

V70

Vakuumphysik

David Rolf

david.rolf@tu-dortmund.de

Jonah Blank

jonah.blank@tu-dortmund.de

Durchführung: 31.10.2018

Abgabe: 06.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Akkustische stehende Wellen in einer Röhre - ein Teilchen im Potentialtopf	3
2.2 Ein eindimensionaler Festkörper	6
2.3 Der Kugelresonator - das Wasserstoff-Atom	6
3 Aufbau	7
3.1 Modellierung: Ein Teilchen im eindimensionalen Potential und im periodischen Festkörper	7
3.2 Modellierung: Das Wasserstoffatom	8
4 Durchführung	8
4.1 Modellierung: Teilchen im Potentialtopf	8
4.2 Modellierung: Ein eindimensionaler periodischer Festkörper	8
4.3 Modellierung: Das Wasserstoffatom	9
5 Auswertung	9
5.1 Modellierung: Teilchen im Potentialtopf	9
5.2 Modellierung: Das Wasserstoffatom	11
5.3 Modellierung: Ein eindimensionaler Festkörper	15
5.3.1 Teilchen im periodischen Potential	15
5.3.2 Atom-Molekül-Kette und Fehlstellen	23
6 Diskussion	32
Literatur	33

1 Zielsetzung

Ziel des Versuchs ist es, anhand stehenden Wellen, analoge quantenmechanische Systeme zu simulieren. Zur Modellierung eines Teilchens im Potentialtopf werden stehenden Wellen in einer abgeschlossenen Röhre untersucht. Zur Modellierung eines Wasserstoffatoms werden stehende Wellen in einem sphärischen Resonator betrachtet. Zur Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers werden Resonanzen in über Iriden gekoppelte Röhrenstücken untersucht.

2 Theorie

2.1 Akkustische stehende Wellen in einer Röhre - ein Teilchen im Potentialtopf

In einem Gas, hier Luft, ist Schall eine Longitudinal-Welle. Sie kann sowohl über die Geschwindigkeit der bewegten Luft, als auch über die sich fortpflanzenden Schwankungen des Drucks p beschrieben werden. Im Folgenden wird letztere Beschreibung verwendet. Wird in einer abgeschlossenen Röhre von einem Ende eine Schallwelle ausgesandt und an der gegenüberliegenden Wand reflektiert, kann es zu Resonanzeffekten kommen. Falls gilt

$$2L = n\lambda = n\frac{c}{f} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{nc}{2L}, \quad (2)$$

mit der Länge der Röhre L , der Modenzahl $n \in \mathbb{N}$, der Frequenz f und der Wellenlänge λ der Schallwelle und der Schallgeschwindigkeit in Luft c , kann sich eine stehende Welle ausbilden. Die Ausbreitung der Schallwelle lässt sich dabei über die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p \quad (3)$$

beschreiben. Auf Grund der Longitudinalität der Welle kann jedoch angenommen werden, dass p nur von einer Dimension abhängt - der hier als x bezeichneten Symmetrieachse des Rohrs. Dadurch vereinfacht sich die Wellengleichung zu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

sodass ein Lösungsansatz durch

$$p(x, t) = p_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t)$$

gegeben ist, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$, dem Wellenvektor k und der Phase α . Aus den Randbedingungen

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0) = \frac{\partial p}{\partial x}(L) = 0$$

ergibt sich $\alpha = 0$ und $k = \frac{m\pi}{L}$, mit $m \in \mathbb{N}$. Aus dem Multiplizieren der Gleichung (2) mit 2π ergibt sich die Dispersionsrelation

$$\omega(k) = ck. \quad (4)$$

Im klassischen Fall haben die verschiedenen Eigenzustände eine Lebensdauer, da es auf Grund von Reibung zu Energieverlust kommt. Die Darstellung dessen wird über einen mit der Zeit abfallenden Term $e^{-\gamma t}$ erreicht. Da aber die stehende Welle auch durch den Lautsprecher betrieben wird, lässt sich die zeitliche Abhängigkeit des Drucks als getriebener harmonischer Oszillator betrachten:

$$\frac{\partial^2 p(t)}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial p(t)}{\partial t} + \omega_0^2 p(t) = K e^{i\omega t}$$

Damit ergibt sich eine Lösung

$$p(t) = A_1 e^{-\gamma t + i(\omega_0 t + \phi_1)} + A e^{i(\omega t + \phi)},$$

mit den Phasen ϕ_1 und ϕ , wobei letztere gegeben ist durch

$$\phi = \arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

gegeben ist. Für große Zeiten geht der 1. Term schnell gegen 0, sodass nur noch die komplexe Amplitude A des stabilen Zustand gemessen wird. Für eine einzelne Resonanzstelle kann diese geschrieben werden als

$$A = \frac{K e^{i\phi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

und ihr Betrag als

$$|A| = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Bei der Untersuchung eines Resonanzpeaks im Spektrum kann angenommen werden, dass $\omega \approx \text{const}$ und die Reibung sehr klein gegen die Resonanzfrequenz ist: $\gamma \ll \omega_0$. Damit vereinfacht sich der Amplitudenbetrag zu

$$|A| = \frac{2\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Nach Bedingung (2) sind mehrere Resonanzfrequenzen $\omega_{0,n}$ und damit auch andere Reibungskoeffizienten γ_n und Phasen ϕ_n möglich, sodass $|A|$ geschrieben werden muss als

$$|A| = \left| \sum_{n=0}^N \frac{K e^{i\phi_n}}{\omega_{0,n}^2 - \omega^2 + 2i\gamma_n\omega} \right|. \quad (5)$$

Das quantenmechanische Analogon zur stehenden Welle in einer Röhre ist ein Teilchen im Potentialtopf. Dies kann über die Schrödingergleichung mit der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ beschrieben werden:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t) + V(r) \psi(r, t)$$

mit dem Potential

$$V(r) = \begin{cases} 0 & |r| \leq \frac{L}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und dem reduzierten Planck'schen Wirkungsquantum \hbar . Das L bezeichnet dabei die Breite des Kastenpotentials. Unter Berücksichtigung, dass nur ein eindimensionales Problem betrachtet wird und durch Einsetzen von $V(r)$ vereinfacht sich die Schrödingergleichung zu

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t).$$

Ein Separationsansatz $\psi(x, t) = \phi(x)T(t)$, mit der Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung $\phi(x)$, liefert $\psi(x, t) = A \sin(kx + \alpha) e^{-i\omega t}$. Aus den Randbedingungen $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ folgt wie im klassischen Fall $k = \frac{m\pi}{L}$ und $\alpha = 0$. Beim quantenmechanischen Teilchen ist die Frequenz mit der Energie verknüpft:

$$\hbar\omega = E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Damit ergibt sich eine Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (6)$$

Auch im quantenmechanischen System gilt das Prinzip der minimalen Energie, sodass alle angeregten Zustände mit der Zeit in den Grundzustand zurückkehren. Damit lässt sich die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion schreiben, als

$$\psi(t) = e^{-(\lambda + i\omega_0)t}$$

Aus einer Fouriertransformation ergibt sich die Amplitude

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda + i(\omega_0 - \omega)}$$

und ihr Betrag

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}} \quad (7)$$

2.2 Ein eindimensionaler Festkörper

Im periodischen Potential eines Festkörpers kommt es zu Bandstrukturen in der Energie. Modelliert werden kann dies ebenfalls durch den Schall in einer Röhre. Nach Bedingung (2) kommt es je nach Länge der Röhre zu Resonanzfrequenzen. Da diese Länge endlich ist, ist auch die Dichte der Zustände endlich, sodass bei schwacher Kopplung der Röhrenstücke über Iriden Bandlücken entstehen. Werden in die Röhre in periodischen Abständen a Kopplungen in Form von Iriden mit kleinerem Innendurchmesser eingebracht, entspricht dies einem eindimensionalen Gitter in einem kristallinen Festkörper. Ein Röhrenstück samt Iris repräsentiert dann eine Einheitszelle des Gitters. Im reziproken Raum der Wellenvektoren $k = n \frac{\pi}{a}$ wird dies beschrieben durch den Gittervektor $K = n \frac{2\pi}{a}$, dessen kleinstmöglicher Wert im Eindimensionalen den reziproken Abstand zwischen den Resonanzstellen angibt. Nach dem Bloch-Theorem kann eine Wellenfunktion, die dies beschreibt, geschrieben werden als

$$\psi_k = u_k(x) e^{ikx} = \sum_K C_{(k-K)} e^{i(k-K)x},$$

wobei $u_k(x)$ die Periodizität beschreibt. Die Summe kommt ebenfalls aus der Periodizität, da zu jedem Wellenvektor k ein reziproker Gittervektor K addiert werden kann ohne die Lösung zu verändern.

