

Versuch M14

Tomographie mittels γ -Strahlung

Maik Becker
maik.becker@udo.edu

Kevin Sedlaczek
kevin.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 27. November 2017

Abgabe: 16. Februar 2018

Korrektur: 23. Februar 2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Die Tomographie ist ein bildgebendes, nicht invasives Verfahren, um mit Hilfe von Strahlung dreidimensionale Aufnahmen von Objekten zu erstellen. Ziel des Versuchs ist es, Testkörper mit Hilfe von γ -Strahlung aus dem radioaktiven Zerfall von ^{137}Cs auf ihre strukturelle und materielle Zusammensetzung zu untersuchen.

2 Theorie

2.1 Radioaktiver Zerfall von ^{137}Cs

Das Isotop ^{137}Cs zerfällt mit einer Halbwertszeit von etwa 30 Jahren über einen β -Zerfall in ^{137}Ba . In 94,6 % der Fälle läuft dieser Vorgang über einen angeregten Zustand von ^{137}Ba ab. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,4 % führt der β -Zerfall direkt in den Grundzustand des Barium-Kerns. Der Übergang des angeregten Kerns in seinen Grundzustand erfolgt durch Aussendung eines Photons mit einer charakteristischen Energie von 0,662 MeV bei einer Halbwertszeit von 153 s. Die Energie des Photons entspricht dabei der Energiedifferenz der beiden Zustände des Barium-Kerns. Abbildung 1 zeigt das Zerfallsschema von ^{137}Cs .

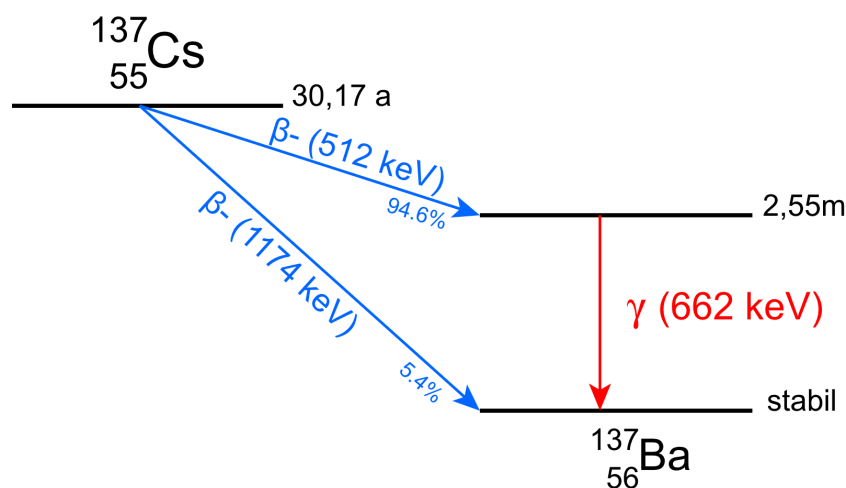


Abbildung 1: Zerfallsschema von ^{137}Cs in ^{137}Ba . Beim Zerfall über einen angeregten Zustand des Barium-Kerns wird zusätzlich zum β -Teilchen ein γ -Quant mit der charakteristischen Energie 0,622 MeV emittiert.

2.2 Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit Materie

Der Durchgang von γ -Strahlung durch Materie ist geprägt von der Wechselwirkung der Photonen mit den Hüllenelektronen der Atome des Absorbermaterials. Im Folgenden

werden die drei in der Regel dominierenden Prozesse diskutiert: Der Photoeffekt, die Comptonstreuung und die Paarbildung.

