

V302

Elektrische Brückenschaltungen

Niko Salewski	Julian Hochhaus
<code>niko.salewski@tu-dortmund.de</code>	<code>julian.hochhaus@tu-dortmund</code>

Durchführung: 15.11.16	Abgabe: 22.11.16
------------------------	------------------

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	1
2 Theorie	1
2.1 Kirchhoff'sche Regel	1
2.1.1 Knotenregel	1
2.1.2 Maschenregel	1
2.2 Realisierung komplexer Widerstände von Induktivitäten und Kondensatoren	3
2.3 Wheatstonesche Brückenschaltung	4
2.4 Kapazitätsmessbrücke	4
2.5 Induktivitätsmessbrücke	5
2.6 Maxwell-Brücke	6
2.7 Wien-Robinson-Brücke	6
2.7.1 Klirrfaktor-Messung	8
3 Durchführung	9
3.1 Wheatstonesche Brücke	9
3.2 Kapazitätsmessbrücke	9
3.3 Induktivitätsmessbrücke	9
3.4 Maxwell-Brücke	10
3.5 Wien-Robinson-Brücke	10
4 Auswertung	11
4.1 Wheatstonesche Brücke	11
4.2 Kapazitätsmessbrücke	12
4.3 Induktivitätsmessbrücke	13
4.4 Maxwell-Brücke	13
4.5 Wien-Robinson-Brücke	13
4.5.1 Klirrfaktor-Messung	14
5 Diskussion	16
Literatur	16

1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch sollen mittels Brückenschaltungen verschiedene physikalische Größen, wie Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten anhand verschiedener Brückenschaltungen bestimmt werden. Die unbekannten Bauteile werden über die Abgleichbedingung der jeweiligen Brückenschaltung über bereits bekannte Schaltungselemente bestimmt. Schließlich soll die frequenzabhängige Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke betrachtet werden. Zudem wird mittels der Bestimmung des Klirrfaktors die Güte eines Sinusspannungsgenerators bestimmt.

2 Theorie

Brückenschaltungen werden in der Physik verwendet, um über bereits bekannte Bauelemente die physikalischen Kennwerte eines unbekannten ohmschen Widerstands oder einer Impedanz zu bestimmen. Mithilfe der beiden Kirchhoffschen Regeln lassen sich Bedingungen zur Bestimmung unbekannter Elemente in Brückenschaltungen formulieren.

2.1 Kirchhoff'sche Regel

2.1.1 Knotenregel

Die Knotenregel besagt anschaulich, dass Ströme, die in einen Knotenpunkt hineinfließen, auch wieder hinausfließen müssen.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

Etwas mathematischer ausgedrückt heißt das, dass die Summe über alle eingehenden und alle ausgehenden Ströme gleich Null sein muss.

2.1.2 Maschenregel

Eine Masche bezeichnet einen in sich geschlossenen Stromkreis. Die Maschenregel besagt, dass für eine Masche die Summe aller Einzelspannungen U_i an den einzelnen Bauelementen, wie zum Beispiel Ohmschen Widerständen, Spulen und Kondensatoren, gleich der angelegten Gesamtspannung U_0 sein muss. Äquivalent dazu ist die Formulierung, dass die Summe aller auftretenden Spannungen U_k gleich Null ist.

$$U_0 = \sum_i U_i \Rightarrow \sum_k U_k = 0 \quad (2)$$

Eine alternative Formulierung erhält man unter Verwendung des Ohmschen Gesetz. Dieses definiert den elektrischen Widerstand R als Quotienten aus der anliegenden Spannung U zur Stromstärke I des durch den Widerstand fließenden Stroms. Stellt man das Ohmsche Gesetz nach U um, ergibt sich der Zusammenhang

$$U = R \cdot I. \quad (3)$$

Somit kann die Maschenregel auch abhängig von Stromstärke und Widerständen formuliert werden:

$$U_0 = \sum_i I_i \cdot R_i \quad (4)$$

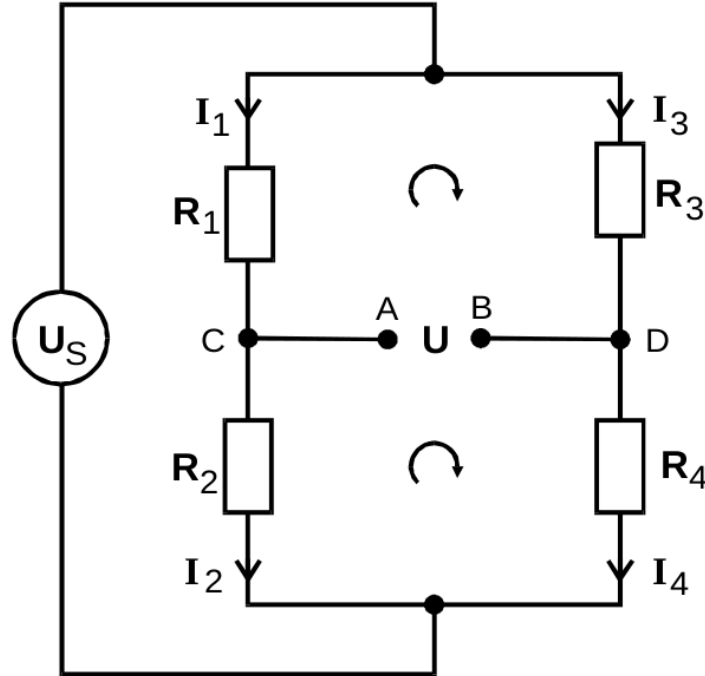


Abbildung 1: Grundlegender Aufbau einer Brückenschaltung [1]

In Abbildung 1 ist der schematische Aufbau einer Brückenschaltung dargestellt. Als Brückenspannung wird hierbei die zwischen den Punkten A und B auftretende Spannung U_{Br} bezeichnet.

