

V103

Biegung elastischer Stäbe

Nikola Sarah Mang

Mirjam Prayer

Durchführung: 29.06.2021

Abgabe: 06.07.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Das Elastizitätsmodul	3
1.2	Mechanische Spannung bei Biegung	3
1.3	Biegung bei einseitiger Einspannung	4
1.4	Biegung bei zweiseitiger Auflage	5
2	Durchführung	6
2.1	Einseitiges Einspannen	6
2.2	Beidseitige Auflage	7
3	Auswertung	7
3.1	Fehlerrechnung	7
3.2	Bestimmung der Metalle	7
3.3	Berechnung der Flächenträgheitsmomente	8
3.4	Einseitige Einspannung	8
3.5	Beidseitige Einspannung	11
4	Diskussion	15
5	Anhang	16
	Literatur	20

1 Theorie

Ziel des Versuches ist es, das Elastizitätsmodul verschiedener Materialien zu bestimmen.

1.1 Das Elastizitätsmodul

Die physikalische Größe Spannung beschreibt die Kraft F , die an der Fläche A angreift. Unterschieden wird zwischen der Normalspannung σ , welche senkrecht auf der Oberfläche steht, und der Tangential- oder Schubspannung, die parallel zur Oberfläche wirkt. Durch Spannung können Gestalts- und Volumenveränderung entstehen. Liegt die Verformung nur in einer Körperdimension vor und ist die relative Verformung $\frac{\Delta L}{L}$ hinreichend klein, tritt das Hooksche Gesetz

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

mit dem Elastizitätsmodul E in Kraft. Um dieses für verschiedene Materialien zu bestimmen, wird die Biegung von Stäben betrachtet, wie in Abb. 2 und Abb. 3 zu sehen.

1.2 Mechanische Spannung bei Biegung

Die Biegung eines Stabes verursacht Spannung innerhalb der Probe. Wie in Abbildung 4 dargestellt kommt es zu Dehnung der äußeren Fasern und Stauchung der inneren. Allein die neutrale Faser in der Mitte des Querschnitts Q behält ihre Länge bei. Bei den anderen Fasern kommt es aufgrund der Elastizität des Körpers zu Normalspannungen. Aus

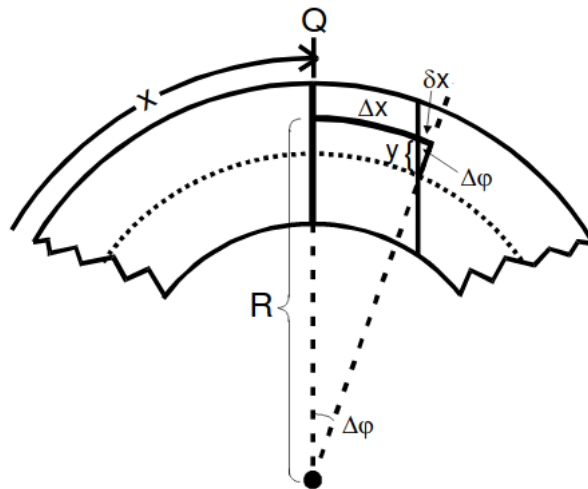


Abbildung 1: Skizze zur Berechnung der Normalspannung $\sigma(y)$ in einem gebogenen Stab; Quelle [1]

geometrischen Gründen, die in Abbildung 4 ersichtlich sind, ergibt sich für die Änderung Δx einer Faser der Länge Δx

$$\delta x = y \Delta\phi = y \frac{\Delta x}{R},$$

wobei y den Abstand der betrachteten zur neutralen Faser und R den Biegeradius symbolisiert. Anhand des Hookschen Gesetzes kann nun die durch die Biegung entstehende Normalspannung bestimmt werden.

$$\sigma(y) = E \frac{\delta x}{\Delta x} = E \frac{y}{R}$$

Auf einen Querschnitt Q wirken diese Spannungen wie ein Drehmoment M_σ mit Hebelarm y . Das Gesamtdrehmoment, welches auf Querschnitt Q wirkt, lässt sich also zu

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) dq = \int_Q y^2 \frac{E}{R} dq \quad (2)$$

aufsummieren.