2.3 Der Kugelresonator - das Wasserstoff-Atom

Für die Resonanzen in einem sphärischen Resonator muss zunächst wieder die Wellengleichung (3) betrachtet werden. Abseparieren der Zeit mithilfe des Ansatzes $p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) \cos(\omega t)$ liefert die Eigenwert-Gleichung

$$-\frac{\omega^2}{c^2} p(\vec{r}) = \Delta p(\vec{r}).$$

In Kugelkoordinaten und mit dem Separationsansatz $p(r, \theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) R(r)$ lässt sich diese aufteilen in einen Winkel-

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (8)$$

und einen Radialanteil

$$-\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = \frac{\omega^2}{c^2} R(r). \quad (9)$$

Die Eigenwerte von Gleichung (8) werden durch die Winkelquantenzahl l charakterisiert, die von Gleichung (9) durch die radiale Quantenzahl k . Die Resonanzfrequenzen ω_{kl} , die eine stehende Welle im sphärischen Resonator hervorrufen, sind die Eigenwerte dieser radialen Eigenwertgleichung und damit $(2l+1)$ -fach entartet in der magnetischen Quantenzahl m .

Für das quantenmechanische Analogon - das Wasserstoffatom - muss wieder die Schrödingergleichung gelöst werden, wobei hier $V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r}$, mit der Elementarladung e , das Coulomb-Potential ist:

$$E\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) - \frac{e^2}{r}\psi(\vec{r}).$$

Mit dem selben Ansatz wie beim sphärischen Resonator lässt sich diese DGL aufteilen, wobei der Winkelanteil äquivalent zu Gleichung (8) ist. Der radiale Anteil ist gegeben durch

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}rR(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)\right) - \frac{e^2}{r}R(r) = ER(r). \quad (10)$$

Die Energieeigenwerte dieser Gleichung können mit der Hauptquantenzahl $n = l + 1 + k$ und der Rydberg-Energie E_{Ryd} geschrieben werden als

$$E_{nl} = -E_{\text{Ryd}}\frac{1}{n^2}.$$

Auch sie sind auf Grund der Kugelsymmetrie des Coulomb-Potentials entartet in m .

3 Aufbau

In allen Versuchen werden ein Computer, eine Soundkarte, einen Lautsprecher und ein Mikrofon verwendet.

3.1 Modellierung: Ein Teilchen im eindimensionalen Potential und im periodischen Festkörper

Die Soundkarte wird an den Computer angeschlossen und mit einem auf einer Schiene befestigten Lautsprecher und einem auf dieser frei beweglichen Mikrofon verbunden. Zwischen Lautsprecher und Mikrofon werden Rohrstücke der Länge 25 mm, 50 mm und 75 mm angeordnet, sodass eine auf beiden Seiten abgeschlossene Röhre entsteht.

Für den zweiten Versuchsteil werden zwischen den Rohrstücken Irisse mit 10 mm, 13 mm und 16 mm Innendurchmesser angebracht.

3.2 Modellierung: Das Wasserstoffatom

Die an den Computer angeschlossene Soundkarte wird an Lautsprecher und Mikrofon in den zwei Hemisphären eines sphärischen Resonators angeschlossen, der in Abbildung 1 zu sehen ist.

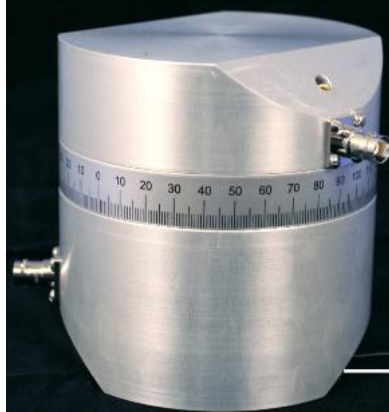


Abbildung 1: Sphärischer Resonator [5].

4 Durchführung

Bei allen Versuchen wird eine Schrittdauer von 50 ms verwendet.

4.1 Modellierung: Teilchen im Potentialtopf

Es werden acht 75 mm-Rohrstücke zwischen Lautsprecher und Mikrofon befestigt. Am Computer wird mit dem Programm SpektrumSLC.exe ein Spektrum von 100 bis 10 000 Hz mit einer Schrittweite von 10 Hz aufgenommen.

Es werden zwei 75 mm-Rohrstücke zwischen Lautsprecher und Mikrofon befestigt. Mit einer Schrittweite von 5 Hz wird ein Spektrum von 5000 bis 14 000 Hz aufgenommen.

4.2 Modellierung: Ein eindimensionaler periodischer Festkörper

Im Bereich von 5000 bis 14 000 Hz wird in 5 Hz-Schritten das Spektrum für ein bis acht 75 mm-Stücke aufgenommen.

Von einer Konstellation aus zwölf 50 mm-Rohren wird ein Spektrum von 100 bis 12 000 Hz. Dasselbe wird für acht 50 mm-Rohre die durch Iriden mit einem Innendurchmesser von 16 mm gekoppelt sind und für denselben Aufbau mit Iriden mit 13 und 10 mm Innendurchmesser wiederholt.

Die Messung wird für einen Aufbau aus zehn und zwölf 50 mm-Röhren mit 16 mm-Iris-Kopplung wiederholt.

Dasselbe Spektrum wird für acht 75 mm-Rohre mit 16 mm-Iris-Kopplung aufgenommen.

Für ein einzelnes 50 mm-Röhrenstück wird ein Spektrum von 100 bis 22 000 Hz aufgenommen.

Die Messung wird für ein einzelnes ein 75 mm-Röhrenstück wiederholt.

Als Einheitszelle werden zwei 50 mm-Rohre über 10-, 13- und 16 mm-Iriden gekoppelt. Für einen Verbund von zwei, drei, vier und sechs solcher Zellen, wird ein Spektrum von 100 bis 12 000 Hz aufgenommen.

Für zwölf abwechselnd über 13- und 16 mm-Iriden gekoppelte 50 mm-Rohre wird dasselbe Spektrum aufgenommen.

Als Einheitszelle wird ein ein 50 mm-Röhrenstück mit einem ein 75 mm-Röhrenstück über eine 16 mm-Iris gekoppelt und mit einer weiteren 16 mm-Iris abgeschlossen. Für einen Verbund aus fünf solchen Zellen wird ein Spektrum von 400 bis 12 000 Hz aufgezeichnet. Zwölf 50 mm-Röhren werden über 16 mm-Iriden gekoppelt. Als Defekt wird das dritte Segment durch ein 75 mm-Röhrenstück ersetzt und ein Spektrum von 100 bis 6000 Hz aufgenommen. Dasselbe wird für 75 mm-Defekte am sechsten und am neunten Segment, sowie für 25 mm-Defekte an allen drei Stellen wiederholt.

