

V103

Biegung elastischer Stäbe

Julian Hochhaus
julian.hochhaus@tu-dortmund.de

Niko Salewski
niko.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.01.2017

Abgabe: 24.01.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Berechnung der Durchbiegung eines homogenen Stabes	3
3 Fehlerrechnung	5
4 Durchführung	5
4.1 Messung der Durchbiegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung . . .	6
4.2 Messung der Durchbiegung eines Stabes bei zweiseitiger Einspannung . .	7
4.3 Ermittlung der Eigenschaften der Stäbe	7
5 Auswertung	7
5.1 Bestimmung der Stabmaterialien	7
5.2 Durchbiegung des eckigen Stabs (Aluminium) bei einseitiger Einspannung	7
5.3 Durchbiegung des runden Stabs (Messing) bei einseitiger Einspannung . .	10
5.4 Durchbiegung des Stabes bei beidseitiger Einspannung	12
6 Diskussion	16
Literatur	16

1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch wird über die Durchbiegung von verschiedenen elastischen Stäben ihr jeweiliges Elastizitätsmodul bestimmt. Für die verwendeten Probestäbe wird zudem die Dichte ermittelt und über diese wird der experimentell bestimmte Elastizitätsmodul mit den Literaturwerten der entsprechenden Materialien verglichen.

2 Theorie

In der Werkstofftechnik stellt der Elastizitätsmodul E einen wichtigen Materialkennwert dar. Der Elastizitätsmodul ist ein Faktor, welcher die Gestaltsdeformation eines Körpers unter Wirkung einer Normalspannung oder eines Druckes σ beschreibt.

Allgemein werden Kräfte, welche an der Oberfläche eines Körpers angreifen, als Spannung bezeichnet.

Als Schub- oder Tangentialspannung wird hierbei die oberflächenparallele Komponente, als **Normalspannung** σ die zur Oberfläche senkrechte Komponente der Spannung, bezeichnet.

Ist die, durch die Normalspannung verursachte, relative Änderung einer linearen Körperdimension (zum Beispiel einer Länge L) hinreichend klein, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der angreifenden Spannung σ und der relativen Änderung $\frac{\Delta L}{L}$ mit dem Elastizitätsmodul E als Proportionalitätsfaktor.

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \quad (1)$$

Dieser Zusammenhang wird als **Hooksches Gesetz** bezeichnet.

Falls die Längenänderung ΔL direkt genau bestimmt werden kann, könnte prinzipiell nach Formel (1) der Elastizitätsmodul bestimmt werden. Dafür sind allerdings hochpräzise Messgeräte notwendig. Daher wird in diesem Versuch der Elastizitätsmodul über die Biegung eines Probestabes – bedingt durch eine angreifende Kraft – untersucht.

Die Durchbiegung $D(x)$ ist bei ansonsten unveränderten Eigenschaften des Probestabes relativ groß gegenüber ΔL und lässt daher auch bei weniger präzisen Messgeräten eine Bestimmung des Elastizitätsmoduls E zu.

2.1 Berechnung der Durchbiegung eines homogenen Stabes

Greift am Stabende eine Kraft F an, so verursacht diese auf jedem Querschnitt Q des Probestabes ein Drehmoment M_F , sodass der Stab aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird. Das Drehmoment M_F ergibt sich hierbei aus dem Produkt zwischen dem Hebelarm für den betrachteten Querschnitt Q des Stabes und angreifender Kraft F .

Aufgrund dieser Durchbiegung der Probe treten in dieser Normalspannungen auf, die der Deformation entgegenwirken. In den oberen Schichten des Stabes treten Zugspannungen auf, in den unteren Schichten entsprechend Druckspannungen.

Mittig des Stabes (in Abbildung 1 durch eine gestrichelte Linie dargestellt) liegt die sogenannte **neutrale Faser**. In dieser treten keine Spannungen auf. Da die Zug- und

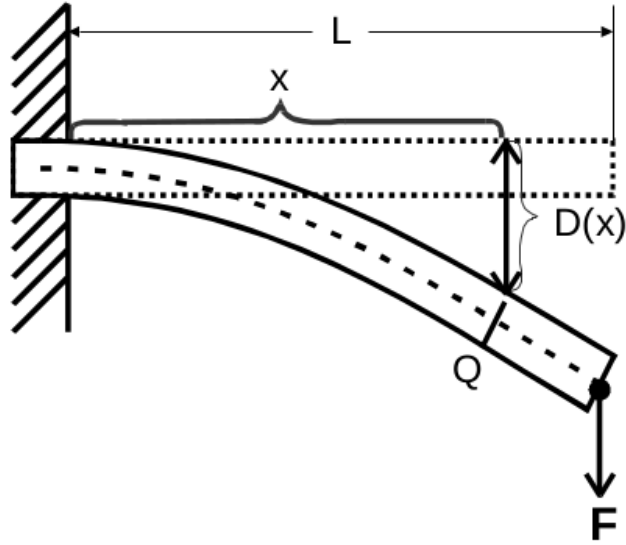


Abbildung 1: Durchbiegung des einseitig eingespannten Stabes bei angreifender Kraft F am anderen Stabende. [4]

