V106

Gekoppelte Pendel

Nikola Sarah Mang Mirjam Prayer

Durchführung: 02.11.2020 Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

1.1 Das Fadenpendel

Ein Fadenpendel besteht aus einem Pendelkörper mit Masse m, der idealerweise an einem masselosen Faden; in unserem Fall an einer Metallstange befestigt ist. Wird der Pendelkörper aus der Ruhelage ausgelenkt, so wirkt die Gravitation $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ als rücktreibende Kraft . Dadurch entsteht ein Drehmoment $M = D_p \cdot \sin\theta$ mit $D_p = m \cdot g \cdot l$. Für kleine Auslenkungen kann die Kleinwinkelnäherung $\sin\theta = \theta$ verwendet werden. Unter Berücksichtigung des Trägheitsmomentes $J = m \cdot l^2$ ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für den Pendelkörper

$$D_p \cdot \theta + J \cdot \ddot{\theta} = 0 \tag{1}$$

Für kleine Winkel kann das Fadenpendel also als harmonischer Oszillator angenähert werden. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\theta = a \cdot \sin\omega t + b \cdot \cos\omega t \tag{2}$$

mit Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3}$$

Bei kleinen Auslenkungen haben daher weder die Masse des Pendelkörpers noch der Auslenkwinkel Einfluss auf die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1.2 Gekoppelte Schwingungen

Im Folgenden wird immer von zwei identischen Pendeln ausgegangen. Durch die Kopplung von zwei Fadenpendeln durch eine Feder kann Energie des einen Fadenpendels auf das andere übertragen werden. Deswegen wirken auf die Pendelkörper die zusätzlichen Drehmomente $M_1 = D_F(\theta_2 - \theta_1),\ M_2 = D_F(\theta_1 - \theta_2)$ Die daraus resultierenden Differentialgleichungen lauten (mit Kleinwinkelnäherung):

$$D_p \cdot \theta_1 + J \cdot \ddot{\theta}_1 = D_F(\theta_2 - \theta_1) \tag{4}$$
$$D_p \cdot \theta_2 + J \cdot \ddot{\theta}_2 = D_F(\theta_1 - \theta_2) \tag{5}$$

In Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen $\theta(0)$ und $\dot{\theta}(0)$ gibt es verschiedene Schwingungsarten. Unterschieden wird vor allem zwischen den zwei Eigenmodi (gleichsinnig und gegensinnig) und anderen Schwingungsarten.

1.2.1 Gleichsinnige Schwingungen

Sind die Anfangsbedingungen (dh. Auslenkung und Geschwindigkeit) der gekoppelten Pendel exakt gleich, wird von gleichsinniger Schwingung gesprochen. Es findet keine Energieübertragung zwischen den beiden Fadenpendeln statt, da die Feder im Idealfall zu keinem Zeitpunkt ge- oder entspannt wird. Die Schwingungsfrequenz stimmt mit den Eigenfrequenzen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{6}$$

der beiden Pendel überein, weshalb sich auch die Periodendauer nicht durch die Kopplung ändert, weil dem System weder Energie zugeführt noch entzogen wird. Sie beträgt daher ebenfalls

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

1.2.2 Gegensinnige Schwingungen

Schwingungen, bei denen die Auslenkungen zu Beginn $\theta_1 = -\theta_2$ betragen, werden gegensinnige Schwingungen genannt. In dieser Eigenmode werden die rücktreibenden Kräfte der einzelnen Pendel durch die rücktreibenden Kräfte der Feder um jeweils den gleichen Betrag verstärkt. Die Bewegungsgleichung für beide θ lautet daher

$$D_p \cdot \theta + J \cdot \ddot{\theta} = D_F(2\theta) \Leftrightarrow (2D_p D_F)\theta + J \cdot \ddot{\theta} = 0 \tag{8}$$

Die dadurch entstehende Schwingung ist symmetrisch und besitzt aufgrund der größeren rücktreibenden Kräfte eine höhere Frequenz

$$\omega_- = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{l}} \tag{9}$$

Dadurch verringert sich auch die Periodendauer

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + 2k}} \tag{10}$$

mit Federkonstante k.

