

## **Beugung am Spalt**

Ann-Sophie Schubert  
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke  
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 14.06.2016

Abgabe: 21.06.2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Einführung . . . . .	4
2.2	Einzelspalt . . . . .	5
2.3	Doppelspalt . . . . .	6
2.4	Fouriertransformierte der Blendenfunktion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Einzelspalt . . . . .	8
4.2	Doppelspalt . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
5.1	Einzelspalt . . . . .	13
5.2	Doppelspalt . . . . .	14
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Ziel

Das Ziel des Versuchs ist die Untersuchung von Beugungseffekten bei sichtbarem Licht. In diesem Rahmen soll anhand von Beugungsmustern auf die Spaltgeometrie zurückgeschlossen werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Einführung

Da Licht Welleneigenschaften besitzt, kann man daran Beugungsphänomene beobachten. Das bedeutet, dass es auch in den *Schattenraum* hinter Hindernissen eindringen kann. Dies soll hier am einfachen Beispiel eines Spaltes näher untersucht werden. Dazu wird das Muster beobachtet, das entsteht, wenn das Licht einer Lichtquelle durch einen Spalt auf einen Schirm trifft und dort interferiert. Für die mathematische Betrachtung sind zwei herangehensweisen möglich, die *Fraunhofer*- und die *Fresnel-Näherung*. Bei der Fresnelschen Beugung divergiert das von der Lichtquelle ausgehende Strahlenbündel und fällt dann durch den Spalt auf den Schirm (siehe Abb. 1). Da die Fraunhofersche Beugung, bei der ein paralleler Lichtstrahl senkrecht auf das Beugungshindernis auftrifft und danach auf dem Schirm dargestellt wird, eine einfachere mathematische Struktur besitzt und der verwendete Laser nahezu paralleles Licht erzeugt, wird sie hier benutzt.

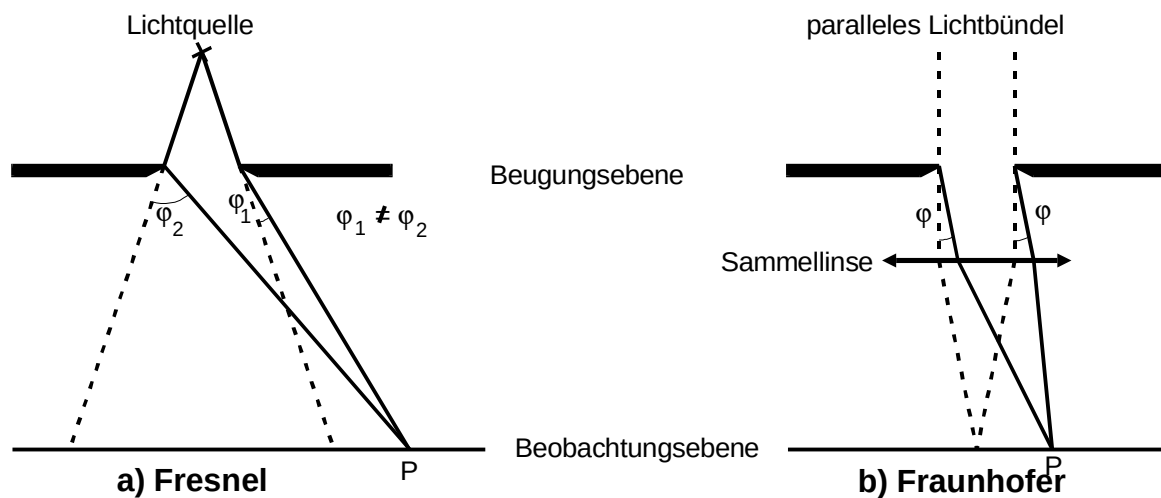


Abbildung 1: Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung an einem Spalt. [1]

Die Beugung lässt sich anhand des *Huygensschen Prinzips* verbildlichen. Jeder Punkt der Lichtwelle, die durch den Spalt tritt, lässt sich als Ursprung einer elementaren Kugelwelle auffassen. Ohne Hindernis überlagern sich diese zu einer Ebenen Wellenfront, was durch den Spalt jedoch verhindert wird. Daher wird klar, dass auch Anteile in den Schattenraum eindringen.

