

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Jannis Speer

jannis.speer@tu-dortmund.de

Kevin Talits

kevin.talits@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.17

Abgabe: 21.11.17

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	gedämpfter Schwingkreis	3
2.2	getriebener Schwingkreis	6
3	Durchführung	8
3.1	Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstands	8
3.2	Dämpfungswiderstand des aperiodischen Grenzfalls	9
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	9
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phase von Erreger- und Kondensatorspannung .	9
4	Auswertung	10
5	Diskussion	14
	Literatur	14

1 Ziel

Aus der Zeitabhängigkeit der Spannungsamplitude des gedämpften Schwingkreises soll der effektive Dämpfungswiderstand ermittelt werden. Außerdem soll noch der Dämpfungswiderstand bestimmt werden bei dem der aperiodische Grenzfall auftritt. Für den von außen angeregten Serienresonanzkreis soll die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung untersucht werden.

2 Theorie

2.1 gedämpfter Schwingkreis

Ein elektrischer Schwingkreis setzt sich zusammen aus einer Kapazität C in Form eines Kondensators und einer Induktivität L in Form einer Spule. Eine eingespeißte Energiemenge pendelt zwischen diesen beiden Energiespeichern, der Strom wechselt periodisch seine Richtung. Das System ist also dazu in der Lage, periodische Schwingungen durchzuführen, bei denen die Energie erhalten bleibt. In der Realität jedoch haben die Bauteile wie Spule, Kondensatoren und Kabel einen ohmschen Widerstand R , der dem System Energie in Form von Wärme entzieht. Für den Schwingkreis mit ohmschen Widerstand R ergibt sich also eine gedämpfte Schwingung, Stromstärke und Spannung nehmen mit der Zeit ab. Mit Hilfe der 2. Kirchhoffschen Regel lässt sich eine Differentialgleichung zur Beschreibung

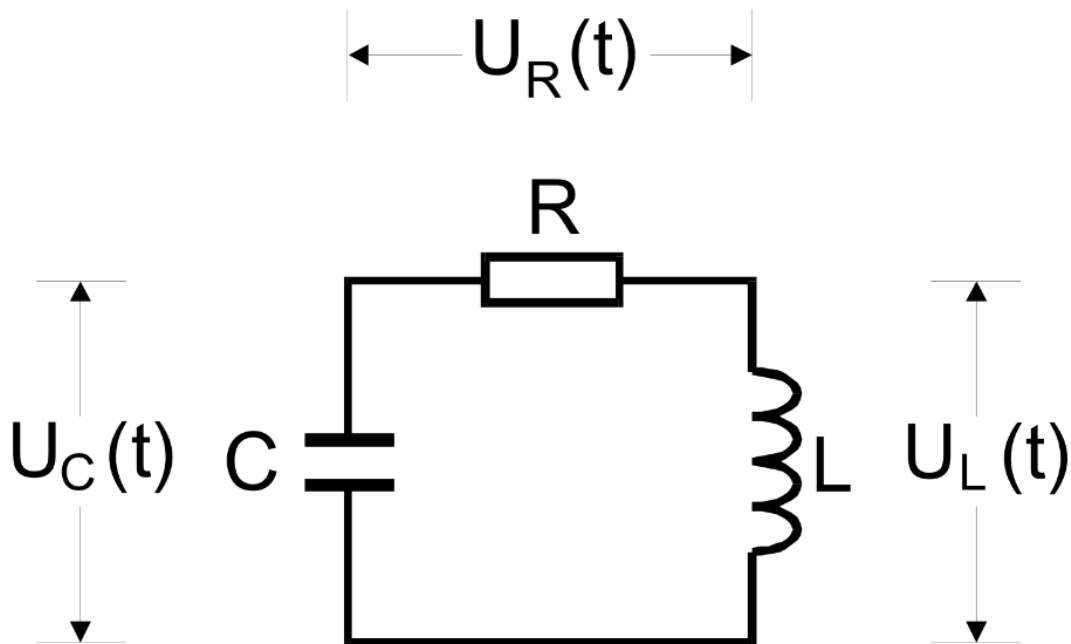


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines RLC-Kreises[1]

des Problems finden. Die in Abbildung 1 dargestellten Spannungen addieren sich zu Null:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

Die Spannungen können mit dem Ohmschen Gesetz (2), dem Induktionsgesetz (3) und der Definition der Kapazität (4) geschrieben werden als:

$$U_R(t) = RI(t) \quad (2)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (3)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (4)$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (5)$$

Wird diese nach der Zeit abgeleitet, erhält man die gewünschte Differentialgleichung, die an den harmonischen Oszillator aus der Mechanik erinnert.

