103

Biegung elastischer Stäbe

Sonia Chander
sonia.chander@tu-dortmund.de

Jana Schlücking
jana.schluecking@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.11.2020 Abgabe: 02.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll das Elastizitätsmodul von verschiedenen Stoffen ermittelt werden. Diese unterscheiden sich in Gestalt, Metall und Legierung.

2 Theorie

Wenn Spannungen bzw. Druck auf eine Oberfläche wirken, kommt es zu Oberflächen- und/oder Volumenänderungen. Die Normalspannung σ ist die senkrechte Komponente dieser Spannung zur Oberfläche. Wenn die Längenänderung ΔL zur Körperdimension L relativ klein ist, kann der Zusammenhang zwischen $\frac{\Delta L}{L}$ und der Spannung σ als linear angesehen werden, auch als Hookschens Gesetz bekannt:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Das Elastizitätsmodul E ist die Materialkonstante eines Werkstoffes. Diese kann durch abmessen der Längenänderung ΔL ermittelt werden. In diesem Versuch wird die Berechnung von E durch die Biegung von zwei Metallstäben realisiert. Hierbei nutzt man das Drehmoment M_F aus, das durch die angreifende Kraft F an einer Stelle x des Stabes verursacht wird. Das Drehmoment verschiebt den Querschnitt Q aus seiner Ausgangslage. Dabei wird bei einer einseitigen Einspannung die obere Schicht ausgedehnt und die untere gestaucht. Es enstehen Zug- und Druckspannungen, die entgegenwirken. Dazwischen befindet sich die sogennante neutrale Faser. Diese Fläche behählt bei der Biegung ihre ursprüngliche Länge bei. Durch die entgegengesetzten Spannungen kommt es zu eienm Gleichgewichtszustand und schließlich zu einer endlichen Dehnung D.

Dieser Gleichgewichtszustand ist über das äußere Drehmoment M_F und das innere M_σ definiert:

$$M_F = F \cdot (L - x), \tag{2}$$

$$M_\sigma = \int_Q y \cdot \sigma(y)\, dq. \tag{3}$$

y ist der Abstand des Flächenelementes dq von der neutralen Faser x.

Bei einer einseitigen Einspannung ergibt sich für die Dehnung D in Abhängigkeit vom Abstand x von der Einspannung:

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot (L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}). \tag{4}$$

I steht für das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts Q.

Bei einer zweiseitigen Auflage des Stabes gelten folgende Gleichungen.

Für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ gilt

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot L^2 \cdot x - 4 \cdot x^3) \tag{5}$$

und für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} \cdot (4 \cdot x^3 - 12 \cdot L \cdot x^2 + 9 \cdot L^2 \cdot x - L^3). \tag{6}$$

3 Durchführung

Es wird das Elastizitätsmodul E zweier Stäbe ermittelt. Diese unterscheiden sich im Material und im Querschnitt Q. Der erste Stab hat einen runden Querschnitt, der zweite einen quadratischen. Die einseitige Einspannung soll mit beiden Stäben durchgeführt werden. Bei der beidsseitigen Einspannung wird einer der beiden Stäbe ausgewählt.

