

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Philip Jaletzky
philip.jaletzky@udo.edu

Matthias Maile
matthias.maile@udo.edu

Durchführung: 18.05.2021

Abgabe: 25.05.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Gedämpfte Schwingung	3
1.2	Erzwungene Schwingung	5
2	Durchführung	6
2.1	Aufbau	6
2.2	Vorgehensweise	8
3	Auswertung	9
3.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude beim Schwingfall	9
3.2	Bestimmung des Widerstandes für den aperiodischen Grenzfall	11
3.3	Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	11
4	Diskussion	14
	Literatur	14

Zielsetzung

In diesem Versuch werden der effektive Dämpfungswiderstand, der Dämpfungswiderstand, bei dem der aperiodische Grenzfall auftritt sowie die Frequenzabhängigkeit gedämpfter und erzwungener Schwingungen bestimmt. Dazu wird ein elektrischer Serienschwingkreis untersucht.

1 Theorie

1.1 Gedämpfte Schwingung

In Abbildung 1 ist die prinzipielle Schaltung eines gedämpften Serienschwingkreises dargestellt.

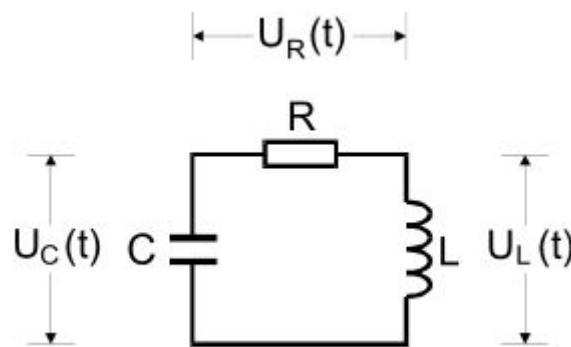


Abbildung 1: Schaltung eines gedämpften Serienschwingkreises. [1]

Durch diese Schaltung wird eine gedämpfte Schwingung der Energie realisiert, die zwischen den beiden Speichern (Spule L und Kapazität C) hin und her pendelt. Der Widerstand R sorgt für die Dämpfung der Schwingung, indem er elektrische Energie irreversibel in Wärmeenergie umwandelt. Für diese Schaltung kann mit dem 2. Kirchhoffschen Gesetz eine Differentialgleichung (DGL) ermittelt werden.

$$U_R + U_C + U_L = 0 \quad (1)$$

Die Spannungsbeziehungen für die 3 Bauelemente sind durch die Beziehungen

$$U_R = RI \quad (2)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

$$U_L = L \cdot \frac{d}{dt}I \quad (4)$$

gegeben. Mit diesen Beziehungen und $I = \frac{d}{dt}Q$ kann die DGL für die Schaltung mit

einmaligem Ableiten aufgestellt werden:

$$L \frac{d}{dt} I + RI + \frac{Q}{C} = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} I + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} I + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (6)$$

Die DGL kann mit einem komplexen e-Funktionsansatz gelöst werden.

$$I(t) = A \cdot e^{j\tilde{\omega}t} \quad (7)$$

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (8)$$

Das heißt $I(t)$ lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$I(t) = A_1 \cdot e^{j\tilde{\omega}_1 t} + A_2 \cdot e^{j\tilde{\omega}_2 t} \quad (9)$$

Es lassen sich nun 3 unterschiedliche Fälle für die Lösung der DGL, in Abhängigkeit des Wurzelterms in Gleichung 8, unterscheiden. Im ersten Fall ist $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ und die Wurzel in Gleichung 8 bleibt reell. Dieser Fall wird als Schwingfall bezeichnet. Der typische Verlauf der Stromstärke für diesen Fall ist in Abbildung 2 dargestellt.