1.3 Biegung bei einseitiger Einspannung

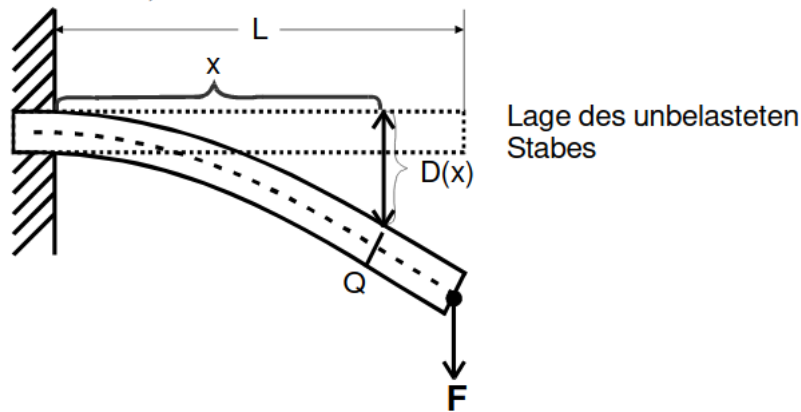


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung; Quelle [1]

Wird ein Stab einseitig eingespannt und ein Gewicht am uneingespannten Ende des Stabes installiert, biegt sich der Stab aufgrund der Gravitation mit der Durchbiegung $D(x)$ und bewirkt am Ort x ein angreifendes Drehmoment

$$M_F = F \cdot (L - x) \quad (3)$$

mit der Länge des Hebelarms $(L - x)$. Dabei wird das Eigengewicht des Stabes vernachlässigt. Dieses Drehmoment verursacht eine Biegung des Stabes, wodurch die im Kapitel 1.2 berechneten Normalspannungen zustande kommen. Diese heben das Drehmoment exakt auf, so dass ein Kräftegleichgewicht zwischen M_F und M_σ herrscht.

$$\int_Q y^2 \frac{E}{R} dq = F \cdot (L - x) \quad (4)$$

Der Krümmungsradius R kann durch $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 D}{dx^2}$ approximiert werden, sodass sich für Gleichung 2

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 dq = F \cdot (L - x) \quad (5)$$

ergibt. Die Durchbiegung kann also zu

$$D(x) = \frac{F}{2E I} (Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \quad (6)$$

mit Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 dq \quad (7)$$

bestimmt werden.

1.4 Biegung bei zweiseitiger Auflage

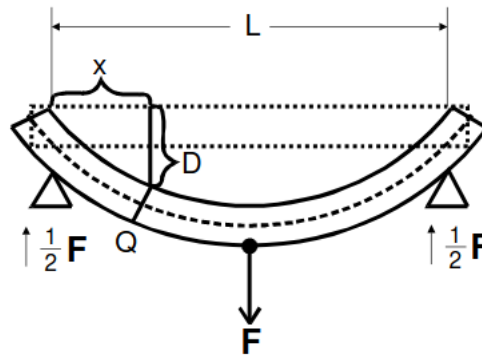


Abbildung 3: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei beidseitiger Auflage; Quelle [1]

Wie in Abb. 3 dargestellt, wird bei beidseitiger Auflage ein Gewicht in der Mitte des jeweiligen Stabes installiert, sodass dieser sich zur Mitte hin biegt. Bei dieser Konstruktion greift am Ort x die Kraft $\frac{F}{2}$ mit Hebelarm x beziehungsweise $(L-x)$ auf der linken Seite an der Querschnittsfläche Q an. Auf die Querschnittsfläche wirkt also das Drehmoment $M_F = -\frac{F}{2}x$ beziehungsweise $M_F = -\frac{F}{2}(L-x)$ auf der linken Seite des Stabes. Somit erhalten wir

$$\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} : \quad \frac{dD}{dx} = -\frac{F}{E I} \frac{x^2}{4} + C \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L : \quad \frac{dD}{dx} = -\frac{F}{2E I} (Lx - \frac{x^2}{2}) + C' \quad (8)$$