Druckspannung an jedem Querschnitt Q des Probestabes entgegengesetzt gleich sind, erzeugen sie ein Drehmoment M auf Q . Die Durchbiegung $D(x)$ erreicht einen stationären Zustand, wenn M_F und M übereinstimmen.

Da M das Integral des Produkts aus y und $\sigma(y)$ über den Querschnitt Q des Stabes ist, ergibt sich

$$M_F = M \Rightarrow F(L - x) = \int_Q y \cdot \sigma(y) dq. \quad (2)$$

Das dq ist hierbei das Flächenelement mit Abstand y von der neutralen Faser.

Die Normalspannung $\sigma(y)$ lässt sich durch das Hooksche Gesetz (1) bestimmen.

Unter Verwendung (differential-) geometrischer Überlegungen lässt sich Gleichung (2) schreiben als

$$F(L - x) = E \frac{d^2}{dx^2} \int_Q y^2 dq = I \cdot E \frac{d^2}{dx^2}. \quad (3)$$

Analog zum Massenträgheitsmoment θ wird I als **Flächenträgheitsmoment** definiert. Die Integration von Gleichung (3) liefert somit sofort einen Ausdruck für die Auslenkung D in Abhängigkeit zu x

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (4)$$

Hierbei ist L die Länge des Stabes vom eingespannten Ende bis zum Punkt, an dem die Kraft F angreift und x ist der Abstand zwischen dem Einspannpunkt und dem Messpunkt (vgl. Abbildung 1).

Greift die Kraft F bei beidseitiger Einspannung in der Mitte des Stabes an, wirkt nur noch die halbe Kraft an der Querschnittsfläche Q . Für die beiden Stabhälften wirken unterschiedliche Drehmomente M_F und für die Durchbiegung ergeben sich die beiden Gleichungen

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad (5)$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \text{ für } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \quad (6)$$

3 Fehlerrechnung

Alle berechneten Mittelwerte werden mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (7)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwerts bestimmt sich mit:

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Wenn fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel weiter verwendet werden, so wird der sich fortpflanzende Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (9)$$

Die Regression von Polynomen und Ausgleichsgrade, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler werden mit IPython 5.1.0 mittels Scipy 0.18.1 [5] durchgeführt. Parameter eventueller Ausgleichsgeraden

$$y = a \cdot x + b. \quad (10)$$

werden bestimmt über

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (11)$$

$$b = \frac{\overline{x^2y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (12)$$

4 Durchführung

In dem Versuch soll die Durchbiegung $D(x)$ von drei Stäben in Abhängigkeit vom horizontalen Abstand x zum Ort der Einspannung bestimmt werden. Davon werden zwei Stäbe bei einseitiger Einspannung (einer mit zylindrischem und einer mit quadratischem Querschnitt) und ein Weiterer bei beidseitiger Einspannung vermessen.

Die dazu verwendete Apparatur ist in Abbildung 2 dargestellt.

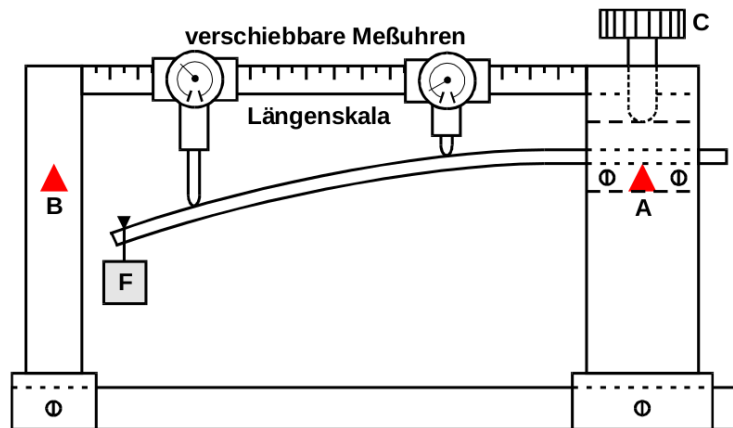


Abbildung 2: Messapparatur zur Bestimmung der Durchbiegung $D(x)$ in Abhängigkeit von Entfernung x zum Einspannungsort. [4]

4.1 Messung der Durchbiegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Für die einseitige Einspannung wird der zu messende Stab in die Spannvorrichtung C geschoben und mit dem Feststellrad befestigt.