1.2.3 Gekoppelte Schwingungen

Wird zu Beginn das eine Pendel ausgelenkt, das andere jedoch in der Ruheposition belassen. Die Energie vollständig und langsam zwischen den beiden Pendeln hin und her übertragen, so dass eines der Pendel still steht, sobald die Amplitude des anderen Pendels maximal wird. (Dies gilt zumindestens, wenn die Rückstellkraft der Feder gering ist im Vergleich zur Rückstellkraft der Pendel). Die Schwingung ist darstellbar als Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen θ_+ und θ_-. Die Schwebungsdauer und die Schwebungsfrequenz berechnen sich dann als

$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \text{ und } \omega_S = \omega_+ - \omega_- \tag{11}$$

Um die Kopplung der beiden Fadenpendel zu beschreiben wird die Kopplungskonstente

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{12}$$

verwendet.

2 Durchführung

2.1 Versuchsaufbau

Für den Versuch werden zwei Stabpendel mit einer reibungsarmen Spitzenlagerung verwendet. Durch verschiebbare Pendelkörper können verschiedene Pendellängen eingestellt werden. Die nachfolgenden Messungen werden für zwei verschiedene Pendellängen durchgeführt. Die Höhe der Feder, welche die Pendel koppelt, wird nicht variiert.

2.2 Versuchsdurchführung

Zunächst werden die Pendel entkoppelt, um anhand der Periodendauern festzustellen, ob die beiden Stabpendel die gleiche Pendellänge besitzen. Hierfür werden jeweils 5 Schwingungsdauern gemessen. Damit der menschliche Fehler (ungenaues Drücken der Stoppuhr) möglichst gering gehalten werden kann, wird die Messung 10 mal durchgeführt und dann werden die Mittelwerte verglichen. Liegt $(\overline{T}_1 - \overline{T}_2)$ innerhalb der Standartabweichung der beiden Pendel, ist die Abweichung der Pendellängen vernachlässigbar und die Längen können verwendet werden.
Nun werden die Pendel durch die Feder gekoppelt und es werden nacheinander durch geeignetes Auslenken die beiden Eigenmoden angeregt. Zwecks Fehlerminimierung wird erneut für 5 Schwingungsdauern gemessen. Auch hier werden jeweils 10 Messungen durchgeführt.
Zu guter Letzt wird eine gekoppelte Schwingung erzeugt und die Schwingungsdauer T und die Schwebungsdauer T_S gemessen. Wie bei den vorangegangenen Messungen werden 10 Messungen a 5 Schwingungen durchgeführt.

3 Auswertung

3.1 Pendellänge 1

Zunächst wurde das Pendel auf eine Länge $l = 0,824$m eingestellt, um die erste Reihe an Messwerten zu nehmen.

3.1.1 Frei schwingende Pendel

Da die Zeit für 5 Schwingungen gestoppt wurde, werden die Werte erst durch fünf geteilt. Daraus folgen die Messwerte wie in 1 dargestellt.

Tabelle 1: Messdaten für frei schwingende Pendel.

T_1/s	T_2/s
1.773	1.767
1.792	1.777
1.768	1.8
1.802	1.88
1.779	1.791
1.837	1.894
1.786	1.8
1.804	1.817
1.82	1.812
1.795	1.829

Die Formel für den Mittelwert lautet

$$x = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \tag{13}$$

und die für den Fehler des Mittelwertes

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{14}$$

wobei N die Anzahl an Messwerten ist und σ die Standardabweichung. Als Mittelwert aus den Messwerten folgen eine Schwingungsdauer $T_1 = 1.796 \pm 0.007$s für das eine und $T_2 = 1.817 \pm 0.012$s für das andere Pendel.

