechnet, ergibt sich $\rho = 8{,}864\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Wird dieser Wert mit dem Literaturwert der Kupferdichte $\rho = 8{,}9\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ [1] verglichen, wird die Stabaufschrift bestätigt und es handelt sich hierbei wahrscheinlich um Kupfer. Die Maße und das Gewicht des Kupferstabs, sowie die Gewichte der Aufhängung und Schraube, an welche die Gewichte gehangen werden, sind im Folgenden aufgelistet:

$$\text{Länge des Kupferstabs:} \quad 59{,}2\,\mathrm{cm} \tag{8a}$$

$$\text{Mittelwert der Breite des Kupferstabs } \bar{b}\text{:} \quad (10{,}051 \pm 0{,}007)\,\mathrm{cm} \tag{8b}$$

$$\text{Mittelwert der Dicke des Kupferstabs } \bar{d}\text{:} \quad (10{,}033 \pm 0{,}005)\,\mathrm{cm} \tag{8c}$$

$$\text{Masse der Aufhängung:} \quad 19{,}0\,\mathrm{g} \tag{8d}$$

$$\text{Masse der Schraube:} \quad 22{,}1\,\mathrm{g} \tag{8e}$$

b / mm	d / mm	b / mm	d / mm
10.06	10.02	10.03	10.09
10.02	10.05	10.04	10.04
10.05	10.06	10.02	10.05
10.01	10.03	10.04	10.08
10.03	10.04	10.03	10.05

Tabelle 1: Messwerte der Breite und Dicke des Kupferstabs

Die Mittelwerte für die Dicke $\bar{d}$ und die Breite $\bar{b}$ wurden im Folgenden mit Tabelle 1 und Formel (7a) berechnet. Um das Flächenträgheitsmoment eines rechteckigen Stabes mit der Breite b und der Dicke d zu berechnen, welcher in z-Richtung gebogen wird, wird die Formel (3) auf folgende Art geschrieben:

$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Nach dem Lösen des Integrals hat das Flächenträgheitsmoment die Form

$$I = \frac{1}{12} b^3 d. \tag{10}$$

Das Flächenträgheitsmoment des Kupferstabs beträgt dann: $(8{,}459 \pm 0{,}013) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4$

Die Massen der Gewichte, welche für die einfache Biegung verwendet werden, lauten:

$$m_1 = 502{,}5\,\mathrm{g} \tag{11a}$$
$$m_2 = 503{,}3\,\mathrm{g} \tag{11b}$$

Die folgende Tabelle 2 gibt die Biegung des Kupferstabs mit und ohne Gewicht wieder. x beschreibt den Abstand zum Fixpunkt, D_0 die Biegung ohne Gewicht und D_m die Biegung mit Gewicht. Die Differenz steht für die Differenz von $(D_0 - D_m)$.

	D_0	D_m	Differenz		D_0	D_m	Differenz
x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm
2.5	8.15	8.28	-0.13	27.5	9.44	7.44	2.00
5.0	8.48	8.36	0.12	30.0	9.49	7.15	2.34
7.5	8.61	8.39	0.22	32.5	9.48	6.68	2.80
10.0	8.74	8.38	0.36	35.0	9.52	6.55	2.97
12.5	8.85	8.35	0.50	37.5	9.53	6.22	3.31
15.0	9.00	8.29	0.71	40.0	9.57	5.90	3.67
17.5	9.12	8.20	0.92	42.5	9.55	5.46	4.09
20.0	9.22	8.06	1.16	45.0	9.56	5.05	4.51
22.5	9.31	7.86	1.45	47.5	9.55	4.59	4.96
25.0	9.38	7.65	1.73				