## 2.2 Einzelspalt

Um eine Gleichung für Wellenamplitude hinter dem Spalt zu bekommen ist es von zentraler Bedeutung, den Phasenunterschied

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \phi}{\lambda} \quad (1)$$

zweier Teilstrahlen zu betrachten (siehe Abb. 2). Wird über alle infinitesimalen Strahlenbündel integriert, ergibt sich final ein Zusammenhang

$$B(z, t, \phi) = A_0 \exp \left( i \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) \cdot \exp \left( \frac{\pi i b \sin \phi}{\lambda} \right) \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \phi} \sin \left( \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right) \quad (2)$$

für die Amplitude der Lichtwelle. Da wir lediglich an der Intensitätsverteilung interessiert sind, können die Phasenfaktoren vernachlässigt werden, womit sich über

$$\eta := \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \quad (3)$$

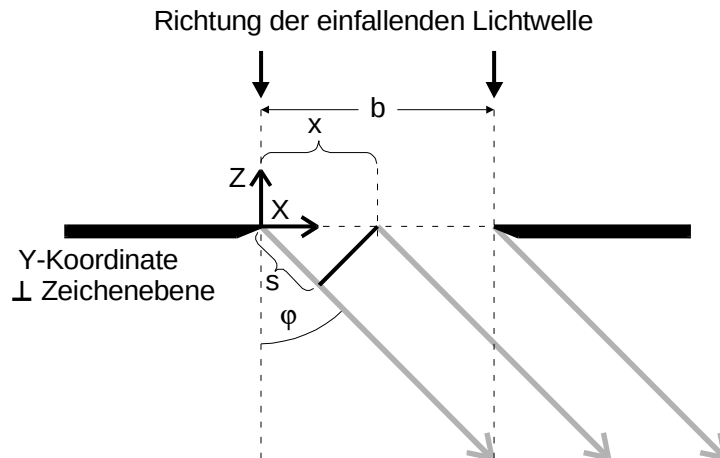
schließlich die Funktion

$$B(\phi) = A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta} \quad (4)$$

ergibt, die in Abb. 3 grafisch aufgetragen ist. Da die Amplitude jedoch im Gegensatz zur Intensität nicht direkt gemessen werden kann, wird die Intensitätsverteilung

$$I(\phi) \propto B(\phi)^2 = A_0^2 b^2 \left( \frac{\lambda}{\pi b \sin \phi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right) \quad (5)$$

experimentell genutzt.



**Abbildung 2:** Darstellung der geometrischen Beziehungen am Spalt. [1]

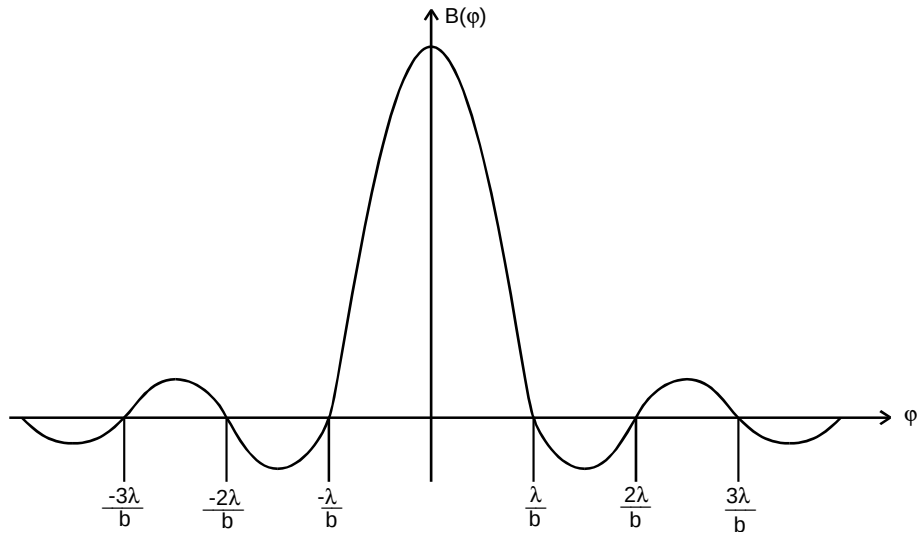


Abbildung 3: Plot der Amplitudenfunktion am Einzelspalt. [1]

