

V103

Biegung elastischer Stäbe

Philip Jaletzky
philip.jaletzky@udo.edu

Matthias Maile
matthias.maile@udo.edu

Durchführung: 17.11.2020

Abgabe: 01.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Spannung und Elastizitätsmodul	3
1.2	Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung	3
1.3	Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage	4
1.4	Berechnung des Flächenträgheitsmoments	6
2	Durchführung	6
3	Auswertung	7
3.1	Flächenträgheitsmoment der Stäbe	7
3.2	Bestimmung des E-Moduls von Stab 1 mit beidseitiger Auflage	7
3.3	Bestimmung des E-Moduls von Stab 1 mit einseitiger Einspannung	9
3.4	Bestimmung des E-Moduls von Stab 2 mit einseitiger Einspannung	10
4	Diskussion	12
4.1	Diskussion der Ergebnisse für Stab 1	12
4.2	Diskussion des Ergebnis für Stab 2	13
	Literatur	13

1 Theorie

In dem betrachteten Versuch wurden Biegeversuche an elastischen Metallstäben durchgeführt, um das Elastizitätsmodul der jeweiligen Materialien zu bestimmen.

1.1 Spannung und Elastizitätsmodul

Bei der Verbiegung der Stäbe greifen Kräfte an der Oberfläche der Stäbe an, welche zu Gestalts- und Volumenveränderungen führen können. Wenn man diese Kräfte auf die Fläche bezieht, erhält man die physikalische Größe der Spannung. Der senkrecht zur Oberfläche stehende Anteil der Spannung wird als Normalspannung σ bezeichnet und die oberflächenparallele Komponente heißt Tangential- oder Schubspannung.

Bei Festkörpern kann oft ein linearer Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der relativen Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ beobachtet werden:

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Gleichung 1 wird auch als Hookesches Gesetz bezeichnet. Die materialabhängige Konstante E bezeichnet man als Elastizitätsmodul und soll in diesem Versuch ermittelt werden. Da es möglich ist, dass keine Messvorrichtung zur Verfügung steht mit der es möglich ist die Längenänderung ΔL hinreichend genau zu messen, wurde im vorliegenden Versuch mit der Biegung eine Deformation genutzt, die eine leichter messbare Veränderung (die Messgröße D) am Stab hervorruft.

1.2 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

In Abbildung 1 ist zu erkennen wie eine Gewichtskraft F an einem einseitig eingespannten Stab mit Querschnitt Q eine Durchbiegung $D(x)$ hervorruft. In der Abbildung ist die neutrale Faser, in der keine Spannungen oder Längenänderungen auftreten, gestrichelt angedeutet. Die Zug- und Druckspannungen, die an Q angreifen, bewirken ein Drehmoment M_σ , das durch Integration über Q zu ermitteln ist:

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) \, dq. \quad (2)$$

Dabei ist y der Abstand des Flächenelements dq zur neutralen Faser. Der Stab wird sich dann so verbiegen, dass die beiden Drehmomente an jeder Stelle x übereinstimmen:

$$M_\sigma = M_F \quad (3)$$

Das Drehmoment M_F wird durch die Kraft F mit Hebelarm $(L - x)$ ausgelöst:

$$M_\sigma = M_F \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \int_Q y \sigma(y) \, dq = F \cdot (L - x) \quad (5)$$