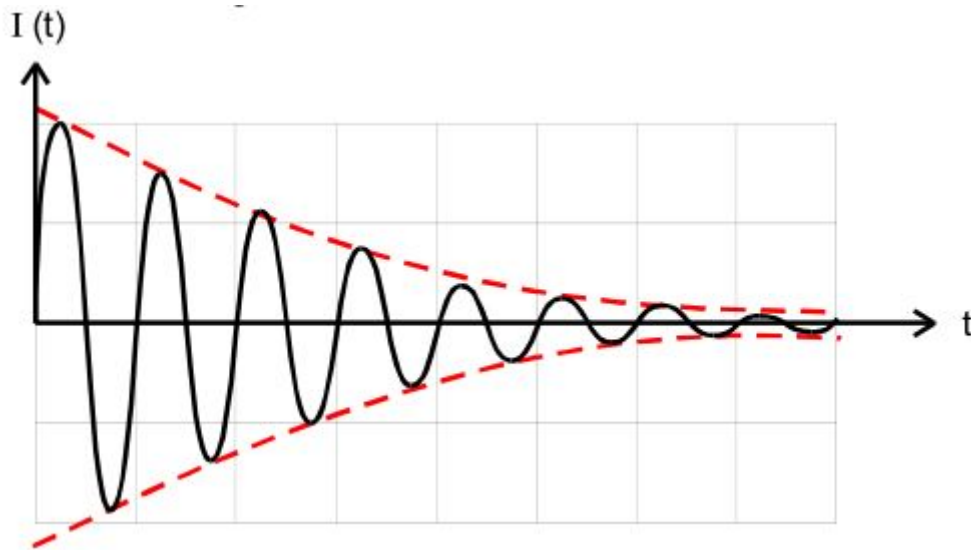


Abbildung 2: Qualitativer Verlauf der Stromstärke einer gedämpften Schwingung abhängig von der Zeit. [1]

Die in Abbildung 2 gestrichelt gezeichnete Einhüllende der Schwingung ist eine e-Funktion der Form

$$\pm U_0 e^{-2\pi\mu t}.$$

Für den zweiten Fall gilt:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \quad (10)$$

In diesem Fall ist $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}$. Den Fall

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} &= \frac{R^2}{4L^2} \\ \Leftrightarrow R &= 2\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall. In diesem Fall bewegt sich $I(t)$ ohne Überspringen am schnellsten gegen 0.

1.2 Erzwungene Schwingung

Um erzwungene Schwingungen mit einem elektrischen Schwingkreis zu realisieren, kann die Schaltung aus Abbildung 1 zu der Schaltung aus Abbildung 3 erweitert werden. Hier sorgt eine Spannungsquelle mit sinusförmiger Wechselspannung für die äußere Anregung.

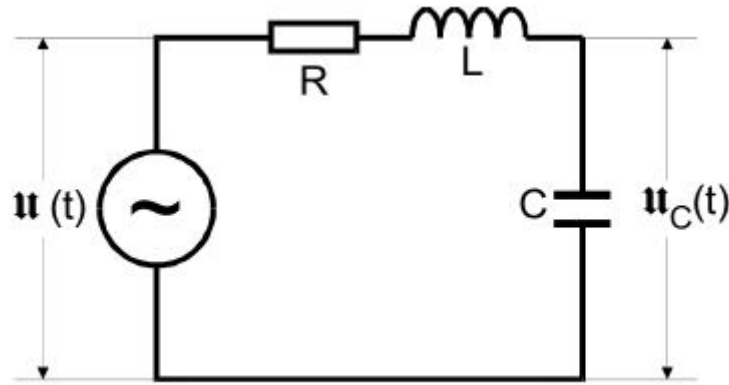


Abbildung 3: Schaltung zur Erzeugung einer erzwungenen Schwingung mit einem elektrischen Schwingkreis. [1]

Die DGL dieser Schaltung lässt sich wieder über die Kirchhoffschen Gesetze aufstellen. Mit den bereits beschriebenen Zusammenhängen für die Spannungen an den einzelnen Bauelementen lässt sich die DGL außerdem für die Kondensatorspannung U_C umschreiben:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{j\omega t}. \quad (11)$$