Tabelle 2: Messwerte der Kupferstange einfach fixiert

Im folgenden Graph 2 wird die lineare Regression mithilfe der Werte aus Tabelle 1 und der Formel (4) dargestellt. Die Parameter m und b wurden mit den Formeln (7e) und (7f) bestimmt. Die für die Einzelbiegung in Formel (4) verwendete Länge L beträgt 50 cm. Damit lauten die für lineare Regression relevanten Parameter aus Graph 2:

$$m = (6{,}324 \pm 0{,}064) \cdot 10^{-2} \tag{12}$$
$$b = (4{,}0 \pm 2{,}5) \cdot 10^{-5} \tag{13}$$

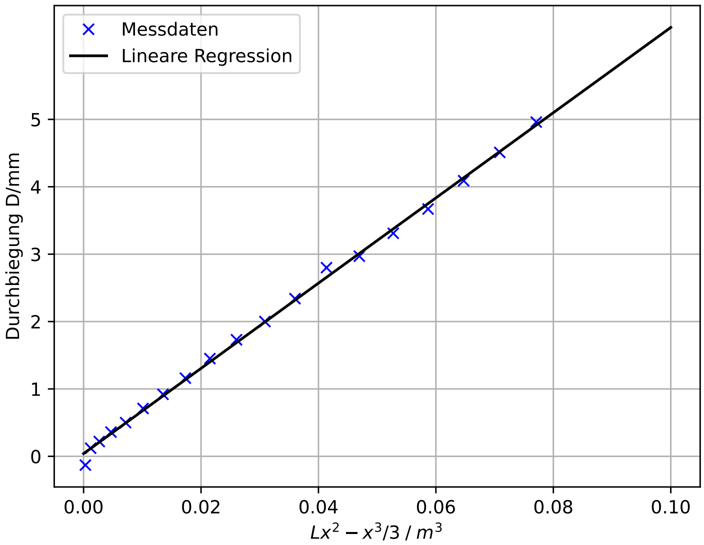


Abbildung 2: Graph Einzelbiegung

Der Elastizitätmodul lässt sich mit der Steigung (12) aus Graph 2 und dem Vorfaktor $^{m_g \cdot g}/_{2 \cdot I_{Cu} \cdot m}$ aus Formel (4) mit $m_g = m_1 + m_2 + m_{\text{Schraube}} + m_{\text{Aufhängung}}$ bestimmen. Demnach beträgt der Elastizitätmodul der einfachen Biegung des Kupferstabs:

$$E_{Cu} = (95{,}96 \pm 0{,}99)\,\text{GPa} \tag{14}$$

5.2 Kupfer doppelt fixiert

Der Mittelpunkt, an dem die Gewichte bei der doppelt fixierten Biegung aufgehängt werden, liegt hier bei 27,5 cm. Dieser wird nicht in der folgenden Tabelle 2 aufgeführt.

Die Massen, die für die Doppelbiegung verwendet werden, lauten:

$$m_1 = 1170{,}5\,\text{g} \tag{15a}$$
$$m_2 = 1159{,}7\,\text{g} \tag{15b}$$
$$m_3 = 1162{,}3\,\text{g} \tag{15c}$$
$$m_4 = 1170{,}8\,\text{g} \tag{15d}$$

Bei der Doppelbiegung haben D_0, D_m und Differenz aus Tabelle 3 die selbe Bedeutung wie in 5.1. x wird hier in zwei Seiten aufgeteilt. Da der Kupferstab nun auf beiden Seiten fixiert ist, wird vom Mittelpunkt nach außen gemessen. Demnach gibt x in der linken Spalte die Messungen der linken Seite des Stabs, und in der rechten Spalte die Messungen der rechten Seite des Stabs wieder.