3.1.2 Gleich- und gegenphasige Schwingungen

Als nächstes sollte das System betrachtet werden, wenn die Feder eingesetzt und die Massen tatsächlich verbunden sind. Durch Teilung errechnen sich die in Tabelle 2 aufgelisteten Werte. Die Mittelwerte (mithilfe von (13), (14)) lauten $T_+ = 1.806 \pm 0.005$s und $T_- = 1.669 \pm 0.005$s. Aus diesen lässt sich der Koppungsgrad κ durch die in der Theorie hergeleitete Formel berechnen:

$$\kappa = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} = 0.077$$

Der zugehörige Fehler wird durch die Gaussche Fehlerfortpflanzung mit den Fehlern des Mittelwertes für T_+, T_- bestimmt.

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2} \tag{15}$$

Tabelle 2: Messdaten für gleich- (T_+) und gegenphasige (T_-).

T_+/s	T_-/s
1.806	1.694
1.814	1.66
1.782	1.65
1.766	1.68
1.812	1.656
1.838	1.674
1.812	1.7
1.818	1.676
1.794	1.638
1.818	1.662

Für κ gilt also:

$$\sigma_\kappa = \sqrt{\sigma_{T_+}^2 \left(-\frac{2T_+\left(T_+^2 - T_-^2\right)}{\left(T_+^2 + T_-^2\right)^2} + \frac{2T_+}{T_+^2 + T_-^2}\right)^2 + \sigma_{T_-}^2 \left(-\frac{2T_-\left(T_+^2 - T_-^2\right)}{\left(T_+^2 + T_-^2\right)^2} - \frac{2T_-}{T_+^2 + T_-^2}\right)^2} \tag{16}$$

Daraus folgt $\kappa = 0.077 \pm 0.005$.

3.1.3 Gekoppelte Schwingung

Zudem sollte die dritte mögliche Mode genauer betrachtet werden, die gekoppelte Schwingung. Einerseits ist dabei die Schwingung von Bedeutung, andererseits die Schwebung, also die Zeit, die das System benötigt, bis dasselbe Pendel wieder in Ruhe ist.
Gemessene Daten sind in Tabelle 3 zu finden. Zugehörige Mittelwerte sind mit (13), (14)

Tabelle 3: Messdaten für Schwingungs- (T) und Schwebungsdauer (T_S).

T/s	T_S/s
1.71	20.72
1.664	20.85
1.698	21.65
1.648	21.47
1.692	20.72
1.692	21.75
1.68	20.84
1.67	21.0
1.67	20.81
1.67	21.18

$T = 1.678 \pm 0.006$s und $T_S = 21.099 \pm 0.124$s. Nun gibt es aber auch eine Formel, mit der sich die Schwebungsdauer theoretisch aus den Schwingungsdauern der gleich- und gegenphasigen Schwingungen berechnen lassen. Für diesen theoretischen Wert gilt wie zuvor hergeleitet:

$$T_{\text{S, theoretisch}} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{17}$$

Da die gleich- und gegenphasigen Moden fehlerbehaftet sind, ist eine Gauss'sche Fehlerrechnung (15) vonnöten:

$$\sigma_{T_S} = \sqrt{\sigma_{T_+}^2 \left(-\frac{T_+ T_-}{(T_+ - T_-)^2} + \frac{T_-}{T_+ - T_-} \right)^2 + \sigma_{T_-}^2 \left(\frac{T_+ T_-}{(T_+ - T_-)^2} + \frac{T_+}{T_+ - T_-} \right)^2} \tag{18}$$

Also $T_{\text{S, theoretisch}} = 22.141 \pm 1.444$s.

3.1.4 Frequenzen

Zum einen lassen sich die Frequenzen ω_+, ω_- aus den Messwerten bestimmen mithilfe der bekannten Formel

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{19}$$

berechnen. Daraus errechnen sich die Messdaten $\omega_+ = 3.478 \pm 0.006$Hz und $\omega_- = 3.763 \pm 0.007$Hz. Für die Schwebungsfrequenz $\omega_S = -0.284 \pm 0.009$Hz gilt die Formel