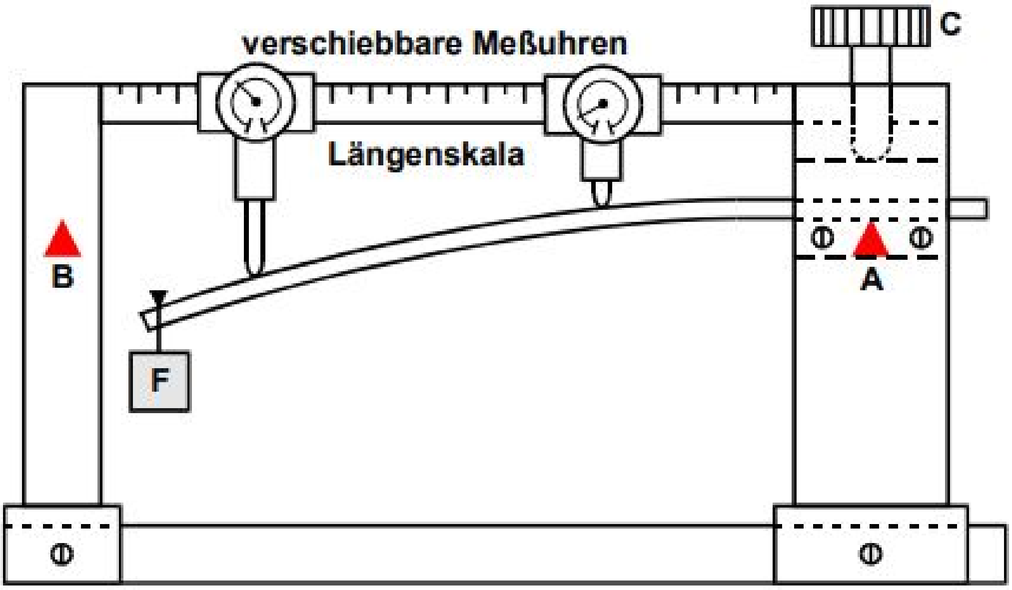


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Apparatur zur Vermessung der elastisch gebogenen Stäbe aus [2].

3.1 Einseitige Einspannung

Der Stab soll wie in Abbildung 1 eingespannt werden. An dem freien Ende greift eine Kraft F an, die den Stab biegt. Da die Stäbe nicht vollkommen gerade sind, wird zuvor eine Nullmessung durchgeführt. Dabei wird in regelmäßigen Abständen x mithilfe von Messuhren die Durchbiegung D_0 ohne angreifende Kraft gemessen. Es wird an 20 Stellen gemessen. Danach wird das Gewicht an das freie Ende des Stabes gehängt und an den gleichen Stellen x die Durchbiegung D_M gemessen. Die Differenz von $D_M(x)$ und $D_0(x)$ ist dann die tatsächliche Durchbiegung $D(x)$.

Für beide Stäbe wird jeweils das angehängte Gewicht m gewogen, die Länge L und die Breite/ der Durchmesser d mithilfe eines Messbandes und der Schieblehre gemessen. Bei der Länge des Stabes wird nur der Teil vom freien Ende bis zur Einspannung in Betracht gezogen. Dabei wird die Messung der Eigenschaften der Stäbe fünf Mal wiederholt.

3.2 Beidseitige Einspannung

Für die beidseitige Einspannung wird der Stab mit dem runden Querschnitt gewählt. Seine Enden werden an den Punkten A und B eingespannt (Abbildung 1). Auch hier wird zuvor eine Nullmessung durchgeführt. Auf beiden Hälften werden an jeweils 7 Stellen mit regelmäßigen Abstand Messungen vorgenommen. Daraufhin wird an die Mitte des Stabes das Gewicht gehängt und erneut die Durchbiegung an den gleichen Stellen x gemessen. Die tatsächliche Durchbiegung $D(x)$ wird wie in 3.1 ermittelt.

Das angehängte Gewicht m wird gewogen und der Abstand zum Aufhängepunkt gemessen.

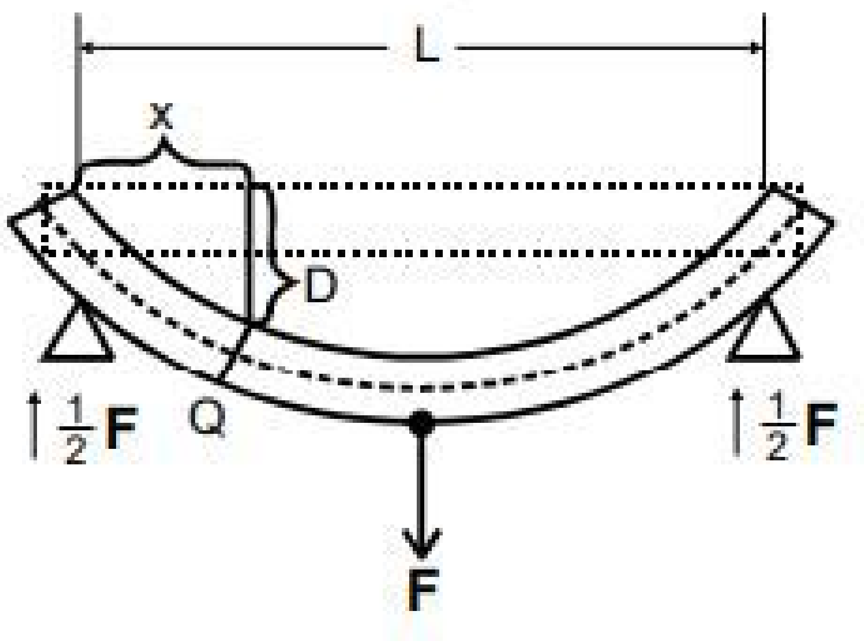


Abbildung 2: Durchbiegung eines Stabes bei zweiseitiger Einspannung nach [2].