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L} \dot{I}(t) + \frac{1}{LC} I(t) = 0 \quad (6)$$

Ein Lösungsansatz der Gleichung ist:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (\mathcal{A}_1 e^{i2\pi\nu t} + \mathcal{A}_2 e^{-i2\pi\nu t}) \quad (7)$$

mit den komplexen Koeffizienten \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 und den Abkürzungen:

$$\mu := \frac{R}{4\pi L} \quad (8)$$

$$\nu := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (9)$$

Die Form der Lösung ist im Besonderen von ν abhängig, das je nachdem ob die Diskriminante positiv oder negativ ist, reel oder komplex wird. Deshalb wird für die weitere Betrachtung eine Fallunterscheidung vorgenommen.

1. Fall: ν ist reel, $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Wird für die Koeffizienten der Ansatz

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} A_0 e^{i\phi} \text{ und } \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} A_0 e^{-i\phi}$$

gewählt, lässt sich Gleichung (7) schreiben als:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} \left(A_0 \frac{e^{i(2\pi\nu t + \phi)} + e^{-i(2\pi\nu t + \phi)}}{2} \right) \quad (10)$$

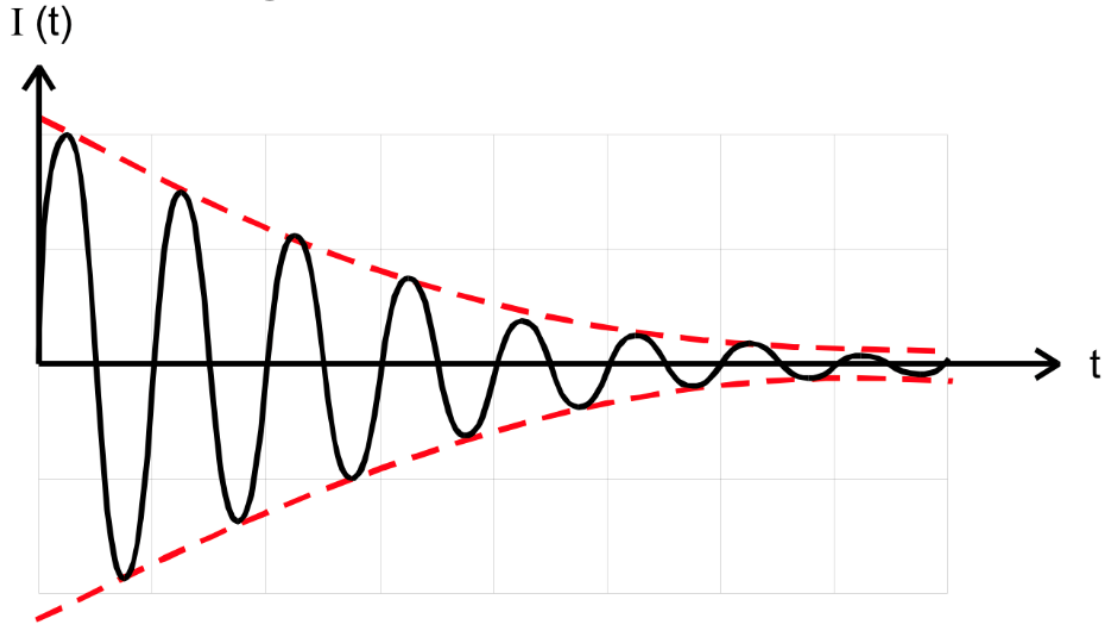


Abbildung 2: Darstellung einer gedämpften Schwingung[1]

Unter Berücksichtigung der Eulerschen Formel lässt sich diese Gleichung weiter umformen zu:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \phi) \quad (11)$$

Wie zu erkennen ist nimmt die Amplitude der Cosinus-Funktion exponentiell ab, der RLC-Kreis durchläuft also eine gedämpfte Schwingung (siehe Abbildung 2). Für diese ist die Abklingzeit definiert mit:

$$T_{ex} := \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (12)$$

2. Fall: ν ist imaginär, $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Wenn ν imaginär ist, werden alle Exponenten von Gleichung (7) reel und damit findet keine Schwingung mehr statt. Dieser Fall wird aperiodische Dämpfung genannt (siehe Abbildung 3). Durch die Wahl von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 wird bestimmt, ob der Lösungsansatz (7) einen oder keinen Exxtremwert besitzt. Die Stromstärke $I(t)$ fällt exponentiell und es gilt die proportionale Beziehung:

$$I(t) \propto \exp\left(\left[-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right] t\right) \quad (13)$$