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_- \tag{20}$$

Die Fehler folgen mit (15) aus:

$$\sigma_{\omega_+} = \sqrt{\frac{\sigma_{T_+}^2}{T_+^4}} \tag{21}$$

$$\sigma_{\omega_-} = \sqrt{\frac{\sigma_{T_-}^2}{T_-^4}} \tag{22}$$

$$\sigma_{\omega_s} = \sqrt{\sigma_{\omega_+}^2 + \sigma_{\omega_-}^2} \tag{23}$$

Zum anderen wurde in der Theorie je eine Formel für die Eigenfrequenzen der gleich- und gegenphasigen Schwingungen hergeleitet.

$$\omega_{\text{+, theoretisch}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{24}$$

$$\omega_{\text{-, theoretisch}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{l}} \tag{25}$$

$$\omega_{\text{S, theoretisch}} = \omega_{\text{+, theoretisch}} - \omega_{\text{-, theoretisch}} \tag{26}$$

Für die Länge wird eine Messunsicherheit von $\Delta l = 0.005$m angenommen. Dann gilt für die Fehler nach (15):

$$\sigma_{\omega_{+,\text{ theoretisch}}} = \sqrt{(\Delta l)^2 \left(-\frac{g}{2\sqrt{\frac{g}{l}}l^2}\right)^2} \tag{27}$$

$$\sigma_{\omega_{\text{-, theoretisch}}} = \sqrt{(\Delta l)^2 \left(-\frac{2\kappa+g}{2\sqrt{\frac{2\kappa+g}{l}}l^2}\right)^2 + \sigma_\kappa^2 \left(\frac{1}{l\sqrt{\frac{2\kappa+g}{l}}}\right)^2} \tag{28}$$

$$\sigma_{\omega_{\text{S, theoretisch}}} = \sqrt{\sigma^2_{\omega_{+,\text{ theoretisch}}} + \sigma^2_{\omega_{\text{-, theoretisch}}}} \tag{29}$$

Es sind also: $\omega_{+,\text{ theoretisch}} = 3.449 \pm 0.016$Hz, $\omega_{\text{-, theoretisch}} = \pm 0.056$Hz und $\omega_{\text{S, theoretisch}} = -0.027 \pm 0.061$Hz.

3.2 Pendellänge 2

Als zweite Pendellänge wurde das Pendel auf 0.471m eingestellt.

3.2.1 Frei schwingende Pendel

Auch hier wurden die Daten zunächst durch fünf geteilt, dargestellt sind sie in Tabelle 4. Als Mittelwerte ergeben sich aus (13) und (14) $T_1 = 1.403 \pm 0.006$s und $T_2 = 1.419 \pm 0.004$s.

Tabelle 4: Messdaten für frei schwingende Pendel mit geringerer Länge.

T_1/s	T_2/s
1.406	1.424
1.42	1.424
1.406	1.412
1.406	1.432
1.408	1.406
1.368	1.432
1.386	1.396
1.394	1.424
1.394	1.432
1.442	1.408

3.2.2 Gleich- und gegenphasige Schwingungen

Die Feder wurde wieder auf derselben Höhe eingehangen und die ersten beiden Moden wurden betrachtet. In Tabelle 5 sind die Werte aufgeführt, die gemessen wurden. Die Mittelwerte lauten dabei ((13) und (14)) $T_+ = 1.419 \pm 0.005$s und $T_- = 1.262 \pm 0.008$s.

Tabelle 5: Messdaten für gleich- (T_+) und gegenphasige (T_-) Mode.

T_+/s	T_-/s
1.43	1.236
1.406	1.272
1.43	1.286
1.42	1.212
1.402	1.298
1.382	1.254
1.456	1.262
1.4240	1.27
1.43	1.264
1.406	1.264

Auch hier sollte wieder der Kopplungsgrad der Feder bestimmt werden, mit derselben Formel wie oben ergibt er sich zu $\kappa = 0.117 \pm 0.007$.

