

V406

## **Beugung am Spalt**

Christopher Breitfeld

christopher.breitfeld@tu-dortmund.de

Henry Krämerkämper

henry.kraemerkaemper@tu-dortmund.de

Durchführung: 25.05.2021

Abgabe: 21.6.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	3
2.2	Beugung am Einzelspalt . . . . .	3
2.3	Beugung am Doppelspalt . . . . .	6
2.4	Berechnung des Intensitätsverteilung durch Fouriertransformation . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1	Der Einfachspalt . . . . .	9
4.2	Der Doppelspalt . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Einleitung

In dem folgenden Versuch wird die Beugung von Licht an einem Einzelspalt und an einem Doppelspalt untersucht. Mit den gemessenem Beugungsbild werden dann die Spaltbreiten  $b$  und die bei dem Doppelspalt der Spaltenabstand  $s$  berechnet. Zudem folgt ein Vergleich der beiden Beugungsbilder.

## 2 Theorie

### 2.1 Grundlagen

Beugung tritt immer dann auf, wenn Licht auf ein Hindernis bzw. ein Öffnung trifft, welche von den Abmessungen die Größenordnung der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts besitzt. Die Beugung kann dabei nicht mehr wie Reflexion oder Berechnung über die Strahlenoptik beschrieben werden, sondern wird als Wellenvorgang beschrieben.

Elementar für die Beschreibung des Lichts ist dabei das Huygenssche Prinzip. Dieses besagt, dass jeder Punkt der Wellenfront wieder als Elementarwelle aufgefasst werden kann. Durch die Superposition dieser Elementarwellen ergibt sich dann die neue Wellenfront. Aus diesem Prinzip werden in den nachfolgenden Kapiteln die Beugungsbilder der Fernfeldbeugung (Fraunhoferbeugung) und der Nahfeldbeugung (Fresnelbeugung) hergeleitet.

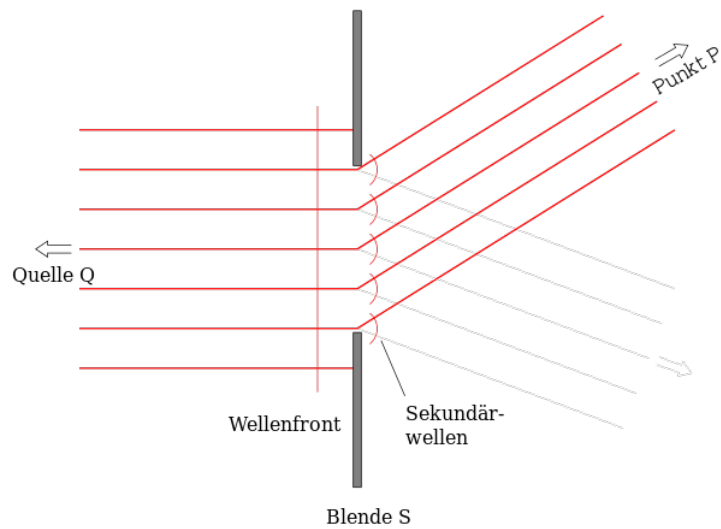
### 2.2 Beugung am Einzelspalt

Trifft eine Wellenfront auf ein Hindernis mit einem Spalt, so kann nach dem Huygensschen Prinzip jeder Punkt der Spaltöffnung als Quelle für eine Elementarwelle verstanden werden. Diese Wellen breiten sich dann kugelförmig aus und interferieren miteinander. Wichtig für die Interferenz und damit das Beugungsbild ist, dass das Licht kohärent ist, also dass zwischen zwei Wellenzügen eine feste Phasenbeziehung besteht. Ansonsten bildet sich kein stabiles Interferenzmuster.

Es wird bei der Beugung zwischen zwei Näherungen unterschieden, die nun weiter erläutert werden.