4.3 Modellierung: Das Wasserstoffatom

Der Skalenwinkel α , unter dem die Messungen durchgeführt werden, kann in den Polarkwinkel θ überführt werden durch

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}\right). \quad (11)$$

Für $\alpha = 180^\circ$ zwischen den Hemisphären wird bei einer Schrittweite von 10 Hz ein Spektrum von 100 bis 10 000 Hz aufgenommen.

Die Messung wird für $\alpha = 0^\circ$ und weitere Winkel wiederholt.

Für $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ und $\alpha = 40^\circ$ wird mit einer Schrittweite von 0,1 Hz der Bereich um 5000 Hz aufgelöst.

Bei $\alpha = 180^\circ$ wird ein Spektrum von 2000 bis 7000 Hz aufgenommen um die Resonanzfrequenzen zu identifizieren. Für diese werden Polarplots angefertigt, indem α in 10° -Schritten variiert wird.

5 Auswertung

Die Graphen werden sowohl mit Matplotlib [2] als auch NumPy [6] erstellt. Die Fehlerrechnung wird mithilfe von Uncertainties [4] durchgeführt. Die Peaks der Spektren wurden mithilfe von Scipy [3] bestimmt. Die Fehler auf die Frequenzen ergeben sich, soweit nicht anders angegeben, aus der Schrittweite.

5.1 Modellierung: Teilchen im Potentialtopf

In Abbildung 2 ist das Übersichtsspektrum für eine 600 mm-Röhre und in Abbildung 3 das einer 150 mm-Röhre zu sehen. Eine zweite Messung des Spektrums letzterer, liefert

abgesehen von geringen Abweichungen in der Amplitude dasselbe Spektrum. Beispielhaft sind die Parameter des 1. Peaks der beiden Messungen in Tabelle 1 zu sehen.

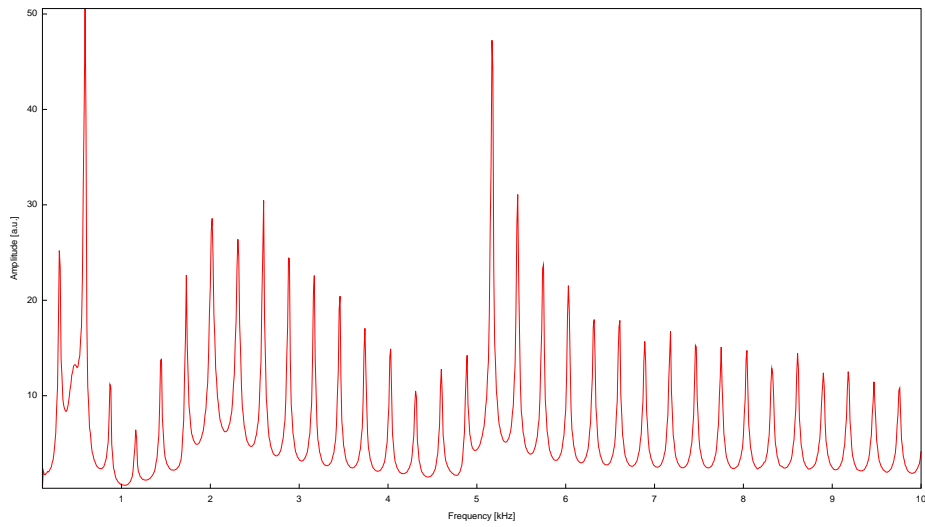


Abbildung 2: Spektrum einer 600 mm-Röhre.

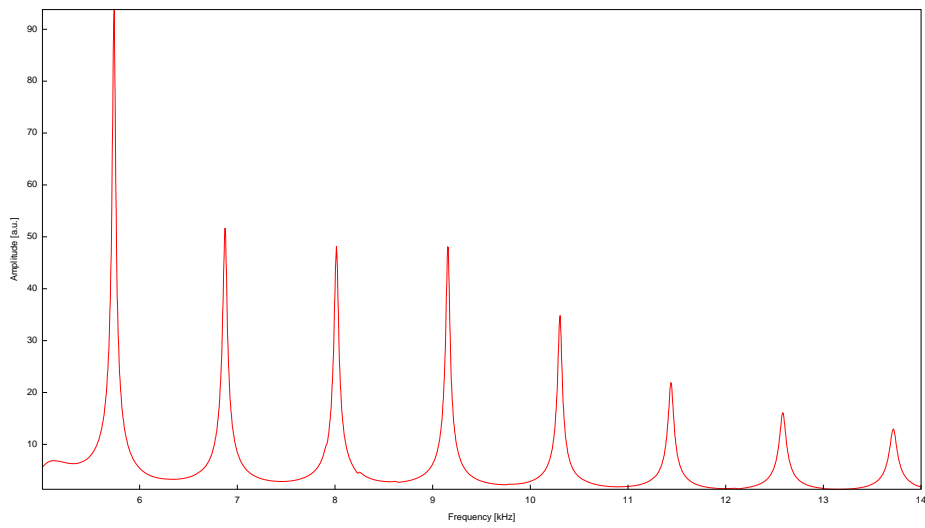


Abbildung 3: Spektrum einer 150 mm-Röhre.

Tabelle 1: Parameter des 1. Peaks von zwei spektralen Analysen einer 600 mm langen Röhre.

Messung	$f_1/(\text{Hz})$	$A_1/(\text{a.u.})$
1	5747,706	92,8953
2	5747,706	92,0576

5.2 Modellierung: Das Wasserstoffatom

In den Abbildungen 4 und 5 sind das Spektrum des sphärischen Resonators bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ zu sehen. Die Resonanzfrequenzen f_n verändern sich nicht, jedoch fällt auf, dass bei $\alpha = 0^\circ$ die Amplitude des 2. Peaks das Spektrum dominiert, während bei $\alpha = 180^\circ$ alle Peaks in etwa dieselbe Höhe haben. Außerdem zeigt sich, dass in diesem Spektrum alle Peaks eine größere Amplitude aufweisen, als bei $\alpha = 0^\circ$.

In den Abbildungen 6 und 7 ist für $\alpha = 0^\circ$ und für $\alpha = 40^\circ$, der Peak bei $f \approx 5000 \text{ Hz}$ näher aufgelöst. Es zeigt sich, dass der Hauptpeak mit zunehmendem α leicht zunimmt. Bei $\alpha = 40^\circ$ bildet sich ein stark zunehmender Nebenpeak aus, der bei $\alpha = 0^\circ$ von einer Einbuchtung überlagert wird.

In Abbildung 8 sind die Polarplots der Peaks im Bereich von 2000 Hz bis 7000 Hz zu sehen. Der Vergleich mit Bildern aus der Literatur [5], liefert den Zusammenhang zwischen den ersten vier Peaks und den Kugelflächenfunktionen:

$$\text{Peak1} \cong Y_1^0$$

$$\text{Peak2} \cong Y_2^0$$

$$\text{Peak3} \cong Y_3^0$$

$$\text{Peak4} \cong Y_4^0$$

Der 5. Polarplot lässt sich keinem Zustand mit $m = 0$ zuordnen und ähnelt am ehesten der Kugelflächenfunktion Y_2^1 .