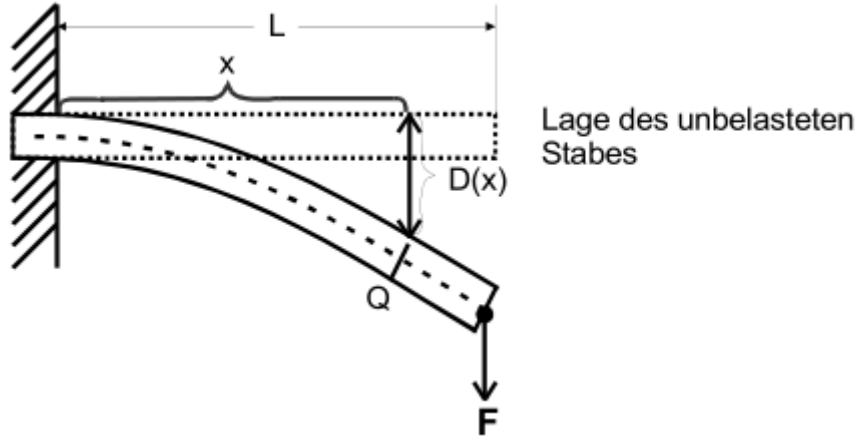


Abbildung 1: Verbiegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung [1]

Mit

$$\sigma(y) = Ey \frac{d^2 D}{dx^2} \quad (6)$$

und Gleichung 5 erhält man:

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 dq = F(l - x) \quad (7)$$

Die Größe

$$I = \int_Q y^2 dq(y). \quad (8)$$

bezeichnet man als Flächenträgheitsmoment. Die Berechnung des Flächenträgheitsmoments wird in Unterabschnitt 1.4 beschrieben.

Nach Integration von Gleichung 7 erhält man dann für die Durchbiegung D in Abhängigkeit vom Abstand x von der Einspannung:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq L) \quad (9)$$

1.3 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage

Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, greift beim beidseitig gelagerten Stab eine Gewichtskraft F in der Mitte des Stabes an und verursacht eine Durchbiegung $D(x)$. Also greift die Kraft $F/2$ mit Hebelarm x an der Querschnittsfläche Q an. Als Drehmomente für die beiden Stabhälften ergeben sich also:

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (10)$$

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x) \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (11)$$

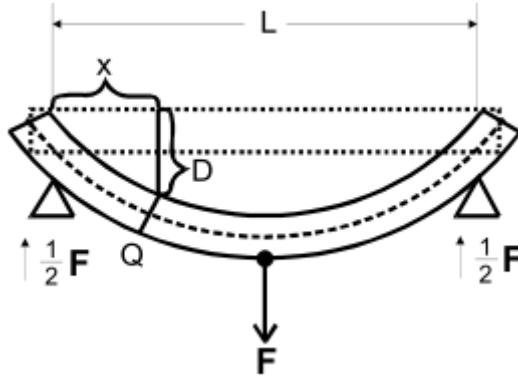


Abbildung 2: Verbiegung eines Stabes bei zweiseitiger Auflage [1]

Mit Gleichung 7 ergibt sich bei beidseitiger Auflage dann:

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{Fx}{2EI} \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (12)$$

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F(L-x)}{2EI} \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (13)$$

Eine erste Integration dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{Fx^2}{4EI} + C \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (14)$$

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{2EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) + C' \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (15)$$

Mit der Randbedingung, dass die Tangente der Biegekurve in der Stabmitte ($x = L/2$) horizontal verläuft ($\frac{dD}{dx} = 0$) kann man C und C' berechnen.

$$C = \frac{FL^2}{16EI} \quad (16)$$

$$C' = \frac{3FL^2}{16EI} \quad (17)$$

Einsetzen von C und C' und eine weitere Integration liefern dann für die Durchbiegung:

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}) \quad (18)$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (\text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L) \quad (19)$$

1.4 Berechnung des Flächenträgheitsmoments

Das Flächenträgheitsmoment I wird, da in dem Versuch nur runde Stäbe betrachtet wurden, in Polarkoordinaten berechnet:

$$I = \int_Q y^2 dq(y) \quad (20)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r dr' r' (r' \sin(\varphi))^2 \quad (21)$$

$$= \frac{\pi}{4} r^4 \quad (22)$$

[1]

2 Durchführung

Im ersten Schritt der Versuchsdurchführung wurden die beiden benutzten runden Stäbe mit einer Schiebelehre, einem Maßband und einer Waage ausgemessen. Dabei wurden Durchmesser, Länge und Gewicht der Stäbe ermittelt.