## 2.3 Doppelspalt

Um eine Intensitätsverteilung für das Beugungsbild hinter einem Doppelspalt zu erhalten werden zwei Einzelspalt überlagert (siehe auch Abb. 4). Es folgt

$$I(\phi) \propto B(\phi)^2 = 4 \cos^2 \left( \frac{\pi s \sin \phi}{\lambda} \right) \cdot \left( \frac{\lambda}{\pi b \sin \phi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right) \quad (6)$$

analog zum Einzelspalt für die Intensität.

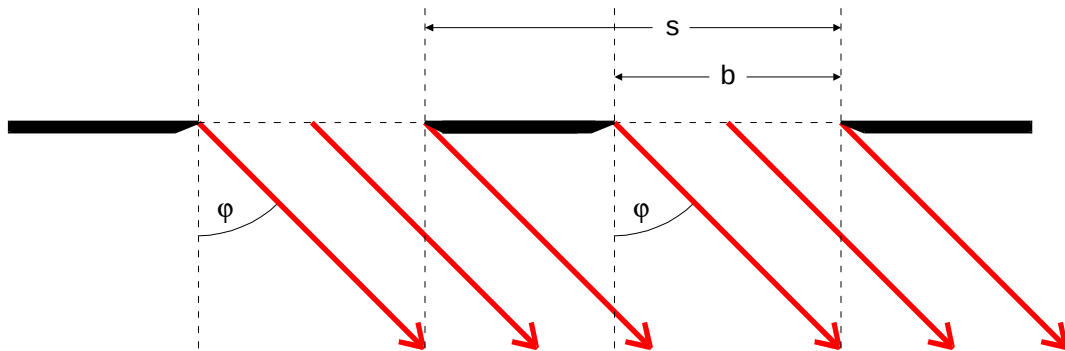


Abbildung 4: Darstellung der geometrischen Beziehungen am Doppelspalt. [1]

## 2.4 Fouriertransformierte der Blendenfunktion

Die Theorie zeigt, dass in der Fraunhofernäherung die Amplitudenverteilung auch durch eine Fouriertransformation der Blendenfunktion gegeben ist. Für den oben beschriebenen

Fall eines Spaltes ergibt sich die Aperturfunktion

$$f(x) = \begin{cases} A_0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (7)$$

die Fourier-transformiert in die Gestalt

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = A_0 \int_0^b e^{ix\xi} dx = \frac{A_0}{i\xi} (-1 + e^{i\xi b}) = \frac{2A_0}{\xi} \exp\left(\frac{i\xi b}{2}\right) \sin \frac{\xi b}{2} \quad (8)$$

übergeht. Setzt man nun

$$\xi := \frac{2\pi \sin \phi}{\lambda} \quad (9)$$

ein, ergibt sich die bereits bekannte Amplitudenfunktion.

### 3 Aufbau und Durchführung

Die Beugungsbilder drei verschiedener Einzelspalte sowie eines Doppelspaltes sollen aufgenommen werden, die von einem Helium-Neon-Laser mit einer Wellenlänge von 633 nm bestrahlt werden. Dazu wird der Strom einer Fotodiode in Abhängigkeit vom Abstand des Hauptmaximums gemessen. Der Aufbau findet sich in Abb. 5. Da auch ohne