Zur Messung der Durchbiegung werden zwei verschiebbare Messuhren verwendet, wobei bei der einseitigen Einspannung eine Messuhr genügt. Die zweite Messuhr wird an das andere Ende der Längenskala verschoben. Die Messuhren haben einen Messbereich von 0,01 mm bis 10 mm. Weiterhin gibt es zwei Skalen. Auf der kleineren wird der aktuelle Millimeter angezeigt und auf der größeren die beiden Nachkommastellen, wobei ein Teilstrich auf der Längenskala 10 μm entspricht. Es wird an jedem Zentimeter auf der Längenskala die Durchbiegung des Stabes an der entsprechenden Stelle auf der Messuhr abgelesen.

Für jeden Stab werden zwei Messdurchgänge – einer ohne Last und einer mit Last – durchgeführt, da nicht von einer exakt symmetrischen Form der Stäbe ausgegangen werden kann und die Eigenmasse der Stäbe eine Auslenkung ohne angehängt Last hervorruft. Damit ergibt sich die effektive Durchbiegung $D(x)$ zu

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x), \quad (13)$$

mit der Durchbiegung des eingespannten Stabes mit Last $D_M(x)$ und der Durchbiegung des eingespannten Stabes ohne Last $D_0(x)$. Hierbei ist zu beachten, dass die Messung ohne Last zuvor durchgeführt wird, um das Phänomen der elastischen Nachwirkung [3] und damit einhergehende Fehler zu vermeiden.

Die Last wird an einer Halterung am nicht eingespannten Ende des Stabes befestigt. Weiterhin werden die verwendeten Gewichte über eine Drehschraube befestigt. Des Weiteren ist die Last so groß zu wählen, dass am Angriffspunkt der Last eine Durchbiegung zwischen 3 mm und 7 mm zu messen ist.

4.2 Messung der Durchbiegung eines Stabes bei zweiseitiger Einspannung

Zur Messung der zweiseitigen Einspannung wird der zu messende Stab auf die beiden Auflagepunkte A und B gelegt (vgl. Abbildung 2).

Weiterhin werden bei dieser Messung beide Messuhren benötigt und die Last wird genau zwischen den beiden Messpunkten A und B angebracht. Auch hier ist auf eine Durchbiegung im Bereich zwischen 3 mm und 7 mm am Angriffspunkt der Last zu achten.

Der Messvorgang funktioniert analog zur Messung beim einseitig eingespanntem Stab.

4.3 Ermittlung der Eigenschaften der Stäbe

Außerdem werden die geometrischen Eigenschaften der Stäbe bestimmt.

Die Länge der Stäbe wird mit einem Maßband gemessen. Zusätzlich wird mit einer Schieblehre der Durchmesser beziehungsweise die Kantenlänge des Querschnitts der Stäbe an mehreren Stellen bestimmt. Zuletzt werden mit einer elektronischen Waage die Massen der Stäbe und der angebrachten Lasten ermittelt.

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Stabmaterialien

Die Materialien der beiden verwendeten Probestäbe werden über ihre Dichte bestimmt. Das Volumen des eckigen Stabes ergibt sich mit der Länge des Stabes $L_{\text{eckig}} = 60 \text{ cm}$ und der Kantenlänge des Querschnitts $a_{\text{eckig}} = 1 \text{ cm}$ zu $V_{\text{eckig}} = 60 \text{ cm}^3$.

Mit der Masse des Stabes $m_{\text{eckig}} = 167.1 \text{ g}$ ergibt sich die Dichte zu

$$\rho_{\text{eckig}} = \frac{m_{\text{eckig}}}{V_{\text{eckig}}} = 2.785 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (14)$$

Aufgrund der silbernen Farbe und dem relativ geringen Gewicht des Probestabs wird vermutet, dass dieser aus Aluminium ist.

Diese Vermutung wird bestätigt durch einen Vergleich mit dem Literaturwert der Dichte für Aluminium.

Dieser liegt bei $\rho_{\text{Aluminium}} = 2.712 \text{ g/cm}^3$. [7]

Für den runden Stab ergibt sich nach dem gleichen Prinzip, mit dem Durchmesser $d_{\text{rund}} = 1 \text{ cm}$ und der Stablänge $L_{\text{rund}} = 55 \text{ cm}$ bei einem Gewicht von $m_{\text{rund}} = 360.5 \text{ g}$, die Dichte zu $\rho_{\text{rund}} = 8.346 \text{ g/cm}^3$.