4 Auswertung

4.1 Einseitige Einspannung

4.1.1 Eckiger Stab

Die Daten des eckigen Stabes, Länge L, Breite b und Höhe d, ergeben sich zu:

$$L = (60{,}04 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$$
$$b = (1{,}036 \pm 0{,}003)\,\mathrm{cm}$$
$$d = (1{,}016 \pm 0{,}002)\,\mathrm{cm}$$

Das Gewicht, welches benutzt wurde, wiegt:

$$m = 1{,}1003\,\mathrm{kg}$$

Tabelle 1: Die einzelnen Messungen des eckigen Stabes

L / cm	b / cm	d / cm
60	1,03	1,01
60	1,06	1,02
60,1	1,01	1,01
60,1	1,05	1,01
60	1,03	1,03

Für $y = (L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3})$ werden die Messwerte in ein $y - \varDelta D$ -Diagramm eingetragen. Der lineare Zusammenhang wird mit einer Ausgleichsrechnung der Form $\varDelta D(y) = a \cdot x + c$ mit ipython genauer untersucht. Es ergeben sich:

$$a = (4{,}79 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-8}\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2} \qquad c = (0{,}07 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}$$

Nach Vergleich von (4) und der Ausgleichsrechnung folgt, dass sich das Elastizitätsmodul so berechnen lässt:

$$E = \frac{F}{2 \cdot I \cdot a}$$

Für F gilt $F = m \cdot g$ mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, das Flächenträgheitsmoment I errechnet sich zu:

$$I = \frac{b \cdot d}{12}(b^2 + d^2) = (0{,}923 \pm 0{,}070) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

Somit ergibt sich für das Elastizitätsmodul des eckigen Stabes:

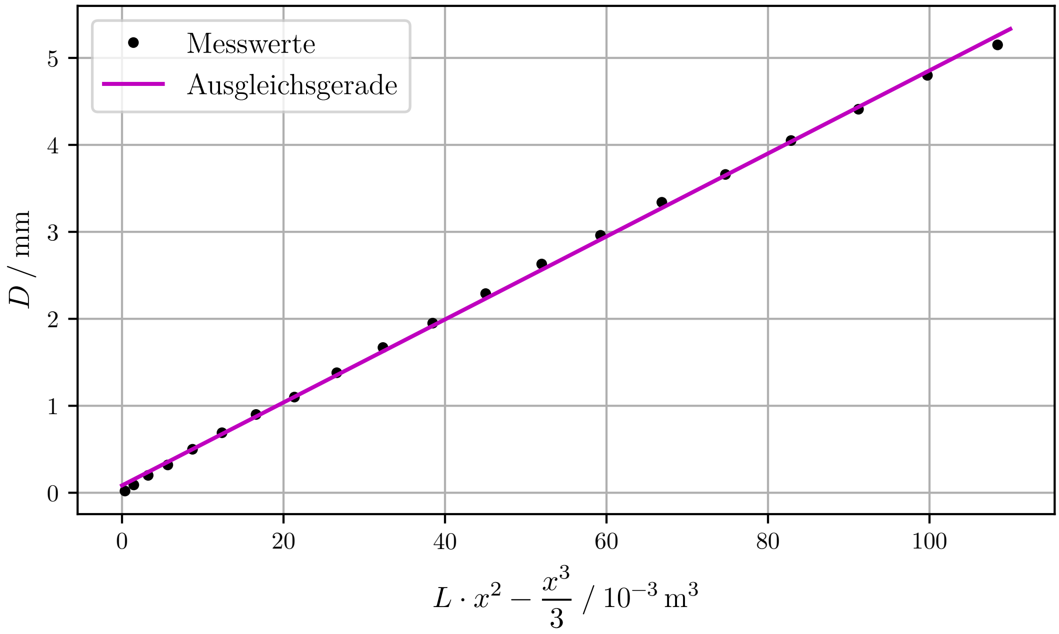
$$E = (122{,}2 \pm 1{,}3) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Vermutlich handelt es sich bei dem eckigen Stab um einen Kupferstab. Der Literaturwert lautet nach [1] $E_{\mathrm{Cu}} = 120\,\mathrm{kN/mm^2} = 120 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2}$. Die Abweichung ergibt sich zu 1,83 %.