Auch diese DGL kann wieder mit einem komplexen e-Funktionsansatz gelöst werden. Auf diese Weise erhält man für U_C :

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (12)$$

Wie an Gleichung 12 zu sehen ist, strebt U_C für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow 0$ gegen die Erregerspannung U_0 . Außerdem existiert ein ω_{res} , die sogenannte Resonanzfrequenz, bei der U_C maximal wird. Als Wert für die Resonanzfrequenz kann

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (13)$$

berechnet werden. Für den interessanten Fall von schwacher Dämpfung, also für

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

, nähert sich ω_{res} der Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ der ungedämpften Schwingung an. Für diesen Fall ergibt sich für U_C :

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \quad (14)$$

Wie an Gleichung 14 zu sehen ist, strebt U_C für $R \rightarrow 0$ gegen ∞ . Dieser Fall wird auch als Resonanzkatastrophe bezeichnet. Der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ ist die sogenannte Resonanzüberhöhung oder Güte q des Schwingkreises.

Die Güte q kann in ein Verhältnis zu der Breite der Resonanzkurve gebracht werden. Die Breite wird dabei über die Frequenzen ω_+ und ω_- charakterisiert, bei denen U_C auf einen Anteil von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ von ihrem Ursprungswert abgefallen ist. Mit Gleichung 12 und Gleichung 14 lässt sich dies als

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{U_0}{C \sqrt{\omega_{\pm}^2 R^2 + (\omega_{\pm}^2 L - \frac{1}{C})}} \quad (15)$$

schreiben. Mit der Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (16)$$

ergibt sich dann als Zusammenhang von Güte und Breite:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (17)$$

2 Durchführung

2.1 Aufbau

Um die Zielsetzung des Versuchs zu erreichen, werden die 3 in Abbildung 4, Abbildung 5 und Abbildung 6 zu sehenden Schaltungen aufgebaut.

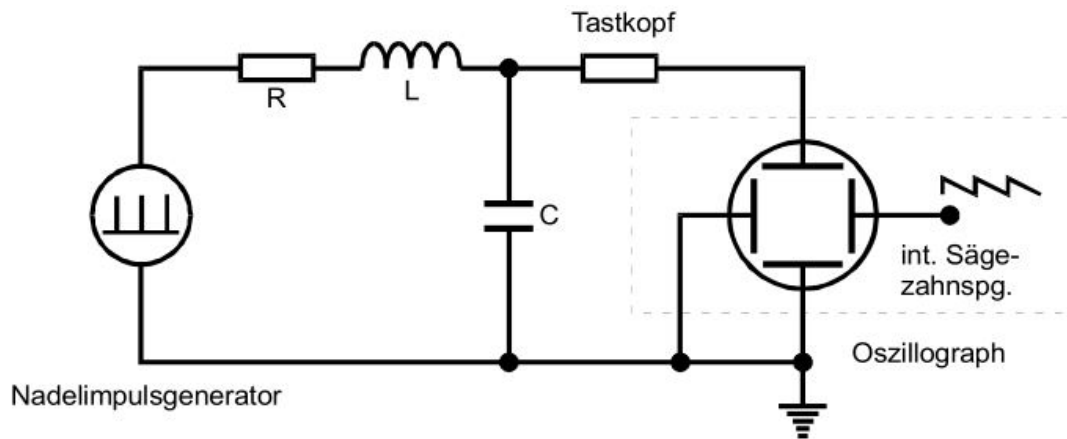


Abbildung 4: Schaltung zur Messung der Zeitabhängigkeit der Amplitude der gedämpften Schwingung. [1]