Anhand der gelblichen Farbe des Probestabs wird vermutet, dass dieser aus Messing ist. Mit dem Literaturwert von $\rho_{\text{Messing}} = 8.4 \text{ g/cm}^3$ nach [7] bestätigt sich die Vermutung.

5.2 Durchbiegung des eckigen Stabs (Aluminium) bei einseitiger Einspannung

Die Gesamtauslenkung $D(x)$ des Stabes ergibt sich als Differenz aus $D_{\text{M}}(x) - D_0(x)$. Die Messdaten für jeden Messpunkt x finden sich in Tabelle 1. Hierbei bezeichnet x den Abstand zum Einspannpunkt.

Tabelle 1: Messergebnisse für die Durchbiegung des Aluminiumstabes bei einseitiger Einspannung.

x /cm	$D_0(x)$ /mm	$D_M(x)$ /mm	$D(x)$ /mm
3	0.00	0.05	0.05
4	-0.03	0.06	0.09
5	-0.07	0.05	0.12
6	-0.09	0.07	0.16
7	-0.11	0.08	0.19
8	-0.14	0.12	0.26
9	-0.15	0.15	0.30
10	-0.14	0.23	0.37
11	-0.12	0.33	0.45
12	-0.06	0.46	0.52
13	0.02	0.60	0.58
14	0.09	0.75	0.66
15	0.14	0.90	0.76
16	0.22	1.08	0.86
17	0.30	1.27	0.97
18	0.40	1.47	1.07
19	0.48	1.66	1.18
20	0.58	1.88	1.30
21	0.68	2.11	1.43
22	0.79	2.33	1.54
23	0.90	2.52	1.62
24	1.02	2.78	1.76
25	1.11	3.01	1.90
26	1.21	3.22	2.01
27	1.31	3.48	2.17
28	1.42	3.70	2.28
29	1.51	3.95	2.44
30	1.62	4.21	2.59
31	1.72	4.46	2.74
32	1.84	4.70	2.86
33	1.93	4.96	3.03
34	2.06	5.23	3.17
35	2.14	5.55	3.41
36	2.31	5.74	3.43
37	2.34	6.01	3.67
38	2.45	6.33	3.88

Weiter auf der nächsten Seite

Tabelle 1: Fortsetzung: Messergebnisse für die Durchbiegung des Aluminiumstabes bei einseitiger Einspannung.

x /cm	$D_0(x)$ /mm	$D_M(x)$ /mm	$D(x)$ /mm
39	2.56	6.57	4.01
40	2.67	6.86	4.19
41	2.78	7.13	4.35
42	2.89	7.40	4.51
43	2.99	7.70	4.71
44	3.13	7.98	4.85
45	3.22	8.23	5.01
46	3.36	8.53	5.17
47	3.47	8.82	5.35
48	3.57	9.02	5.45

Der Elastizitätsmodul wird nach Gleichung (4) über eine lineare Regression $y = a \cdot x$ nach Formel (10) mittels Scipy [5] bestimmt.

Dafür wird die Auslenkung $D(x)$ gegen $(L_{\text{eckig}}) \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen. Diese ist in Abbildung 3 mit den zugehörigen Messdaten aufgetragen.

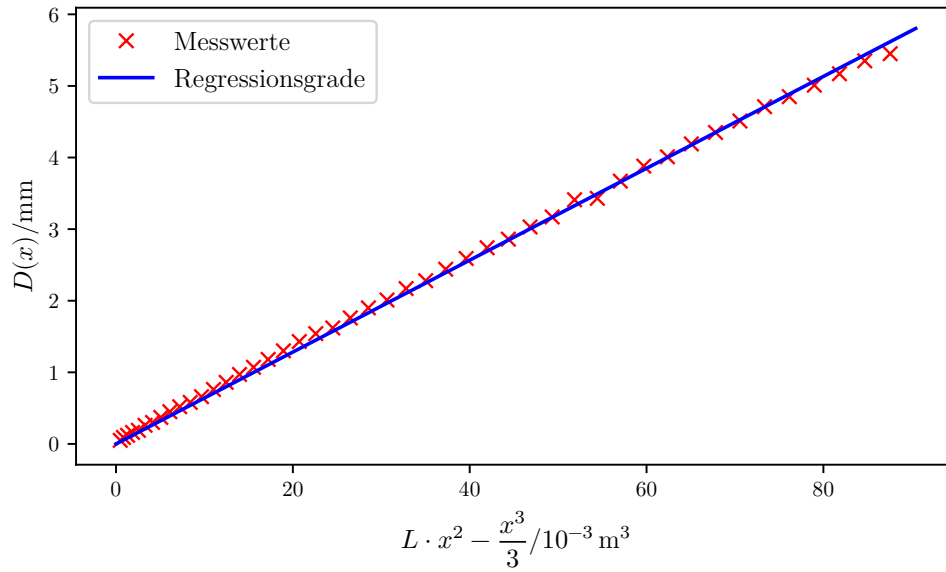


Abbildung 3: Durchbiegung $D(x)$ des Aluminiumstabes aufgetragen gegen $L_{\text{eckig}}x^2 - \frac{x^3}{3}$