- Der Photoeffekt beschreibt die Wechselwirkung eines Photons mit einem Hüllenelektron, wobei das Photon seine Energie E_γ vollständig an das Elektron abgibt und das Elektron aus seiner Bindung entfernt wird. Es erhält dabei die Energie $E_e = E_\gamma - E_B$. Das Auftreten des Photoeffektes erfolgt erst, sobald die Bindungsenergie E_B des Elektrons kleiner als die Photonenergie ist, woraus sich die Bedingung $E_\gamma > E_B$ ergibt. Der Photoeffekt dominiert bei Energie unter 100 keV. Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zu Z^5 , woraus folgt, dass der Effekt bei schwereren Elementen stärker zum tragen kommt.
- Der zweite Effekt wird als Comptonstreuung bezeichnet. Hierbei wird das Photon an einem freien Elektron inelastisch gestreut. Das Photon gibt dabei unter Richtungsänderung Energie an das Elektron ab, wird dabei allerdings nicht vernichtet. Der Wirkungsquerschnitt der Comptonstreuung ist proportional zu Z^2 . Der Effekt dominiert im Energiebereich zwischen 100 keV und 10 MeV.
- Der dritte Prozess ist die Paarerzeugung. Sie tritt bei Energien oberhalb der doppelten Ruhemasse des Elektrons auf, also ab 1,02 MeV. Hierbei wird der Photon unter Erzeugung eines Elektrons und eines Positrons ausgelöscht. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes wird dabei stets auch Energie auf den Atomkern übertragen. Da mit γ -Strahlung der Energie 0,662 MeV gearbeitet wird, trägt die Paarerzeugung im folgenden Versuch nicht bei.

Durch Überlagerung der verschiedenen Effekte ergeben sich schnell komplexe Abhängigkeiten. Stets wird ein Teil der Energie der Eingangsstrahlung im Material absorbiert. Insgesamt folgt die Abschwächung der Eingangsintensität I_0 einem exponentiellen Verlauf, der Form

$$I = I_0 e^{-\sum_i \mu_i d_i} \quad (1)$$

wobei die μ_i die Absorptionskoeffizienten verschiedener Materialien und d_i deren Dicken bezeichnen. Durch Umstellen der Formel zu

$$\sum_i \mu_i d_i = \ln \left(\frac{I_0}{I_j} \right) \quad (2)$$

ergibt sich die Möglichkeit durch die Messung der Intensitäten I_j und bei geschickter Wahl der Strahlwege ein Gleichungssystem aufzustellen, mit dessen Hilfe die Verteilung verschiedener Materialien in einem nicht einsehbaren Körper bestimmt werden kann.

2.3 Messung der Absorptionskoeffizienten

Im Folgenden wird mit der Matrixschreibweise gearbeitet. Gleichung (2) lässt sich somit schreiben als

$$A \cdot \vec{\mu} = \vec{I} \quad (3)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{\mu}$ den zu bestimmenden Vektor der Absorptionskoeffizienten, A die Matrix, die Information über die Wegstrecken enthält und \vec{I} den Vektor der gemessenen Intensitäten gemäß der rechten Seite von Gleichung (2).

Im durchgeführten Versuch wird ein Würfel mit dünner Aluminiumummantelung untersucht, der im Inneren aus $3 \times 3 \times 3$ gleich großen Teilwürfel besteht. Aus Zeitgründen wird nur eine Schicht untersucht, sodass insgesamt neun Absorptionskoeffizienten zu bestimmen sind. Der Vektor $\vec{\mu}$ hat demnach die Dimension $n = 9$. Die Matrix A hat die Dimension $m \times n$, wobei m die Dimension des Vektors \vec{I} , also die Anzahl der durchgeführten Messungen bei unterschiedlichen Projektionen ist. Um das lineare Gleichungssystem mit einem klassischen Ansatz lösen zu können, sind mindestens n unterschiedliche Projektionen zu wählen, wobei sichergestellt werden muss, dass die resultierende Matrix A nicht singulär ist. Es empfiehlt sich jedoch zu Gunsten einer besseren Statistik mehr Messungen bzw. Projektionen durchzuführen. Abbildung 2 zeigt die zwölf ausgewählten Projektionen zur Untersuchung einer Schicht des Würfels.