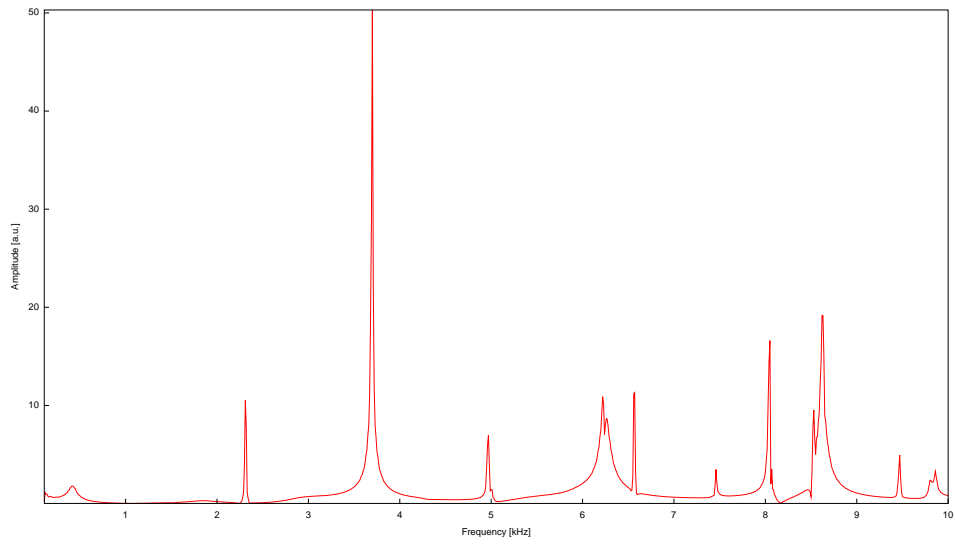


Abbildung 4: Spektrum im sphärischen Resonator für $\alpha = 0^\circ$.

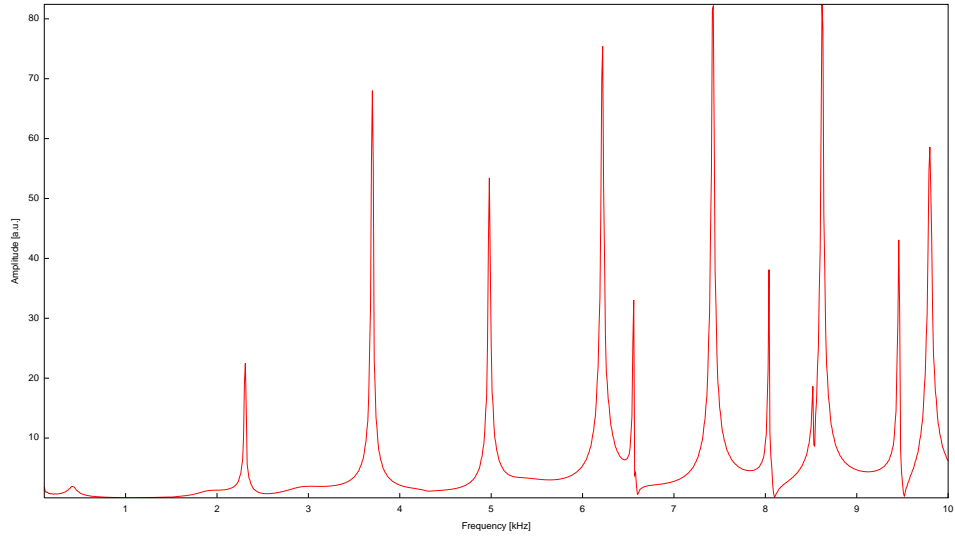


Abbildung 5: Spektrum im sphärischen Resonator für $\alpha = 180^\circ$.

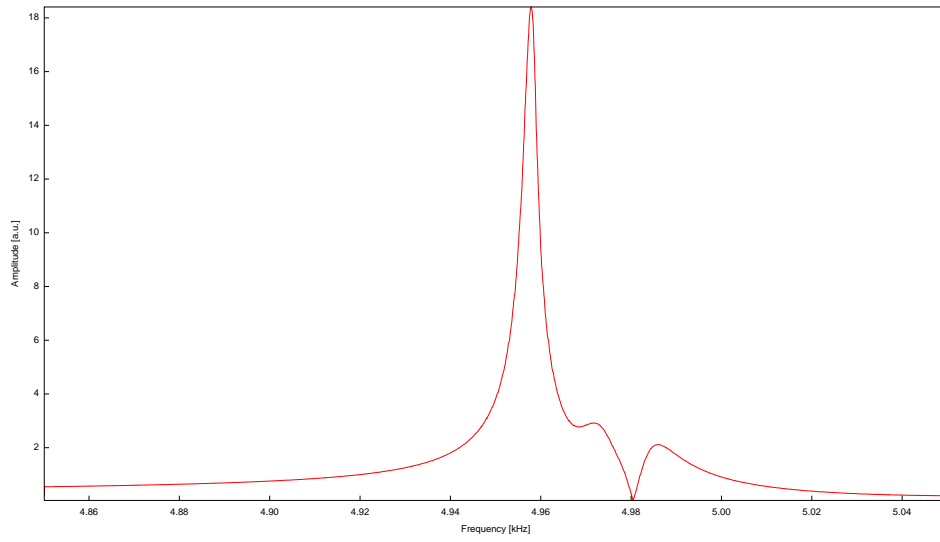


Abbildung 6: Nähere Aufnahme des Peaks bei $f \approx 5000$ Hz für $\alpha = 0^\circ$.

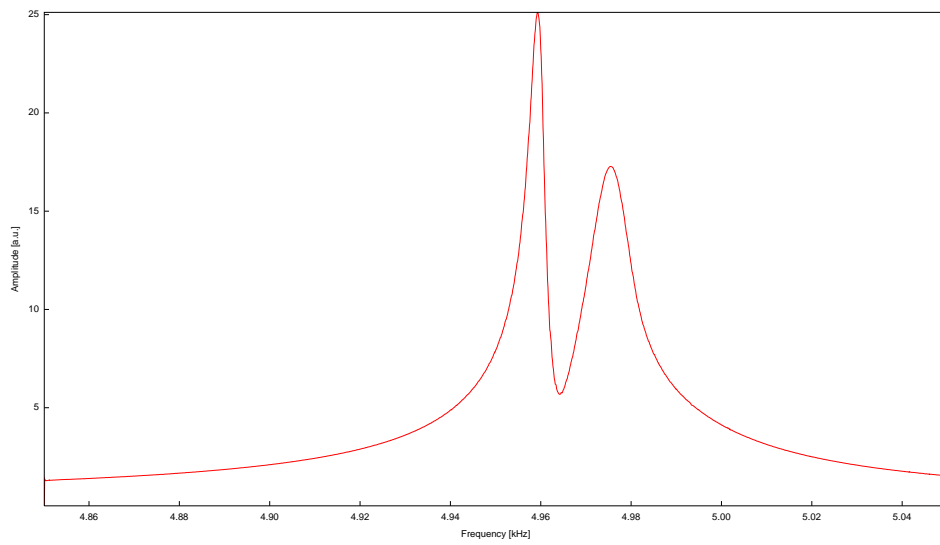
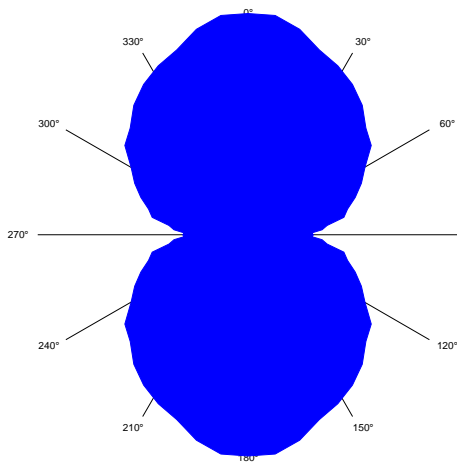
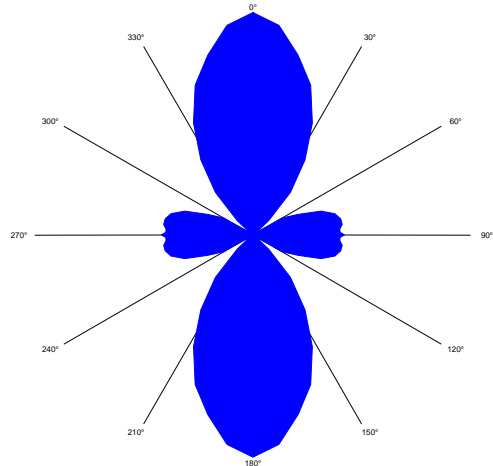


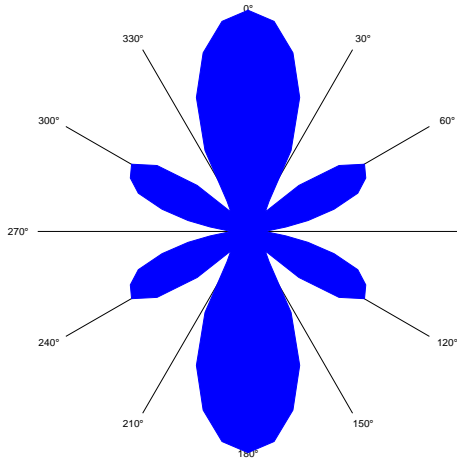
Abbildung 7: Nähere Aufnahme des Peaks bei $f \approx 5000$ Hz für $\alpha = 40^\circ$.