3. Fall: aperiodischer Grenzfall, $\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}$

Unter dieser Bedingung ist $\nu = 0$ und Gleichung (7) vereinnfacht sich zu:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (14)$$

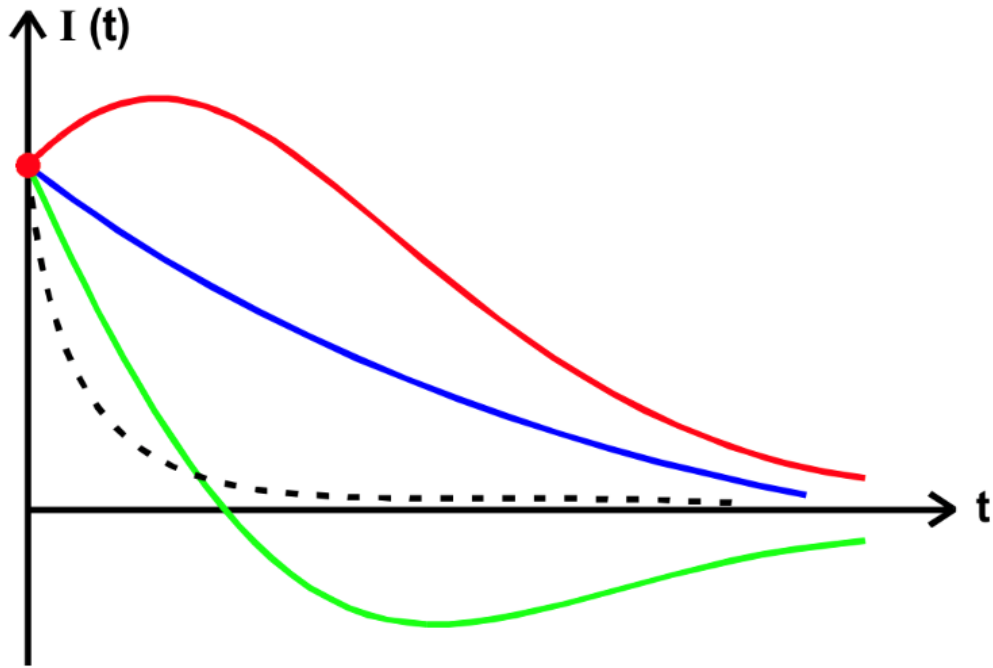


Abbildung 3: aperiodische Dämpfung und aperiodischer Grenzfall[1]

Die Stromstärke $I(t)$ fällt hier am schnellsten gegen Null ab ohne dabei überzuschwingen (siehe Abbildung 3).

2.2 getriebener Schwingkreis

Der elektrische Schwingkreis kann durch eine externe Spannungsquelle getrieben, die periodisch Energie in den Kreis pumpt (siehe Abbildung 4). Das führt zu einer erzwungenen Schwingung mit der Frequenz der Wechselstromquelle. Diese äußere Anregung kann in der Differentialgleichung (5) berücksichtigt werden, indem diese um eine Inhomogenität ergänzt wird. $I(t)$ und dessen zeitliche Ableitungen werden unter Ausnutzung von (4) durch die Kondensatorspannung U_C ersetzt.

$$LC\ddot{U}_C(t) + RC\dot{U}_C(t) + U_C(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (15)$$

Das Problem wird gelöst für den Ansatz:

$$U_C(\omega, t) = U(\omega) e^{i\omega t} \quad (16)$$

Für die Amplitude $U(\omega)$ ergibt sich dann:

$$U(\omega) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (17)$$

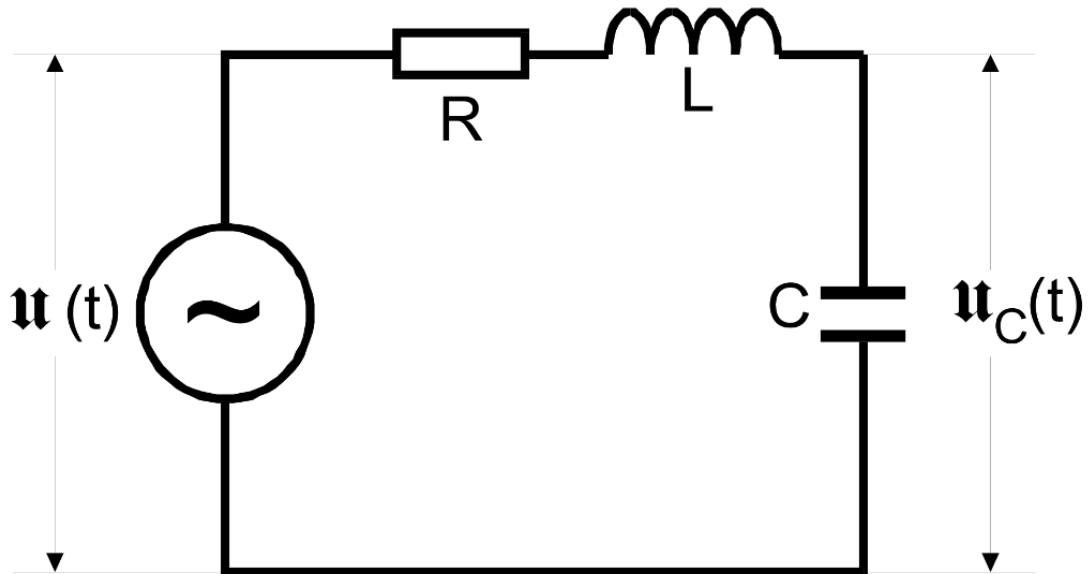


Abbildung 4: Darstellung eines getriebenen Schwingkreises[1]

Die Phase von $U(\omega)$ entspricht der Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Kondensatorspannung:

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}U(\omega)}{\text{Re}U(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (18)$$

Nach Gleichung (16) haben $U(\omega)$ und $U_C(\omega, t)$ den gleichen Betrag, es folgt also:

$$U_C(\omega, t) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (19)$$

Die Kondensatorspannung U_C hängt also von ω ab, für

geht

und für

geht

. Bei einer bestimmten Frequenz, der Resonanzfrequenz, wird U_C maximal und kann größer als U_0 werden.

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (20)$$

Von besonderer Interesse ist das Resonanzphänomen bei schwacher Dämpfung.

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

Unter dieser Bedingung nähert sich die Resonanzfrequenz der Eigenfrequenz des Systems, die definiert ist als:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (21)$$

Der Zusammenhang zwischen $U(\omega)$ und $U_C(\omega, t)$ (siehe Gleichung (16)) vereinfacht sich zu

$$U_{C,\max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = q U_0, \quad (22)$$

wobei q als Güte bezeichnet wird. Ein weiteres Merkmal der Resonanz ist die Breite der Resonanzkurve, die durch die Frequenzen, ω_+ und ω_- bestimmt ist, bei denen U_C auf $\frac{U_{C,\max}}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. Daraus lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (23)$$

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (24)$$

3 Durchführung

Als Erstes werden die Parameter der verwendeten Bauteile festgehalten. Alle experimentell bestimmten Werte sollen mit den berechneten Theoriewerten verglichen werden.

3.1 Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstands

In diesem Versuchsteil soll über die Zeitabhängigkeit der Amplituder einer gedämpften Schwingung der effektive Dämpfungswiderstand und die Abklingzeit ermittelt werden. Dazu wird ein Aufbau wie in Abbildung 5 verwendet. Der Nadelpulsgenerator regt den

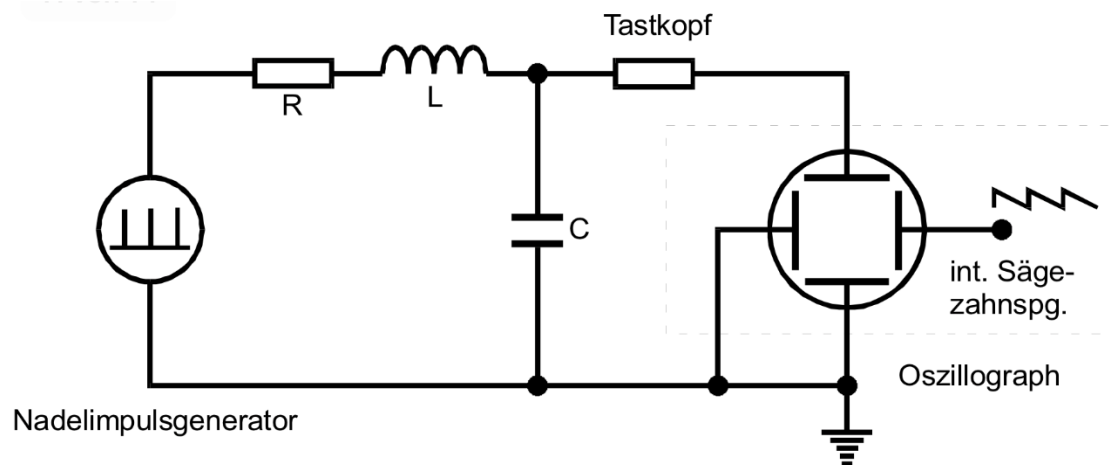


Abbildung 5: Schaltung zur Untersuchung der Kondensatorspannung[1]