Da die Tangente in der Mitte des Stabes horizontal ist, gilt für

$$C = \frac{F}{E I} \frac{L^2}{16} \quad C' = \frac{F}{E I} \frac{3L^2}{16}$$

Somit folgt für

$$\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (9)$$

$$\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L : \quad D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (10)$$

2 Durchführung

Die verwendete Apparatur ist in Abbildung 4 schematisch dargestellt. Sie besteht aus einer Spannvorrichtung in Punkt A sowie zwei Auflagepunkten A und B, die cm voneinander entfernt sind. Nun gibt es zwei vertikal fest integrierte Messvorrichtungen, die in horizontaler Richtung verschiebbar sind.

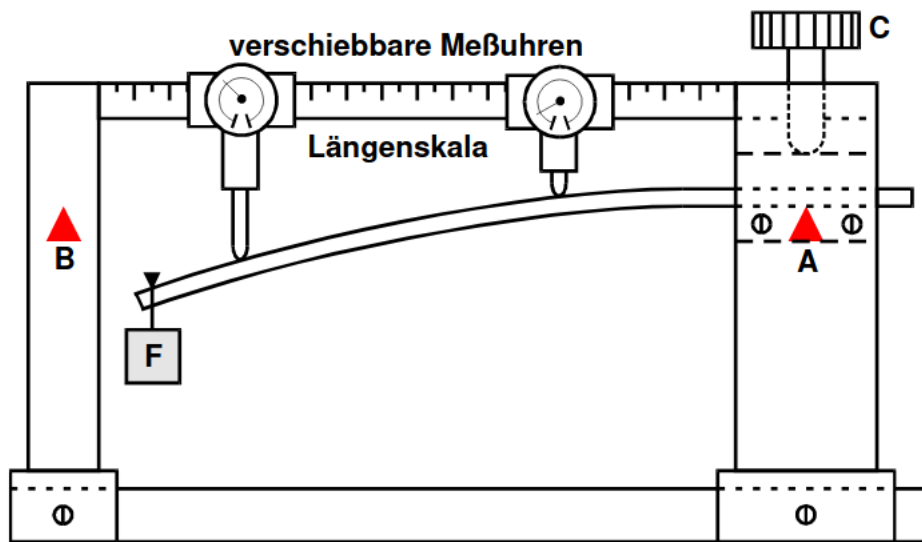


Abbildung 4: Schematische Darstellung einer Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe; Quelle [1]

2.1 Einseitiges Einspannen

Mittels der Spannvorrichtung an Punkt A werden zwei Stäbe verschiedenen Materials eingespannt. Um Fehlerquellen wie Vorbiegung des Stabes oder eine nicht parallele Ausrichtung der Messgeräte vorzubeugen, wird jeweils die Differenz der Auslenkung bei Normalzustand und im Zustand mit angehängtem Gewicht gemessen.

Bei der ersten Messreihe mit einem viereckigen Stab wird in einer Entfernung von 54 cm ein Gewicht von 0.65 kg befestigt. Bei der ersten Messreihe mit einem viereckigen Stab wird in einer Entfernung von 52 cm ein Gewicht von 0.589 kg befestigt. Die Messwerte wurden in der Nähe der Einspannung im 5 cm Abstand und in der Nähe des Gewichtes im 2 cm Abstand genommen.