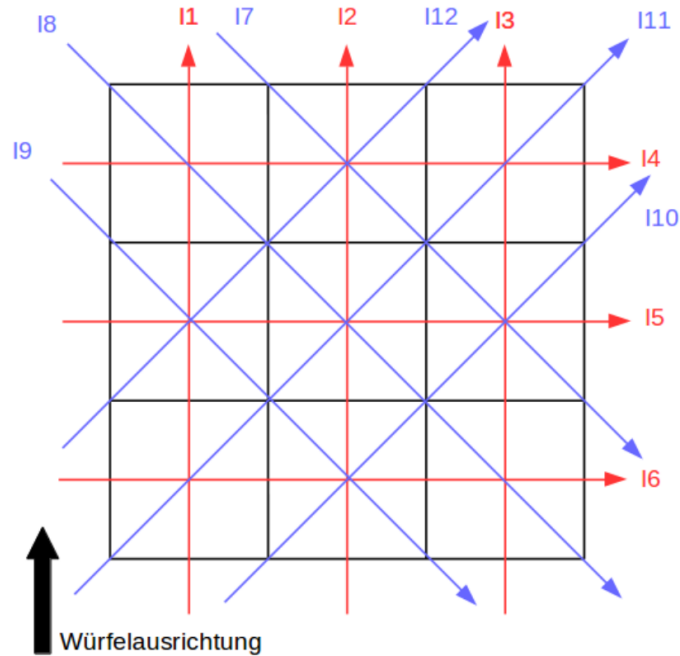


Abbildung 2: Darstellung der zwölf gewählten Projektionen für die mittlere 3×3 Schicht eines zu untersuchenden Würfels.

Zur Berücksichtigung unterschiedlicher Unsicherheiten auf die gemessenen Werte von \vec{I} wird Gleichung (3) modifiziert zu

$$WA \cdot \vec{\mu} = W\vec{I} \quad (4)$$

mit der Gewichtungsmatrix

$$W = V[I]^{-1} \quad (5)$$

Die Lösung der Gleichung ist nun gegeben durch

$$\vec{\mu} = (A^T W A)^{-1} (A^T W \vec{I}) \quad (6)$$

Für die Unsicherheiten ergibt sich

$$V[\mu] = (A^T W A)^{-1} \quad (7)$$

3 Durchführung

Abbildung 3 zeigt den wesentlichen Teil des Versuchsaufbaus. Die von der ^{137}Cs Quelle ausgehende γ -Strahlung wird durch Bleiblöcke zu großen Teilen abgeschirmt. Nur in Richtung eines Detektors wird die Strahlung über eine Bleiblende nutzbar gemacht. Bei dem Detektor handelt es sich um einen Szintillationsdetektor, der als szintillierendes Material Natriumiodid (NaI) verwendet. Trifft γ -Strahlung auf das Material, werden dessen Moleküle angeregt und emittieren Photonen. Die Detektion dieser Photonen erfolgt durch einen Photomultiplier, der gemäß der Anzahl eintreffender Photonen ein elektrisches Signal entsprechender Stärke an einen Multichannelanalyzer weitergibt. Dieser histogrammiert die eintreffenden Signale an Hand ihrer Impulshöhe. Die Ausgabe erfolgt über einen angeschlossenen Computer und ein entsprechendes Analyseprogramm. Als zu untersuchende Objekte werden verschiedene Würfel in den Strahlengang gebracht. Auf einer entsprechenden Halterung sind die Würfel horizontal verschiebar und senkrecht zur Horizontalen drehbar gelagert.

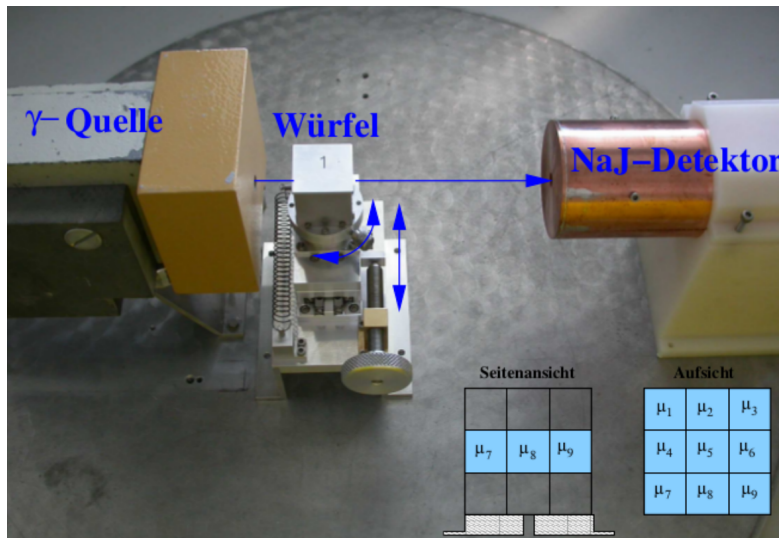


Abbildung 3: Versuchsaufbau mit zu untersuchendem Würfel, einem Natriumiodid-Detektor und einer ^{137}Cs Quelle. Die umfangreiche Bleiabschirmung ist hier nicht zu sehen.