Die Brückenschaltung kann man als Parallelschaltung zweier widerstandsbehafteter Leiter verstehen. An diese Parallelschaltung wird dabei die Speisespannung U_S angelegt. Der Stromfluss teilt sich auf die beiden parallelen Zweige auf. Er fließt damit entweder durch den linken Zweig und somit durch die Widerstände R_1 und R_2 oder durch den rechten Zweig, also durch R_3 und R_4 .

Mithilfe der Kirchhoffschen Regeln (1) und (2) lässt sich die Brückenspannung U_{Br} abhängig von den verwendeten Widerständen und der angelegten Spannung U_S wie folgt formulieren:

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S. \quad (5)$$

Die Brückenspannung verschwindet, wenn der Zähler gleich Null, also $R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0$ gilt. Die Brücke wird dann als abgeglichen bezeichnet. Es gilt also:

$$R_2 R_3 = R_1 R_4. \quad (6)$$

Diese sogenannte Abgleichbedingung hängt somit lediglich von den Widerständen ab. Somit lässt sich ein unbekannter Widerstand R_x mittels der abgeglichenen Brücke bestimmen.

Dafür müssen die bekannten Widerstände mit möglichst großer Genauigkeit bekannt sein und mindestens einer der Widerstände muss sich regulieren lassen.

Um eine möglichst genaue Bestimmung des unbekannten Widerstands R_x zu realisieren, muss man die Brückenspannung möglichst genau zu Null abgleichen können. Dazu wird ein Galvanometer, (Mikro-)Voltmeter oder ein Kathodenstrahloszillograph verwendet.

Da nach Gleichung (5) ein Zusammenhang zwischen der Speisespannung U_S und der Brückenspannung U_{Br} besteht, wird die Genauigkeit der Messung zudem durch eine möglichst große Speisespannung verbessert.

Schließlich kann anstelle eines ohmschen Widerstands auch ein komplexer Widerstand mittels der abgeglichenen Brücke bestimmt werden. Hierfür muss man allerdings beachten, dass dieser sich aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand zusammensetzt.

2.2 Realisierung komplexer Widerstände von Induktivitäten und Kondensatoren

Fließt Strom durch einen Kondensator, so baut sich in diesem ein elektrisches Feld auf. Ähnlich verhält es sich bei Spulen. Hier baut sich bei fließendem Strom ein magnetisches Feld auf. Einer Spannungsquelle wird also durch angeschlossene Kondensatoren oder Spulen Energie entzogen und im elektrischen bzw. magnetischen Feld gespeichert. Diese wird allerdings nicht umgewandelt in eine andere Energie (z.B. thermische oder mechanische) sondern kann nach einer Umkehrung der Spannungsrichtung zur Quelle zurückgeführt werden. Daher werden sogenannte Impedanzen (Wechselstromwiderstände) zur Beschreibung von Spulen und Kondensatoren verwendet:

$$\Theta = X + iY. \quad (7)$$

X ist hierbei der Wirkwiderstand und Y die Reaktanz (Blindwiderstand). Bei Spulen und Kondensatoren treten zudem Wärmeverluste, zum Beispiel zwischen den Kondensatorplatten oder in den Drähten auf.

Zur Realisierung solcher sogenannter dielektrischen Verluste ergänzt man daher das Ersatzschaltbild durch gedachte ohmsche Widerstände R_x .

Brückenschaltungen mit komplexen Widerständen müssen somit im Gegensatz zu Schaltungen, welche lediglich ohmsche Widerstände enthalten, mit Wechselstrom betrieben werden, sodass das magnetische bzw. elektrische Feld sich periodisch auf- und auch wieder abbauen kann.

Somit müssen wiederum die Abgleichbedingungen für den Fall, dass Kondensatoren und Spulen in der Brückenschaltung verwendet werden, sowohl Phase, als auch den Wirkwiderstand berücksichtigen. Im Folgenden soll im Einzelnen auf die fünf verschiedenen Brückenschaltungen eingegangen werden.

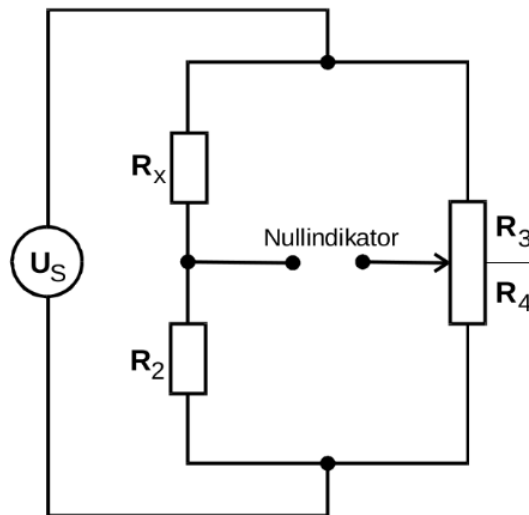


Abbildung 2: Wheatstonesche Brückenschaltung zur Bestimmung eines unbekannten Widerstands [1]

2.3 Wheatstonesche Brückenschaltung

In Abbildung 2 ist die Wheatstonesche Brücke abgebildet. Diese enthält lediglich ohmsche Widerstände. Daher kann sie sowohl mit Wechselstrom als auch mit Gleichstrom betrieben werden. Der zu bestimmende Widerstand R_x lässt sich nach (6) über die anderen Widerstände wie folgt bestimmen:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}; \quad (8)$$

Aus (8) ergibt sich, dass die konkreten Werte von R_3 und R_4 nicht bekannt sein müssen, um R_x zu ermitteln. Es reicht vollkommen, ihr Verhältnis zu kennen. Daher können R_3 und R_4 mittels eines Potentiometers realisiert werden.