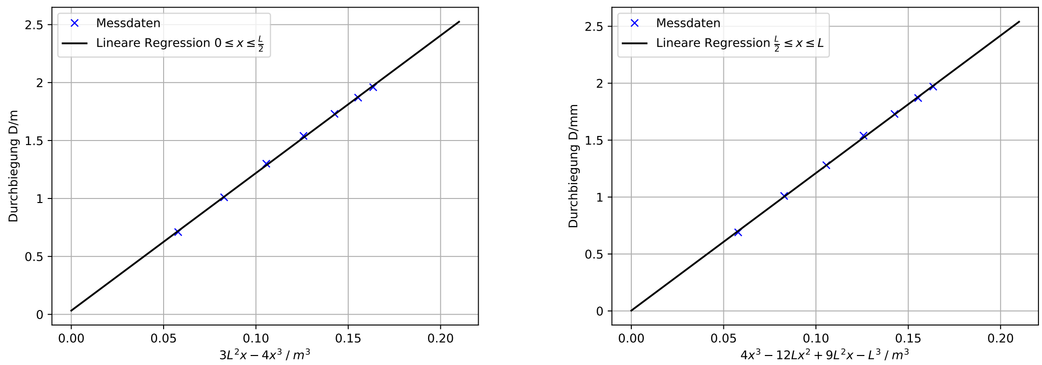
	D_0	D_m	Differenz		D_0	D_m	Differenz
x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm
48.5	9.77	9.08	0.69	24.5	8.77	6.81	1.96
45.5	9.89	8.88	1.01	21.5	8.76	6.89	1.87
42.5	9.96	8.68	1.28	18.5	8.71	6.98	1.73
39.5	9.99	8.45	1.54	15.5	8.64	7.10	1.54
36.5	10.02	8.29	1.73	12.5	8.59	7.29	1.30
33.5	10.03	8.16	1.87	9.5	8.51	7.50	1.01
30.5	10.05	8.08	1.97	6.5	8.43	7.72	0.71

Tabelle 3: Messwerte der Kupferstange doppelt fixiert

Ähnlich wie in 5.1 werden hier für die beiden Seiten der Doppelbiegung mithilfe der Formeln (5) für links und (6) für rechts, den Werten aus Tabelle 2 und den Formeln für die Parameter (7e) und (7f) eine lineare Regression bestimmt. Die benötigte Länge L für die Doppelbiegung beträgt 55 cm. Die für die lineare Regression relevanten Parameter aus Graph 3a und 3b lauten:

$$m = (1{,}187 \pm 0{,}013) \cdot 10^{-2} \quad \text{und} \quad b = (3{,}3 \pm 1{,}6) \cdot 10^{-5} \;\text{ für 2(a)} \tag{16a}$$

$$m = (1{,}208 \pm 0{,}012) \cdot 10^{-2} \quad \text{und} \quad b = (0{,}3 \pm 1{,}5) \cdot 10^{-5} \;\text{ für 2(b)} \tag{16b}$$



(a) Cu_{links}

(b) Cu_{rechts}

Abbildung 3: Graph für Doppelbiegung, Cu_{links} und Cu_{rechts}

Die Elastizitätmodule der Doppelbiegung lassen sich ähnlich wie 5.1 mit den Vorfaktoren der Formeln (5) und (6) berechnen. Dieser lautet $^{F}/_{48 \cdot I_{Cu} \cdot m_{(a),(b)}}$, wobei $F = m_g \cdot g$ ist, mit $m_g = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_{\text{Schraube}} + m_{\text{Aufhängung}}$. Die Elastizitätmodule der doppelten

Biegung des Kupferstabs betragen:

$$E_{\mathrm{Cu(links)}} = (95{,}7 \pm 1{,}1)\,\mathrm{GPa} \tag{17}$$

$$E_{\mathrm{Cu(rechts)}} = (94{,}06 \pm 0{,}98)\,\mathrm{GPa} \tag{18}$$

5.3 Aluminium einfach fixiert

Auch hier wird mithilfe der Formel $\rho = {}^{m}/_{V}$ die Dichte mithilfe der folgenden Werte (19) bestimmt. Damit ergibt sich die Dichte $\rho = 2{,}7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Wird diese mit dem Literaturwert von Aluminium $\rho = 2{,}7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ [3] verglichen, handelt es sich hier wahrscheinlich um Aluminium. Die Länge des Aluminiumstabs, sowie der Mittelwert des Durchmessers sind im folgenden aufgelistet:

Länge des Aluminiumstabs:	$60{,}0\,\mathrm{cm}$	(19a)
Mittelwert des Durchmessers des Aluminiumstabs $\overline{d}$:	$(10{,}06 \pm 0{,}03)\,\mathrm{cm}$	(19b)

d / mm	
10.00	10.10
10.00	10.10
10.10	10.00
10.00	10.25
10.10	10.00

Tabelle 4: Messwerte des Durchmessers des Aluminiumstabs

Für das Flächenträgheitsmoment eines runden Stabes wird der Durchmesser $\overline{d}$, welcher mit den Werten aus Tabelle 4 und der Formel (7a), benötigt. Außerdem lässt sich die Formel (3) wie folgt schreiben:

$$I_{\mathrm{Al}} = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2(\varphi) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi. \tag{20}$$

Nach dem Lösen des Intergals hat das Flächenträgheitsmoment die Form

$$I_{\mathrm{Al}} = \frac{\pi}{64} d^4. \tag{21}$$

Wird für $\overline{d}$ der Wert aus (19b) eingesetzt, beträgt das Flächenträgheitsmoment des Aluminiumstabs:

$$I_{Al} = (5{,}038 \pm 0{,}052) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \tag{22}$$

Die angehängte Masse der Einzelbiegung zur Bestimmug des Elastizitätmoduls beträgt:

$$m_1 = 500{,}1\,\mathrm{g} \tag{23}$$

Wie auch in 5.1 gibt die folgende Tabelle 5 die einzelnen Messwerte der Einzelbiegung des Aluminiumstabs mit und ohne Gewicht wieder.

	D_0	D_m	Differenz		D_0	D_m	Differenz
x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm
2.5	9.47	9.44	0.03	27.5	11.28	9.15	2.13
5.0	9.72	9.62	0.10	30.0	11.28	8.83	2.45
7.5	9.96	9.71	0.25	32.5	11.30	8.58	2.72
10.0	10.21	9.78	0.43	35.0	11.30	8.34	2.96
12.5	10.44	9.80	0.64	37.5	11.30	8.02	3.28
15.0	10.66	9.78	0.88	40.0	11.31	7.48	3.83
17.5	10.86	9.75	1.11	42.5	11.31	7.34	3.97
20.0	11.08	9.66	1.42	45.0	11.31	6.59	4.72
22.5	11.23	9.54	1.69	47.5	11.31	6.56	4.75
25.0	11.27	9.37	1.90				

Tabelle 5: Messwerte der Aluminiumstange einfach fixiert

Der folgende Graph 4 wird mit den Werten aus Tabelle 5, der wie in 5.1 verwendete Länge L von 50 cm und der Formel (4) erstellt. Die für die lineare Regression relevanten Parameter für Graph 4, welche mit den Formeln (7d) und (7e) berechnet wurden, lauten:

$$m = (6{,}10 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-2} \tag{24a}$$