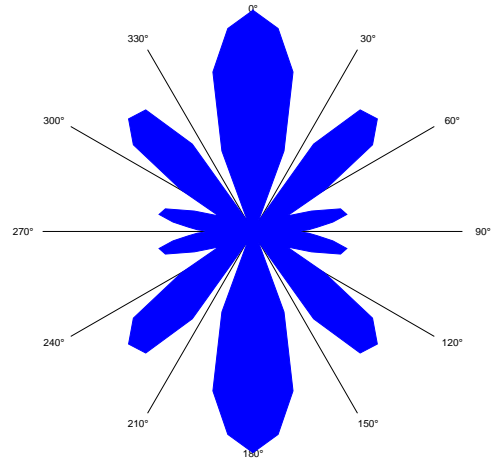
(a) erster Peak bei 2307 Hz, Y_1^0 .



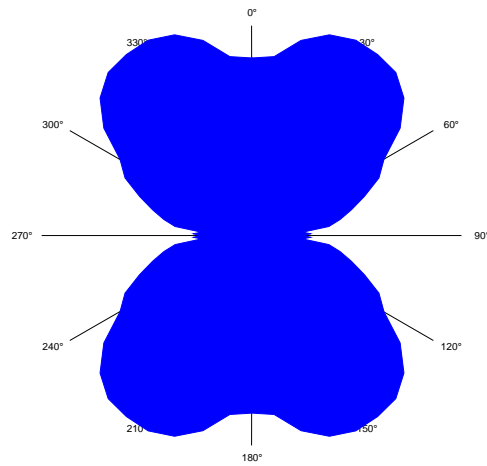
(b) zweiter Peak bei 3705 Hz, Y_2^0 .



(c) dritter Peak bei 4985 Hz, Y_3^0 .



(d) vierter Peak bei 6231 Hz, Y_4^0 .



(e) fünfter Peak bei 6571 Hz, eventuell Y_2^1 .

Abbildung 8: Polarplots der ersten fünf Peaks im sphärischen Resonator

5.3 Modellierung: Ein eindimensionaler Festkörper

5.3.1 Teilchen im periodischen Potential

In Abbildung 9 ist beispielhaft das Spektrum von 5000 Hz bis 14 000 Hz einer 75 mm-Röhre zu sehen. Der mittlere Abstand zwischen den Peaks wird über die Formel zur Berechnung des Mittelwerts

$$\mu_{\Delta f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta f)_i$$

und dessen Standardabweichung

$$\sigma_{\Delta f} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N ((\Delta f)_i - \mu_{\Delta f})^2}$$

bestimmt. Dasselbe wird für zwei bis acht 75 mm-Röhren durchgeführt. Die berechneten Mittelwerte sind in Tabelle 3 zu sehen und sind in Abbildung 10 gegen das Inverse der Röhrenlänge L aufgetragen. Eine nicht gewichtete lineare Ausgleichsrechnung der Form

$$\Delta f \left(\frac{1}{L} \right) = a \cdot \frac{1}{L} + b$$

liefert die Parameter

$$a = (169,81 \pm 0,20) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$b = (5,7 \pm 1,2) \text{s}^{-1}.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit Gleichung (2) liefert für die Schallgeschwindigkeit c die Beziehung

$$c = 2a = (339,6 \pm 0,4) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tabelle 2: Mittlerer Abstand der Peaks.

L/mm	$\Delta f/\text{Hz}$
75	2268 ± 4
150	1139 ± 3
225	763 ± 2
300	574 ± 2
375	459 ± 2
450	383 ± 1
525	327 ± 1
600	287 ± 1

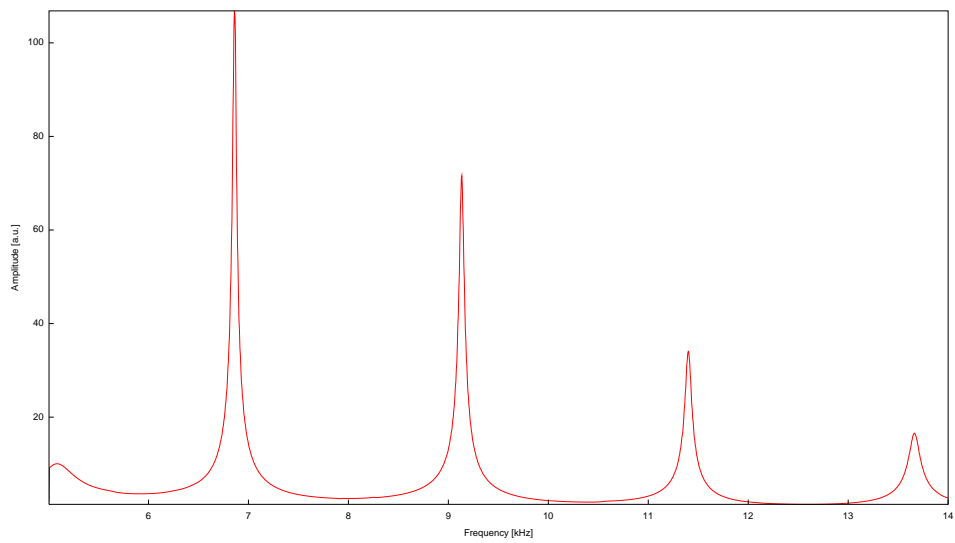


Abbildung 9: Spektrum von einer 75 mm-Röhre.

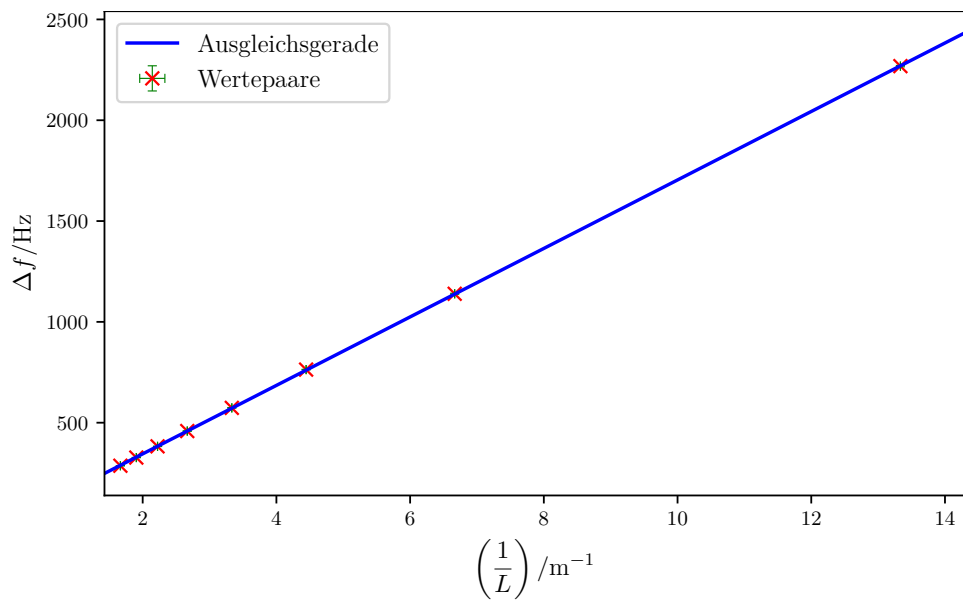


Abbildung 10: Δf aufgetragen gegen $\frac{1}{L}$ zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c .