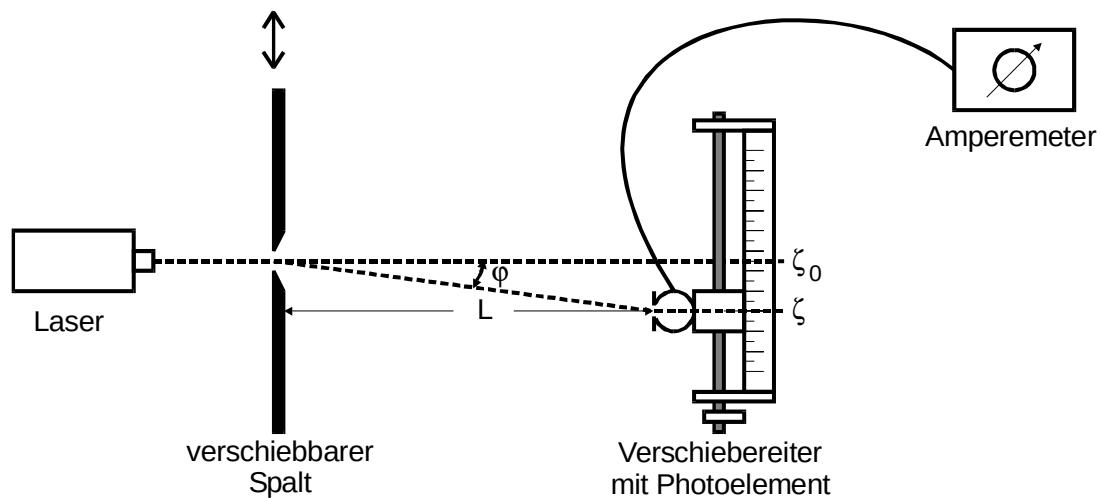


Abbildung 5: Skizze der Messapparatur. [1]

Lichteinfall eine gewisse Stromstärke gemessen werden kann, muss dieser Dunkelstrom bestimmt und die Messungen damit korrigiert werden. Die Spalte werden zusätzlich zu den Herstellerangaben mit einem Lichtmikroskop vermessen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Einzelspalt

Die zu Beginn bestimmten Werte für die Spaltbreite sowie die angegebenen Werte des Herstellers sind in 1 angegeben.

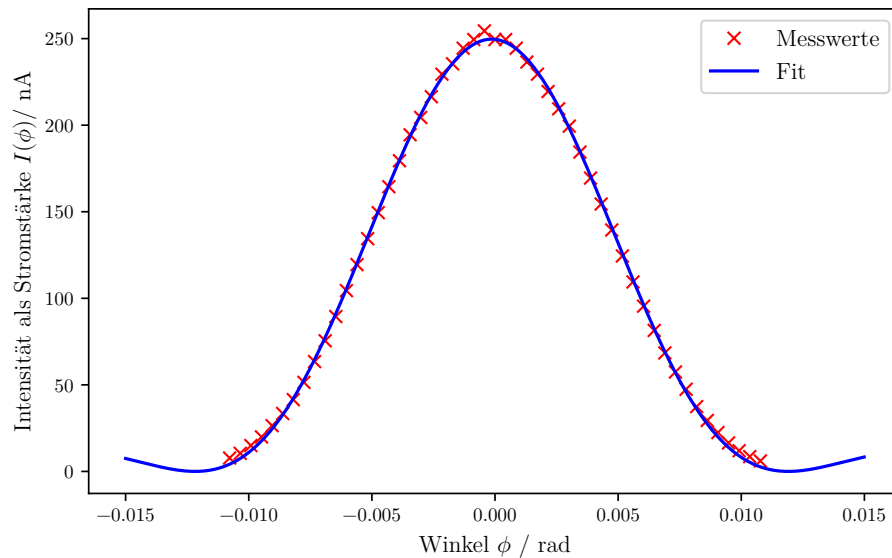
**Tabelle 1:** Werte für die mit dem Mikroskop gemessene Spaltbreite der drei Einzelspalte und die Angaben des Herstellers.