#### Fraunhoferbeugung

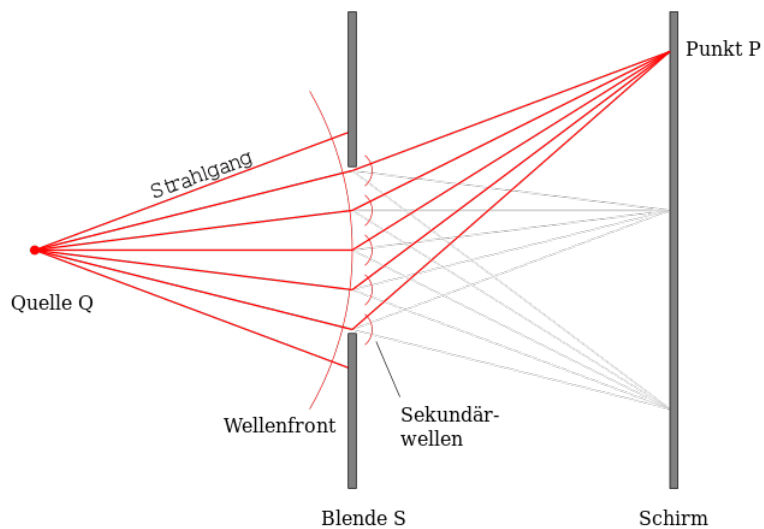
Die Fraunhoferbeugung nähert die Entfernung der Lichtquelle von dem Spalt als unendlich, weswegen die Lichtstrahlen alle parallel nebeneinander verlaufen, also eine ebene Wellenfront bilden. Somit werden alle Strahlen unter dem selben Winkel  $\phi$  gebeugt. In Abbildung 1 ist der Verlauf der Lichtstrahlen skizziert.



**Abbildung 1:** Fraunhoferbeugung am Einzelspalt. [2]

### Fresnelbeugung

Bei der Fresnelbeugung ist der Abstand der Lichtquelle zu dem Spalt endlich. Die Wellenfront ist also nicht eben, sondern kugelförmig. Die Lichtstrahlen sind demnach nicht parallel und werden unter unterschiedlichen Winkeln gebeugt. Dadurch ist die Fresnelbeugung mathematisch deutlich anspruchsvoller als die Fraunhoferbeugung. In Abbildung 2 ist die Fresnelbeugung noch einmal schematisch dargestellt.



**Abbildung 2:** Fresnelbeugung am Einzelspalt. [2]

## Berechnung der Intensitätsverteilung

Da die Fraunhoferbeugung aufgrund der gleichen Beugungswinkel mathematisch einfacher ist, wird im Folgenden die Intensitätsverteilung  $I(\phi)$  nur für die Fernfeldnäherung hergeleitet. Zudem wird ein Spalt betrachtet, dessen Breite  $b$  sehr viel kleiner als seine Länge ist. Somit findet die Beugung in recht genauer Näherung nur in einer Dimension statt.

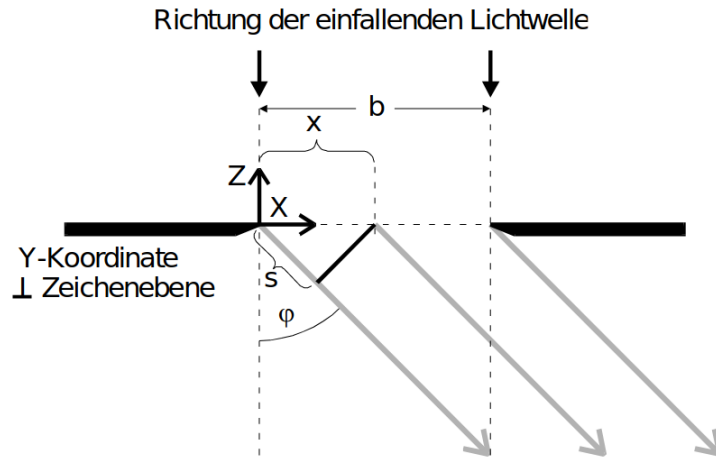
Wie bereits beschrieben lassen sich die einfallenden Wellen als ebene Wellen nähern. Die Amplitude der Welle ist gegeben durch

$$A(z, t) = A_0 \exp(i(\omega t - 2\pi z/\lambda)),$$

wobei das Koordinatensystem entsprechend zu Abbildung 3 gelegt ist. Weiter in der Abbildung zu sehen ist, dass zwei Lichtstrahlen im Abstand  $x$  von einander, einen Wegunterschied  $s$  besitzen. Dieser führt zu einem Phasenunterschied  $\delta$ , der durch

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \phi}{\lambda}$$

beschrieben werden kann.