2.4 Kapazitätsmessbrücke

Bei der Kapazitätsmessbrücke abgebildet in Abbildung 3 wird ein Kondensator in die Brückenschaltung eingebaut. Wie bereits in 2.2 erklärt, muss daher sowohl die Phase, als auch der Wirkwiderstand abgeglichen werden. R_x steht hierbei stellvertretend für die Wärmeverluste im Kondensator. Zum Abgleich des komplexen kapazitiven Widerstands wird also eine Ersatzschaltung verwendet. Hierzu wird ein bekannter Kondensator C_2 in Reihe geschaltet zu einem regulierbaren ohmschen Widerstand R_2 .

R_2 ist hierbei regulierbar, um die in der Kapazität entstehende Phasenverschiebung zu kompensieren. Für den $R_2 - C_2$ -Zweig wird hierbei angenommen, dass $R_{\text{Wirk}} = R_2$ gilt, also der Kondensator C_2 verlustfrei ist. Dies ist, wie sich auch anhand von R_x nahezu 0 zeigt, realisierbar. Wenn der unbekannte Kondensator als verlustfrei angenommen werden

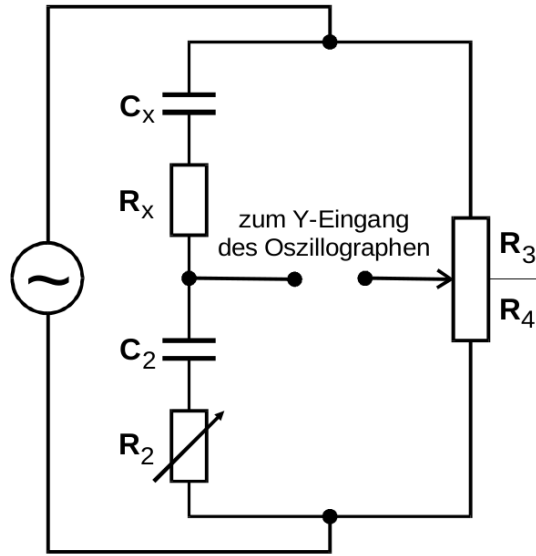


Abbildung 3: Brückenschaltung zur Bestimmung eines unbekannten Kondensators [1]

kann, kann auf den regelbaren Widerstand R_2 verzichtet werden. Dies würde sich auch in der Messung zeigen. Wenn R_2 auf $0\ \Omega$ gestellt werden kann und sich die Brückenspannung trotzdem zu 0 abgleichen lässt, kann man den Kondensator als verlustfrei annehmen. Die Abgleichbedingungen ergeben sich somit zu

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (9)$$

und

$$C_x = \frac{C_2 R_4}{R_3}. \quad (10)$$

Aus den Abgleichbedingungen ist ersichtlich, dass das Verhältnis von R_3 zu R_4 mit (10) unabhängig von R_x formuliert werden kann. Die Notwendigkeit der zweiten Abgleichbedingung und damit das Hinzufügen eines ohmschen Widerstands R_2 ergibt sich somit nur, wenn R_x ungleich 0 ist.

2.5 Induktivitätsmessbrücke

In Abbildung 4 ist eine Brückenschaltung zur Messung eines induktiven Widerstands dargestellt. Es müssen also erneut komplexe Widerstände betrachtet werden. Der prinzipielle Aufbau zur Messung einer realen Spule ähnelt dem Aufbau der Brückenschaltung zur Bestimmung eines Kondensators. Es müssen lediglich die Kondensatoren C_i an entsprechender Stelle durch Spulen L_i ersetzt werden. Die Abgleichbedingungen ergeben sich somit zu:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (11)$$

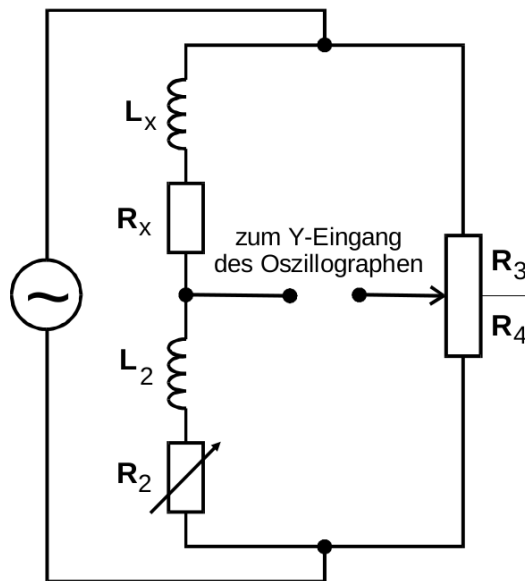


Abbildung 4: Brückenschaltung zur Bestimmung der Induktivität einer Spule [1]

und

$$L_x = \frac{L_2 R_3}{R_4}. \quad (12)$$

Die bei der Kapazitätsmessbrücke leicht zu realisierende Forderung, dass der Wirkwiderstand im linken unteren Zweigabschnitt gleich dem Widerstand R_2 ist, lässt sich bei Induktivitäten besonders für niedrige Frequenzen nur schwierig realisieren. Es lassen sich daher genauere Ergebnisse erzielen, wenn anstelle der Induktivität L_2 eine Ersatzschaltung mit einer Kapazität, die sogenannte Maxwell-Brücke, verwendet wird.