Dann wurden die Messreihen mit der in Abbildung 3 dargestellten Messapparatur durchgeführt. Als erste Messreihe wurde die Messung der beidseitigen Einspannung

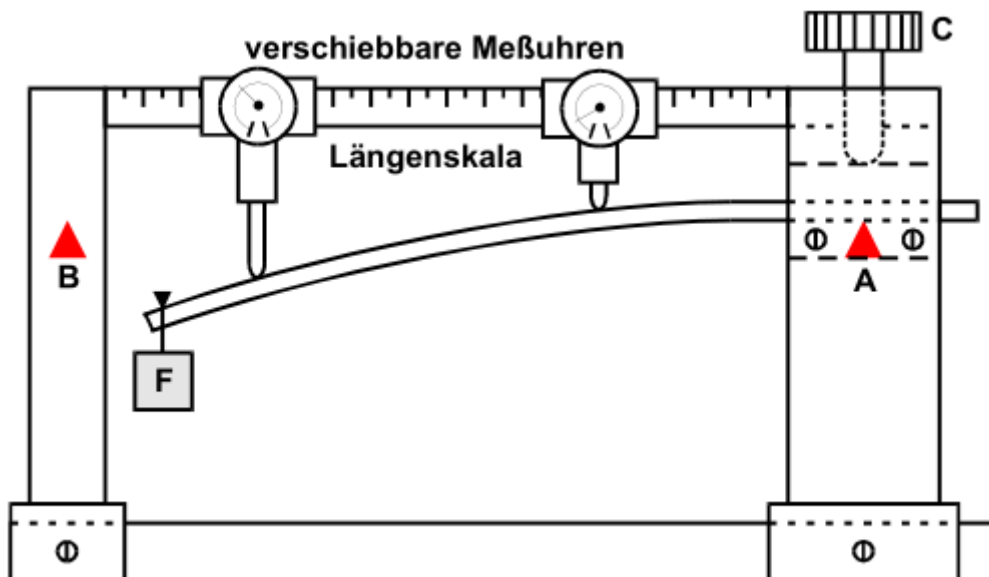


Abbildung 3: Messapparatur zur Vermessung der Stäbe [1]

durchgeführt. Dafür wurde der betrachtete Stab mit der Länge 57 cm an beiden Seiten der Messapparatur gelagert und es wurde ein Gewicht von 949,9 g (einzeln abgewogen) an der Mitte des Stabes befestigt. Dann wurde die, durch die Belastung hervorgerufene, Auslenkung des Metallstabs an verschiedenen Messpositionen mit den beiden Meßuhren

gemessen. Für jeden Messpunkt wurde die Position der Messuhr und die gemessene Verbiegung des Stabs notiert. Dabei wurden mit beiden Messuhren jeweils sechs Werte aufgenommen, sodass insgesamt zwölf Messpunkte ermittelt wurden.

Anschließend wurden die Messungen für die einseitige Einspannung vorgenommen. Dafür wurden beide Stäbe jeweils gemäß Abbildung 3 eingespannt und an ihrem Ende mit einem Gewicht von 949,9 g (einzeln abgewogen) belastet. Bei der Wahl des Gewichts wurde darauf geachtet, dass die maximalen Durchbiegungen ungefähr zwischen 3 und 7 mm liegen. Auch hier wurden dann die Verbiegungen der Stäbe an verschiedenen Messpositionen gemessen. Für die einseitige Einspannung wurden für beide Stäbe und für beide Messuhren jeweils zehn Werte gemessen, sodass pro Stab 20 Messpunkte notiert wurden. Bei allen Messungen wurde darauf geachtet, dass die Messuhren vor dem Anhängen des Gewichts genullt sind, da auch ein unbelasteter Stab eine leichte Durchbiegung aufweist und die Messuhren bereits durch leichtes Wackeln am Tisch Veränderungen zeigten.

3 Auswertung

3.1 Flächenträgheitsmoment der Stäbe

Ausmessen mit der Schieblehre ergab für beide Stäbe einen Radius von 0.5cm, woraus nach Unterabschnitt 1.4 ein Flächenträgheitsmoment von

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot 10^{-8} \text{m}^4 \quad (23)$$

resultiert.