Insgesamt werden fünf Messreihen durchgeführt. Zunächst wird eine Messung ohne Würfel im Strahlgang durchgeführt (Nullmessung). Danach folgen Messungen mit einem leeren Würfel (Würfel 1) (d.h. nur die Aluminiumummantelung befindet sich im Strahlgang) für fünf verschiedene Ausrichtungen des Würfels. Sowohl für die Nullmessung, als auch für die Leermessung wird neben der Anzahl an gezählten Ereignissen auch das Strahlungsspektrum aufgenommen. Es folgen Messungen für die Würfel 2 und 3 mit jeweils vier Würfelausrichtungen, wobei bekannt ist, dass Würfel 2 vollständig aus Aluminium und Würfel 3 vollständig aus Blei besteht. Abschließend wird Würfel 5 als ein Würfel mit unbekannter Zusammensetzung aus allen zwölf Richtungen gemäß Abbildung 2 vermessen.

4 Auswertung

Die in der Auswertung verwendeten Mittelwerte mehrfach gemessener Größen sind gemäß der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

bestimmt. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich dabei zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (9)$$

Resultiert eine Größe über eine Gleichung aus zwei anderen fehlerbehafteten Größen, so berechnet sich der Gesamtfehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (10)$$

Alle in der Auswertung angegebenen Größen sind stets auf die erste signifikante Stelle des Fehlers gerundet. Setzt sich eine Größe über mehrere Schritte aus anderen Größen zusammen, so wird erst am Ende gerundet, um Fehler zu vermeiden. Zur Auswertung wird die Programmiersprache **python** (**Version 3.5.3**) mit den Bibliothekserweiterungen **numpy** [1], **scipy** [2] und **matplotlib** [3] verwendet.

4.1 Bestimmung der Grundintensität I_0

Zur Bestimmung der Aktivität der verwendeten Quelle wird zu Beginn eine Messung ohne Würfel durchgeführt. Aus dem so aufgenommenen, in Abbildung 4 dargestellten Spektrum wird eine Rate von $I'_0 = 225.4 \pm 0.7 \frac{\text{counts}}{\text{s}}$ bestimmt. Diese folgt aus der Messung von 101383 counts über 449,8 s. Der statistische Poissonfehler ist aufgrund der großen Anzahl an counts $< 1\%$ und somit vernachlässigbar.

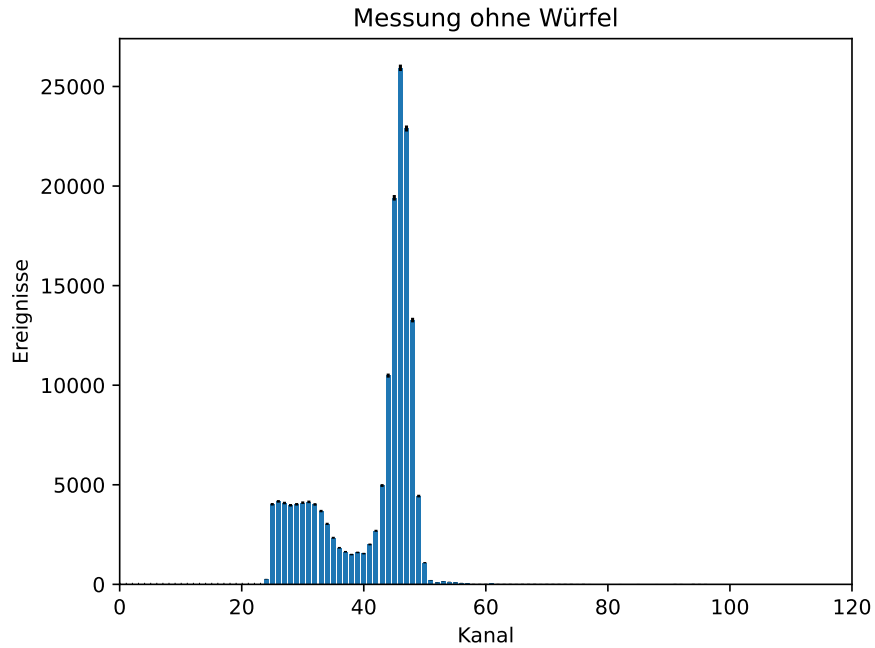


Abbildung 4: Energieverteilung der Nullmessung ohne Würfel im Strahlengang.