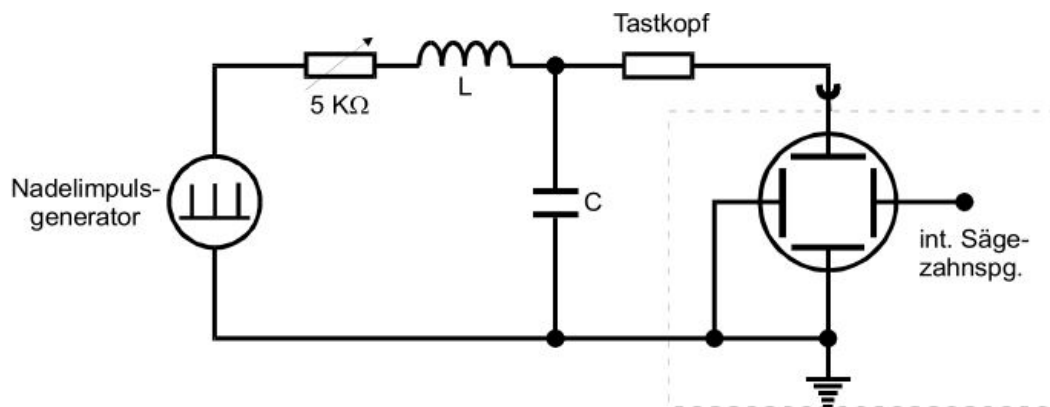


Abbildung 5: Schaltung zur Messung des aperiodischen Grenzwiderstandes R_{ap} . [1]

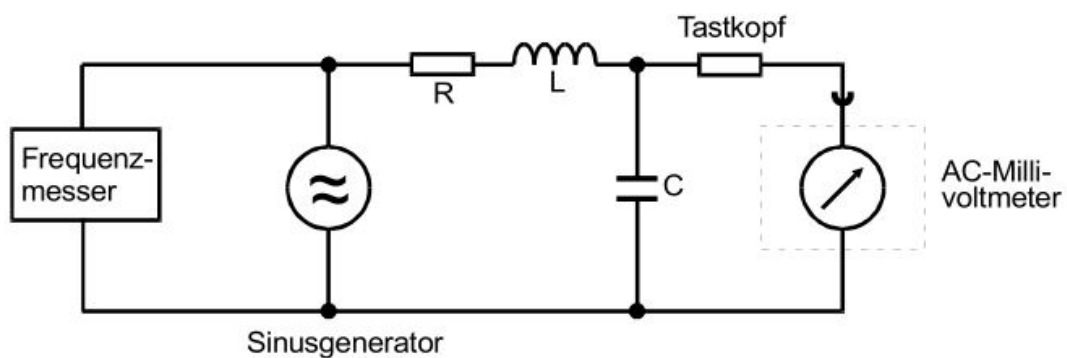


Abbildung 6: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises. [1]

Für die Realisierung der 3 Messschaltungen wird die in Abbildung 7 abgebildete Apparatur genutzt.