3.2 Bestimmung des E-Moduls von Stab 1 mit beidseitiger Auflage

Bei Stab 1 ergaben sich bei beidseitiger Auflage mit einem Gewicht von 949.9g die Messwerte in Tabelle 1.

Der letzte Messwert (für $x = 64\text{cm}$) wird dabei in der Auswertung nicht betrachtet, da dieser Außerhalb des Messbereichs liegt und somit keiner richtigen Messung zugeordnet werden kann.

Mit der Methode der kleinsten Quadrate wird die in Abschnitt 1 hergeleitete Funktion

$$D(x) = \frac{F}{48 EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (24)$$

an die Messdaten gefittet. Da der Elastizitätsmodul der einzige Freiheitsgrad des Polynoms ist, erhält man dadurch auch einen Wert für diesen.

Mit der Methode der kleinsten Quadrate kann somit eine Ausgleichskurve bestimmt werden, wodurch man auch zu jeder Messreihe ein Wert für E erhält.

Um die Abweichungen von der Theoriekurve besser sichtbar zu machen, wurden in Abbildung 4 die Messdaten gegen $3L^2x - 4x^3$ grafisch aufgetragen.

Tabelle 1: Messdaten für einen beidseitig aufliegenden Stab, x beschreibt die Position der Messuhr, wobei 0cm dem rechten Auflagepunkt, 28.5cm der Mitte bzw. dem Auflagepunkt des Gewichts entspricht und 57cm linken Auflagepunkt entspricht. D beschreibt die Auslenkung des Stabes an der Stelle x bei Belastung.

Messuhr	x/cm	$D(x)/\mu\text{m}$
1	47	200
1	20	200
1	23	310
1	9	95
1	13	160
1	15	185
2	40	285.5
2	35	360
2	31	380
2	42	275
2	38	210
2	64	130

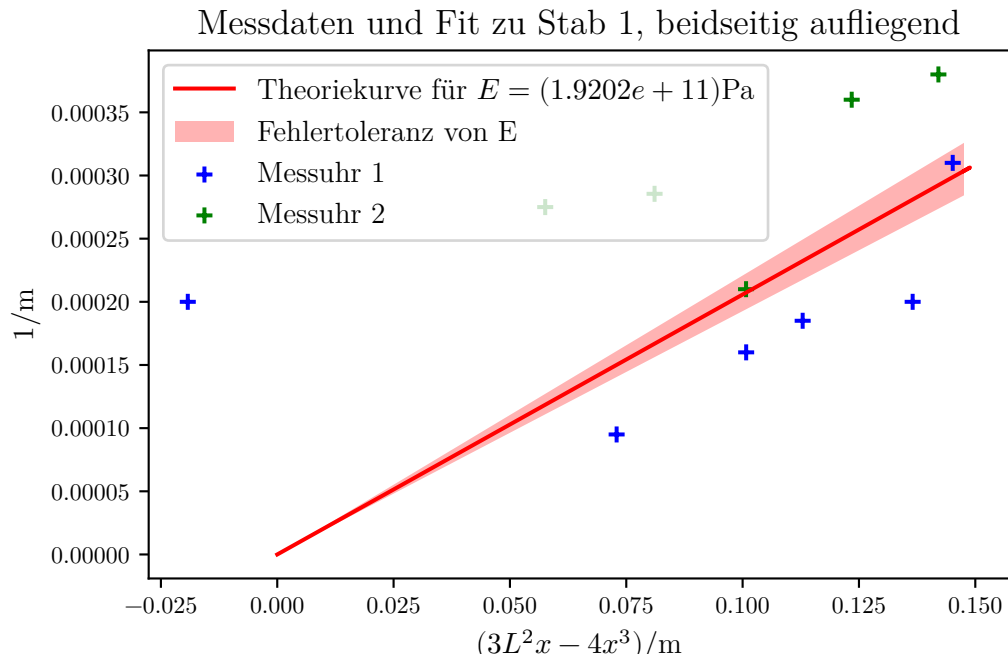


Abbildung 4: Messdaten und Theoriekurve zur Messung 1

Diese Methode ergibt für den Elastizitätsmodul von Stab 1

$$E = (192 \pm 13.1)\text{GPa.} \quad (25)$$

Wobei sich der Fehler aus der Kovarianz-Matrix zum Curve-Fit ergibt.