-	$b_1/\text{mm}$	$b_2/\text{mm}$	$b_3/\text{mm}$
Hersteller	0.075	0.150	0.400
Mikroskop	0.100	0.156	0.385

Eine weitere Möglichkeit die Spaltbreite zu ermitteln, besteht darin, den Winkel  $\phi$  gegen die Stromstärke  $I$  aufzutragen. Von den Stromstärken in Tabelle 2 wird jeweils der zu Anfang gemessene Dunkelstrom  $I_D = 0.55\text{nA}$  abgezogen. Um aus  $d$  in Tabelle 2 den Winkel  $\phi$  zu berechnen, wird folgende Formel verwendet:

$$\phi \approx \frac{d - d_0}{L}. \quad (10)$$

Dabei ist  $d_0 = 25\text{mm}$  die Stelle der Mitte des Hauptmaximums und  $L$  der Abstand zwischen Spalt und Detektor. Mit Hilfe einer Ausgleichsrechnung wird der Parameter  $b$  für die Spaltbreite bestimmt.

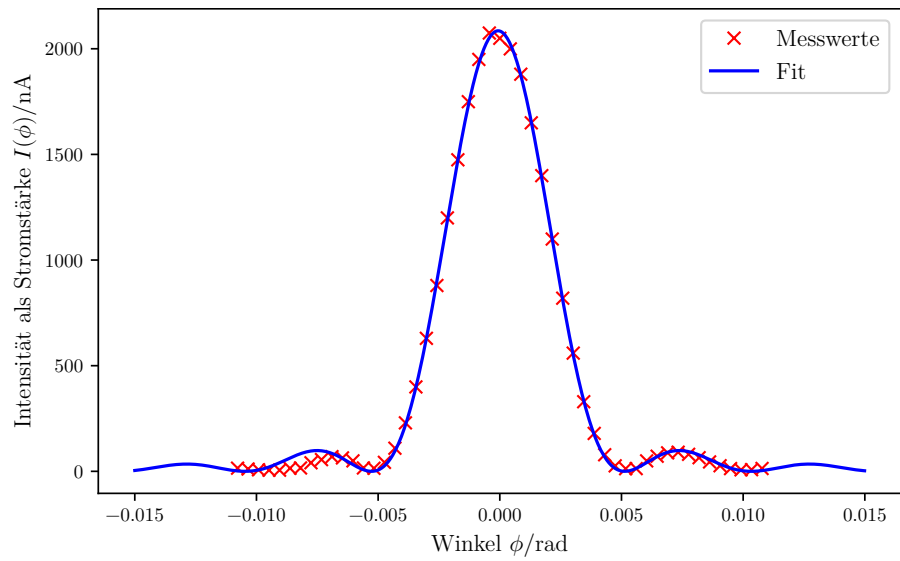


**Abbildung 6:** Intensität als Stromstärke  $I$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  für den kleinsten Spalt.