**Abbildung 3:** Skizze zum Gangunterschied zweier Lichtstrahlen bei der Fraunhoferbeugung. [3]

Nach dem Huygensschen Prinzip kann nun die Amplitudenfunktion  $B(z, t, \phi)$  bestimmt werden, indem über alle Elementarwellen in der Spaltenöffnung summiert wird. Wegen der infinitesimalen Breite der Strahlen und der kontinuierlichen Verteilung geht die Summe in ein Integral über die Spaltöffnung über

$$B(z, t, \phi) = A_0 \int_0^b \exp\left(i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta\right)\right) dx.$$

Dieses Integral lässt sich lösen zu

$$B(z, t, \phi) = A_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{\pi i b \sin(\phi)}{\lambda}\right) \cdot \text{sinc}(\eta)$$

mit

$$\eta = \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda}.$$

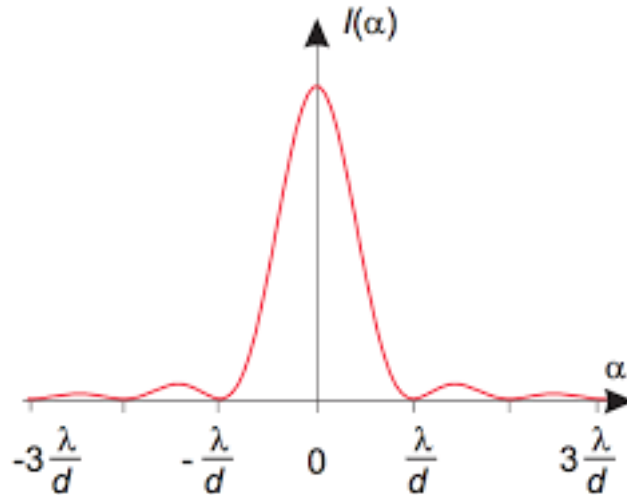
$\text{sinc } \eta$  ist dabei der Kardinalsinus. Die beiden Exponentialfunktionen sind aufgrund ihrer Komplexwertigkeit bei dem Experiment nicht von Belang, da ohnehin nur die Intensität  $I(\phi) \propto |B(z, t, \phi)|^2$  gemessen werden kann. Da der Betrag einer komplexen Exponentialfunktion 1 ist, muss demnach nur noch

$$B(\phi) = A_0 b \text{sinc } \eta \quad (1)$$

betrachtet werden. Die Nullstellen der Funktion (1) liegen bei  $\pm n\lambda/b$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Wie bereits angedeutet gilt

$$I(\phi) \propto B(\phi)^2 = A_0^2 b^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right) \geq 0. \quad (2)$$

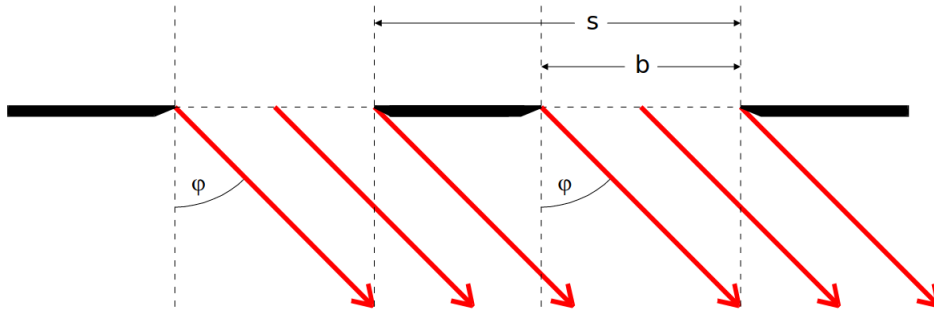
Somit liegen bei den Nullstellen der Amplitudenfunktion 1 Minima in der Intensität  $I(\phi)$  vor. Die Höhe der Maxima fällt in Näherung mit  $\phi^2$  ab.