3.3 Bestimmung des E-Moduls von Stab 1 mit einseitiger Einspannung

Bei Stab 1 ergaben sich bei einseitiger Einspannung mit einem Gewicht von 949.9g die Messwerte in Tabelle 2.

Tabelle 2: Messdaten für Stab 1, einseitig eingespannt. x beschreibt die Position der Messuhr, wobei 0cm dem Ort bei der Einspannung entspricht. D beschreibt die Auslenkung des Stabes an der Stelle x unter Last.

Messuhr	x/cm	$D(x)/\mu\text{m}$
1	5	180
1	14	1120
1	18	2750
1	22	2500
1	26	3310
1	30	4200
1	34	5100
1	38	6010
1	16	1420
1	39	6010
2	12	850
2	20	2100
2	24	2880
2	28	3800
2	32	4680
2	36	5600
2	40	6600
2	44	7600
2	42	7360
2	48	7500

Wie in Unterabschnitt 3.2 wird auch hier mit einer Ausgleichrechnung gearbeitet. Da es sich jetzt um eine einseitige Einspannung handelt wird mit der Funktion

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (26)$$

gearbeitet.

Zur Verdeutlichung der Abweichungen werden in der grafischen Darstellung in Abbildung 5 die Messreihe und Theoriekurve gegen $Lx^2 - x^3/3$ aufgetragen.

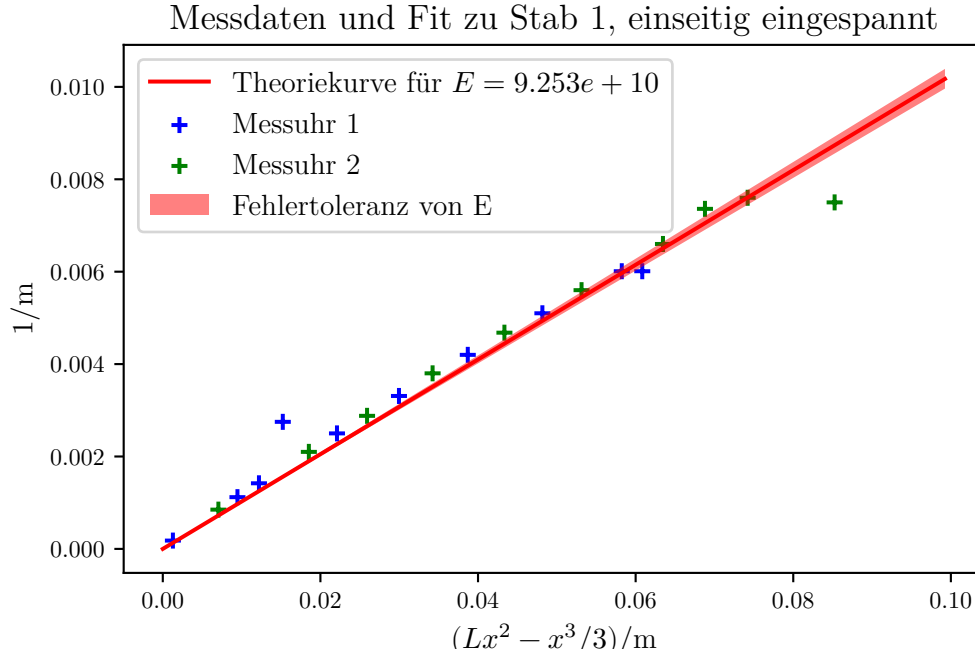


Abbildung 5: Messdaten und Theoriekurve zur Messung 2

Mit dieser Methode erhält man ein Elastizitätsmodul für Stab 1 von

$$E = (92.5 \pm 1.9)\text{GPa} \quad (27)$$

3.4 Bestimmung des E-Moduls von Stab 2 mit einseitiger Einspannung

Da in der dritten Messreihe ebenfalls mit einem einseitig eingespannten Stab gearbeitet wurde, ist das Vorgehen komplett analog zu dem in Unterabschnitt 3.3. Auch hier wurde der Stab am freien Ende mit einem Gewicht von 949.9g belastet.