Dieser Wert stellt im weiteren Verlauf der Auswertung den Vergleichswert für die Absorptionen dar. Da sich die zu untersuchenden Würfel allerdings in einem äußeren Aluminiumgehäuse befinden, wird die zusätzliche Absorption durch Messungen leerer Würfel bestimmt. Abbildung 5 zeigt das Spektrum dieser Messung.

Um die Raten der Leermessungen für alle 12 später benötigten Strahlrichtungen durch den Würfel möglichst exakt zu bestimmen, werden die Messergebnisse der einzelnen Richtungen bei gleicher Weglänge durch den Würfel gemittelt. Dazu werden die Projektionen 5, 6, 8, 9 und 11 vermessen. So ergibt sich der Intensitätsvektor in (11) in Reihenfolge der in Abbildung 2 dargestellten Projektionen I1 - I12, sowohl wie gemessen als auch gemittelt.

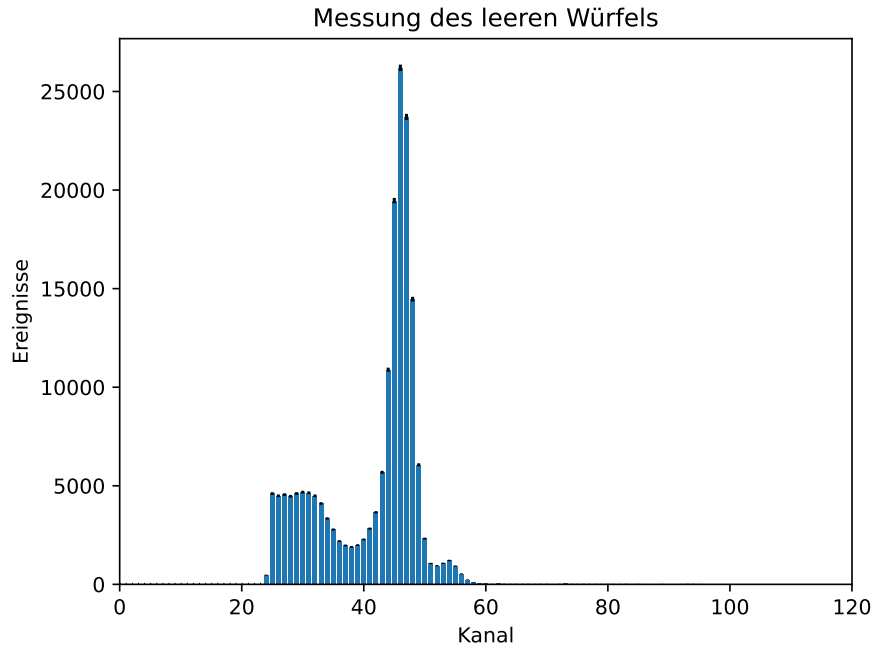


Abbildung 5: Energieverteilung der Leermessung an einem hohlen Aluminiumwürfel.

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ 200.3 \pm 0.6 \\ 215.7 \pm 0.7 \\ - \\ 210.8 \pm 0.6 \\ 217.2 \pm 0.6 \\ - \\ 214 \pm 0.7 \\ - \end{pmatrix} \text{ counts/s} \quad \vec{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} 208 \pm 0.6 \\ 208 \pm 0.6 \\ 208 \pm 0.6 \\ 208 \pm 0.6 \\ 208 \pm 0.6 \\ 208 \pm 0.6 \\ 214 \pm 0.7 \\ 214 \pm 0.6 \\ 214 \pm 0.7 \\ 214 \pm 0.7 \\ 214 \pm 0.6 \\ 214 \pm 0.7 \end{pmatrix} \text{ counts/s} \quad (11)$$