2.2 Beidseitige Auflage

Die zu untersuchende Probe wird auf den Fußpunkten A und B gelagert. In der Mitte des Stabes, also bei 28 cm wurde ein Gewicht von 0.759 kg befestigt. Die Messwerte wurden in der Nähe der Auflage im 5 cm Abstand und in der Nähe des Gewichtes im 2 cm Abstand genommen.

3 Auswertung

3.1 Fehlerrechnung

Die Fehler bereits fehlerbehafteter Größen werden nach dem Gauss'schen Fehlerformel

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

berechnet. Die Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x + b \\ a &= \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ c &= \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \end{aligned}$$

3.2 Bestimmung der Metalle

Zur Bestimmung der Metalle, aus denen die untersuchten Stäbe bestehen, werden zunächst die Eigenschaften der Stäbe aufgenommen. Sie sind in Tabelle 1 zu finden.

Tabelle 1: Vermessung des runden Stabs.

runder Stab		quadratischer Stab	
Größe	Messwert	Größe	Messwert
Länge	0.58m	Länge	0.60m
Durchmesser	0.01m	Breite und Höhe	$1.025 \cdot 10^{-2}\text{m}$
Masse	356g	Masse	535.7g

Aus den Massen und Volumen können nach $\rho = M/V$ die Dichten ρ der Metalle berechnet werden. Es ergeben sich

$$\begin{aligned} \rho_{\text{rund}} &= 7.808 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ \rho_{\text{quad}} &= 8.498 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

woraus sich der runde Stab als Eisen identifizieren lässt (Dichte nach [2]: $\rho_{\text{Eisen}} = 7.87 \text{g/cm}^3$) und der Stab quadratischen Querschnitts als Messing (Dichte nach [2]: $\rho_{\text{Messing}} = 8.5 \text{g/cm}^3$).

3.3 Berechnung der Flächenträgheitsmomente

Bevor mit der Bestimmung der Elastizitätsmodule begonnen werden kann, müssen die Flächenträgheitsmomente der beiden Stäbe berechnet werden.

Für den runden Eisenstab lässt sich das Integral in Gleichung (7) gut in Polarkoordinaten umformen. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_{\text{rund}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} (r \cos(\phi))^2 r dr d\phi \\ &= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi \\ &= \frac{d^4}{64} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi d\phi \\ &= \frac{d^4}{64} \pi \end{aligned}$$

mit dem Durchmesser d des Eisenstabes.

Dagegen lässt sich das Flächenträgheitsmoment des Messingstabs in kartesischen Koordinaten berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} I_{\text{quad}} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy dx \\ &= x \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy \\ &= a \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{a^4}{12} \end{aligned}$$

mit der Breite und Höhe des a des Messingstabes.

3.4 Einseitige Einspannung

Nun können die Elastizitätsmodule bestimmt werden. Tabellen 3 und 2 zeigen die aufgenommenen Messwerte.

Tabelle 2: Messung der Biegung des Messingstabs bei einseitiger Einspannung.

Abstand von der Einspannung /cm	Durchbiegung /mm
3	0
8	0.001
13	0.03
16	0.005
21	0.11
26	0.42
29	0.71
31	0.94
33	1.21
35	1.415
37	1.64
39	1.865
41	2.125
43	2.355
45	2.58
47	2.83
49	3.02
51	3.25
53	3.31

Tabelle 3: Messung der Biegung des Eisenstabs bei einseitiger Einspannung.