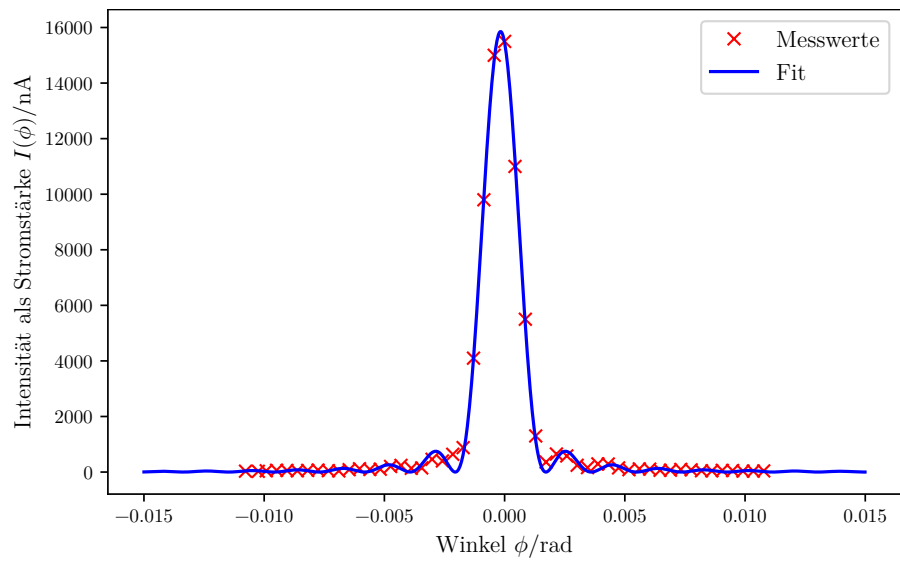


**Tabelle 2:** Messwerte für die Stromstärke  $I$  in Abhängigkeit von der Verschiebung  $d$  für die drei Einzelspalte.

$d/\text{mm}$	$I_3/\mu\text{A}$	$I_2/\text{nA}$	$I_1/\text{nA}$
25,0	15,500	2050,0	250,0
24,5	11,000	2000,0	250,0
24,0	5,500	1880,0	245,0
23,5	1,300	1650,0	237,0
23,0	0,360	1400,0	230,0
22,5	0,650	1100,0	220,0
22,0	0,580	820,0	210,0
21,5	0,245	560,0	200,0
21,0	0,160	330,0	185,0
20,5	0,295	180,0	170,0
20,0	0,290	79,0	155,0
19,5	0,150	26,5	140,0
19,0	0,086	13,0	125,0
18,5	0,115	25,5	110,0
18,0	0,105	50,0	96,0
17,5	0,064	72,0	82,0
17,0	0,068	88,0	69,0
16,5	0,094	91,0	58,0
16,0	0,080	81,0	48,0
15,5	0,046	65,0	38,0
15,0	0,044	45,0	30,0
14,5	0,061	27,0	23,0
14,0	0,054	13,5	17,0
13,5	0,035	7,6	12,5
13,0	0,035	8,4	9,1
12,5	0,042	14,0	6,6
25,5	15,000	2075,0	255,0
26,0	9,800	1950,0	250,0
26,5	4,100	1750,0	245,0
27,0	0,880	1475,0	236,0
27,5	0,400	1200,0	230,0
28,0	0,640	880,0	217,0
28,5	0,460	630,0	205,0
29,0	0,150	400,0	195,0
29,5	0,135	230,0	180,0
30,0	0,240	110,0	165,0
30,5	0,203	43,0	150,0
31,0	0,103	15,0	135,0
31,5	0,094	16,5	120,0
32,0	0,120	50,0	105,0
32,5	0,086	64,0	90,0
33,0	0,042	70,0	76,0
33,5	0,051	56,0	64,0
34,0	0,072	41,0	52,0
34,5	0,060	26,5	42,0
35,0	0,046	15,0	34,0
35,5	0,058	6,0	27,0
36,0	0,065	6,0	20,5
36,5	0,046	7,7	15,5
37,0	0,027	11,5	11,0
37,5	0,032	15,5	8,3



**Abbildung 7:** Intensität als Stromstärke  $I$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  für den zweitgrößten Spalt.



**Abbildung 8:** Intensität als Stromstärke  $I$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  für den größten Spalt.

Für die Einzelspalte wird jeweils Gleichung 5 als Fitfunktion verwendet. In Abbildung 6 bis 8 sind Intensitätsverteilungen der Einzelspalte graphisch dargestellt. Für die Spaltbreiten  $b$  und  $A$  ergeben sich mit Hilfe der Ausgleichsrechnung die in Tabelle 3 aufgeführten Werte.

**Tabelle 3:** Mittles Ausgleichsrechnung ermittelte Werte für  $A$  und Spaltbreite  $b$  für die Einzelspalte 1-3.

Spalt	Spaltbreite $b/\text{mm}$	$A/10^3$
1	$0.053 \pm 0.001$	$180.290 \pm 0.775$
2	$0.122 \pm 0.005$	$97.496 \pm 0.737$
3	$0.336 \pm 0.002$	$35.307 \pm 0.417$

Um beurteilen zu können, welche der Methoden zur Bestimmung der Spaltbreite genauer ist, werden die ermittelten Werte miteinander verglichen. Dazu werden die prozentualen Abweichungen von den Herstellerangaben berechnet, welche in Tabelle 4 zu finden sind.