4.2 Auswertung der Würfel aus einheitlichem Material

Die Würfel 2 und 3 bestehen nach Information des Versuches nur aus Würfeln eines Materials. Die Materialien sind Blei (Würfel 2), sowie Messing (Würfel 3). Daher können die verschiedenen, vermessenen Projektionen im Sinne eines überbestimmten Gleichungssystems für eine Mittelung verwendet werden. Ebenso kann die Geometrimatrix zu einem

Vektor in den einzelnen Komponenten aufsummiert werden. Es folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \cdot \sqrt{2} \\ 3 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Diese Matrix beschreibt die Projektionen 2, 5, 8 und 11. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate lassen sich nun die Absorptionskoeffizienten der einzelnen Materialien bestimmen. Es ergeben sich die in Tabelle 1 aufgeführten Ergebnisse.

Tabelle 1: Aus den verschiedenen Projektionen gemittelte Absorptionskoeffizienten der Würfel 2 und 3.

Objekt	Absorptionskoeffizient μ , 1/cm
Würfel 2	0,19 \pm 0,01
Würfel 3	1,04 \pm 0,06

4.3 Auswertung des Würfels unbekannten Aufbaus

Die Messung des Würfels 5 stellt eine Vermessung eines Würfels mit unbekannter innerer Struktur dar. Es ist also weder klar, welche Materialien innerhalb des Würfels vorliegen, noch in welcher Verteilung auf die kleinen inneren Würfel. Durch die Vermessung des Würfels über alle 12 in Abbildung 2 dargestellten Projektionen lassen sich für jeden der 9 inneren Würfel die Absorptionskoeffizienten bestimmen. Dazu wird hier die folgende Geometriematrix A verwendet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{I}_5 = \begin{pmatrix} 118.2 \pm 0.5 \\ 19.1 \pm 0.2 \\ 115.7 \pm 0.6 \\ 46.3 \pm 0.4 \\ 45.6 \pm 0.4 \\ 115.7 \pm 0.6 \\ 62.5 \pm 0.4 \\ 28.5 \pm 0.3 \\ 131.4 \pm 0.6 \\ 123.7 \pm 0.6 \\ 29.1 \pm 0.4 \\ 77.9 \pm 0.7 \end{pmatrix} \text{ counts/s} \quad \vec{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} 0.57 \pm 0.09 \\ 2.4 \pm 0.2 \\ 0.59 \pm 0.09 \\ 1.5 \pm 0.1 \\ 1.5 \pm 0.2 \\ 0.59 \pm 0.09 \\ 1.2 \pm 0.1 \\ 2.0 \pm 0.2 \\ 0.5 \pm 0.1 \\ 0.55 \pm 0.09 \\ 2.0 \pm 0.2 \\ 1.0 \pm 0.1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert dann für die in Gleichung (14) gemessenen Raten und deren normalisierten Logarithmen die folgenden Absorptionskoeffizienten:

Tabelle 2: Aus den verschiedenen Projektionen bestimmte Absorptionskoeffizienten der Teilwürfel von Würfel 5.

Teilwürfel	Absorptionskoeffizient μ , 1/cm
1	0,35 \pm 0,08
2	0,72 \pm 0,06
3	0,31 \pm 0,08
4	0,06 \pm 0,06
5	1,09 \pm 0,08
6	0,15 \pm 0,06
7	0,14 \pm 0,08
8	0,28 \pm 0,06
9	0,12 \pm 0,08

5 Diskussion

Die Auswertung der beiden Würfel mit homogenen Materialverteilungen ergab die in Tabelle 1 aufgeführten Absorptionskoeffizienten. Vergleicht man diese mit den Literaturwerten in Tabelle 3, so ergeben sich sehr eindeutige Zuordnungen zu den aufgeführten Materialien. Würfel 2 stimmt mit einem bestimmten Koeffizienten von $\mu_2 = (0,19 \pm 0,01)/\text{cm}$ sehr gut mit einer Zusammensetzung aus Aluminium überein. Die Abweichung beträgt etwa 6 %. Würfel 3 wies nach Messung einen Absorptionskoeffizienten von $\mu_3 = (1,04 \pm 0,06)/\text{cm}$ auf. Dieser stimmt wiederum am besten mit einer Zusammensetzung aus Blei überein. Die Abweichung beträgt hierbei etwa 16,5 %.