2.6 Maxwell-Brücke

In der in Abbildung 5 dargestellten Maxwell-Brücke werden erneut Induktivitäten vermessen. Für die Abgleichbedingungen erhält man, indem man erneut die Kirchhoffschen Regeln nach (2) und (1) verwendet

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (13)$$

und

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (14)$$

2.7 Wien-Robinson-Brücke

In der letzten betrachteten Brückenschaltung sind im Gegensatz zu den vorherigen Brückenschaltungen keine Abgleichelemente enthalten. Bei den zuvor betrachteten Brückenschaltungen sollte sich prinzipiell also die Abgleichbedingung immer unabhängig

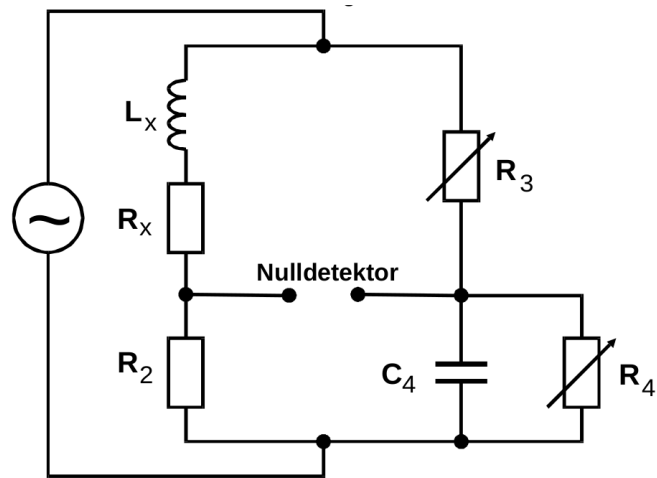


Abbildung 5: Maxwell-Brücke zur Bestimmung einer Induktivität [1]

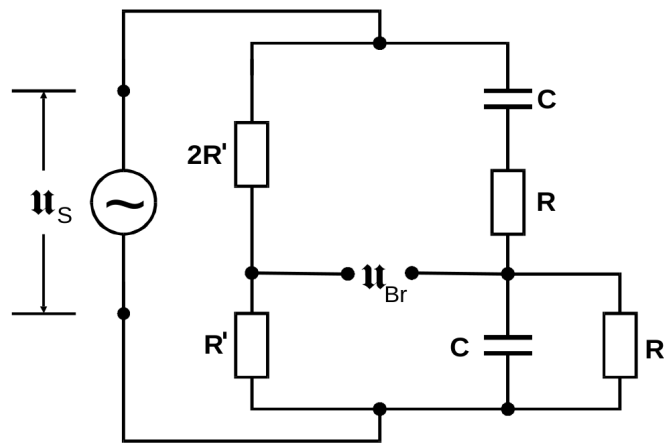


Abbildung 6: Wien-Robinson-Brücke zur Klirrfaktor-Bestimmung [1]

von der Frequenz ω der Speisespannung U_S erfüllen lassen. Dies stimmt allerdings nur eingeschränkt. Für große Frequenzen ω werden sich allerdings störende Streueffekte zeigen und für kleine Frequenzen dauert es etwas, bis sich ein stationärer Fall einstellt.

Die Wien-Robinson-Brücke dient nun als elektronischer Filter, das heißt, im Gegensatz zu den bisherigen Schaltungen wird die Wien-Robinson-Brücke sich nur bei einer bestimmten Frequenz $\omega = \omega_0$ abgleichen lassen.

Der Quotient aus Speise- und Brückenspannung ergibt sich unter der Verwendung komplexer Widerstände und Kapazitäten zu:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_s} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9 \cdot ((1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2)}. \quad (15)$$

Es ist sofort ersichtlich, dass der Zähler gleich 0 ist, die Brückenspannung also verschwindet für

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (16)$$

Somit lässt sich (15) vereinfacht darstellen durch die Einführung des Frequenzverhältnis:

$$\Omega := \frac{\omega}{\omega_0} \quad (17)$$

Der Quotient der Spannungen wird damit zu

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_s} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} \quad (18)$$

Die Filterfunktion der Wien-Robinson-Brücke schlägt somit bei ω_0 nach (16) zu. Das heißt, dass ω_0 aus dem kontinuierlichen Frequenzspektrum herausgefiltert wird und die umgebenden Frequenzen stark abgeschwächt werden.