Abstand von der Einspannung /cm	Durchbiegung /mm
3	0.01
8	0.1
13	0.29
18	0.51
23	0.74
25	0.88
27	0.965
29	1.14
31	1.25
33	1.41
35	1.52
37	1.64
39	1.825
41	2.02
43	2.1
45	2.275
47	2.385
49	2.62
51	2.765

Um zu einer linearen Darstellung von D zu gelangen, werden diese Daten in den Term

$$Lx^2 - \frac{x^3}{3}$$

aus Gleichung (6) eingesetzt. Dann lässt sich eine lineare Regression durchführen, die für die Darstellung $D(x) = a \cdot x + b$ die Parameter

$$\begin{aligned} a_{\text{rund}} &= (2.997 \pm 0.024) \cdot 10^{-2} \\ b_{\text{rund}} &= (3.900 \pm 1.300) \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

für den runden Stab und die Parameter

$$\begin{aligned} a_{\text{quad}} &= (3.660 \pm 0.130) \cdot 10^{-2} \\ b_{\text{quad}} &= (0.040 \pm 0.008) \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

für den Stab mit quadratischem Querschnitt liefert. berechnet. Aus den Steigungen der Geraden lässt sich das Elastizitätsmodul bestimmen, wenn man den entsprechenden Teil aus Gleichung (6) umstellt. Es folgt

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{2EI} \\ \Rightarrow E &= \frac{F}{2aI} \end{aligned}$$

mit der Kraft F , die auf den jeweiligen Stab wirkt und dem zuvor berechneten Flächenträgheitsmoment I . Die Kraft entspricht der Gewichtskraft $F = m \cdot g$ mit Gravitationsbeschleunigung g und dem jeweils verwendeten Gewicht m .

Die Messwerte und die linearen Ausgleichsgeraden sind in Abbildung 5 dargestellt. Es ergeben sich nach Einsetzen

$$\begin{aligned} E_{\text{Eisen,einseitig}} &= (1.761 \pm 0.014) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ E_{\text{Messing}} &= (0.945 \pm 0.035) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

3.5 Beidseitige Einspannung

Bei der Untersuchung des Verhaltens der Biegung unter beidseitiger Einspannung wurde nur der Eisenstab betrachtet.

Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabellen 4 und 5 zu finden.

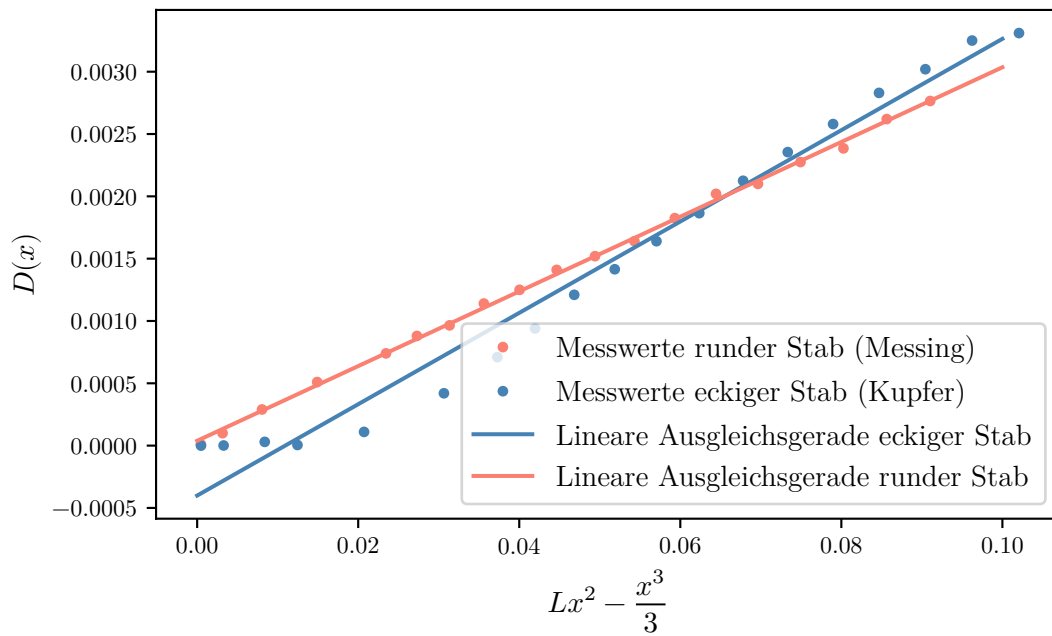


Abbildung 5: Messung der Durchbiegung beider Stäbe bei einseitiger Auflage.