**Abbildung 4:** Theoriekurve der Intensitätsverteilung, wobei  $\alpha \equiv \phi$  und  $d \equiv b$ . [1]

### 2.3 Beugung am Doppelspalt

Für einen Doppelspalt kann die Intensität  $I(\phi)$  recht analog bestimmt werden. Der Doppelspalt wird dabei als Überlagerung zweier Einzelspalte im Abstand  $s$  verstanden. In Abbildung 5 ist ein solcher Doppelspalt skizziert.

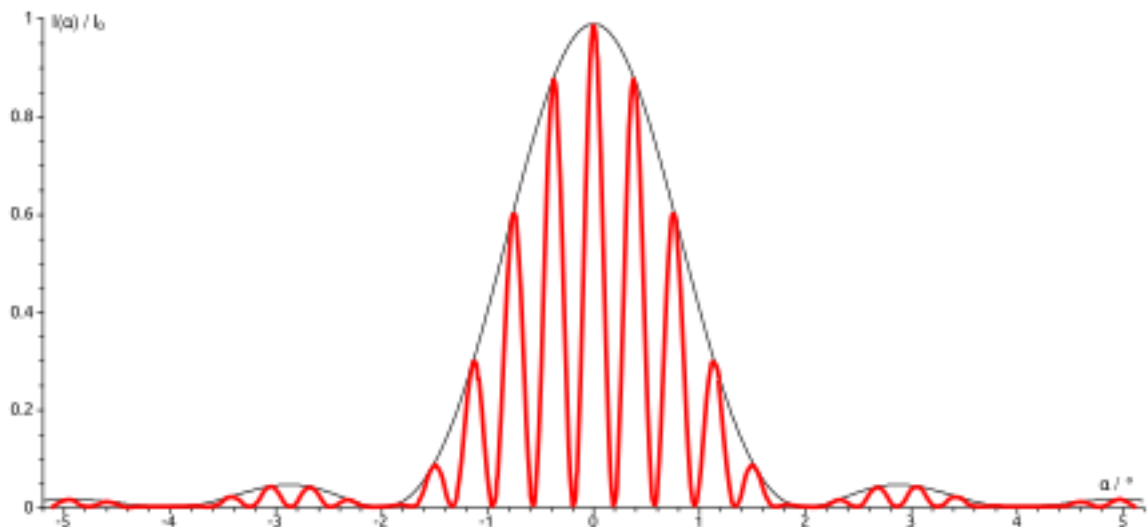


**Abbildung 5:** Schematische Darstellung der Beugung am Doppelspalt. [3]

Die Intensitätsverteilung ist dann gegeben durch

$$I_d(\phi) \propto B_d(\phi)^2 = 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi s \sin \phi}{\lambda}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \phi}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Im Vergleich zu der Intensitätsverteilung (2) des Einzelspalts ist bei der des Doppelspalts (3) ein  $\cos^2$ -Term hinzugekommen. Dadurch entstehen zusätzliche Minima an den Stellen  $\arcsin((2k+1)/2s)$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$ . Die entstehende Intensitätsverteilung des Doppelspalts (3) ist in Abbildung 6 dargestellt. Die Einhüllende ist die Intensitätsverteilung 2 des Einzelspalts.



**Abbildung 6:** Intensitätsverteilung eines Doppelspalts mit willkürlicher Skala. Die Einhüllende ist die Verteilung eines Einzelspalts. [4]

## 2.4 Berechnung der Intensitätsverteilung durch Fouriertransformation

Die Amplitudenverteilung kann auch durch eine Fouriertransformation berechnet werden. Dieser Weg ist insofern eleganter, dass er sich ohne größeren Aufwand auf mehrere

Dimensionen erweitern lässt. Die Berechnung der Amplitudenfunktion wird nachfolgend kurz erläutert.