3.2.3 Gekoppelte Schwingung

Als letzte Mode bleibt wie vorher auch die gekoppelte Schwingung. 6 zeigt die Messwerte. $T = 1.264 \pm 0.012\mathrm{s}$ und $T_S = 10.513 \pm 0.161\mathrm{s}$ sind die Mittelwerte, wobei wieder (13) und (14) verwendet wurden und T_S die Schwebungsdauer ist. Durch Berechnung mit

Tabelle 6: Messdaten für Schwingungs- (T) und Schwebungsdauer (T_S).

T/s	T_S/s
1.244	10.58
1.264	11.13
1.262	10.03
1.288	11.35
1.256	9.84
1.2	11.05
1.244	10.43
1.344	10.1
1.25	10.29
1.288	10.33

der Formel (17) und der Fehlerformel nach Gauss (15) ergibt sich der Theoriewert $T_{\mathrm{S,\ theoretisch}} = 11.416 \pm 0.754\mathrm{s}$.

3.2.4 Frequenzen

Zuletzt sollen noch die Frequenzen für diese zweite Pendellänge betrachtet werden. ω_+ und ω_- werden wieder mithilfe der Messwerte und Gleichungen (**??**) (15) berechnet. Es ergeben sich $\omega_+ = 4.428 \pm 0.011$Hz und $\omega_- = 4.98 \pm 0.014$Hz. Für die Schwebungsfrequenz ω_S ergibt sich ein Wert von -0.54 ± 0.018Hz. Die Theoriewerte (siehe (26) und (29)) lauten

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{+, theoretisch}} &= 4.563 \pm 0.023\text{Hz} \\
\omega_{\text{-, theoretisch}} &= 4.617 \pm 0.025\text{Hz} \\
\omega_{\text{S, theoretisch}} &= -0.054 \pm 0.034\text{Hz}
\end{aligned}$$

4 Diskussion

Für die erste Pendellänge folgen die Messwerte:

$$\begin{aligned}
T_+ &= 1.806 \pm 0.005\text{s} \\
T_- &= 1.669 \pm 0.005\text{s} \\
T_S &= 21.099 \pm 0.124\text{s} \\
T_{\text{S, theoretisch}} &= 22.141 \pm 1.444\text{s} \\
\omega_+ &= 3.478 \pm 0.006\text{Hz} \\
\omega_- &= 3.763 \pm 0.007\text{Hz} \\
\omega_S &= -0.284 \pm 0.009\text{Hz} \\
\omega_{\text{+, theoretisch}} &= 3.449 \pm 0.016\text{Hz} \\
\omega_{\text{-, theoretisch}} &= 3.476 \pm 0.056\text{Hz} \\
\omega_{\text{S, theoretisch}} &= -0.027 \pm 0.061\text{Hz} \\
\kappa &= 0.077 \pm 0.005
\end{aligned}$$

Und für die zweite Pendellänge:

$$\begin{aligned}
T_+ &= 1.419 \pm 0.005\text{s} \\
T_- &= 1.262 \pm 0.008\text{s} \\
T_S &= 10.513 \pm 0.161\text{s} \\
T_{\text{S, theoretisch}} &= 11.416 \pm 0.754\text{s} \\
\omega_+ &= 4.428 \pm 0.011\text{Hz} \\
\omega_- &= 4.98 \pm 0.014\text{Hz} \\
\omega_S &= -0.54 \pm 0.018\text{Hz} \\
\omega_{\text{+, theoretisch}} &= 4.563 \pm 0.023\text{Hz} \\
\omega_{\text{-, theoretisch}} &= 4.617 \pm 0.025\text{Hz} \\
\omega_{\text{S, theoretisch}} &= -0.054 \pm 0.034\text{Hz} \\
\kappa &= 0.117 \pm 0.007
\end{aligned}$$