In Abbildung 11 ist das Spektrum von zwölf 50 mm-Röhren zu sehen und in Abbildung 12 werden als Dispersionsrelation die Winkelfrequenzen der Peaks $\omega_n = 2\pi f_n$ gegen die zugehörigen Wellenzahlen k_n aufgetragen. Eine lineare Ausgleichsrechnung der Form $\omega(k) = mk + n$ liefert die Parameter

$$m = (343,77 \pm 0,16) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$n = (156 \pm 21) \text{s}^{-1}.$$

Ein Vergleich mit Gleichung (4) zeigt das $m = c$ der Schallgeschwindigkeit entspricht.

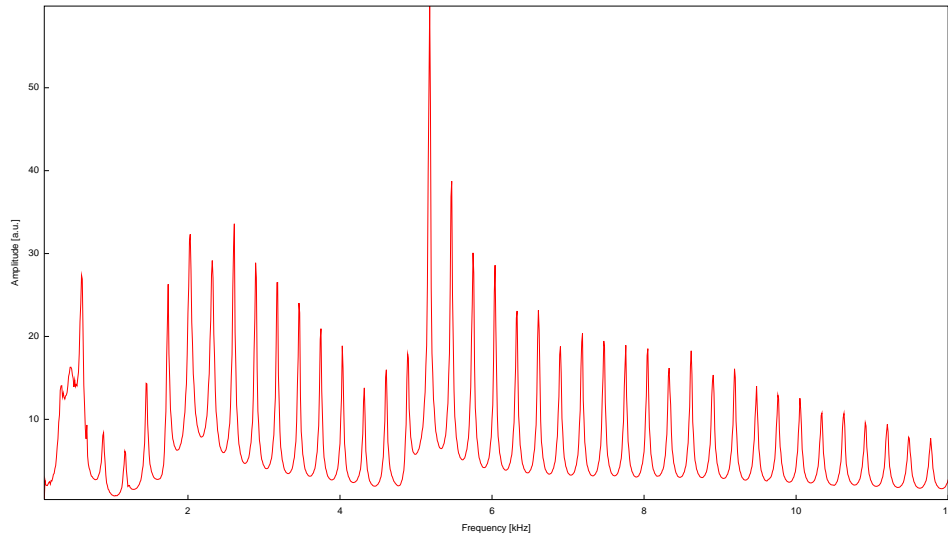


Abbildung 11: Spektrum von zwölf 50 mm-Röhren.

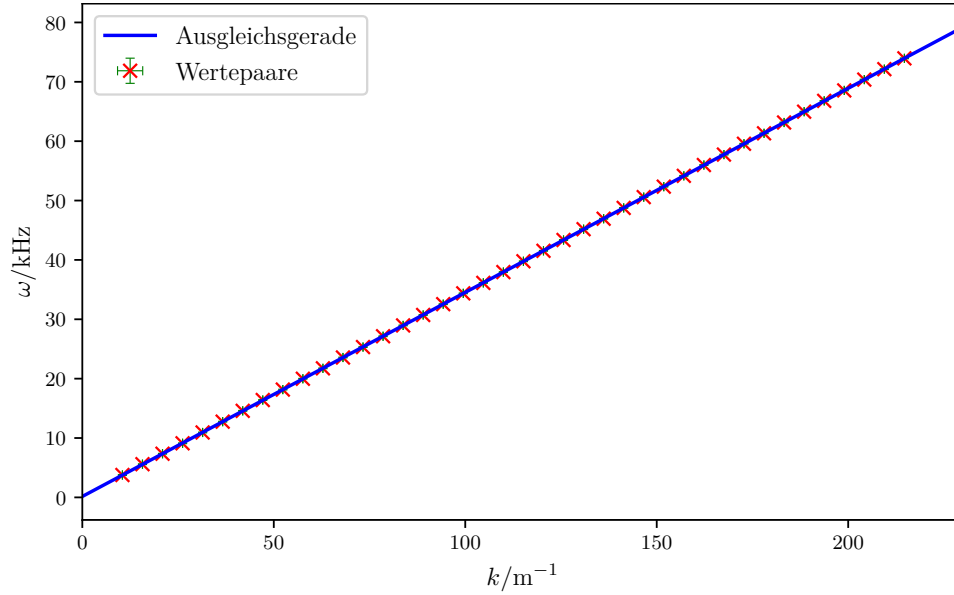


Abbildung 12: Dispersionsrelation $\omega(k)$ von zwölf 50 mm-Röhren

In Abbildung 13 ist das Spektrum von acht über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren zu sehen. Dieselbe Messung wird für 10- und 13 mm-Kopplungen durchgeführt und die jeweiligen Dispersionsrelationen in den Abbildungen 14 bis 16 aufgetragen.

In Tabelle 3 sind die Breiten der Bänder und Bandlücken zu sehen. Es ist zu erkennen, dass bei abnehmendem Irisdurchmesser die Bänder schmaler werden, während die Breite der Bandlücken zunimmt. Die Fehler auf die Breite sind bedingt durch die gewählte Schrittweite von 10 Hz und werden linear addiert. Da die Frequenz als $\omega = 2\pi f$ angegeben wird ist noch der Faktor 2π zu beachten.

Tabelle 3: Breiten b der Bänder und Bandlücken bei einem Irisdurchmesser von 10 mm, 13 mm und 16 mm.

Band/Bandlücke	b_{10}/kHz	b_{13}/kHz	b_{16}/kHz
Band1	$8,92 \pm 0,13$	$10,87 \pm 0,13$	$12,57 \pm 0,13$
Band2	$4,96 \pm 0,13$	$8,17 \pm 0,13$	$11,12 \pm 0,13$
Band3	$3,14 \pm 0,13$	$5,03 \pm 0,13$	$8,92 \pm 0,13$
Band4	$2,07 \pm 0,13$	$4,27 \pm 0,13$	$6,97 \pm 0,13$
Lücke1	$10,62 \pm 0,13$	$8,23 \pm 0,13$	$6,09 \pm 0,13$
Lücke2	$16,40 \pm 0,13$	$13,19 \pm 0,13$	$9,61 \pm 0,13$
Lücke3	$17,97 \pm 0,13$	$15,71 \pm 0,13$	$11,56 \pm 0,13$