$$b = (1{,}92 \pm 0{,}48) \cdot 10^{-4} \tag{24b}$$

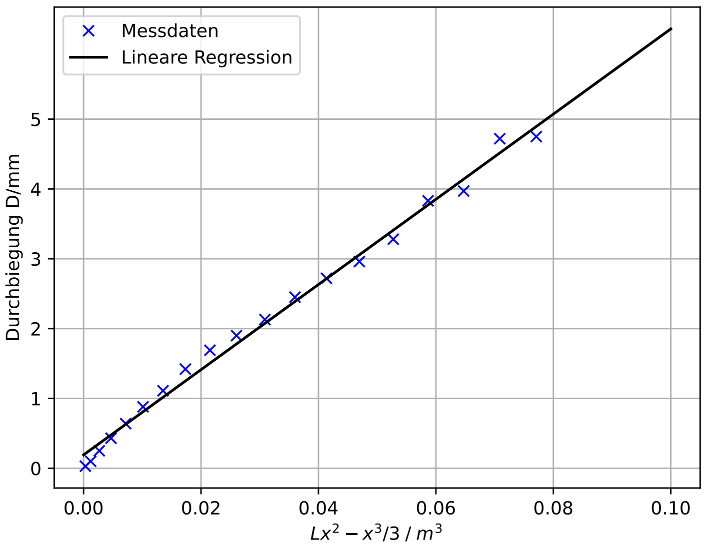


Abbildung 4: Graph Einzelbiegung

Der Elastizitätmodul der einfachen Biegung des Aluminiumstabs lässt sich mit dem Parameter m (24a) aus dem vorherigen Graphen 4 und dem Vorfaktor $^{m_g \cdot g}/_{2 \cdot I_{Cu} \cdot m}$ aus Formel (4) mit $m_g = m_1 + m_{\text{Schraube}} + m_{\text{Aufhängung}}$ bestimmen. Daraus lässt sich der folgende Elastizitätmodul herleiten:

$$E_{Al} = (86{,}3 \pm 2{,}0)\,\text{GPa} \tag{25}$$

5.4 Aluminium doppelt fixiert

Der Mittelpunkt, an dem die Gewichte bei der doppelt fixierten Biegung aufgehängt werden, liegt hier ebenfalls bei 27,5 cm. Dieser wird nicht in der folgenden Tabelle 4 aufgeführt.

Die für die Doppelbiegung des Aluminiumstabs verwendeten Gewichte lauten:

$$m_1 = 500{,}1\,\text{g} \tag{26a}$$
$$m_2 = 499{,}8\,\text{g} \tag{26b}$$
$$m_3 = 226{,}7\,\text{g} \tag{26c}$$

Wie in 5.2 beschreibt die folgenden Tabelle 6 die Biegung der jeweiligen Seite. Die linke Spalte beinhaltet die Biegungen der linken Seite ausgehend vom Mittelpunkt bei 27,5 cm. Die rechte Seite gibt dementsprechend die Biegungen der rechten Seite ausgehend vom Mittelpunkt wieder.

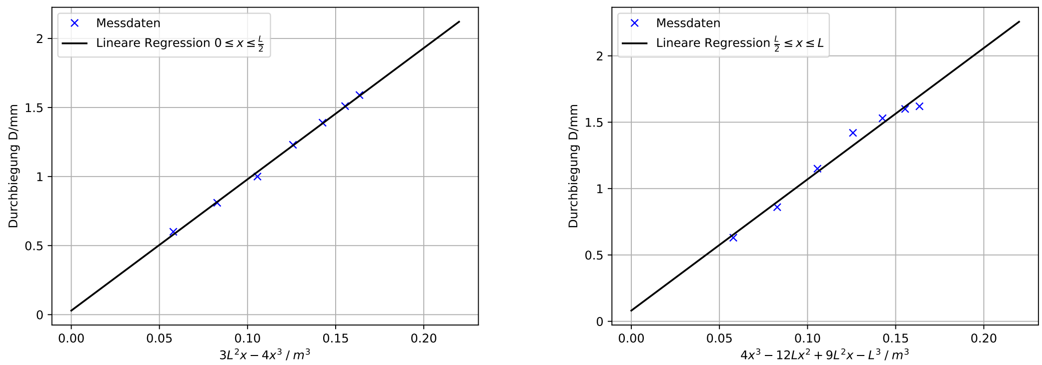
	D_0	D_m	Differenz		D_0	D_m	Differenz
x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	x / cm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm	$D(x)$ / µm
48.5	9.54	8.91	0.63	24.5	9.32	7.73	1.59
45.5	9.71	8.85	0.86	21.5	9.43	7.92	1.51
42.5	9.92	8.77	1.15	18.5	9.48	8.09	1.39
39.5	10.10	8.68	1.42	15.5	9.52	8.29	1.23
36.5	10.20	8.67	1.53	12.5	9.52	8.52	1.00
33.5	10.28	8.68	1.60	9.5	9.49	8.68	0.81
30.5	10.32	8.70	1.62	6.5	9.43	8.83	0.60