RLC-Schwingkreis zu gedämpften Schwingungen an. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass die Frequenz so gewählt wird, dass vor jedem neuen Impuls U_C um ungefähr den Faktor 3 bis 8 abnimmt. Für die Messung wird der kleinere der eingebauten Festwiderstände benutzt. Mit Hilfe des Cursor des digitalen Oszilloskopes können t und $U_C(t)$ der Maxima, die die Einhüllende der Schwingung bilden, abgelesen werden. Über eine Ausgleichsrechnung werden die gesuchten Größen bestimmt.

3.2 Dämpfungswiderstand des aperiodischen Grenzfalls

Die Schaltung für diese Messung unterscheidet sich zu Abbildung 5 nur durch einen anderen Widerstand. Dieser kann manuell reguliert werden und wird zu Beginn auf den Maximalwert gestellt. Anschließend wird der Widerstand R reduziert bis auf dem Oszilloskop der aperiodische Grenzfall zu sehen ist. Jetzt kann der Dämpfungswiderstand des aperiodischen Grenzfalls R_{ap} an der Schaltung abgelesen werden.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung wird mit einem Schaltkreis wie in Abbildung 6 untersucht. Gemessen wird mit dem größeren Festwiderstand und die

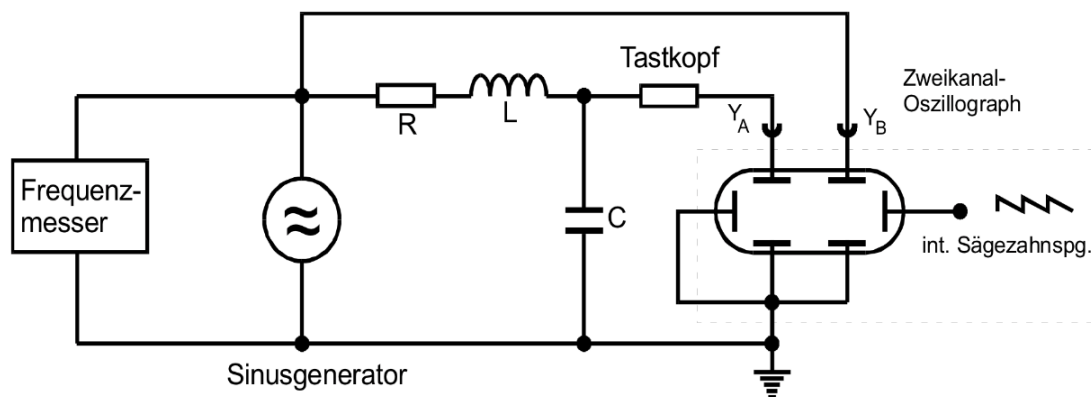


Abbildung 6: Schaltung zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit von Kondensatorspannung und Phase[1]

Spannung des Sinusgenerators muss nur einmal zu Beginn bestimmt werden. Über den Generator werden verschiedene Frequenzen eingestellt und wieder mit Hilfe des Cursors die dazugehörigen Spannungen abgelesen. In der Nähe der Resonanzfrequenz werden die Messabstände reduziert. Es werden 20 Datenpaare notiert.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase von Erreger- und Kondensatorspannung

Die letzte Messung benutzt den gleichen Aufbau wie zuvor und wird auch für die gleichen Frequenzen durchgeführt. Auf dem Oszilloskop werden die entsprechenden Erreger- und

Kondensatorsspannungen dargestellt. Über die Cursorfunktion lässt sich der Abstand der Maxima a ablesen und über die eingestellte Frequenz kann die Periodenlänge b bestimmt werden. Aus diesen Größen kann dann die Phasenverschiebung berechnet werden.