Die Messwerte sind in Tabelle 3 zu sehen.

Die Ausgleichsrechnung ergab dabei ein E-Modul zu Stab 2 von

$$E = (130.9 \pm 0.9)\text{GPa}. \quad (28)$$

Ein Plot der Messdaten sowie eine Theoriekurve zum bestimmten E-Modul sind in Abbildung 6 zu sehen. Die Unsicherheiten in der Covarianz-Matrix beim Curve-Fit sind so klein, dass das Intervall kaum noch zu sehen ist.

Tabelle 3: Messdaten für Stab 2, einseitig eingespannt. x beschreibt die Position der Messuhr, wobei 0cm dem Ort bei der Einspannung entspricht. D beschreibt die Auslenkung des Stabes an der Stelle x unter Last.

Messuhr	x/cm	$D(x)/\mu\text{m}$
1	4	90
1	6	175
1	8	280
1	16	965
1	18	1190
1	20	1420
1	28	2600
1	30	2870
1	32	3190
1	40	4480
2	10	410
2	12	570
2	14	760
2	22	1700
2	24	1990
2	26	2280
2	34	3500
2	36	3880
2	38	4200
2	46	5580

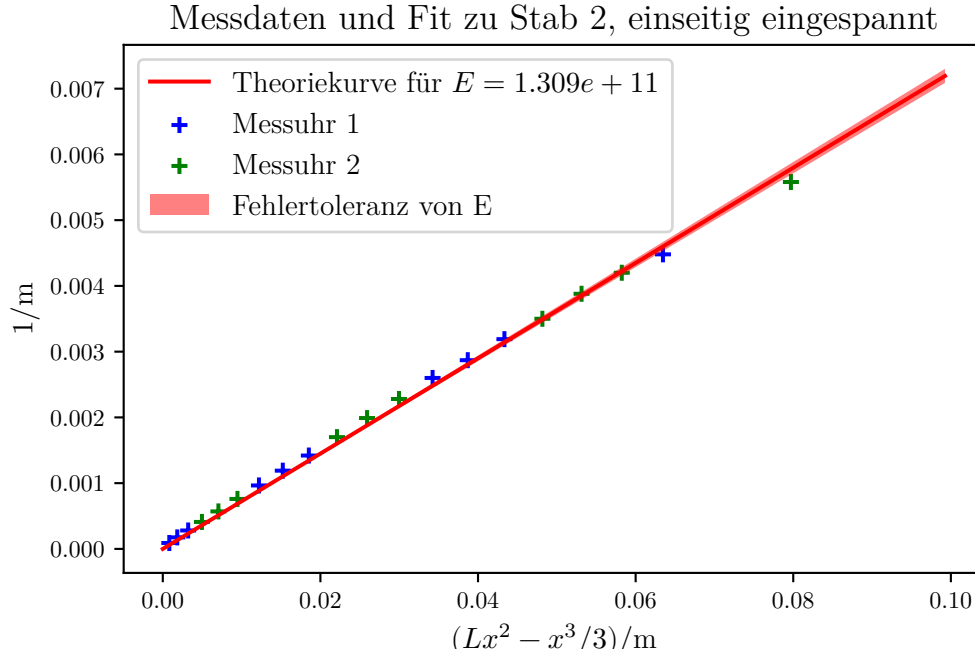


Abbildung 6: Messdaten und Theoriekurve zur Messung 3

4 Diskussion

4.1 Diskussion der Ergebnisse für Stab 1

Für Stab 1 wurden zwei Messreihen durchgeführt, diese ergaben zwei sehr unterschiedliche Werte von jeweils

$$E_{\text{beid.}} = (192 \pm 13.1) \text{ GPa} \quad (29)$$

$$E_{\text{eins.}} = (92.5 \pm 1.9) \text{ GPa.} \quad (30)$$

Die relative Abweichung zwischen den beiden Werten liegt bei über 200%, weshalb hier Fehlerquellen in der Durchführung betrachtet werden sollten.