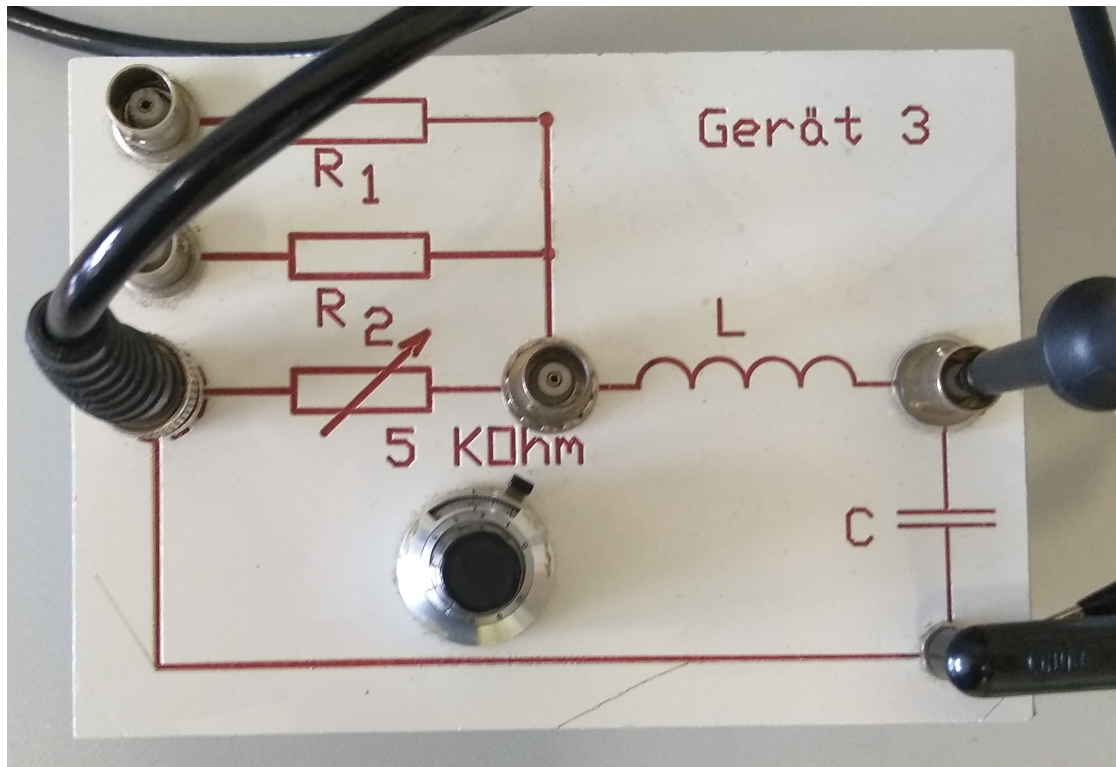


Abbildung 7: Apparatur zur Realisierung der Messschaltungen.

Diese Apparatur besitzt neben den festen Widerständen R_1 und R_2 einen regelbaren Widerstand. Als Werte für die weiteren Bauelemente sind $C = (5 \pm 0,02) \text{ nF}$ und $L = (3,5 \pm 0,01) \text{ mH}$ angegeben.

2.2 Vorgehensweise

Zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Spannungsamplitude wird die Schaltung aus Abbildung 4 genutzt und durch die Apparatur aus Abbildung 7 realisiert. So werden am Oszilloskop möglichst viele Messwerte für die Spannungsamplitude in Abhängigkeit von der Zeit abgelesen.

Für die Bestimmung des Widerstands R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall auftritt, wird mit der Schaltapparatur die Schaltung aus Abbildung 5 aufgebaut. Dabei wird der regelbare Widerstand an der Schaltapparatur genutzt. Nun wird der regelbare Widerstand von seinem Maximalwert langsam runter geregelt bis am Oszilloskop zu sehen ist, dass die Kurve kurz vor dem Überschwingen ist. Der dann erreichte Widerstand wird notiert. Um die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung zu untersuchen, wird die in Abbildung 6 zu sehende Schaltung aufgebaut. An dieser Schaltung wird dann die Frequenz

in einem Bereich von 20 bis 45 kHz variiert, wobei rund um die Resonanzfrequenz möglichst viele Werte aufgenommen werden. Dabei ist es wichtig neben der Frequenz und der entsprechenden Kondensatorspannung auch die Eingangsspannung des Generators in Abhängigkeit von der Frequenz zu notieren.

3 Auswertung

3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude beim Schwingfall

Im ersten Teil wurde im Schwingfall das exponentielle Abklingen der Amplitude untersucht. Dabei wurden im festen Abständen von $13,6\text{ }\mu\text{s}$ die Maxima bzw. Minima der Schwingung betrachtet, um so die momentane Schwingungsamplitude zu erhalten. Dabei wurden folgende Messwerte gemessen:

Tabelle 1: Messdaten zur Zeitabhängigkeit der Amplitude. Das Zeitintervall zwischen zwei Messpunkten folgt aus der Speisefrequenz mit $\Delta t = 13,6\text{ }\mu\text{s}$.