4 Auswertung

Die notierten Werte lauten:

$$L = (10.11 \pm 0.03)mH \quad (25)$$

$$C = (2.098 \pm 0.006)nF \quad (26)$$

$$R_1 = (48.1 \pm 0.1)\Omega \quad (27)$$

$$R_2 = (509.5 \pm 0.5)\Omega \quad (28)$$

Die gemessenen Daten der Spannungsamplitude U_c und dazugehöriger Zeiten t , befinden sich im Anhang auf Tabelle 1. Der angefertigte Plot der Einhüllenden des Abklingvorgangs ist in Abb. 7 zu sehen.

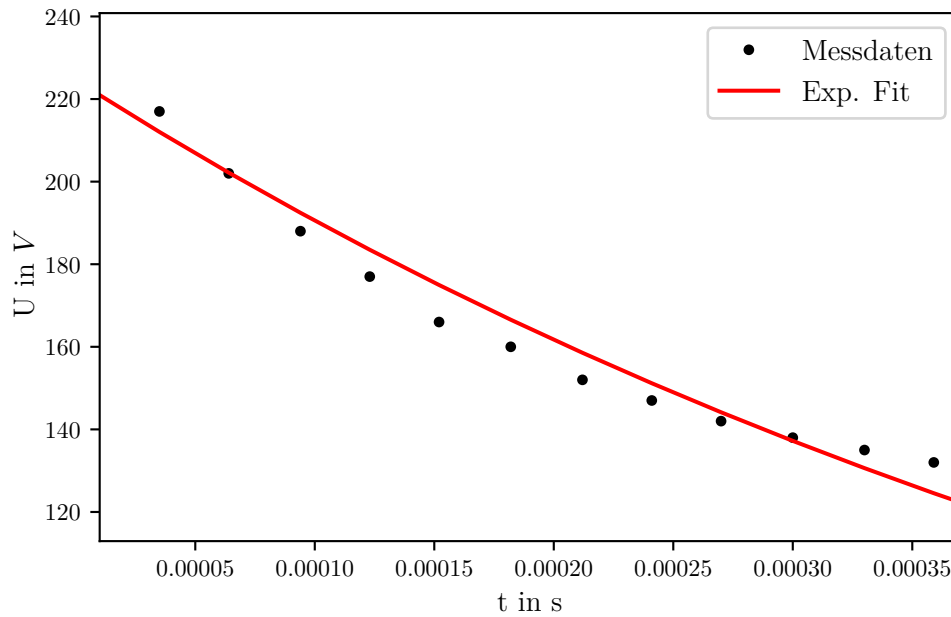


Abbildung 7: Abklingvorgang des gedämpften RCL-Schwingkreises mit Fit.

Die Form der Einhüllenden nach (7) ist gegeben durch:

$$A = A_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (29)$$

Mit der Ausgleichsrechnung ergeben sich die Werte:

$$A_0 = (224.58 \pm 4.29)V \quad (30)$$

$$\mu = (261 \pm 16) \frac{1}{s} \quad (31)$$

Daraus ergeben sich nach (8) und $T_e x = \frac{1}{2\pi\mu}$ die Werte für den Effektivwiderstand R_{eff} und die Abklingdauer T_{ex} :

$$R_{\text{eff}} = (33.2 \pm 2.0)\Omega \quad (32)$$

$$T_{\text{ex}} = (0.61 \pm 0.4)ms \quad (33)$$

Der in der Schaltung verbaute Widerstand $R_1 = (48.1 + / - 0.1)\Omega$ weicht um 14.9Ω ab. Der gemessene Wert für R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, beträgt 3280Ω . Verglichen mit dem durch $\frac{1}{LC} = \frac{(R_{ap})^2}{4L^2}$ berechneten Wert von $(4390 \pm 9)\Omega$, zeigt sich eine Differenz von 1110Ω . Dies ist zum Einen dadurch zu erklären, dass die restlichen Bauteile, vor allem die Spule, ebenfalls in der Theorie nicht beachtete Widerstände haben. Zum anderen konnte ein genaues Einstellen nicht erfüllt werden, da im Bereich um den Grenzwiderstand keine wesentliche Änderung am Spannungsverlauf zu erkennen waren.

Die gemessenen Daten zur Bestimmung der Resonanzüberhöhung q , sowie der Breite der Resonanzkurve $\nu_+ - \nu_-$ befinden sich im Anhang in Tabelle 2. Die Erregerspannung U beträgt dabei $117V$. Deren Frequenzabhängigkeit ist nach experimentellem Nachweis am Oszilloskop vernachlässigbar. Das Verhältnis $\frac{U_c}{U}$ wird gegen f , zu sehen in Abb. 8, abgetragen. Der Maximalwert q_{exp} wird aus dem Graphen als Güte abgelesen.