Eine Ursache für die Differenz zwischen den Werten kann sein, dass die beidseitige Auflage im Allgemeinen kleinere Auslenkungen enthielt, welche für größere relative Abweichungen beim Ablesen der Messuhren sorgen. Auch andere Quellen, die den Fehler absolut beeinflussen, üben dadurch mehr Einfluss auf die Messergebnisse aus.

Eine Fehlerquelle, welche die Messwerte absolut beeinflusst, ist die Sensitivität der Uhren. Gerade Messuhr 2 reagierte sehr stark auf kleine Vibrationen oder den wackelnden Tisch. Wir haben die Uhren vor jeder Messung auf 0 gestellt, wobei dies nie perfekt möglich war, dabei hat das Zurücksetzen einer Uhr oft den den Messwert der anderen Uhr beeinflusst.

Dieser Fehler hätte dadurch eliminiert werden können, indem man zum Beispiel nicht die Uhren selbst auf 0 stellt, sondern die Werte ohne und mit Last notiert, und die

Differenz berechnet.

Ein Tisch der weniger wackelt hätte auch positive Auswirkungen auf den absoluten Messfehler gehabt.

Auffällig für das Ergebnis bei Messung 1 ist auch eine hohe statistische Abweichung von 6.82% vom Messwert (vgl. 1.99% bei Messung 2). Diese lassen sich dadurch erklären, dass Messung 1 als erstes durchgeführt wurde, wo nicht alle Einflüsse, wie zum Beispiel Vibrationen des Tisches, bekannt waren. Ab der zweiten Messung wurde verstärkt darauf geachtet, dass nach der Eichung der Uhren die Einflüsse auf die Messdauer auf ein Minimum reduziert wurden, was auch die geringere Varianz bei $E_{\text{eins.}}$ erklärt.

4.2 Diskussion des Ergebnis für Stab 2

Für Stab 2 wurde nur eine Messreihe durchgeführt, in welcher dieser einseitig eingespannt wurde. Bei der Messreihe erhielten wir ein E-Modul von

$$E = (130.9 \pm 0.9) \text{GPa.} \quad (31)$$

Die Varianz ist dabei mit 0.69% mit der aus Messung 2 vergleichbar. Das unterstützt auch unsere Vermutung in Unterabschnitt 4.1, dass die starke Streuung in der ersten Messreihe Resultat von mangelhafter Sorgfalt ist.

Der Wert $E = 130.9 \text{GPa}$ ist dabei vergleichbar mit anderen Metallen, wie zum Beispiel Kupfer ($E_{\text{Kupfer}} = 124 \text{GPa}$ [2]).

Die Recherche ergab jedoch keinen Werkstoff, der genau diesem Wert entsprach. Grund für Abweichungen kann sein, dass der Stab schon ohne Last eine Biegung aufwies, wodurch ein Biegeverhalten resultiert, welches von dem in Abschnitt 1 hergeleiteten abweichen kann.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung: Versuch Nr. 103, Biegung elastischer Stäbe*. 2020.
- [2] Technische Fakultät der Uni Kiel. *MaWi 1 Skript*. URL: https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_7/illustr/t7_1_2.pdf (besucht am 29.11.2020).