Tabelle 2: Messwerte zur einseitigen Einspannung eines eckigen Stabes

x / mm	D_0 / mm	D / mm	ΔD / mm	$Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ / $10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
25	0,73	0,75	0,02	0,37
50	0,75	0,84	0,09	1,46
75	0,78	0,98	0,20	3,24
100	0,83	1,15	0,32	5,67
125	0,94	1,44	0,50	8,73
150	0,98	1,67	0,69	12,38
175	0,14	1,04	0,90	16,60
200	0,22	1,32	1,10	21,35
225	0,38	1,76	1,38	26,60
250	0,54	2,21	1,67	32,32
275	0,28	2,23	1,95	38,47
300	0,37	2,66	2,29	45,04
325	0,40	3,03	2,63	51,97
350	0,41	3,37	2,96	59,26
375	0,47	3,81	3,34	66,85
400	0,55	4,21	3,66	74,73
425	0,64	4,69	4,05	82,86
450	0,73	5,14	4,41	91,21
475	0,82	5,62	4,80	99,74
500	0,82	5,97	5,15	108,43

Abbildung 3: Der eckige Stab unter einseitiger Einspannung.



4.1.2 Runder Stab

Die Länge und der Radius des runden Stabes ergeben sich zu

$$L = (60{,}030 \pm 0{,}008)\,\mathrm{cm} \qquad r = (0{,}5450 \pm 0{,}0006)\,\mathrm{cm},$$

die Masse des Gewichtes zu

$$m = 599{,}6\,\mathrm{g}.$$

Mit den Messwerten aus 4 wurde analog zum eckigen Stab der Auslenkungsunterschied

Tabelle 3: Die einzelnen Messungen des runden Stabes.

L / cm	r / cm
60	1,1
60	1,09
60	1,08
60,1	1,09
60,05	1,09

ΔD, im folgenden mit D benannt, gegen den Ausdruck $L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}$, im folgenden mit y benannt, in einem Diagramm aufgetragen. Es wurde eine Ausgleichsrechnung für

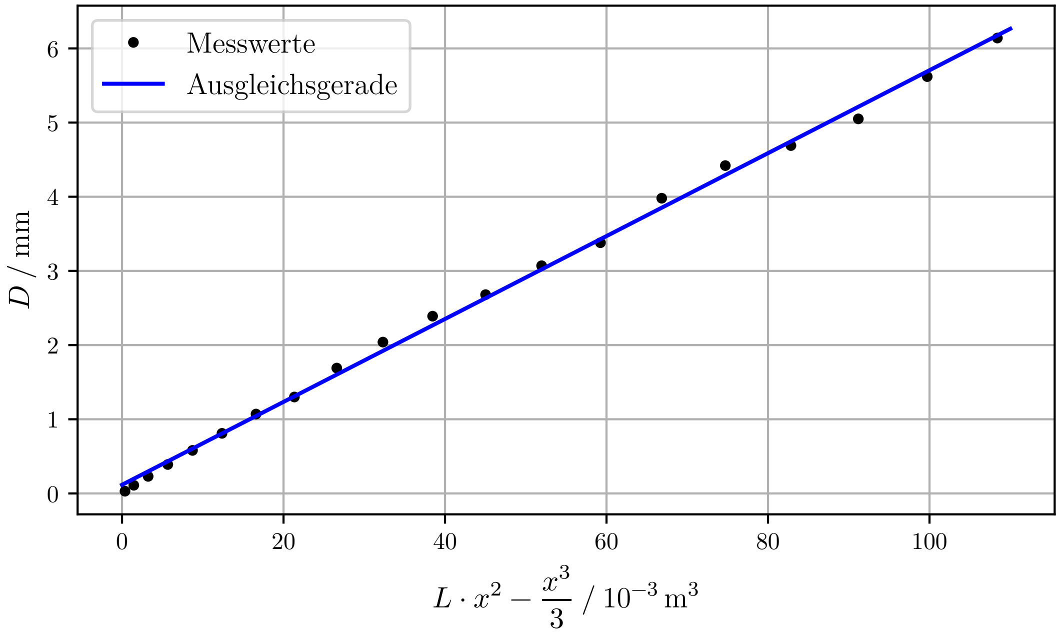
Tabelle 4: Die Messwerte der einseitigen Einspannung eines runden Stabes.