Um die Breite der Resonanzkurve bestimmen zu können, wird der Frequenzbereich um das Maximum nun linear dargestellt. Das Ergebnis ist in Abb. 9 zu sehen. Aus dieser wird die Breite der Resonanzkurve abgelesen und die Werte werden mit den durch $\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$ theoretisch berechneten Werten verglichen:

Experimentell:

$$\omega_+ - \omega_- = 11140\text{Hz}$$

Theoretisch:

$$\omega_+ - \omega_- \approx 50395\text{Hz}$$

$$\text{relative Abweichung:} = 77.0\%$$

Wird der theoretische Wert der Güte nach $q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$ bestimmt, so ergibt sich:

$$q_{\text{exp}} = 2.962$$

$$q_{\text{theo}} = 3.923 \pm 0.009$$

$$\text{relative Abweichung:} = \frac{q_{\text{theo}} - q_{\text{exp}}}{q_{\text{theo}}} = 24.5\%$$

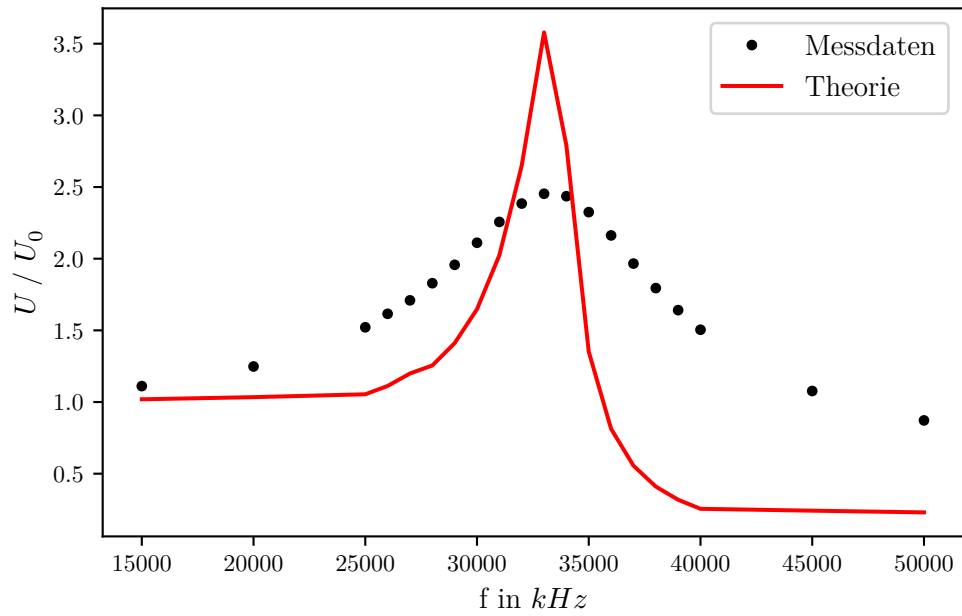


Abbildung 8: Normierte Kondensortspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