V.103, Biegung elastischer Stäbe

17.11.2020

Maße der Stäbe:

$$m_1 = 334,9 \pm 0,1 \text{ g}, m_2 = (381,1 \pm 0,1) \text{ g}$$

$$l_1 = 60,1 \text{ cm}, l_2 = 55,15 \text{ cm}$$

$$d_1 = 1 \text{ cm}, d_2 = 1 \text{ cm}$$

I. Beidseitige Einspannung:

Biegung von Stab 1:

Aufhängen bei 28,5 cm

Masse jeweils

$$\begin{aligned} 1. \text{ Messuhr 1 bei } 17 \text{ cm, } \Delta l_{1,1} &= 285,5 \mu\text{m} \\ \text{" 2 bei } 40 \text{ cm, } \Delta l_{1,2} &= 285,5 \mu\text{m} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \Delta l_{1,1} = 200 \mu\text{m} \\ \Delta l_{1,2} = 200 \mu\text{m} \end{array} \right\} 943,3 \pm 0,1 \text{ g}$$

$$2. \quad 1 \quad 20 \text{ cm}, \Delta l_{1,1} = 200 \mu\text{m}$$

$$2 \quad 35 \text{ cm}, \Delta l_{1,2} = 360 \mu\text{m}$$

$$3. \quad 1 \quad 23 \text{ cm}, \Delta l_{1,1} = 310 \mu\text{m}$$

$$2 \quad 31 \text{ cm}, \Delta l_{1,2} = 380 \mu\text{m}$$

$$4. \quad 1 \quad 9 \text{ cm}, \Delta l_{1,1} = 35 \mu\text{m}$$

$$2 \quad 64 \text{ cm}, \Delta l_{1,2} = 130 \mu\text{m}$$

$$5. \quad 1 \quad 13 \text{ cm}, \Delta l_{1,1} = 160 \mu\text{m}$$

$$2 \quad 42 \text{ cm}, \Delta l_{1,2} = 275 \mu\text{m}$$

$$6. \quad 1 \quad 15 \text{ cm}, \Delta l_{1,1} = 185 \mu\text{m}$$

$$2 \quad 38 \text{ cm}, \Delta l_{1,2} = 210 \mu\text{m}$$

II. Einseitige Einspannung

Messreihe	Position	Messwerte	Gewicht	Verbiegung
1	1	5 cm	943,3 ± 0,1 g	180 μm
	2	12 cm		850 μm
2	1	14 cm	"	1120 μm
	2	20 cm		2100 μm
3	1	18 cm	"	2750 μm
	2	24 cm		2880 μm

Fortsetzung der Tabelle		Gewicht	Verbiegung
4	1: 22 cm	"	2500 μm
	2: 28 cm		3800 μm
5	1: 26 cm	"	3310 μm
	2: 32 cm		4680 μm
6	1: 30 cm	"	4200 μm
	2: 36 cm		5600 μm
7	1: 34 cm	"	5100 μm
	2: 40 cm		6600 μm
8	1: 38 cm	"	6010 μm
	2: 44 cm		7600 μm
9	1: 38 36 cm	"	1420 μm
	2: 42 cm		7360 μm
10	1: 39 cm	"	6070 μm
	2: 48 cm		7500 μm

Messung zu Stab 2

Messreihe	Messposition	Gewicht	Verbiegung
1	1: 4 cm	949,9 \pm 0,1	1: 30 μm
	2: 10 cm		2: 410 μm
2	1: 6 cm		1: 175 μm
	2: 12 cm		2: 55 570 μm
3	1: 8 cm		1: 280 μm
	2: 14 cm		2: 760 μm
4	1: 16 cm		1: 965 μm
	2: 22 cm		2: 1708 μm
5	1: 18 cm		1: 1130 μm
	2: 24 cm		2: 1380 μm
6	1: 20 cm		1: 1420 μm
	2: 26 cm		2: 2280 μm
7	1: 28 cm		2600 μm
	2: 34 cm		3500 μm

8 1: 36 cm 11
2: 36 cm

9 1: 32 cm 11
2: 38 cm

10 1: 40 cm 11
~~10~~ 2: 46 cm

2870 μm
3880 μm

3180 μm
4200 μm

4480 μm
5580 μm