2.7.1 Klirrfaktor-Messung

An einer idealen Wien-Robinson-Brücke unter Verwendung eines idealen Sinusspannungsgenerators würde die Brückenpannung bei der Frequenz ω_0 verschwinden. Im realen Fall wird allerdings trotzdem eine von Null verschiedene Spannung U_{Br} festgestellt. Diese entsteht durch Oberwellen, welche ungewollt durch den Sinusgenerator erzeugt werden. Im idealen Fall enthält eine Sinusschwingung keine Oberwellen. Um eine Aussage über die Güte des realen Sinusgenerators zu erhalten, wird der sogenannte Klirrfaktor bestimmt. Der Klirrfaktor setzt hierbei die Oberwellen ins Verhältnis zur Grundwelle. Ein kleiner Klirrfaktor kennzeichnet somit einen guten Sinusgenerator. Allgemein berechnet sich der Klirrfaktor zu

$$k := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N U_i^2}}{U_1} \quad (19)$$

Im vorliegenden Fall wird vereinfachend lediglich die zweite Oberwelle berücksichtigt.

$$k := \frac{U_2}{U_1} \quad (20)$$

3 Durchführung

Die einzelnen Brückenschaltungen werden in den Unterpunkten a) - e) erläutert.

3.1 Wheatstonesche Brücke

Zunächst wird die Wheatstonesche Brücke wie in Abbildung 2 aufgebaut.

Es sollen zwei unbekannte Widerstände gemessen werden, die jeweils dem R_x in der Abbildung entsprechen. Als Nullindikator dient ein digitales Oszilloskop. Ein Tiefpassfilter am Oszilloskop ermöglicht es, die hochfrequenten Störspannungen zu dämpfen.

Nachdem der Aufbau abgeschlossen ist, können die Spannungsquelle U_S sowie das Oszilloskop eingeschaltet werden. Es wird ein Wechselstrom verwendet. Nun muss der Widerstand R_3 solange variiert werden, bis auf dem Oszilloskop nur noch die hochfrequenten Störspannungen zu erkennen sind. Wenn dies der Fall ist, kann die Skala des Oszilloskops empfindlicher eingestellt werden und die Variation des Widerstandes R_3 kann wiederholt werden. Dieser Vorgang wird solange ausgeführt, bis die höchste Empfindlichkeit des Oszilloskops erreicht ist. Dann wird die Abgleichbedingung (6) als erfüllt angesehen und der Messdurchgang beendet. Das Potentiometer, das für das Verhältnis $\frac{R_3}{R_4}$ verwendet wird, hat einen Gesamtwiderstand von $R_{\text{GES}} = R_3 + R_4 = 1000 \Omega$. Damit erhält man R_4 , wenn R_3 ermittelt wurde, durch $R_4 = 1000 \Omega - R_3$.

Für jeden unbekannten Widerstand R_x werden drei Messdurchgänge mit drei verschiedenen Referenzwiderständen R_2 durchgeführt.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 dargestellt.

Zunächst soll ein R-C-Kombinationsglied gemessen werden, also ein Kondensator (Kapazität C_x) mit nicht vernachlässigbarem ohmschen Widerstand R_x . Um die Abgleichbedingung zu erfüllen (Brückenspannung Null) wird ein alternierendes Messen durchgeführt. Das heißt, dass das Stellglied R_2 und das Potentiometer ($\frac{R_3}{R_4}$) abwechselnd reguliert werden, sodass die Brückenspannung minimal wird. Dieser Vorgang wird solange wiederholt bis das Oszilloskop bei größter Empfindlichkeit nur noch die hochfrequenten Störspannungen anzeigt. Danach wird die Messung mit zwei weiteren Referenzkapazitäten C_2 wiederholt.

Des Weiteren sollen die Kapazitäten zweier Kondensatoren ohne das Stellglied R_2 bestimmt werden. Hierfür wird einfach das Stellglied aus dem Versuchsaufbau entfernt. Die Durchführung funktioniert nun wieder analog zu 3.1. Auch hier werden wieder drei Messungen mit drei verschiedenen Referenzkapazitäten durchgeführt.

3.3 Induktivitätsmessbrücke

In Abbildung 4 ist der Aufbau der Induktivitätsmessbrücke dargestellt. Es soll die Induktivität L_x und der Verlustwiderstand R_x einer unbekannten Spule gemessen werden. Verwendet wird hierfür ein L-R-Kombinationsglied. Die Durchführung ist analog zur

Messung des R-C-Kombinationsglieds 3.2. Die Werte für R_2 , R_3 und R_4 , die die Abgleichbedingungen erfüllen, werden also wieder alternierend gemessen. Variiert wird hier für drei Messungen jeweils die Referenzinduktivität L_2 .

3.4 Maxwell-Brücke

Der Versuchsaufbau der Maxwell-Brücke ist in Abbildung 5 dargestellt. Mit der Maxwell-Brücke soll das L-R-Kombinationsglied aus 3.3 ein weiteres Mal gemessen werden. Hierfür wird der Referenzwiderstand R_2 bei drei Messungen jeweils variiert. Die Referenzkapazität C_4 wird hingegen nicht verändert. Die beiden Stellglieder R_3 und R_4 werden wie in den vorherigen Messungen alternierend gemessen, bis die auf dem Oszilloskop angezeigte Spannung bei der höchsten Empfindlichkeit nur den hochfrequenten Störspannungen entspricht. Daraus erhält man mit den Abgleichbedingungen die unbekannte Kapazität und den unbekannten Verlustwiderstand.