Tabelle 4: Messwerte bei beidseitiger Auflage, Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

Abstand x / cm	Durchbiegung D / mm
3	0
8	0
13	0.035
17	0.075
19	0.14
21	0.16
23	0.2
25	0.19
27	0.21

Tabelle 5: Messwerte bei beidseitiger Auflage, Bereich $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

Abstand x / cm	Durchbiegung D / mm
29	0.18
31	0.2
33	0.185
35	0.16
37	0.15
39	0.13
44	0.12
49	0.01
54	0

Es werden also der Bereich rechts von der Auflage des Gewichts und links davon getrennt betrachtet.

Werden die nichtlinearen Teile in (9) und (10) berechnet, lassen sich wieder lineare Regressionen durchführen, aus denen das Elastizitätsmodul von Eisen nach

$$a = \frac{F}{48EI}$$

$$E = \frac{F}{48aI}$$

bestimmt werden kann.

Die Parameter ergeben sich für den Bereich $\leq \frac{L}{2}$ zu

$$a_{\text{rechts}} = (0.154 \pm 0.026) \cdot 10^{-2}$$

$$b_{\text{rechts}} = (0.009 \pm 0.004) \cdot 10^{-2}$$

und für den Bereich $\geq \frac{L}{2}$ zu

$$a_{\text{links}} = (0.130 \pm 0.012) \cdot 10^{-2}$$

$$b_{\text{links}} = (0.041 \pm 0.017) \cdot 10^{-2}.$$

Messwerte sowie Fit sind in Abbildungen dargestellt. Für das Elastizitätsmodul ergibt sich

$$E_{\text{Eisen, rechts}} = (2.030 \pm 0.340) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$E_{\text{Eisen, links}} = (2.410 \pm 0.230) \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

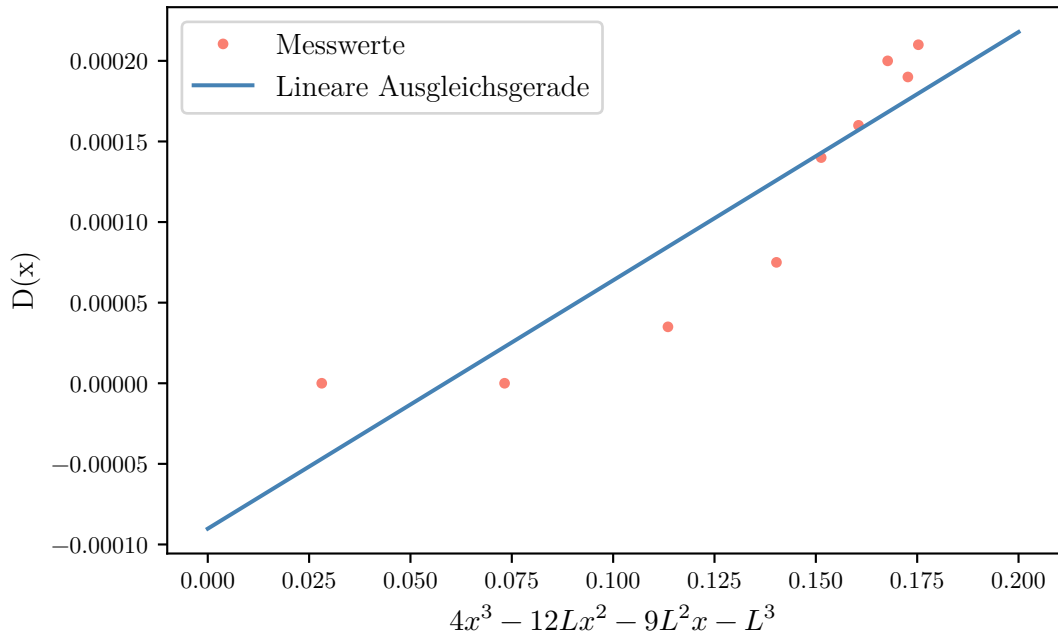


Abbildung 6: Messung der Durchbiegung bei beidseitiger Auflage, Bereich $\leq \frac{L}{2}$.