U/mV
372
308
276
232
196
168
144
116
100
84
76
64
52
48
40
36
24
20
24
16

Da das Abklingen exponentiell stattfindet, liegt eine Funktion der Form

$$U(t) = U_0 e^{-kt} \quad (18)$$

für die Ausgleichsrechnung nahe. Mit der `curve_fit`-Funktion aus `scipy` konnten die

Parameter

$$U_0 = (436,2 \pm 3,5) \text{ mV} \quad k = (1,183 \pm 0,013) \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \quad (19)$$

bestimmt werden. Die Messdaten sowie die Ausgleichskurve sind in Abbildung 8 grafisch dargestellt.

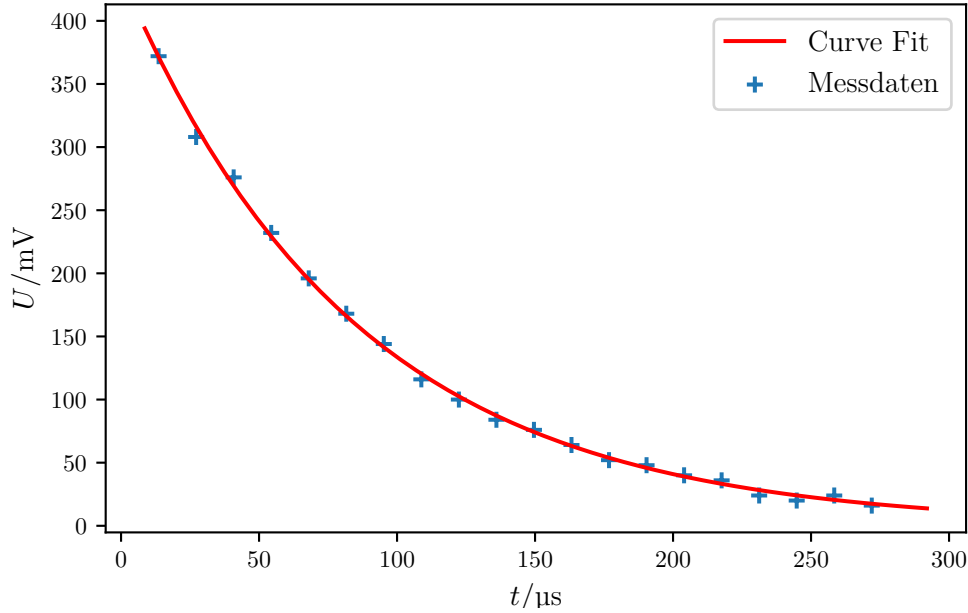


Abbildung 8: Messdaten und Curve Fit für die Zeitabhängigkeit der Amplitude. Die Messwerte stammen alternierend aus Wellenberg und -Tal, es wurden jedoch nur die Beträge betrachtet.

Damit lässt sich die Zerfallszeit T_{ex} bestimmen, welche definiert ist durch

$$U(T_{\text{ex}}) = \frac{U(0)}{e}. \quad (20)$$

Diese lässt sich aus den Fitparametern bestimmen:

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{k} = (8,45 \pm 0,09) 10^{-5} \text{ s} \quad (21)$$

Daraus lässt sich bei bekannter Induktivität der Dämpfungswiderstand R bestimmen. Erstere wurde durch $L = (3,5 \pm 0,01) \text{ mH}$ gegeben, damit folgt der Widerstand

$$R = \frac{2L}{T_{\text{ex}}} = (82,8 \pm 0,9) \Omega. \quad (22)$$

Für die Unsicherheiten wurde mit linearer Fehlerfortpflanzung gearbeitet.