Tabelle 3: Absorptionskoeffizienten einiger Metalle. Die Werte folgen aus den Dichten und Absorptionskoeffizienten der einzelnen Elemente [4].

Material	σ , cm ² /g	ρ , g/cm ³	μ , 1/cm
Blei	0,110	11,34	1,245
Messing	0,073	8,41	0,614
Eisen	0,073	7,86	0,574
Aluminium	0,075	2,71	0,203
Delrin	0,082	1,42	0,116

Die Messwerte für Würfel 5 lassen auf die folgende Zusammensetzung aus Teilwürfeln schließen.

Tabelle 4: Aus den verschiedenen Absorptionskoeffizienten bestimmte Zusammensetzung der Teilwürfel von Würfel 5.

Teilwürfel	Absorptionskoeffizient μ , 1/cm	Abweichung, %	Material
1	0,35 ± 0,08	72,4	Aluminium
2	0,72 ± 0,06	17,3	Messing (soll: Pb)
3	0,31 ± 0,08	52,7	Aluminium
4	0,06 ± 0,06	48,3	Delrin/Luft (soll: Al)
5	1,09 ± 0,08	12,5	Blei
6	0,15 ± 0,06	26,1	Aluminium
7	0,14 ± 0,08	31,0	Aluminium
8	0,28 ± 0,06	37,9	Aluminium
9	0,12 ± 0,08	3,4	Delrin (soll: Al)

Diese Schätzung stellt allerdings lediglich eine Verknüpfung des bestimmten Absorptionskoeffizienten mit dem nächsten Wert eines oben aufgeführten Materials dar. Dabei sind die Abweichungen von den Literaturwerten allerdings durchweg recht hoch. Außerdem sind die statistischen Fehler der einzelnen Messungen bereits ziemlich groß und reichen wie etwa im Fall von Teilwürfel 4 an den Nominalwert. Hier zeigt sich wohl im Vergleich zu den Vermessungen der ersten beiden Würfel, dass der Unterschied in der Statistik, bzw. das Verwenden eines überbestimmten Gleichungssystems den Fehler deutlich vermindert.

Die größten Fehlerquellen liegen allerdings vermutlich in der Datennahme selbst. Besonders die Projektionen, welche nur einen Teilwürfel durchlaufen sind anfällig für Messfehler. Hier beeinflusst schon eine kleine Abweichung von der richtigen Ausrichtung das Ergebnis sehr, weil ein erheblicher Teil des Strahls dann durch andere Teilwürfel verläuft. Generell aber ist die Genauigkeit der Justage des Würfels in diesem Versuch schwierig, da eine genaue Überprüfung der Ausrichtung wegen fehlender Orientierungshilfen nicht möglich ist. Dies sorgt für eine Ungenauigkeit in der Wegstrecke des Teilchenstrahls, besonders bei den Diagonalprojektionen. Hier tritt aber auch für ein Ausschmieren in

nebenliegende Teilwürfel auf.

Des Weiteren ist auch die aus der radioaktiven Quelle stammende Strahlung kein perfekt fokussierter Strahl. Viel mehr treten schon hier "Verschmierungen" und Ungenauigkeiten auf, weswegen besonders bei den diagonalen Projektionen ebenfalls Abweichungen durch nebenliegenden Teilwürfel auftreten. Anhand der Größe der Fehler auf die Ergebnisse ist es sehr schwierig, den Messungen für Würfel 5 Materialien zuzuordnen. Dies liegt vor allem auch daran, dass viele Materialien sehr ähnliche Absorptionskoeffizienten haben und somit eine eindeutige Zuordnung schwierig ist. Allerdings zeigen einige Teilwürfel, wie etwa μ_5 auch sehr klare Zuordnungen.

Literatur

- [1] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [4] URL: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html> (besucht am 30.01.2018).
- [5] TU Dortmund. *Versuch M14: Tomographie mittels γ -Strahlung*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/MASTER/SKRIPT/MTomographie.pdf> (besucht am 27.11.2017).