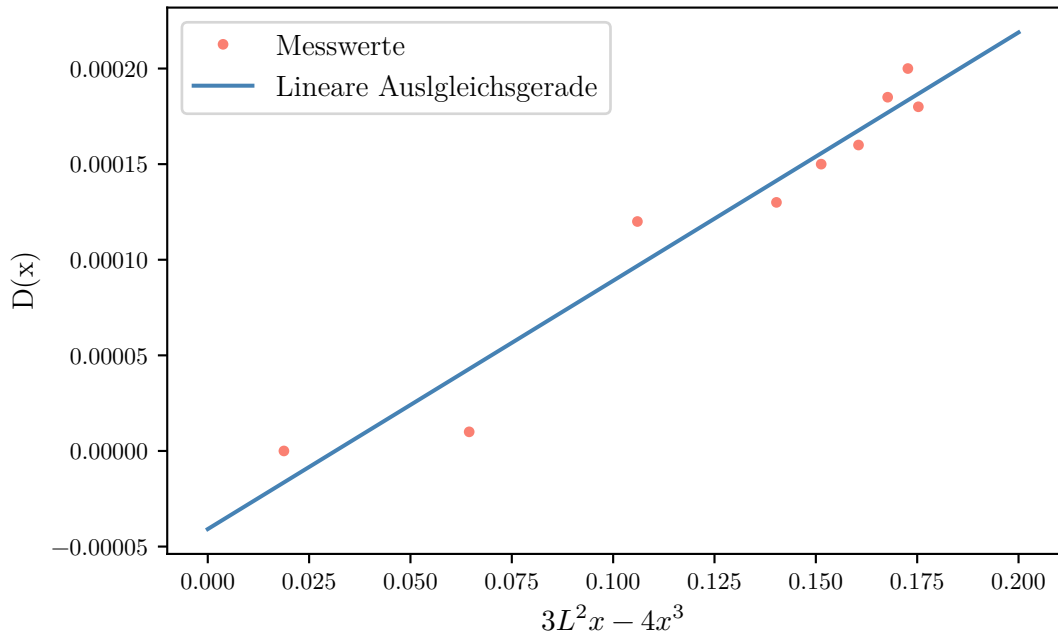


Abbildung 7: Messung der Durchbiegung bei beidseitiger Auflage, Bereich $\geq \frac{L}{2}$.

4 Diskussion

Die Abweichungen von den Literaturwerten werden im Folgenden mithilfe der Formel

$$\Delta x = \frac{x_{\text{theoretisch}} - x_{\text{gemessen}}}{x_{\text{theoretisch}}}$$

bestimmt.

Die Messwerte, Theoriewerte und prozentualen Abweichungen werden in Tabelle 6 zusammengesetzt. Dabei stammt der Theoriewert für Messing aus Quelle [4] und der für Eisen aus Quelle [3]. Zu beachten ist, dass es bei Messing als Legierung stark auf die Zusammensetzung ankommt und es daher eine große Toleranz für das Elastizitätsmodul gibt.

Tabelle 6: Literaturwerte, Messwerte und zugehörige prozentuale Abweichungen zur Bestimmung der Elastizitätsmodule.