x / mm	D_0 / mm	D / mm	ΔD / mm	$Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ / $10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
25	0,55	0,58	0,03	0,37
50	0,43	0,54	0,11	1,46
75	0,33	0,56	0,23	3,24
100	0,23	0,62	0,39	5,67
125	0,13	0,71	0,58	8,73
150	0,02	0,83	0,81	12,38
175	0,98	2,05	1,07	16,60
200	0,90	2,20	1,30	21,35
225	0,75	2,44	1,69	26,60
250	0,67	2,71	2,04	31,10
275	0,62	3,01	2,39	38,47
300	0,60	3,28	2,68	45,03
325	0,55	3,62	3,07	51,96
350	0,55	3,93	3,38	59,25
375	0,36	4,34	3,98	66,84
400	0,45	4,87	4,42	74,71
425	0,46	5,15	4,69	82,84
450	0,50	5,55	5,05	91,18
475	0,50	6,12	5,62	99,72
500	0,39	6,53	6,14	108,41

einen linearen Zusammenhang $D(y) = a \cdot y + c$ mit ipython durchgeführt. Für die Funktionskonstanten ergeben sich:

$$a = (5{,}59 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-8}\,\frac{1}{\mathrm{mm}^2} \qquad\qquad c = (0{,}12 \pm 0{,}03)\,\mathrm{mm}$$

Abbildung 4: Der runde Stab unter einseitiger Einspannung.



Das Elastizitätsmodul E lässt sich nach (4) wie folgt berechnen:

$$E = \frac{F}{2 \cdot I \cdot a}$$

Für das Flächenträgheitsmoment des runden Stabes ergibt sich

$$I = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = (6{,}93 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \tag{7}$$

und F ist gegeben als $F = m \cdot g$ mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Somit ist

$$E = (75{,}9 \pm 0{,}9) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei dem runden Stab um Messing handelt. Der Literaturwert des Elastizitätsmodul für Messing wird in [1] als Bereich von 78 bis 123 $\mathrm{kN/mm^2}$ angegeben. Der hier errechnete Wert liegt somit knapp unterhalb des Bereiches.

4.2 Beidseitige Einspannung

In dieser Methode wurde nur der runde Stab gemessen. Die Daten des Stabes lauten:

$$L = (60{,}030 \pm 0{,}008)\,\mathrm{cm} \qquad r = (0{,}5450 \pm 0{,}0006)\,\mathrm{cm}$$

Die einzelnen Messungen bezüglich der Länge und des Radius sind hier 3 zu finden. Es wurde ein Gewicht der Masse

$$m = 1099{,}5\,\mathrm{g}$$

benutzt. Dieses lag bei etwa $x = 275\,\mathrm{mm}$ auf.

Tabelle 5: Der runde Stab bei beidseitiger Einspannung.

x / mm	D_0 / mm	D / mm	ΔD / mm	$3L^2x - 4x^3$ / $10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
25	0,48	0,50	0,02	26,96
50	0,45	0,50	0,05	53,55
100	0,39	0,54	0,15	104,11
150	0,24	0,55	0,31	148,66
200	0,08	0,56	0,48	184,22
220	0,97	1,58	0,61	195,25
250	0,96	1,59	0,63	207,77
x / mm	D_0 / mm	D / mm	ΔD / mm	$4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ / $10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
300	0,53	1,36	0,83	216,32
325	0,52	1,32	0,80	214,16
350	0,39	1,27	0,88	207,87
400	0,30	1,20	0,90	184,40
450	0,29	1,08	0,79	148,91
500	0,23	1,11	0,88	104,40
520	0,30	0,68	0,38	84,74

Die eigentliche Auslenkung ΔD wird im folgenden D genannt und in einem Diagramm gegen y aufgetragen. Mit ipython wird eine Ausgleichsrechnung der Form $D(y) = a \cdot y + c$ gemacht.
Für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ ist $y = 3L^2x - 4x^3$ und die Funktionskonstanten:

$$a_1 = (3{,}5 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \qquad c_1 = (-0{,}14 \pm 0{,}06)\,\mathrm{mm}$$

Für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ ist $y = 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ und die Funktionskonstanten ergeben sich zu:

$$a_2 = (2{,}0 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \qquad c_2 = (0{,}44 \pm 0{,}21)\,\mathrm{mm}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt, dass sich das Elastizitätsmodul wie folgt berechnen