Das Huygenssche Prinzip beruht auf der Superposition einzelner Elementarwellen. Diese Superposition kann wie in Abschnitt 2.2 angedeutet durch das Integral

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix\xi) dx \quad (4)$$

erfolgen. Dabei ist die Funktion  $f(x)$  die Aperturfunktion, also die Amplitudenverteilung der einfallenden Welle in der Beugungsebene. Der Faktor  $\exp(ix\xi)$  beschreibt dann gerade die Phasendifferenz einer Elementarwelle mit Quelle  $x$  zu der ausgehenden Welle von  $x = 0$ . Das Integral (4) beschreibt nun gerade die Fouriertransformierte  $g(\xi) = \hat{f}(\xi)$  der Aperturfunktion. Das Auswerten des Integrals ergibt

$$g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} \exp\left(\frac{i\xi b}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi b}{2}\right).$$

Mit der Definition

$$\xi = \frac{2\pi \sin \phi}{\lambda}$$

wird der Zusammenhang zu Gleichung (1) deutlich.

### 3 Durchführung

Der Versuchsaufbau gleicht prinzipiell dem Aufbau für die Fraunhoferbeugung in Abbildung 1. Vor einem Spalt befindet sich ein He-Ne-Laser  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , welcher kohärentes Licht aussendet. Hinter dem Spalt befindet sich dann in recht großer Entfernung  $L$  ein Photoelement, welches über ein Amperemeter die Intensität  $I$  des gebeugten Lichts misst. Um die winkelabhängigkeit des Beugungsbildes ausmessen zu können, ist das Photoelement beweglich auf einer skalierten Schiene verbaut. In Abbildung 7 ist der Aufbau noch einmal skizziert.

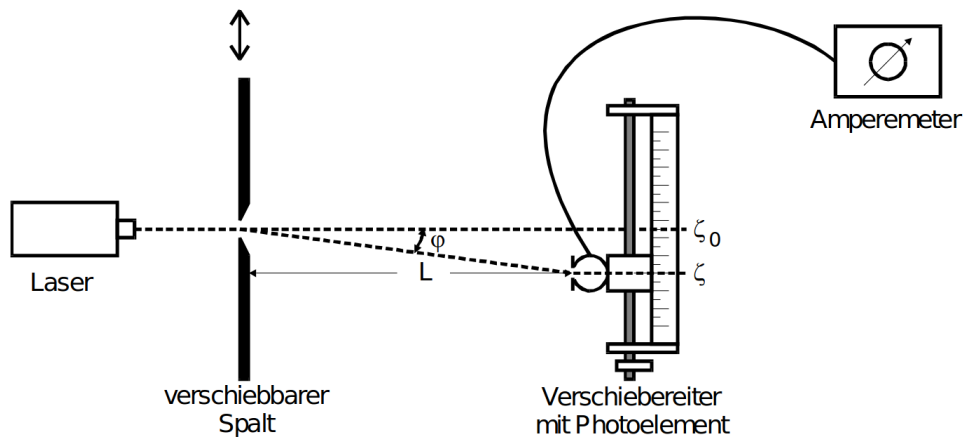


Abbildung 7: Versuchsaufbau zur Messung der Intensitätsverteilung. [3]



Vor Beginn der eigentlichen Messung muss der thermische Dunkelstrom notiert werden, den das Photoelement auch ohne Anschalten des Lasers misst. Dafür wird der Versuchsaum möglichst abgedunkelt. Der Laser wird nun so justiert, dass das Licht durch den Spalt so auf das Photoelement trifft, dass sich das Hauptmaximum in der Mitte der Skala, d.h.  $x = 25 \text{ mm}$ , befindet und die Nebenmaxima in etwa die gleiche Intensität besitzen. Dann werden zwei Messreihen mit jeweils 60 Messungen durchgeführt, wobei in dem Bereich um das Hauptmaximum herum  $[20 \text{ mm} - 30 \text{ mm}]$  in  $0,5 \text{ mm}$  Schritten und in dem restlichen Bereich von  $[0 \text{ mm} - 50 \text{ mm}]$  in  $1 \text{ mm}$  Schritten gemessen wird. In der ersten Messreihe wird ein Einzelspalt und in der zweiten ein Doppelspalt verwendet, wobei die Herstellerangaben bezüglich der Spaltbreite  $b$  und des Spaltabstandes  $s$  notiert werden. Zusätzlich zu den jeweils 60 Messwerten wird noch der Abstand  $L$  zwischen Spalt und Photoelement ausgemessen.