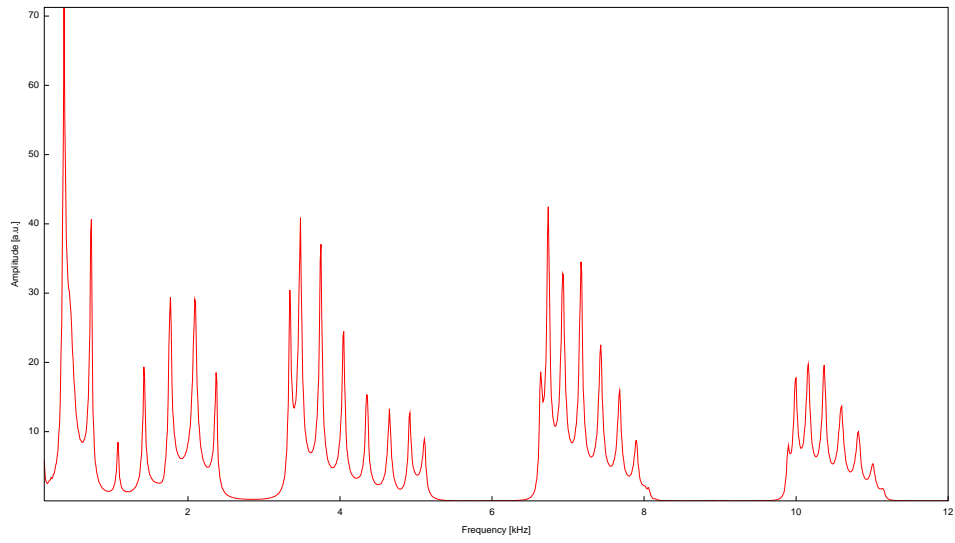


Abbildung 13: Spektrum von acht über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

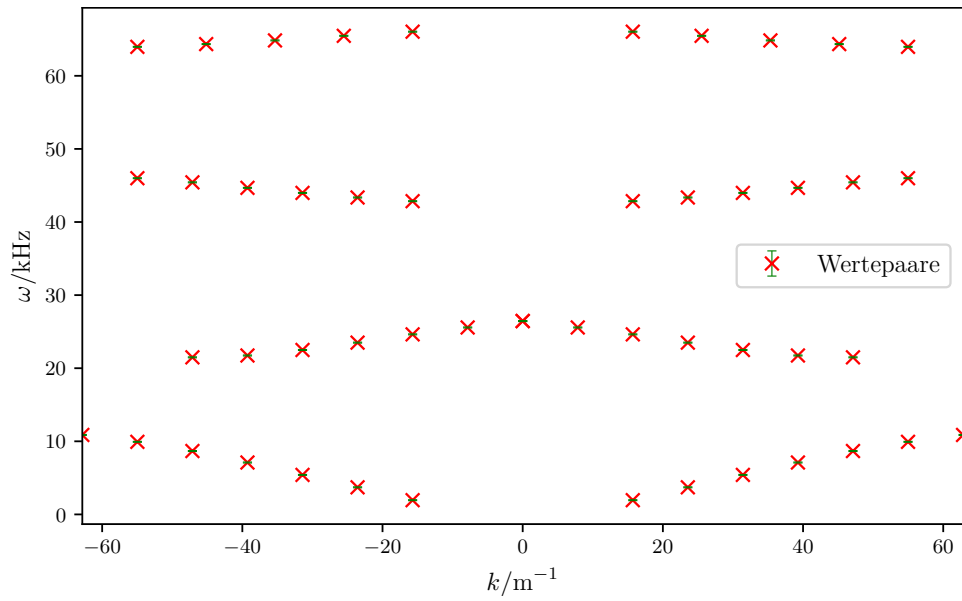


Abbildung 14: Dispersionsrelation im reduzierten Zonenschema bei acht über 10 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

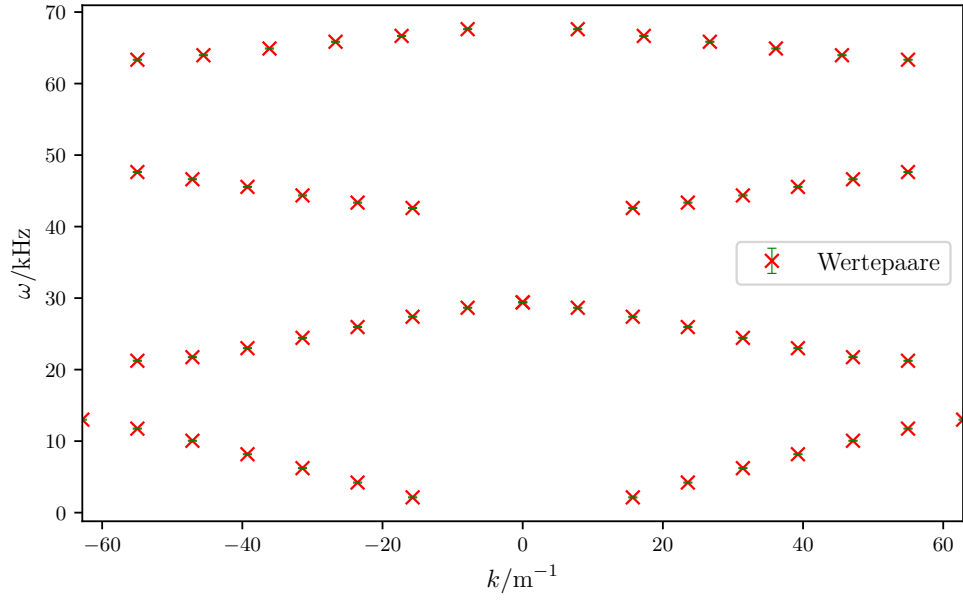


Abbildung 15: Dispersionsrelation im reduzierten Zonenschema bei acht über 13 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

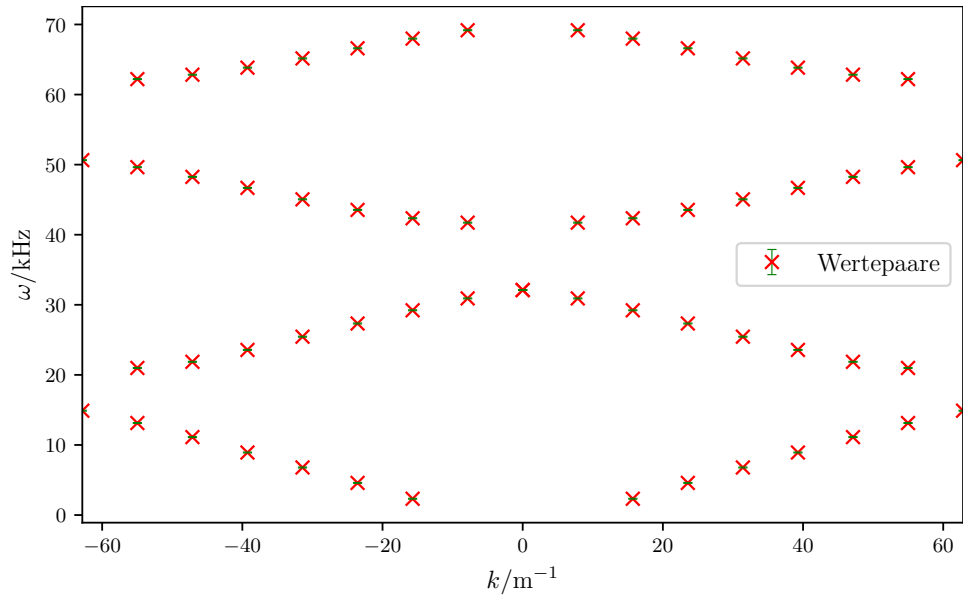


Abbildung 16: Dispersionsrelation im reduzierten Zonenschema bei acht über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

In den Abbildungen 17 und 18 sind die Spektren für zehn und zwölf über 16 mm-Iriden gekoppelte 50 mm-Röhren zu sehen. Im Vergleich zu 13 zeigt sich, dass während die Lage der Peaks mit zunehmender Röhrenlänge nahezu unverändert ist, die Amplitude aller Peaks mit Ausnahme des zweiten abfallen, während dieser stark anwächst. Zudem ist die Anzahl der Peaks P pro Band direkt abhängig von der Anzahl der Segmente S der Röhre mit $P = S$.

In Abbildung 19 ist das Spektrum von acht über 16 mm-Iriden gekoppelten 75 mm-Röhren zu sehen. Der Vergleich mit Abbildung 13 zeigt, dass bei längeren Teilstücken die Dichte der Bänder direkt proportional zur Länge der Teilstücke zunimmt.