Tabelle 6: Messwerte der Aluminiumstange doppelt fixiert

Für die linearen Regressionen der jeweiligen Seiten wird hier wie in 5.2 verfahren. Die Parameter der Regressionen werden mit den Formeln (7d) für m und (7e) für b bestimmt. Dafür werden die Werte aus Tabelle 6, die Formeln (5) und (6) für die jeweils linke und rechte Seite und die Länge L von 55 cm verwendet. Die für die lineare Regression relevanten Parameter aus Abbildung 5a und 5b lauten dementsprechend:

$$m = (9{,}507 \pm 0{,}192) \cdot 10^{-3} \quad \text{und} \quad b = (2{,}9 \pm 2{,}4) \cdot 10^{-5} \text{ für 4(a)} \tag{27a}$$

$$m = (9{,}89 \pm 0{,}66) \cdot 10^{-3} \quad \text{und} \quad b = (8{,}1 \pm 8{,}2) \cdot 10^{-5} \text{ für 4(b)} \tag{27b}$$



(a) Al_{links} **(b)** Al_{rechts}

Abbildung 5: Graphen für die Doppelbiegung, Al_{links} und Al_{rechts}

Die Elastizitätmodule der doppelten Biegung des Aluminiumstabs berechnen sich wie in 5.2 mit den Vorfaktor aus den Formeln (5) und (6). Dieser lautet $F/48 \cdot I_{Cu} \cdot m_{(a),(b)}$. Hier ist $F = m_g \cdot g$, mit $m_g = m_1 + m_2 + m_3 + m_{\text{Schraube}} + m_{\text{Aufhängung}}$. Die daraus folgenden

Elastizitätmodule lauten:

$$E_{Al(links)} = (54{,}1 \pm 1{,}2)\,\text{GPa} \tag{28}$$
$$E_{Al(rechts)} = (52{,}0 \pm 3{,}5)\,\text{GPa} \tag{29}$$

6 Diskussion

Die folgende Tablle 7 beinhaltet alle Elastizitätmodule, deren Literaturwerte [4] und die entstehenden relativen Fehler:

Material:	$E_{Exp.}$	$E_{Lit.}$	Relativer Fehler
E_{Cu}	$(95{,}96 \pm 0{,}99)$ GPa	120	0,20
$E_{Cu(links)}$	$(95{,}7 \pm 1{,}1)$ GPa	120	0,20
$E_{Cu(rechts)}$	$(94{,}06 \pm 0{,}98)$ GPa	120	0,22
E_{Al}	$(86{,}3 \pm 2{,}0)$ GPa	70	0,23
$E_{Al(links)}$	$(54{,}1 \pm 1{,}2)$ GPa	70	0,23
$E_{Al(rechts)}$	$(52{,}0 \pm 3{,}5)$ GPa	70	0,26

Tabelle 7: Zusammenfassung der Elastizitätmodule

Die Tabelle 1 gibt mehrere Messwerte der Breite und Dicke des Kupferstabes wieder. Die Messwerte dienen der Veranschaulichung, dass es sich bei dem Stab um keinen perfekt homogen geformten Stab handelt. Für die Differenz aus Tabelle 2 wurde $(D_0 - D_m)$ gewählt, da die Messwerte, welche der Messuhr entnommen wurden, größer werden, sobald der Stift der Messuhr eingedrückt wird. Folglich wird der Messwert kleiner, sobald der Stab gebogen und der Stift ausgelenkt wird. Es ist auffällig, dass der Wert der Differenz für $x = 2{,}5\,\text{cm}$ negativ ist, welches auch im Graphen 2 deutlich wird. Dies könnte einerseits auf die Beschaffenheiten der Messuhr und der Apperatur zurückzuführen sein, da die Messuhr nicht genau auf 2,5 cm gestellt werden konnte. Die Messuhr war zu breit, und wurde durch die Befestigung des Stabs blockiert. Wahrscheinlicher ist hingegen, dass der Stab an der Stelle um 2,5 cm verformt war. Die Länge L, welche für den Graphen 2 und die dazugehörige lineare Regression benötigt wurde, wurde gewählt gemäß des in Abschnitt 2 beschriebenen Umstands des Fixpunktes. Demnach betrug die Länge für die Einzelbiegung 50 cm. Abgesehen von dem negativen Wert aus Tabelle 1, sieht der Graph 2 physikalisch sinnvoll aus, da die Werte auf, oder nahe der Geraden liegen.