3.5 Wien-Robinson-Brücke

Der Aufbau der Wien-Robinson-Brücke ist in Abbildung 6 dargestellt. Die Abgleichbedingung ist bei der Wien-Robinson-Brücke abhängig von der Spannungsfrequenz. Daher ist die Frequenz der Wechselspannung bei dieser Brückenschaltung nicht konstant wie bei den vorherigen Messungen, sondern wird variiert zwischen $\omega = 20 \text{ Hz}$ und $\omega = 30 \text{ kHz}$. Zunächst wird nach dem Start der Messung die Spannungsfrequenz ω_{\min} bestimmt, bei welcher die Brückenspannung U_{Br} ein Minimum erreicht. Danach wird die eigentliche Messung gestartet. Hierbei werden in geeigneten Abständen um die Spannungsfrequenz ω_{\min} die Messwerte für U_S und U_{Br} abgelesen. Da die Brückenspannung am Oszilloskop abgelesen wird, ist zu beachten, dass die Amplituden vollständig auf dem Oszilloskop zu sehen sind.

4 Auswertung

4.1 Wheatstonesche Brücke

Mit der Wheatstoneschen Brücke (2) sollen zwei unbekannte Widerstände bestimmt werden. Für den unbekannten Widerstand R_x gilt nach Formel (8)

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (21)$$

Der erste bestimmte unbekannte Widerstand war der Widerstand 13.

Tabelle 1: Messdaten für Wert 13

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω
332	491,8	508,2	$321,3 \pm 1,7$
664	325,6	674,4	$320,6 \pm 1,7$
1000	242,9	757,1	$320,8 \pm 1,7$

Die Messwerte mit dem berechneten Widerstand 13 sind in Tabelle 1 dargestellt. Für den Referenzwiderstand R_2 soll ein Fehler von 0,2% und für das Verhältnis $\frac{R_3}{R_4}$ ein Fehler von 0,5% angenommen werden [1]. Daraus ergeben sich die Fehler für R_x mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (22)$$

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (23)$$

Damit ergibt sich für den zu bestimmenden Widerstand $R_{13} = (320,9 \pm 1,4) \Omega$. Der Fehler des Mittelwerts wurde und wird im Folgenden gemäß Formel (23) bestimmt, indem die einzelnen absoluten Fehler ΔR_x auf die jeweiligen x_i addiert bzw. subtrahiert werden, sodass die einzelnen Summanden $(\bar{x} - (x_i \pm \Delta R_x))^2$ maximal werden.

Der zweite bestimmte Widerstand war Widerstand 12.

Tabelle 2: Messdaten für Wert 12

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω
332	542,1	457,9	$393,0 \pm 2,1$
664	371,8	628,2	$393,0 \pm 2,1$
1000	282,0	718,0	$392,8 \pm 2,1$

Die Messwerte und der ermittelte Widerstand R_{12} sind in Tabelle 2 dargestellt. Für den zu bestimmenden Widerstand ergibt sich $R_{12} = (392,9 \pm 1,6) \Omega$.

4.2 Kapazitätsmessbrücke

Der Aufbau einer Kapazitätsmessbrücke ist in Abbildung 3 dargestellt. Zunächst sollen die Widerstände einer RC-Kombination bestimmt werden. Für den ohmschen Widerstand R_x gilt nach Formel (9) $R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$. Für den kapazitiven Widerstand C_x gilt nach Formel (10) $C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}$. Die Werte für das RC-Kombinations-Glied sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Messdaten für das RC-Kombinations-Glied 8

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω	C_x / nF
597	225,2	717,0	283,0	$570,6 \pm 3,1$	$235,6 \pm 1,3$
750	279,9	671,8	328,2	$572,9 \pm 3,0$	$366,4 \pm 2,0$
994	167,2	773,4	226,6	$570,7 \pm 3,3$	$291,2 \pm 1,6$

Der Fehler von R_2 wurde auf $\Delta R_2 = 0,5\Omega$ festgelegt.

Damit erhält man für die zu bestimmenden Größen: $R_x = (571,4 \pm 2,9)\Omega$ und $C_x = (298 \pm 39)\text{ nF}$.

Nun sollen die Kapazitäten zweier Kondensatoren bestimmt werden. Hierfür wurden die Kondensatoren 1 und 3 verwendet. Es wurden jeweils der Kondensator C_2 variiert und der ohmsche Widerstand R_2 wurde auf Null gesetzt.

Tabelle 4: Messdaten für den Kondensator 1

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_x / nF
597	0	476,9	523,1	$654,8 \pm 3,5$
750	0	529,8	470,2	$665,6 \pm 3,6$
994	0	602,7	397,3	$655,2 \pm 3,5$

Die Werte für den Kondensator 1 sind in Tabelle 4 dargestellt. Für die zu bestimmende Kapazität ergibt sich $C_x = (658,5 \pm 6,0)\text{ nF}$.

Tabelle 5: Messdaten für den Kondensator 3

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_x / nF
597	0	589,1	410,9	$416,4 \pm 2,2$
750	0	639,5	360,5	$422,8 \pm 2,3$
994	0	704,9	295,1	$416,1 \pm 2,2$

Die Werte für den Kondensator 3 sind in Tabelle 5 aufgetragen. Für den Kondensator 3 erhält man damit $C_x = (418,4 \pm 3,7)\text{ nF}$.

4.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivitätsmessbrücke ist in Abbildung 4 dargestellt. Die unbekannte Induktivität L_x (L_{17}) wurde mittels Formel (12) bestimmt, der Verlustwiderstand R_x (R_{17}) mit Formel (11).