**Tabelle 4:** Prozentuale Abweichungen der ermittelten Spaltbreiten.

-	$b_1/\text{mm}$	Abweichung /%	$b_2/\text{mm}$	Abweichung /%	$b_3/\text{mm}$	Abweichung /%
Hersteller	0.075	-	0.150	-	0.400	-
Mikroskop	0.100	33.3	0.156	4.0	0.385	3.9
Beugung	$0.053 \pm 0.001$	$41.5 \pm 2.7$	$0.122 \pm 0.005$	$23.0 \pm 5.0$	$0.336 \pm 0.002$	$19.0 \pm 0.7$

## 4.2 Doppelspalt

Für Spaltbreite  $b$  und den Abstand der Spalte  $s$  bei der Messung mit dem Mikroskop ergeben sich die Werte in Tabelle 5.

**Tabelle 5:** Werte für die mit dem Mikroskop gemessene Spaltbreite  $b$  und die Abstände der Spalte  $s$  und Herstellerangaben.

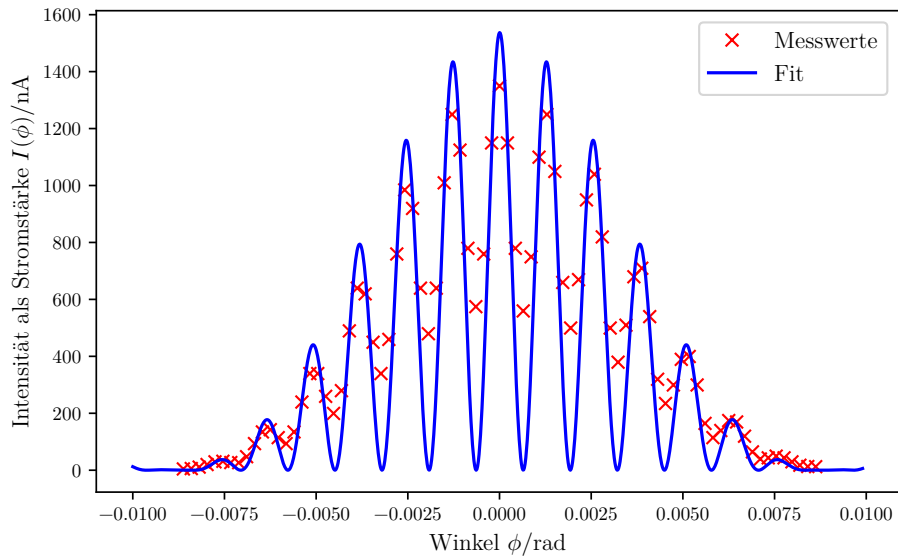
-	$b/\text{mm}$	$s/\text{mm}$
Hersteller	0.100	0.400
Mikroskop	0.125	0.455

Die Messwerte zur Intensität in Abhängigkeit der Verschiebung  $d$  für den Doppelspalt befinden sich in Tabelle 6.

Auch hier muss von der gemessenen Stromstärke aus Tabelle 2 der Dunkelstrom  $I_D$  subtrahiert werden. Die Winkel lassen sich analog zum Einzelspalt nach Gleichung 10 berechnen. Auch hier wird die Stromstärke  $I$  gegen den Winkel  $\phi$  aufgetragen (siehe Abbildung 9). Mittels einer Ausgleichsrechnung werden die Spaltbreite  $b$  sowie der Abstand