Wird nun der Wert des Elastizitätmoduls der Einzelbiegung (14) mit den Werten der Elastizitätmodule der Doppelbiegung (17) und (18) verglichen, fällt eine deutliche Ähnlichkeit auf. Daraus lässt sich schließen, dass der systematische Fehler gering ist.

Es wird für den Aluminiumstab identisch verfahren, wie für den Kupferstab. Diesmal fällt kein negativer Wert bei der Differenz für 2,5 cm an. Die Länge L des Aluminiumstabes wird identisch zu der Länge des Kupferstabes behandelt. L ist hier dementsprechend

50 cm. Der auf Tabelle 5 basierenden Graph weist eine größere Fluktuation der Werte auf als bei der Einzelbiegung des Kupferstabes. Dies kann durch statistische Fehler erklärt werden, da die Abweichung recht homogen aussieht.

Für die Doppelbiegung des Aluminiumstabes gelten identische Vorraussetzungen wie bei der Doppelbiegung des Kupferstabes. Die Länge L beträgt hier ebenfalls 55 cm. Die Messwerte aus Tabelle 6 zeigen eine gewisse Ähnlichkeit. Doch liegen die Werte nicht so dicht beieinander, wie die des Kupferstabes aus Tabelle 3. Dieses Verhältniss wird durch die Steigungen der jeweiligen Gerade (27a) und (27b) verdeutlicht. Graph 5a zeigt eine gute Verteilung der Werte mit geringer Abweichung zur Geraden. Der Graph 5b hingegen zeigt eine größere Abweichung. Das könnte auf eine größere Inhomogenität des Stabes auf der rechten Seite schließen. Folglich lässt sich vermuten, dass der Aluminiumstab auf der rechten Seite stärker verformt ist.

Werden nun der Elastizitätmodul der Einzelbiegung (25) mit den Elastizitätmodulen der Doppelbiegung (28) und (29) verglichen, fällt eine signifikante Diskrepanz des Verhältnisses auf. Der Elastizitätmodul der Einzelbiegung ist deutlich größer als die Elastizitätmodulen der Doppelbiegung. Eine Ursache könnte die Länge L sein, da L nicht explizit während der Messung bestimmt, sondern nachträglich festgelegt wurde. Demnach könnte L eine einen andere Wert haben. Ein weiterer Grund könnte die Verformung der rechten Seite des Stabes sein, wie aus dem Graphen 5b entnommen. Da die Formeln (4) und (6) von einer gleichmäßigen Form des Stabes ausgehen, könnte eine Inhomogenität das Ergebnis beeinflussen.

Literatur

[1] Elektrisola Dr. Gerd Schildbach GmbH und Co. KG. Metalle im Vergleich. https://www.elektrisola.com/de/leitermaterial/metalle-im-vergleich.html. [Online; besucht am 12. Januar 2020]. 2019.

[2] TU Dortmund. Versuchsanleitung zu Versuch Nr.103 Biegung elastischer Stäbe. 2019.

[3] Aluminiumindustrie e.V. Aluminium Lexikon – der Werkstoff von A–Z. http://www.aluinfo.de/aluminium-lexikon-detail.html?id=23&letter=e. [Online; besucht am 15. Dezember 2019]. 2019.

[4] Toni. Der Elastizitätsmodul (E-Modul). https://www.precifast.de/elastizitaetsmodul-e-modul/. [Online; besucht am 13. Januar 2020]. 2016.