Messung	Ergebnis /N/m ²	Theoriewert /N/m ²	Abweichung %
E_{Messing} , einseitige Befestigung	$(0.945 \pm 0.035) \cdot 10^{11}$	$(1 \pm 0.22) \cdot 10^{11}$	5 ± 19
E_{Eisen} , einseitige Befestigung	$(1.761 \pm 0.014) \cdot 10^{11}$	$1.96 \cdot 10^{11}$	10.2 ± 0.7
E_{Eisen} , beidseitig, $x \leq L/2$	$(2.030 \pm 0.340) \cdot 10^{11}$	$1.96 \cdot 10^{11}$	4 ± 18
E_{Eisen} , beidseitig, $x \geq L/2$	$(2.410 \pm 0.230) \cdot 10^{11}$	$1.96 \cdot 10^{11}$	23 ± 12

Die Werte sind teilweise von großen Unsicherheiten betroffen, woraus sich schließen lässt, dass einige Messfehler vorliegen. Dazu gehören die Ungenauigkeit der Messuhren, die sich nicht fest auf einen Wert einstellen ließen sondern stets schwankten, hinzu kommt, dass die Messuhren sich bei Erschütterungen des Tisches auf dem die Versuchsanordnung aufgebaut war sprunghaft verstellten. Da es bei der Messung auf die Differenz zwischen Biegung mit Gewicht und ohne Gewicht ankommt, mussten die Gewichte bei jeder Messung abgenommen und wieder aufgesetzt werden, wodurch Erschütterungen nicht verhindert werden konnten.

Eine weitere Schwierigkeit ist, dass die Messuhren nicht perfekt auf dem runden Stab aufliegen können, sodass kleine Schwankungen durch die unterschiedlichen Positionen der Messuhren auf dem runden Stab hinzukommen.

Zudem kann trotz großer Sorgfalt bei der Durchführung nicht davon ausgegangen werden, dass das Gewicht bei jedem Messwert auf genau dieselbe Stelle gesetzt wurde, sodass auch hier eine Unsicherheit hinzu kommt.

Die größte Abweichung vom Theoriewert liegt bei der Berechnung des Elastizitätsmoduls aus der beidseitigen Messung im Bereich $x \geq L/2$ vor. Dabei ist zu Bedenken, dass bei der beidseitigen Messung nur die linke Seite des Stabes eingespannt war und die andere lediglich auf einer Schiene auflag. Sie war also möglicherweise anfälliger für Erschütterungen und hat daher eine höhere Unsicherheit.

5 Anhang

elastische Stäbe Versuch

Eckiger Stab: Kupfer?

Länge: 50 cm

Gewicht: 535 g

Breite: 1,025 cm

Tiefe: 1,025 cm

Gewicht: 650 g

$x_{pos} = 54 \text{ cm}$

$D(x)$:

Abstand [cm]

Auslenkung [mm]

53 ~~cm~~

3.31

3

0

51

5.25

8

0.001

49

5.02

13

~~5.02~~ 0.03

17

47

2.83

16

0.005

7.58

Handwritten notes:

Größe: 58 cm

Flügelspann: 1 m

Gewicht: 55 kg

Alter: 538 g

Art: 53 cm

Handwritten

51

57

48

29

27

47

45

25

43

23

18

44

38

13

Handwritten

2.76

1.25

2.6

1.14

0.96

2.386

2.275

0.88

2.1

0.74

0.57

2.02

1.825

0.29

Handwritten

Handwritten

• Cat (Handwritten)

• Tisch (Handwritten)

• Hand (Handwritten)

Handwritten

Handwritten

Handwritten

29

37

Handwritten

0.18

0.2

rand einseitig

Ans.	Bzw
37	1.64
8	0.1
3	0.01
35	1.52
33	1.41

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V103 - Biegung elastischer Stäbe*. 2021.
- [2] *Eigenschaften Tabelle Metall*. URL: <https://www.hug-technik.com/inhalt/ta/metall.htm> (besucht am 03.07.2021).
- [3] *Elastizitätsmodul in Zahlen*. URL: https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_7/illustr/t7_1_2.html (besucht am 03.07.2021).
- [4] *Elastizitätsmodul*. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html> (besucht am 03.07.2021).