## 4 Auswertung

Bei diesem Experiment wird ein Laser mit einer Wellenlänge von  $633 \text{ nm}$  verwendet. Dieser hat einen Abstand von  $9 \text{ cm}$  von der Blende. Die Blende hat wiederum einen Abstand von  $125 \text{ cm}$  von dem Detektor. Es ergibt sich also ein Abstand von  $134 \text{ cm}$  zwischen Laser und Detektor. Bei abgedunkeltem Raum wird ein Dunkelstrom von  $1,35 \text{ nA}$  gemessen. Um diesen Wert sind alle aufgenommenen Messwerte korrigiert.

### 4.1 Der Einfachspalt

Der Einfachspalt hat nach der Herstellerangabe eine Spaltbreite von  $0,15 \text{ mm}$ . Die aufgenommenen Messwerte sind in folgender Tabelle mit Dunkelstromkorrektur dargestellt.

**Tabelle 1:** Daten der Messung unter Verwendung des Einfachspaltes.

$l/\text{mm}$	$I/\mu\text{A}$	$l/\text{mm}$	$I/\mu\text{A}$
0,0	0,001 15	25,5	1,148 65
1,0	0,002 65	26,0	1,148 65
2,0	0,003 65	26,5	1,103 65
3,0	0,002 65	27,0	0,928 65
4,0	0,000 65	27,5	0,748 65
5,0	0,001 15	28,0	0,568 65
6,0	0,004 15	28,5	0,398 65
7,0	0,006 65	29,0	0,248 65
8,0	0,006 65	29,5	0,148 65
9,0	0,003 65	30,0	0,068 65
10,0	0,002 15	31,0	0,014 65
11,0	0,005 65	32,0	0,030 65
12,0	0,009 15	33,0	0,052 65
13,0	0,009 65	34,0	0,046 65
14,0	0,007 65	35,0	0,024 65
15,0	0,005 65	36,0	0,008 65
16,0	0,010 15	37,0	0,008 65
17,0	0,013 75	38,0	0,014 65
18,0	0,016 15	39,0	0,014 65
19,0	0,013 15	40,0	0,009 65
20,0	0,009 15	41,0	0,003 15
20,5	0,013 55	42,0	0,003 65
21,0	0,019 65	43,0	0,006 15
21,5	0,118 65	44,0	0,006 65
22,0	0,020 65	45,0	0,004 65
22,5	0,358 65	46,0	0,001 15
23,0	0,518 65	47,0	0,000 65
23,5	0,688 65	48,0	0,002 65
24,0	0,858 65	49,0	0,003 65
24,5	0,998 65	50,0	0,002 85
25,0	1,098 65		

Aus der Stellung  $l$  des Detektors lässt sich der Beugungswinkel nach

$$\phi \approx \tan \phi = \frac{l - l_0}{L} \quad (5)$$

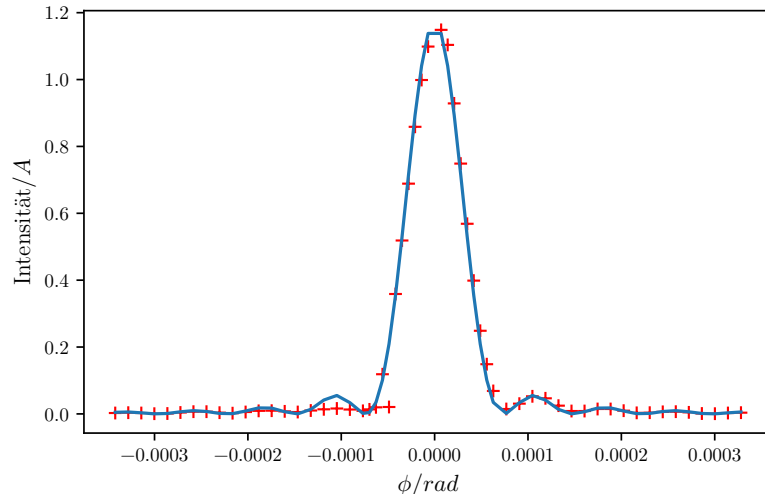
berechnen.  $l_0 = 25\text{mm}$  bezeichnet hierbei die Stellung des Detektors, bei der der Strahl nicht gebeugt ist.  $L = 125\text{cm}$  meint den Abstand zwischen Beugungsspalt und Detektorblende. Unter Verwendung von *Scientific Python* wird eine Funktion der Form (2) an die