Abbildung 5: Der runde Stab unter beidseitiger Einspannung für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

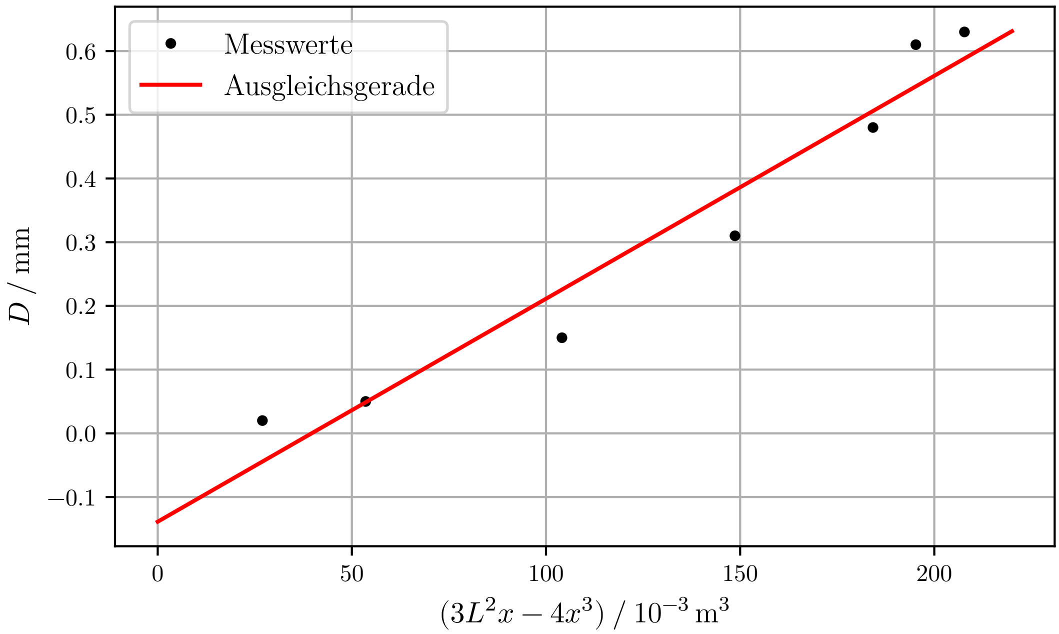
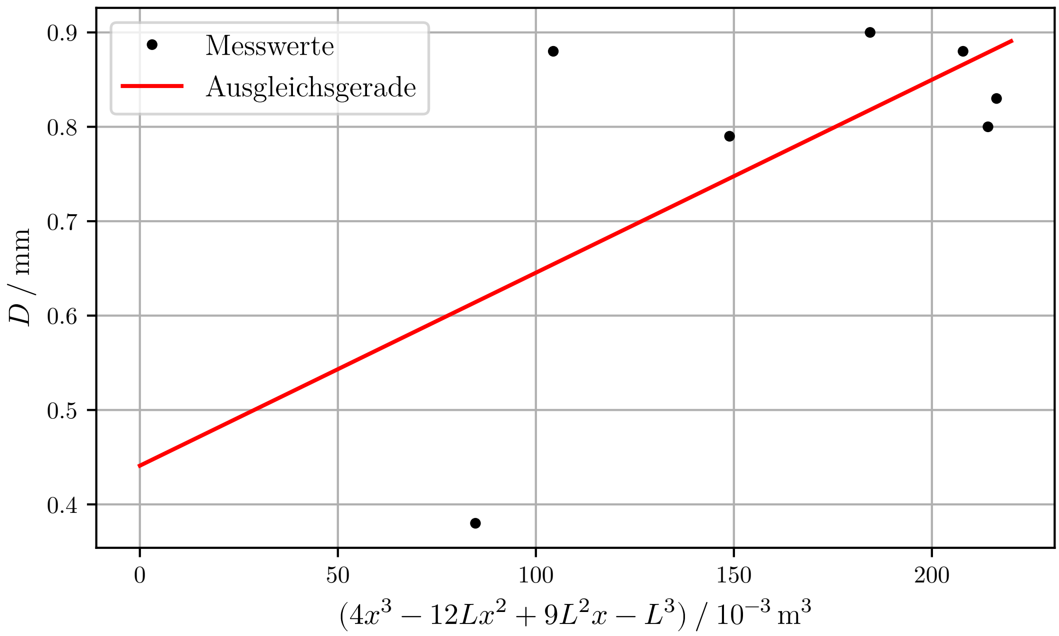