3.2 Bestimmung des Widerstandes für den aperiodischen Grenzfall

Für den aperiodischen Grenzfall folgt mit den gegebenen Werten

$$L = (3,5 \pm 0,01) \text{ mH} \quad C = (5 \pm 0,02) \text{ nF} \quad (23)$$

ein Theoriewert von

$$R_{\text{ap}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = (1673 \pm 4) \Omega. \quad (24)$$

Experimentell wurde ein Wert von

$$R_{\text{ap}} = 1265 \Omega \quad (25)$$

bestimmt. Dadraus folgt eine relative Abweichung von 24,4%.

3.3 Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Im letzten Teil wurde die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht. Da das Amplitudenverhältniss U_C/U_0 von Interesse ist, wurde auch U_0 gemessen und dann $A = U_C/U_0$ berechnet. Die Messung ergab die Werte in Tabelle 2. Gemäß dem in Abschnitt 1 beschriebenen Verhalten wurde die Funktion

$$A(\omega) = \frac{c}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + b\omega^2}} \quad (26)$$

an die Messdaten gefittet. Die nicht lineare Ausgleichsrechnung ergab die Parameter

$$a = 1,65 \cdot 10^{-11} \text{ s}^2, \quad (27)$$

$$b = 3,05 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2, \quad (28)$$

$$c = 0,91. \quad (29)$$

Die Messdaten mit gefitteter Funktion sind in Abbildung 9 dargestellt. Für die Bestimmung der relativen Breite wurden die Stellen, an denen die Fitfunktion um $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist, numerisch bestimmt. Das liefert die Werte

$$\omega_- = 227,87 \text{ kHz} \quad \omega_+ = 237,3 \text{ kHz}. \quad (30)$$

Diese können auch mit der Formel $\omega = 2\pi f$ aus Abbildung 9 entnommen werden. Die Differenz der beiden Werte ist die Breite

$$b = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\pi} = \frac{9,43 \text{ kHz}}{2\pi} = 1,5 \text{ kHz}. \quad (31)$$

Für die Breite kann mit den gegebenen Werten für Widerstand, Induktivität und Kapazität auch ein theoretischer Wert von

$$b_{\text{theo}} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L} = \frac{1}{2\pi} (77,6 \pm 0,23) \text{ kHz} = (12,35 \pm 0,04) \text{ kHz}. \quad (32)$$

Dabei wurden die Werte

$$L = (3,5 \pm 0,01) \text{ mH} \quad C = (5 \pm 0,02) \text{ nF} \quad R = (271,6 \pm 0,2) \Omega \quad (33)$$

und lineare Fehlerfortpflanzung verwendet.

Tabelle 2: Messdaten zur Frequenzabhängigkeit.

f/kHz	U_0/mV	U_C/mV	A
20	48	66	1,375
25	46	84	1,826
30	46	134	2,913
31	46	152	3,304
32	44	176	4,000
32	42	192	4,571
33	42	212	5,048
33	42	236	5,619
34	42	264	6,286
34	42	292	6,952
35	38	336	8,842
35	38	384	10,105
36	30	420	14,000
36	22	464	21,091
37	20	480	24,000
37	22	456	20,727
38	28	408	14,571
39	36	312	8,667
42	42	168	4,000
45	46	96	2,087