Messwerte aus Tabelle 1 gefittet. Als Parameter ergeben sich

$$A_0 = 120.837 \pm 2.362 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$b = 0.00323 \pm 0.00031 \text{mm}.$$

Der berechnete Spaltbreite weicht also um 6072.4% von den Herstellerangaben ab. Die Messwerte und der Fit sind in folgender Abbildung dargestellt.



**Abbildung 8:** Die Messwerte am Einzelspalt sowie ein Fit.

## 4.2 Der Doppelspalt

Der verwendete Doppelspalt besitzt nach den Herstellerangaben eine Spaltbreite von 0,1 mm sowie einen Spaltabstand von 0,4 mm. Die Winkel werden ebenfalls nach (5) berechnet. In folgender Tabelle sind die aufgenommenen Messwerte dargestellt.

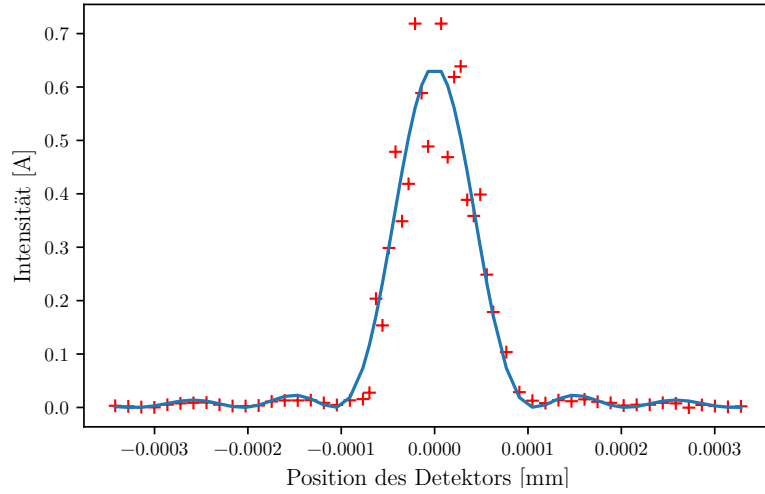
**Tabelle 2:** Daten der Messung unter Verwendung des Doppelspaltes.

$l/\text{mm}$	$I/\mu\text{A}$	$l/\text{mm}$	$I/\mu\text{A}$
0,0	0,007	25,5	0,79
1,0	0,0045	26,0	0,72
2,0	0,0035	26,5	0,47
3,0	0,002	27,0	0,62
4,0	0,0015	27,5	0,64
5,0	0,0065	28,0	0,39
6,0	0,009	28,5	0,36
7,0	0,01	29,0	0,4
8,0	0,0105	29,5	0,25
9,0	0,0065	30,0	0,18
10,0	0,004	31,0	0,105
11,0	0,004	32,0	0,03
12,0	0,005	33,0	0,014
13,0	0,0125	34,0	0,0095
14,0	0,0145	35,0	0,015
15,0	0,0145	36,0	0,013
16,0	0,015	37,0	0,0165
17,0	0,01	38,0	0,012
18,0	0,006	39,0	0,01
19,0	0,0147	40,0	0,005
20,0	0,017	41,0	0,0065
20,5	0,029	42,0	0,0065
21,0	0,205	43,0	0,01
21,5	0,155	44,0	0,009
22,0	0,3	45,0	0,001
22,5	0,48	46,0	0,006
23,0	0,35	47,0	0,004
23,5	0,42	48,0	0,0025
24,0	0,72	49,0	0,0035
24,5	0,59	50,0	0,0057
25,0	0,49		

An den obigen Messwerten wird ein Fit der Form (3) mittels *Scientific Python* durchgeführt. Als Parameter ergeben sich hier

$$A_0 = 0.799 \pm 0.01338 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$
$$b = 0.00323 \pm 0.00031 \text{mm}.$$

Die Breite des Spaltes weicht um 222.9% von den Herstellerangaben ab. Die gemessenen Werte sowie der Fit der Funktion sind in folgender Abbildung dargestellt.