Abbildung 6: Der runde Stab unter beidseitiger Einspannung für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.



lässt:

$$E = \frac{F}{48 \cdot I \cdot a}$$

Dabei ist $F = m \cdot g$ und I aus (7) bekannt.

$$E_1 = (93 \pm 10) \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$E_2 = (160 \pm 90) \cdot 10^9 \,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Der Literaturwert vom Elastizitätsmodul von Messing kann laut [1] 78 bis $123\,\mathrm{kN/mm^2}$ betragen. Der errechnete Wert E_1 liegt in diesem Bereich, der Wert von E_2 deutlich oberhalb des Bereiches.

5 Diskussion

Die Abweichungen der errechneten Werte zu den Literaturwerten ist nicht sehr aussagekräftig, da das Material der Probekörper nur vermutet wurde. Außerdem lässt sich für Messing nur ein Bereich finden, in dem sich das Elastizitätsmodul befindet, kein konkreter Wert. Dadurch kann keine prozentuale Abweichung vom Literaturwert angegeben werden.

Abweichungen können auf Ungenauigkeit der Messuhren und Ablesefehler zurückgeführt werden. Die Gewichte wurden während der Messung nicht verändert und waren nicht groß genug, sodass die Auslenkung oft kleiner als $3\,\mathrm{mm}$ waren. Dann kann dort die Kleinwinkelnäherung nicht greifen. Der Unterschied zwischen $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ und $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ bei der beidseitigen Einspannung ist eventuell damit zu erklären, dass die Enden unterschiedlich fest eingespannt wurden. Der große Fehler von E_2 ist ein Indiz dafür, dass die Messung in diesem Bereich nicht genau war.

6 Anhang

Fragen: mit allen alles Materialien

1

V103

Gewicht einseitig: 599,6g

goldener Stab / vermutl. Messing

Länge in cm 60 ; 60 , 60 , 60,1 , 60,05

Durchmesser in cm 1,1 1,09 1,08 1,09 1,09

1. Umdrehung →

hier Gewicht 1099,5 g →

X in cm	D_0 in mm	D in mm	D_1 in mm	D in mm
2,5	0,55	0,58	0,48	0,50
5	0,43	0,54	0,45	0,50
7,5	0,33	0,56		
10	0,23	0,62	0,39	0,54
12,5	0,13	0,71		
15	0,02	0,83	0,24	0,55
17,5	0,98	2,05		
20	0,90	2,20	0,08	0,56
22,5	0,75	2,44	0,97	1,58
25	0,67	2,71	0,96	1,59
27,5	0,62	3,01		
30	0,60	3,28	0,53	1,36
32,5	0,55	3,62	0,52	1,32
35	0,55	3,93	0,39	1,27
37,5	0,36	4,34		
40	0,45	4,87	0,30	1,20
42,5	0,46	5,15		
45	0,50	5,55	0,29	1,08
47,5	0,50	6,12		
50	0,39	6,53	0,23	1,11
52,5			0,30	0,68

einseitig eingespannt

eckiger Stab verm. Kupfer einseitig: Gewicht: 1100,3 g

Länge in cm:	60	60	60,1	60,1	60
Breite in cm:	1,03	1,06	1,01	1,05	1,03
Tiefe in cm	1,01	1,02	1,01	1,01	1,03

x in cm	D_0 in mm	D in mm
2,5	0,73	0,75
5	0,75	0,84
7,5	0,78	0,98
10	0,83	1,15
12,5	0,94	1,44
15	0,98	1,67
17,5	0,14	1,04
20	0,22	1,32
22,5	0,38	1,76
25	0,54	2,21
27,5	0,28	2,23
30	0,37	2,66
32,5	0,40	3,03
35	0,41	3,37
37,5	0,47	3,81
40	0,55	4,21
42,5	0,64	4,69
45	0,73	5,14
47,5	0,82	5,62
50	0,82	5,97

einseitig

24.11.2020

Literatur

[1] *Elastizitätsmodul.* URL: `https://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html` (besucht am 01. 12. 2020).

[2] TU Dortmund Fakultät Physik. *Versuchsanleitung zum Versuch 103 - Biegung elastischer Stäbe.* 2020.