Für den Parameter a ergibt sich

$$a = (64.16 \pm 0.20) 1 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich der Zusammenhang

$$a = \frac{F}{2EI} = \frac{m_{\text{Last}} \cdot g}{2EI} \Rightarrow E = \frac{m_{\text{Last}} \cdot g}{2I \cdot a}. \quad (15)$$

Für das Flächenträgheitsmoment I ergibt sich nach [6]

$$I_{\text{eckig}} = \frac{(a_{\text{eckig}})^4}{12} = 8.34 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4. \quad (16)$$

Mit der Erdanziehung $g = (9.811899 \pm 0.000041) \text{ m/s}^2$ (für Dortmund) nach [1] und der Masse der Last $m_{\text{Last}} = 767.4 \text{ g}$ ergibt sich der Elastizitätsmodul zu

$$E_{\text{Alu}} = (70.42 \pm 0.22) \text{ GPa}.$$

5.3 Durchbiegung des runden Stabs (Messing) bei einseitiger Einspannung

Der Elastizitätsmodul für den Messingsstab ergibt sich nach dem gleichen Prinzip wie beim Aluminiumstab. Die Messpunkte im Abstand x von der Einspannung samt den zugehörigen Auslenkungen ohne Belastung $D_0(0)$ und der Auslenkung mit angehängtem Gewicht $D_M(x)$ sowie der Differenz $D(x)$ sind in Tabelle 2 zu finden.

Tabelle 2: Messergebnisse für die Durchbiegung des Messingstabs bei einseitiger Einspannung.

x /cm	$D_0(x)$ /mm	$D_M(x)$ /mm	$D(x)$ /mm
3	0.00	0.08	0.08
4	-0.04	0.05	0.09
5	-0.05	0.07	0.12
6	-0.09	0.10	0.19
7	-0.10	0.12	0.22
8	-0.13	0.12	0.25
9	-0.17	0.19	0.36
10	-0.17	0.24	0.41
11	-0.18	0.32	0.50
12	-0.19	0.39	0.58
13	-0.19	0.44	0.63
14	-0.18	0.52	0.70
15	-0.18	0.60	0.78
16	-0.19	0.73	0.92
17	-0.16	0.79	0.95
18	-0.20	0.89	1.09
19	-0.19	1.01	1.20

Weiter auf der nächsten Seite

Tabelle 2: Fortsetzung: Messergebnisse für die Durchbiegung des Messingstabs bei einseitiger Einspannung.

x /cm	$D_0(x)$ /mm	$D_M(x)$ /mm	$D(x)$ /mm
20	-0.19	1.20	1.39
21	-0.18	1.28	1.46
22	-0.17	1.38	1.55
23	-0.13	1.50	1.63
24	-0.13	1.63	1.76
25	-0.11	1.79	1.90
26	-0.07	1.91	1.98
27	-0.07	2.05	2.12
28	-0.05	2.22	2.27
29	-0.03	2.37	2.40
30	-0.01	2.54	2.55
31	0.03	2.71	2.68
32	0.03	2.84	2.81
33	0.06	2.97	2.91
34	0.06	3.12	3.06
35	0.07	3.30	3.23
36	0.08	3.47	3.39
37	0.11	3.65	3.54
38	0.13	3.81	3.68
39	0.15	3.98	3.83
40	0.18	4.14	3.96
41	0.24	4.30	4.06
42	0.24	4.57	4.33
43	0.29	4.66	4.37
44	0.30	4.83	4.53
45	0.35	5.01	4.66
46	0.41	5.20	4.79
47	0.42	5.45	5.03
48	0.47	5.58	5.11
49	0.52	5.79	5.27

Eine lineare Regression mittels Scipy [5] für Gleichung (4) nach Formel (10) für $D(x)$ gegen $L_{\text{eckig}} \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}$ befindet sich in Abbildung 4.