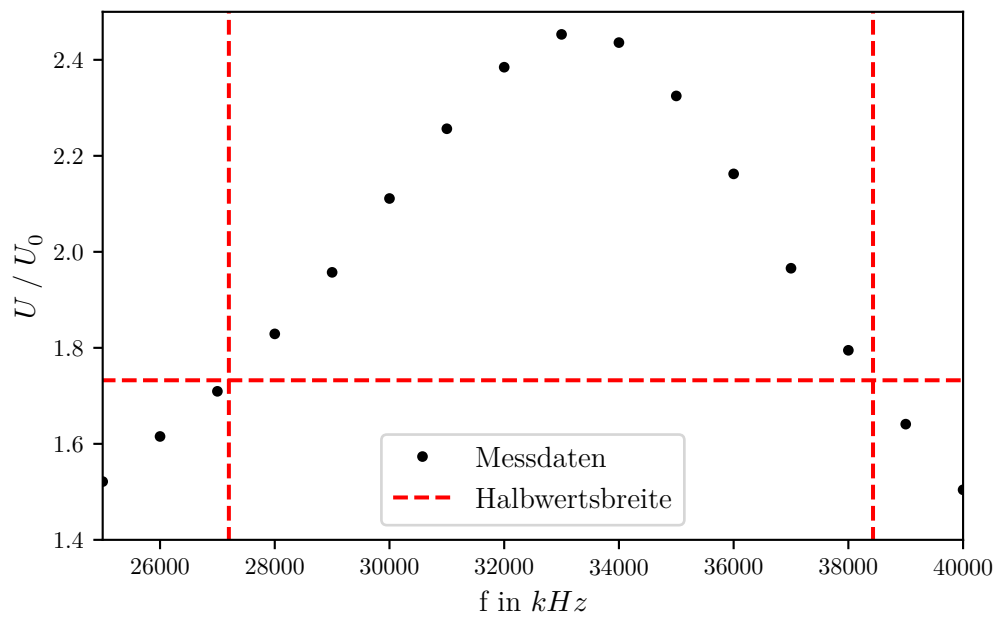


Abbildung 9: Lineare Darstellung der normierten Kondensortspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Die Messdaten, um die Werte für die Resonanzfrequenz ν_{res} , sowie für die Frequenzen ν_1 beziehungsweise ν_2 , an denen die Phase $\frac{\pi}{4}$ beziehungsweise $\frac{3\pi}{4}$ beträgt, berechnen zukönnen, befinden sich im Anhang in Tabelle 3. Die Phase Φ wird in Abb. 10 gegen die Frequenz abgetragen. Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird, wie in 10 erkennbar, zur besseren Ablesbarkeit linear dargestellt. ν_{res} wird nach $\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ und ν_1 und ν_2 werden nach $\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$ errechnet und mit den abgelesenen Werten verglichen:

$$\nu_{(res, exp)} = 33000 Hz$$

$$\nu_{(res, theo)} = (34280 \pm 70) Hz$$

$$\text{relative Abweichung:} = 3.7\%$$

$$\nu_{(1, exp)} = 27200 Hz$$

$$\nu_{(1, theo)} = (30430 \pm 60) Hz$$

$$\text{relative Abweichung:} = 10.6\%$$

$$\nu_{(2, exp)} = 38340 Hz$$

$$\nu_{(2, theo)} = (39240 \pm 80) Hz$$

$$\text{relative Abweichung:} = 2.3\%$$

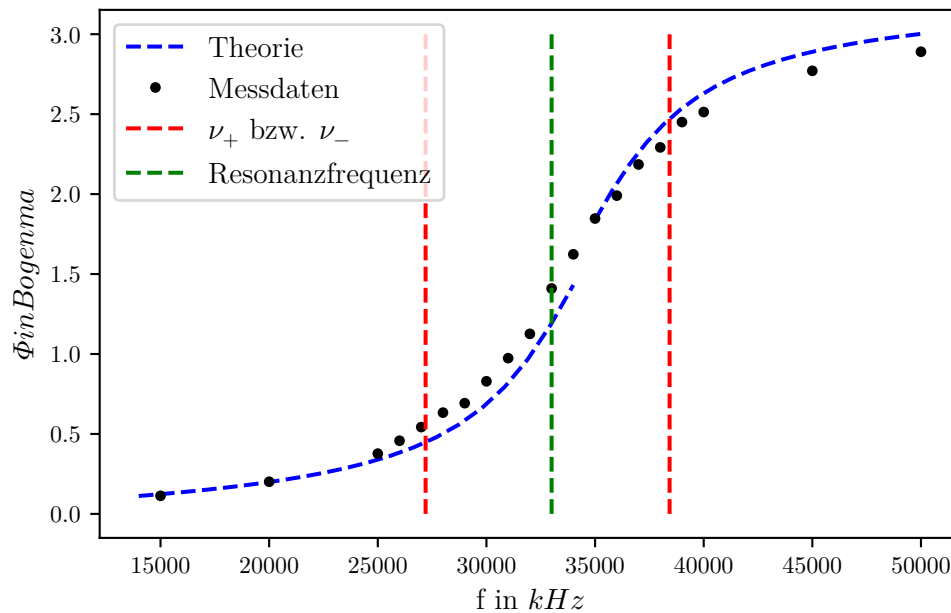


Abbildung 10: Lineare Darstellung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung.

5 Diskussion

R_{eff} lag unterhalb des Erwartungswerts. Durch das Fehlen des Widerstandes vom Netzgerät in der Theorie, sollte es dort einen höheren Wert als den in der Schaltung verbauten geben. Weil dies nicht Fall ist und μ die einzige gemessene berechnete Größe ist, kann der Fehler hier stecken. Somit ist μ rückblickend auf Grund dieser Beobachtung zu klein. Die restlichen Größen entsprechen weitestgehend den Erwartungswerten mit nur kleinen Abweichungen, welche nicht weiter von größerer Bedeutung sind.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung V354, gedämpfte und erzwungene Schwingungen.*