**Tabelle 6:** Messwerte zur Intensität in Abhängigkeit von der Verschiebung beim Doppelspalt.

$d$ / mm	$I$ /nA	$d$ / mm	$I$ /nA
25,00	1350,0	25,25	1150,0
24,75	1150,0	25,50	760,0
24,50	780,0	25,75	575,0
24,25	560,0	26,00	780,0
24,00	750,0	26,25	1125,0
23,75	1100,0	26,50	1250,0
23,50	1250,0	26,75	1010,0
23,25	1050,0	27,00	640,0
23,00	660,0	27,25	480,0
22,75	500,0	27,50	640,0
22,50	670,0	27,75	920,0
22,25	950,0	28,00	985,0
22,00	1040,0	28,25	760,0
21,75	820,0	28,50	460,0
21,50	500,0	28,75	340,0
21,25	380,0	29,00	450,0
21,00	510,0	29,25	620,0
20,75	680,0	29,50	640,0
20,50	710,0	29,75	490,0
20,25	540,0	30,00	280,0
20,00	320,0	30,25	200,0
19,75	235,0	30,50	260,0
19,50	300,0	30,75	340,0
19,25	390,0	31,00	340,0
19,00	400,0	31,25	240,0
18,75	300,0	31,50	135,0
18,50	165,0	31,75	94,0
18,25	115,0	32,00	115,0
18,00	140,0	32,25	143,0
17,75	175,0	32,50	135,0
17,50	170,0	32,75	94,0
17,25	120,0	33,00	48,0
17,00	65,0	33,25	27,0
16,75	40,0	33,50	27,5
16,50	44,0	33,75	32,0
16,25	50,0	34,00	30,0
16,00	44,0	34,25	20,5
15,75	30,0	34,50	11,5
15,50	18,0	34,75	6,4
15,25	13,5	35,00	5,0
15,00	13,0		



**Abbildung 9:** Intensität als Stromstärke  $I$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  für den Doppelspalt.

der Spalte  $s$  bestimmt. Als Fitfunktion wird Gleichung 6 verwendet. Für die Parameter  $A$ ,  $b$  und  $s$  folgt:

$$A = (1.540 \pm 0.070) \cdot 10^{-6}$$

$$b = (0.071 \pm 0.004) \text{ mm}$$

$$s = (0.493 \pm 0.003) \text{ mm}$$

Zum Vergleich wird erneut die prozentuale Abweichung berechnet, welche in Tabelle 7 dargestellt ist.

**Tabelle 7:** Abweichungen der ermittelten Spaltbreite  $b$  und dem Abstand  $s$  mittels Mikroskop und Beugung von den Herstellerangaben.

-	$b/\text{mm}$	Abweichung/%	$s/\text{mm}$	Abweichung/%
Hersteller	0.1	-	0.4	-
Mikroskop	0.125	25.00	0.455	13.75
Beugung	$0.071 \pm 0.004$	$43 \pm 8$	$0.493 \pm 0.003$	$23.2 \pm 0.7$

## 5 Diskussion

### 5.1 Einzelspalt

Sowohl die Werte für die Spaltbreite  $b$ , die mit Hilfe des Mikroskops bestimmt wurden als auch die, die bei der Beugung aufgenommen und durch eine Ausgleichsrechnung

bestimmt werden, sind alle ähnlich zu den Angaben des Herstellers. Alle Messreihen können durch den Zusammenhang aus Gleichung 5 beschrieben werden. Die größte Abweichung liegt beim kleinsten Spalt mit  $b_1 = 0.075\text{mm}$  vor. Die Werte der Abweichungen der beiden Methoden sind meist ähnlich. Insgesamt zeigen die mit dem Mikroskop bestimmten Spaltbreiten geringere Abweichungen.

## 5.2 Doppelspalt

Wie Abbildung 9 zeigt, gilt Gleichung 6 für die Intensitätsverteilung eines Doppelspalts. Im Vergleich mit der eines Einzelspaltes (siehe Abbildung 6 - 8) besitzt diese näher beieinander liegende Nebenmaxima mit höherer Intensität. Der Abstand  $s$  zwischen den Spalten kann sowohl mit dem Mikroskop als auch über die Beugung genauer bestimmt werden als die Spaltbreite  $b$ . Wie zuvor beim Einzelspalt liefert das Ausmessen mit dem Mikroskop genauere Ergebnisse.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 406: Beugung am Spalt*.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.