Der Regressionsparameter a wird erneut zur Berechnung von E verwendet. Es ergibt sich

$$a = (69.48 \pm 0.39) \, 1 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Mit Gleichung (4) ergibt sich

$$E = \frac{m_{\text{Last}} \cdot g}{2I \cdot a}. \quad (17)$$

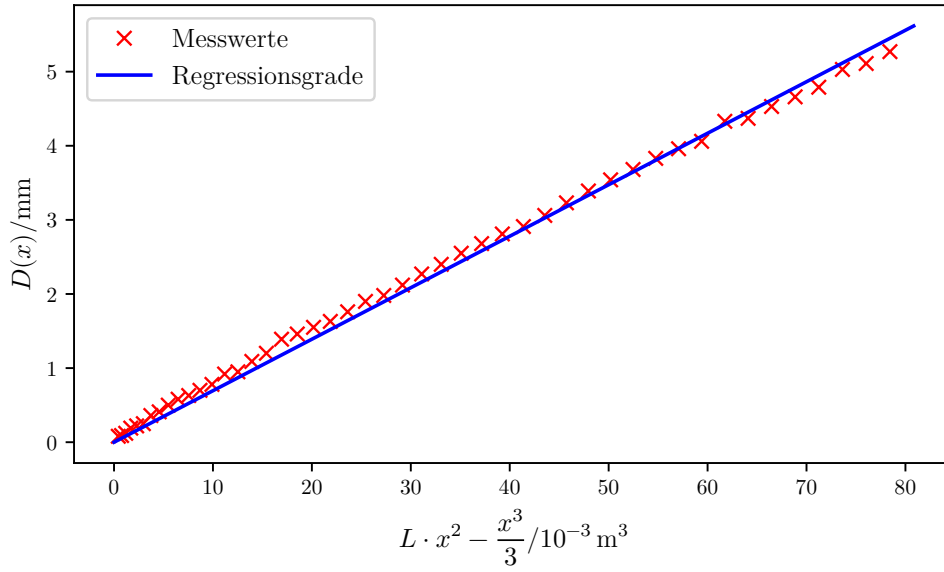


Abbildung 4: Durchbiegung $D(x)$ des Messingstabes aufgetragen gegen $L_{\text{eckig}}x^2 - \frac{x^3}{3}$

Mit [6] ergibt sich für das Flächenträgheitsmoment

$$I_{\text{rund}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_{\text{rund}}}{2} \right)^4 = 4.91 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4. \quad (18)$$

Mit der Erdanziehung $g = (9.811899 \pm 0.000041) \text{ m/s}^2$ nach [1] und der Masse der Last $m_{\text{Last}} = 520.9 \text{ g}$ ergibt sich der Elastizitätsmodul zu

$$E_{\text{Messing}} = (74.9 \pm 0.4) \text{ GPa}.$$

5.4 Durchbiegung des Stabes bei beidseitiger Einspannung

Die Messpunkte im Abstand x mit den zugehörigen Auslenkungen ohne Belastung ($D_0(x)$), mit Belastung (D_M) und der Differenz $D(x)$ sind in Tabelle 3 aufgetragen.

Tabelle 3: Messergebnisse für die Durchbiegung eines Stabes bei beidseitiger Einspannung.

x / cm	$D_0(x) / \text{mm}$	$D_M(x) / \text{mm}$	$D(x) / \text{mm}$
0	1.00	1.09	0.09
1	0.99	1.23	0.24
2	0.98	1.38	0.40
Weiter auf der nächsten Seite			

Tabelle 3: Fortsetzung: Messergebnisse für die Durchbiegung eines Stabes bei beidseitiger Einspannung.

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_M(x)$ / mm	$D(x)$ / mm
3	0.96	1.52	0.56
4	0.97	1.68	0.71
5	0.96	1.84	0.88
6	0.96	1.97	1.01
7	0.95	2.12	1.17
8	0.97	2.26	1.29
9	0.95	2.40	1.45
10	0.95	2.53	1.58
11	0.93	2.64	1.71
12	0.93	2.77	1.84
13	0.93	2.90	1.97
14	0.91	3.00	2.09
15	0.90	3.09	2.19
16	0.89	3.19	2.30
17	0.88	3.28	2.40
18	0.86	3.35	2.49
19	0.84	3.42	2.58
20	0.83	3.48	2.65
21	0.81	3.53	2.72
22	0.79	3.58	2.79
23	0.78	3.60	2.82
24	0.70	3.64	2.94
25	0.70	3.65	2.95
26	0.67	3.65	2.98
27	0.65	—	—
28	1.48	4.41	2.93
29	1.46	4.38	2.92
30	1.44	4.34	2.90
31	1.41	4.29	2.88
32	1.40	4.22	2.82
33	1.38	4.15	2.77
34	1.35	4.06	2.71
35	1.33	3.96	2.63
36	1.31	3.85	2.54
37	1.28	3.73	2.45
38	1.26	3.61	2.35
39	1.23	3.49	2.26
Weiter auf der nächsten Seite			