**Abbildung 9:** Die Messwerte am Doppelspalt sowie ein Fit.

## 5 Diskussion

Die Ergebnisse aus 4 sind im Folgenden zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 A_{0,1} &= 120.837 \pm 2.362 \frac{\text{A}}{\text{m}} \\
 b_1 &= 0.00323 \pm 0.00031 \text{mm} \\
 A_{0,2} &= 0.799 \pm 0.01338 \frac{\text{A}}{\text{m}} \\
 b_2 &= 0.00323 \pm 0.00031 \text{mm}.
 \end{aligned}$$

- *Der Fit*

Die Abweichungen der Berechnung der Spaltbreite des Einzelspaltes sowie des Doppelspaltes sind mit 6072.4% sowie 222.9% sehr hoch. Die gefittete Funktion beschreibt die Messwerte des Einzelspaltes trotz der hohen Abweichung recht gut, der Fit an die Messwerte des Doppelspaltes ergibt jedoch eine starke Abweichung zu der nach der Theorie erwarteten Kurve. Dies scheint an den Messwerten zu liegen; mit geringeren Abständen der Messungen hätten der Haupt- und die Nebenpeaks klarer aufgenommen werden können, was vermutlich zu einem besseren Fit geführt hätte. Jedoch scheinen auch gut passende Fits recht ungenaue Werte zu liefern, wie die Berechnung der Spaltbreite des Einzelspaltes zeigt. Daher scheint diese Methode zur Bestimmung der Spaltbreite nicht gut geeignet zu sein, hier liegen systematische Probleme vor.

- *Die Umgebung*  
Bei der Aufnahme der Messwerte konnte keine vollständige Dunkelheit garantiert werden, da das Ablesen und Notieren der Messwerte zwingend eine Lichtquelle benötigte. Dies ließe sich durch eine digitale Aufnahme der Daten beheben. Alternativ könnte der Zeiger des Amperemeters fluoreszierend sein, was zumindest die Lichtquelle in der Nähe des Detektors eliminieren würde. Auch ist die Abdunkelung des Raumes nur begrenzt erfolgreich.
- *Die Messgenauigkeit*  
Die Skala des Amperemeters hat aufgrund ihrer analogen Beschaffenheit eine begrenzte Genauigkeit. Dies könnte mit einer digitalen Anzeige gelöst werden. Auch die Messung der Abstände zwischen dem Detektor, der Blende und dem Laser sind mit einer gewissen Ungenauigkeit versehen. Außerdem war unklar, wo genau der Laser in dem Gehäuse montiert ist, wodurch die Messungen der Abstände möglicherweise einen weiteren Fehler aufweisen. Auch das händische Verstellen des Detektors könnte weitere Unsicherheiten erzeugt haben.

## Literatur

- [1] *Beugung und Interferenz*. 2021. URL: <https://ludwigschuster.de/wp-content/uploads/2015/07/BEU.pdf> (besucht am 26.05.2021).
- [2] *Beugungsintegral*. 2021. URL: <https://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Beugungsintegral> (besucht am 26.05.2021).
- [3] TU Dortmund. *Versuchanleitung zu Versuch Nr. 406 Beugung am Spalt*. 2021.
- [4] *Physik Oberstufe/ Schwingungen und Wellen/ Interferenzphänomene*. 2021. URL: [https://de.wikibooks.org/wiki/Physik\\_Oberstufe/\\_Schwingungen\\_und\\_Wellen/\\_Interferenzph%C3%A4nomene](https://de.wikibooks.org/wiki/Physik_Oberstufe/_Schwingungen_und_Wellen/_Interferenzph%C3%A4nomene) (besucht am 26.05.2021).