Generell lässt sich sagen, dass wie erwartet die Schwingungsdauern der gegenphasigen Schwingung kürzer waren. Allerdings haben war auch zu erwarten, hohe Messunsicherheiten festzustellen und somit Diskrepanzen zu den theoretisch ermittelten Werten. Dies liegt insbesondere am menschlichen Fehler, da es nicht leicht ist, die maximale Auslenkung genau zu treffen; hinzu kommt, dass bei der Anregung in gleich- oder gegenphasige Mode kaum derselbe Winkel getroffen werden konnte und somit die Mode nicht perfekt angeregt werden konnte. Außerdem ist unausweichlich auch immer eine geringe Bewegung zur Wand hin und von der Wand weg hinzu gekommen, wodurch ein Teil der Energie der Pendelbewegung verloren gegangen ist und kein perfekter harmonischer Oszillator vorlag, so wie in der Theorie angenommen. Reibung ist natürlich in der Praxis nicht zu vernachlässigen, die in die theoretische Rechnung auch nicht eingeflossen ist. So kämen noch Einflüsse von Luftreibung hinzu, sowie die Reibung der Drehachse.
Auch schon die Kleinwinkelnäherung $sin(x) \approx x$ für kleine x ist ungenau, da das Pendel nicht immer innerhalb der Toleranz ausgelenkt wurde und sich somit Unterschiede zur Theorie ergeben.

4.1 Schwebungsdauer

Beim Vergleich fällt ein verhältnismässig großer Unterschied von auf, der nicht innerhalb der Fehler liegt. Dafür gibt es verschiedene Gründe. Zum einen ist die Messung der Schwebungsdauer nicht komplett genau möglich, da es kaum möglich ist, die Zeit genau zu stoppen, und da 10 Messungen diese statistische Messunsicherheit nicht gänzlich aufheben können, ist so der Fehler für den gemessenen Wert recht hoch. Zum anderen ist auch die Bestimmung über die theoretische Formel nicht fehlerfrei, da diese die Messwerte für T_+ und T_- verwendet und auch diese mit einer Messunsicherheit behaftet sind. Es ist besonders schwer, bei der Auslenkung in gleich- oder gegenphasiger Mode denselben Winkel zu treffen. Dadurch ist diese Mode nicht einwandfrei angeregt und die Messung daher ungenau.

Hinzu kommt, dass die Pendel nicht genau auf einer Länge eingestellt sind, nur gemäß der Aufgabenstellung so, dass die Unterschiede in den Schwingungsdauern geringer sind als die berechnete Standardabweichung. Durch die Bestimmung der Länge mit einem einfachen Maßband liegt auch eine gewisse systematische Messunsicherheit vor. Gemeinsam ergeben diese Unsicherheiten dann den Unterschied in der Schwebungsdauer.
Bei der zweiten Pendellänge ergeben sich: Da beim Messwert im Falle eines maximalen Fehlers $T_S 10.674\text{s}$ gilt und beim Theoriewert für maximalen Fehler in die andere Richtung $T_{\text{S, theoretisch}} = 10.662\text{s}$, überschneiden sich die Fehlerbereiche der Messwerte geringfügig. Es gelten dennoch dieselben Schwierigkeiten wie oben diskutiert.

4.2 Frequenzen

Auffällig ist die große Diskrepanz zwischend den Werten der Schwebungsfrequenz in Theorie und Messung bei beiden Pendellängen. Die anderen Werte liegen nah beieinaner, wenn auch nicht innerhalb der Unsicherheit. Die oben beschriebenen Fehler und Unsicherheiten fliessen auch in die Frequenzen ein, sowohl bei den theoretischen Werten durch den Kopplungsgrad als auch bei den Messwerten durch die Unsicherheiten in der Schwingungsdauer. Wäre die Kopplungskonstante der Feder bekannt, könnte der Theoriewert genauer bestimmt werden.

4.3 Kopplungsgrade

Für beide Kopplungsgrade ist die Messunsicherheit gering. Dabei ist die Kopplung bei der zweiten Pendellänge größer, was bei kurzem Nachdenken allerdings auch plausibel erscheint. Die Massen befinden sich weiter oben, die Feder allerdings auf derselben Höhe; wenn die Pendel ausgelenkt sind, dehnt sich die Feder also früher aus, was zu einer höheren Kopplung führt. Der Unterschied ist allerdings nicht groß genug, um einen wirklichen Unterschied beim Verhältnis von T_+ und T_- sichtbar zu machen.