Tabelle 3: Fortsetzung: Messergebnisse für die Durchbiegung eines Stabes bei beidseitiger Einspannung.

x / cm	$D_0(x)$ / mm	$D_M(x)$ / mm	$D(x)$ / mm
40	1.25	3.37	2.12
41	1.18	3.25	2.07
42	1.17	3.10	1.93
43	1.15	2.95	1.80
44	1.14	2.80	1.66
45	1.12	2.64	1.52
46	1.11	2.49	1.38
47	1.09	2.34	1.25
48	1.08	2.19	1.11
49	1.09	2.02	0.93
50	1.06	1.85	0.79
51	1.05	1.70	0.65
52	1.05	1.54	0.49

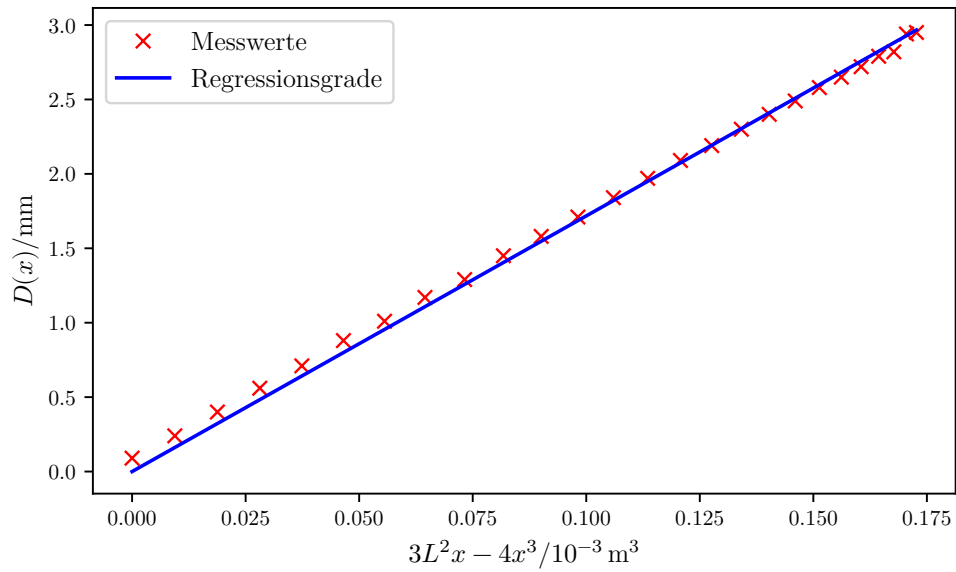


Abbildung 5: Durchbiegung $D(x)$ des beidseitig eingespannten Aluminiumstabes aufgetragen gegen das Polynom $3L^2x - 4x^3$ für $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

Die Durchbiegung $D(x)$ an den Messpunkten $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ – also $0 \text{ cm} \leq x \leq 26 \text{ cm}$ – ist in Abbildung 5 gemäß Formel (5) gegen das Polynom $3L^2x - 4x^3$ aufgetragen.

Die Regressionsgerade der Form

$$D(x) = a \cdot x,$$

mit $a = \frac{F}{48EI}$ gemäß Formel (5), wurde mit Scipy [5] berechnet. Für den Parameter a ergibt sich:

$$a = (17.18 \pm 0.08) 1 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Damit erhält man den Elastizitätsmodul E zu