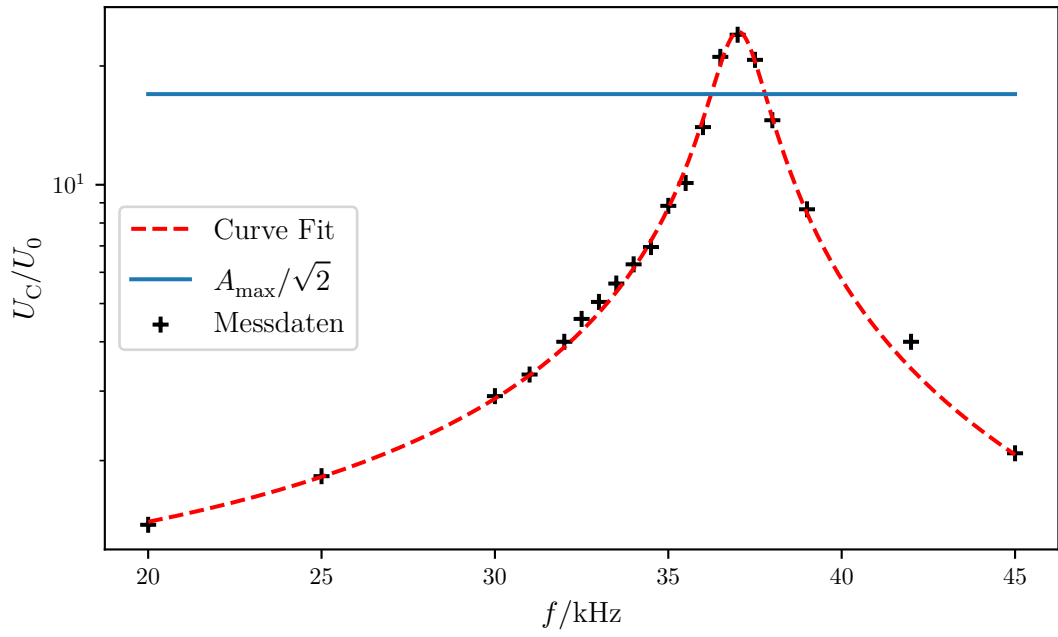


Abbildung 9: Messdaten und Curve Fit für die Frequenzabhängigkeit der Amplitude mit logarithmischer y-Skalierung. Für die Bestimmung der relativen Breite wurde zusätzlich eine Linie gezogen, mit der ω_{\pm} abgelesen werden kann.

4 Diskussion

Im ersten Teil wurde ein Dämpfungswiderstand von $R = (82,8 \pm 0,9)\Omega$ gemessen. Es gab keinen gegebenen Wert, mit dem man diesen vergleichen kann, aufgrund der geringen Unsicherheit ist aber davon auszugehen, dass dieser akkurat ist. Eine Fehlerquelle ist allerdings der Widerstand der Schaltung selbst (bzw. von den Drähten), welche den Widerstand leicht nach oben verschiebt.

Der Widerstand für den aperiodischen Grenzfalls wurde im zweiten Teil mit $R_{\text{ap}} = 1265\Omega$ bestimmt. Er wies zum Theoriewert $R_{\text{ap}}^{\text{theo}} = 1673\Omega$ eine relative Abweichung von 24,4% auf. Der Fehler ist ziemlich niedrig, dafür dass nur ein Durchlauf gemacht wurde. Die Präzision könnte aber weiter erhöht werden, indem mehrere Messungen betrieben werden. Eine bessere Strategie wäre es, sich dem aperiodischen Grenzfall sowohl von oben als auch von unten zu nähern, um so eine Verschiebung in eine Richtung zu verhindern.

Im letzten Teil wurde die Breite der Filterkurve mit $b = 1,5\text{ kHz}$ bestimmt. Der theoretisch bestimmte Wert liegt mit $b_{\text{theo}} = 12,35\text{ kHz}$ um 723% darüber, der relative Fehler liegt bei 87,8%. Der Fehler ist sehr groß, wobei die Ursachen dafür verschieden sein können. Ein Problem kann sein, dass das tatsächliche Maximum vom Amplitudenverhältnis nicht gemessen wurde, wodurch der $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -Wert viel zu niedrig angesetzt sein kann. In der Region beim Maximum wurden auch ziemlich wenig Messwerte gemessen, was die gesamte Rechnung sehr fehleranfällig macht.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung: Versuch Nr. 354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen.*