Tabelle 6: Messdaten für das L-R-Kombinationsglied 17

L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω	L_x / mH
20,1	38,8	680,1	319,9	$82,5 \pm 2,5$	$42,7 \pm 0,2$
27,5	60,5	609,2	390,8	$94,3 \pm 2,5$	$42,9 \pm 0,2$
14,6	33,3	749,2	250,8	$99,5 \pm 3,0$	$43,6 \pm 0,2$

Die Werte für das L-R-Kombinationsglied sind in Tabelle 6 dargestellt. Der Fehler von R_x und L_x durch die fehlerbehafteten Größen L_2 (0,2 %), R_2 (3 %) und $\frac{R_3}{R_4}$ (0,5 %) wurden mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Für den Verlustwiderstand R_x erhält man $R_x = (92,1 \pm 6,8) \Omega$ und für die unbekannte Induktivität $L_x = (43,1 \pm 0,4) \text{mH}$.

4.4 Maxwell-Brücke

In Abbildung 5 ist der Aufbau der Maxwell-Brücke dargestellt. Die gemessenen Werte

Tabelle 7: Messdaten für das L-R-Kombinationsglied 17

R_2 / Ω	C_4 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω	L_x / mH
332	597	215,2	754,1	$94,7 \pm 4,0$	$42,7 \pm 1,3$
664	597	108,0	753,2	$95,2 \pm 4,0$	$42,8 \pm 1,3$
1000	597	72,0	753,2	$95,6 \pm 4,1$	$43,0 \pm 1,3$

und die sich daraus ergebenden Größen für R_x und L_x ergeben sich aus den Gleichungen (13) und (14). Für den Verlustwiderstand R_x erhält man $R_x = (95,2 \pm 3,1) \Omega$ und für die Induktivität $L_x = (42,8 \pm 1,0) \text{mH}$.

4.5 Wien-Robinson-Brücke

In der letzten Messreihe soll die Frequenzabhängigkeit der Wien-Robinson-Brücke im Bereich $20\text{Hz} - 30000\text{Hz}$ untersucht. Nach Abbildung 6 wurden Bauelemente mit den folgenden Kenndaten verwendet.

Tabelle 8: Kenndaten der verwendeten Bauteile der Wien-Robinson-Brücke

R' / Ω	$2R' / \Omega$	R / Ω	C_1 / nF
332	664	1000	658.5

Die Kapazität des Kondensators C_1 wurde hierbei als Mittelwert der Berechnung in Tabelle 4 angenommen.

In der nachfolgenden Tabelle sind die gemessenen Spannungen U_S , $U_{Br, \text{eff}}$ in Abhängigkeit zur Frequenz ω sowie sowohl der gemessene Quotient der Spannungen als auch der nach Formel (15) berechnete Quotient eingetragen. Zudem wird $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ aufgeführt. Da es sich um eine Wechselspannung handelt, berechnet sich $U_{Br, \text{eff}}$ nach

$$U_{Br, \text{eff}} = \frac{U_{Br}}{2\sqrt{2}} \quad (24)$$

und ω_0 ist die Frequenz, bei der die Brückenspannung verschwindet. Da

$$\omega_o = \frac{1}{2\pi RC} \quad (25)$$

Bei unserem Aufbau ergab sich ω_0 etwa zu 240Hz. Nach der Formel ergibt sich $\omega_0 = 241.69\text{Hz}$.

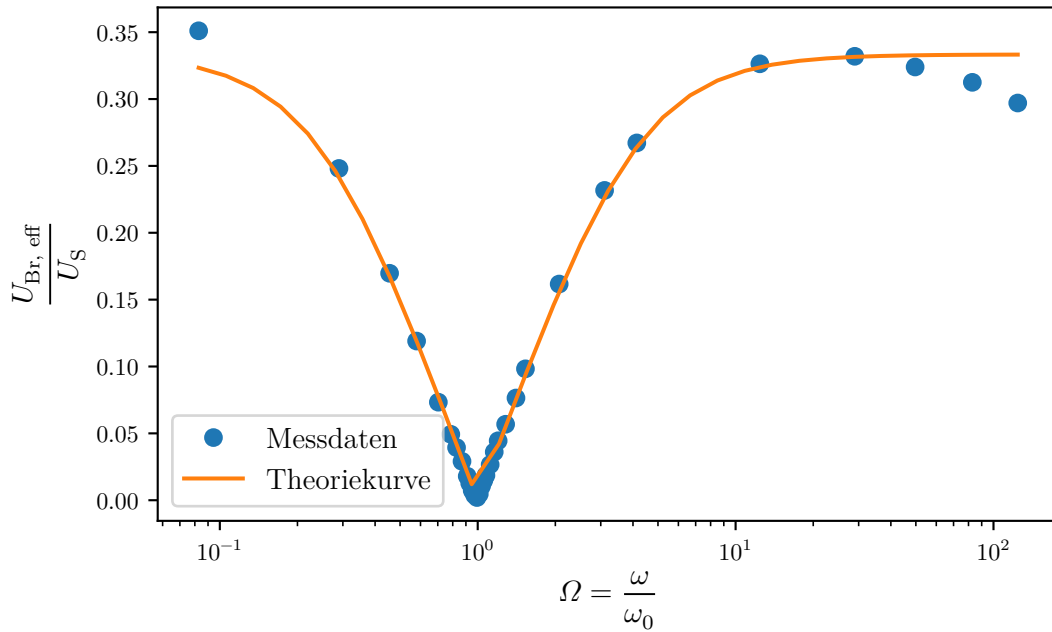


Abbildung 7: Vergleich der Messdaten mit der Theoriekurve

4.5.1 Klirrfaktor-Messung

Wie bereits in der Theorie beschrieben, wird im vorliegenden Experiment die Näherung verwendet, dass lediglich die zweite Oberwelle betrachtet wird. Zur Berechnung von k