$$E = (67.4 \pm 0.03) \text{ GPa}.$$

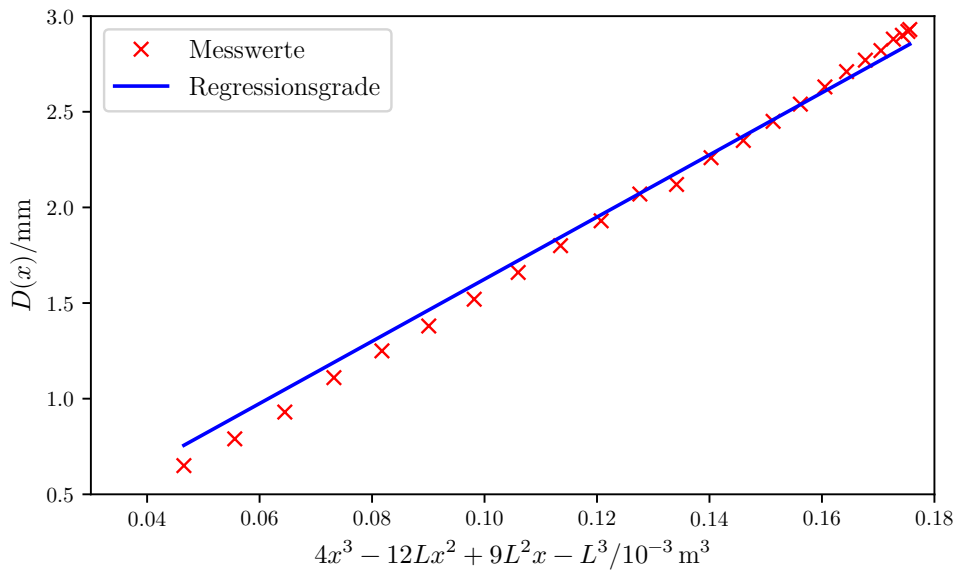


Abbildung 6: Durchbiegung $D(x)$ des beidseitig eingespannten Aluminiumstabes aufgetragen gegen das Polynom $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

Die Regressionsgerade nach Formel (6) für die zweite Hälfte des beidseitig eingespannten Stabes – also für die Messpunkten $28 \text{ cm} \leq x \leq 52 \text{ cm}$ – mit den zugehörigen Messwerten ist in Abbildung 6 dargestellt. Für die Steigung der a der Regressionsgerade ergibt sich

$$a = (16.2 \pm 0.1) 1 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Damit erhält man für den Elastizitätsmodul E analog zur ersten Hälfte nach Formel (6) den Wert

$$E = (71.3 \pm 0.4) \text{ GPa}.$$

6 Diskussion

Da es sehr viele verschiedene Kupfer-Zink-Legierungen mit unterschiedlicher Zusammensetzung gibt, ist es nicht möglich, einen eindeutigen Literaturwert für den Messingstab zu finden, da dessen genaue Legierung unbekannt ist. Es wird allerdings vermutet, dass der verwendete Messingstab aufgrund der errechneten Dichte ρ einen relativ hohen Zinkanteil hat. Daher wird als Literaturwert für den Elastizitätsmodul E auch ein Wert für Messing mit hohem Zinkanteil herangezogen.

Allgemein lässt sich sagen, dass die bestimmten Elastizitätsmoduln sehr nah an den Literaturwert liegen. Während des Experiments wurde allerdings festgestellt, dass die sehr empfindlichen Messuhren zur Messung der Auslenkung eine mögliche Fehlerquelle darstellen. Stöße an den Tisch oder auch eine leichte Verdrehung des Laufrads des Taststifts führen so leicht zu Messfehlern.

Ein Vergleich des bestimmten Elastizitätsmodul des runden Stabs (Messing) $E_{\text{Messing}} = (74.9 \pm 0.4) \text{ GPa}$ mit dem Literaturwert nach [2] $E_{\text{Theorie}} = 78 \text{ GPa}$ zeigt, dass der bestimmte E-Modul knapp unterhalb des Theoriewerts liegt. Es zeigt sich eine Abweichung von 4%. In Tabelle 4 sind die berechneten Elastizitätsmoduln für den Aluminiumstab, sowie ihre Abweichung zum Literaturwert $E_{\text{Aluminium}} = 69 \text{ GPa}$ nach [2] eingetragen.

Tabelle 4: Vergleich der E-Moduln für den Aluminiumstab mit dem Literaturwert

Messung	Messergebnis /GPa	Abweichung zur Literatur
einseitig eingespannt	(70.42 ± 0.22)	2.1%
rechte Seite; beidseitig eingespannt	(67.4 ± 0.03)	2.3%
linke Seite; beidseitig eingespannt	(71.3 ± 0.4)	3.3%

Generell lässt sich sagen, dass die Messwerte eine geringe Diskrepanz gegenüber der bestimmten Regressionsgeraden aufweisen. Da die Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die lineare Ausgleichsrechnung nur eine geringe Abweichung gegenüber dem Literaturwert aufweist, sind verbleibende Fehler auf geringe Messunsicherheiten und statistische Fehler zurückzuführen.

Literatur

- [1] Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB). *Gravity Information System of PTB*. URL: <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php> (besucht am 20. 01. 2017).
- [2] Horst Czichos und Manfred Hennecke. *Das Ingenieurwissen*. 33. Aufl. Akademischer Verein Hütte e.V., Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [3] TU Dortmund. *Versuch 102: Drehschwingungen*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf> (besucht am 22. 01. 2017).
- [4] TU Dortmund. *Versuch 103: Biegung elastischer Stäbe*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf> (besucht am 18. 01. 2017).

- [5] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [6] Universität Siegen. *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte*. URL: http://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf (besucht am 18.01.2017).
- [7] The Engineering Toolbox. *Metals and Alloys - Densities*. URL: http://www.engineeringtoolbox.com/metal-alloys-densities-d_50.html (besucht am 18.01.2017).