Tabelle 9: Messdaten

ωHz	U_S / Ω	$U_{\text{Br, eff}}/\text{m}\Omega$	$\frac{U_{\text{Br}}}{U_S}$ nach (18)	$\frac{U_{\text{Br}}}{U_S}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
20.0	2.82	1979.90	0.3510	0.3234	0.08
70.0	2.85	1414.21	0.2481	0.3174	0.29
110.0	3.00	1018.23	0.1697	0.3082	0.46
140.0	3.00	714.18	0.1190	0.2943	0.58
170.0	2.99	438.41	0.0733	0.2741	0.70
190.0	2.97	292.74	0.0493	0.2463	0.79
200.0	2.98	234.76	0.0394	0.2104	0.83
210.0	2.99	173.95	0.0291	0.1670	0.87
220.0	2.95	106.07	0.0180	0.1181	0.91
225.0	2.95	74.95	0.0127	0.0658	0.93
230.0	2.93	42.43	0.0072	0.0120	0.95
235.0	2.92	22.06	0.0038	0.0421	0.97
240.0	2.93	11.88	0.0020	0.0953	0.99
245.0	2.95	27.15	0.0046	0.1460	1.01
250.0	2.95	62.23	0.0105	0.1920	1.03
255.0	2.96	86.97	0.0147	0.2314	1.06
260.0	2.95	109.60	0.0186	0.2628	1.08
270.0	2.96	157.68	0.0266	0.2863	1.12
280.0	2.92	210.72	0.0361	0.3027	1.16
290.0	2.91	258.80	0.0445	0.3138	1.20
310.0	2.85	323.85	0.0568	0.3211	1.28
340.0	2.84	434.16	0.0764	0.3257	1.41
370.0	2.72	534.57	0.0983	0.3286	1.53
500.0	2.69	869.74	0.1617	0.3304	2.07
750.0	2.64	1223.29	0.2317	0.3315	3.10
1000.0	2.62	1400.07	0.2672	0.3322	4.14
3000.0	2.60	1697.06	0.3264	0.3327	12.42
7000.0	2.62	1739.48	0.3320	0.3329	28.97
12000.0	2.63	1704.13	0.3240	0.3331	49.67
20000.0	2.67	1668.77	0.3125	0.3332	82.78
30000.0	2.69	1598.06	0.2970	0.3332	124.17

nach Formel (20) werden also U_1 und U_2 benötigt. U_1 ist $U_S = 2.93 \Omega$ bei ω_0 . Mit (18) und $\Omega = 2$ sowie

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{f(2)} \quad (26)$$

$f(2)$ ist, mit $\Omega = 2$, hierbei:

$$f(2)^2 = \left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 (\Omega) = \frac{1}{45} \quad (27)$$

Damit ergibt sich $U_2 = 0.079 \Omega$ und schließlich

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 0.027 \quad (28)$$

Formel (26) wurde nach [1] verwendet.

5 Diskussion

Auffällig ist, dass bei der Messung der Induktivität mit der Maxwell-Brücke die jeweilige Abweichung vom Mittelwert geringer ist als jeweiligen Abweichungen bei der Induktivitätsmessbrücke, was nach der Theorie auch so zu erwarten war. Die größeren Fehler des Mittelwerts lassen sich durch die hohen angenommenen Fehler der einzelnen Messelemente begründen (R_3 und R_4). Beim Vergleich der Theoriekurve des Quotienten $\frac{U_{Br}}{U_s}$ mit den gemessenen Werten zeigt sich eine sehr hohe Übereinstimmung beider Kurven. Lediglich der erste Messpunkt bei $\omega = 20$ Hz und die Messpunkte ab etwa $\omega = 12\,000$ Hz weichen deutlich von der Theoriekurve ab. Dies könnte allerdings auch auf ein zweites Minimum hindeuten, da die Messwerte erneut abfallen. Die Theoriekurve würde weitere Minima nicht berücksichtigen, da sich ihr Minimum durch das feste ω_0 bestimmt. Erfreulich ist, dass die Messpunkte um ω_0 sehr gut auf der Theoriekurve liegen. Da zuvor bei niedrigen Frequenzen gemessen wurde ($\omega = 1000$ Hz), kann angenommen werden, dass die Brückenspannung hier relativ gut zu Null abgeglichen werden konnte. Gemessen wurde das Verschwinden der Brückenspannung U_{Br} etwa bei $\omega_0 = 240$ Hz. Nach der Theorie ergibt sich $\omega_0 = 241,69$ Hz. Dies ist eine Abweichung von etwa 0.7%, welche angesichts der Messunsicherheiten vernachlässigbar ist. Bereits ein leichter Schlag auf den Tisch verursachte Schwankungen im Multimeter bei der Messung der Wien-Robinsonbrücke, sodass nicht ausgeschlossen werden kann, dass eine Beeinflussung auch bereits schon in den vorangegangenen Messungen durch Stöße an den Tisch stattfand.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 302: Elektrische Brückenschaltungen*. 2016.