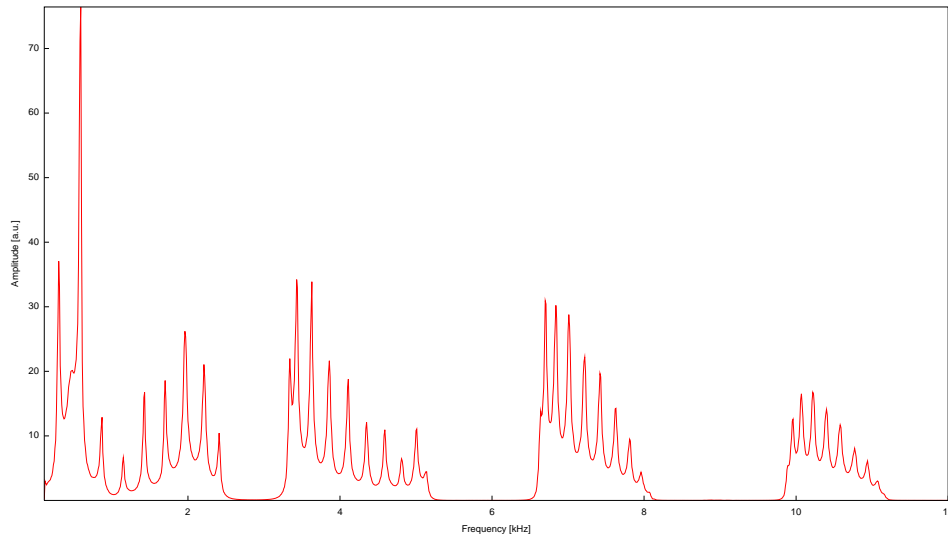


Abbildung 17: Spektrum von zehn über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

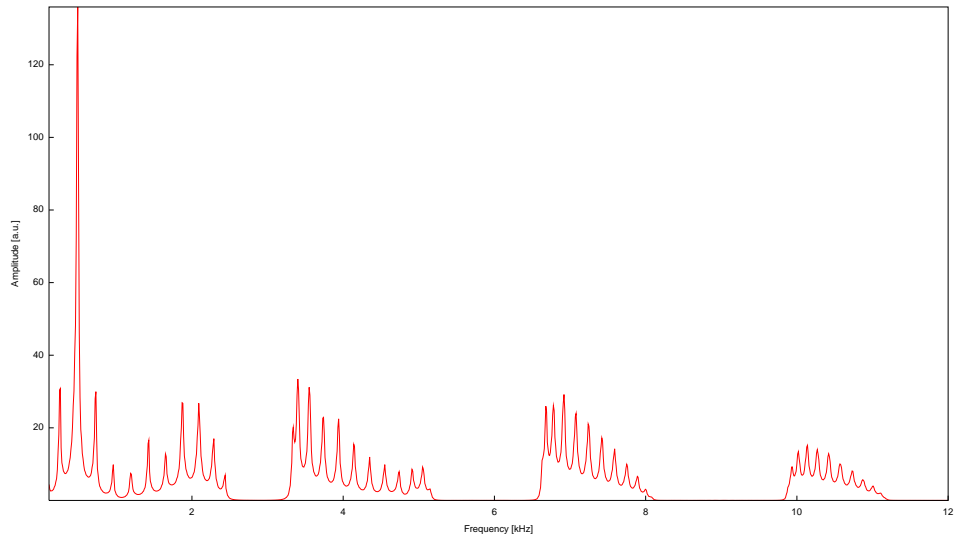


Abbildung 18: Spektrum von zwölf über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

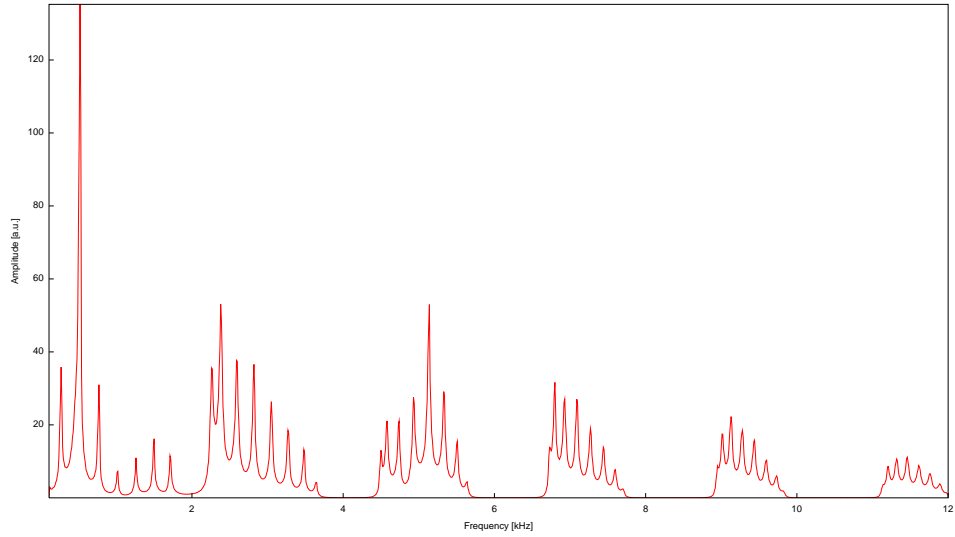


Abbildung 19: Spektrum von acht über 16 mm-Iriden gekoppelten 75 mm-Röhren.

Mit den Daten aus Abbildung 13 kann mit

$$\rho(f) = \frac{1}{f_{n+1} - f_n}$$

die Zustandsdichte ermittelt werden. Sie ist in Abbildung 20 gegen die Frequenz aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die Zustandsdichte an den Rändern der Bänder zunimmt.

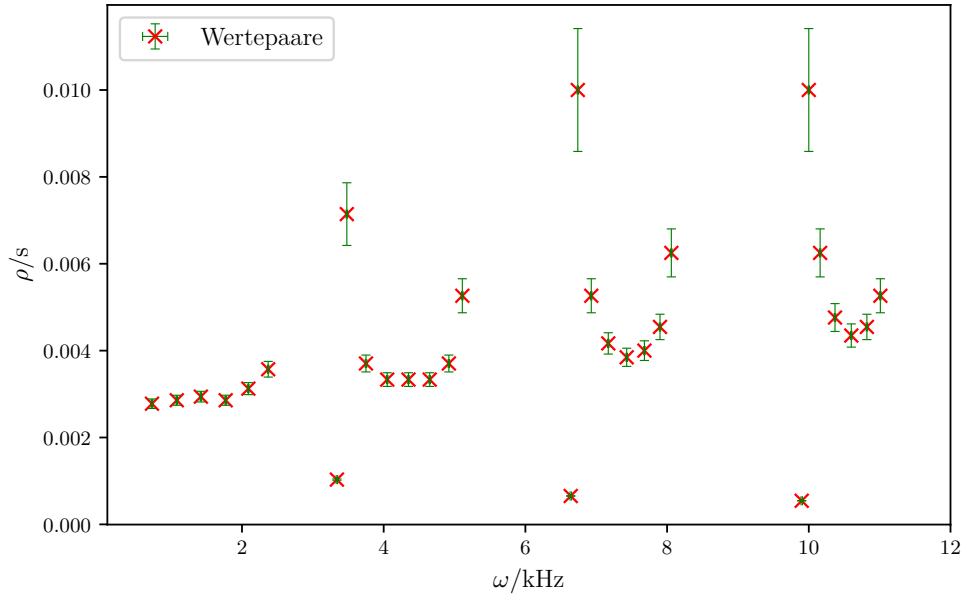


Abbildung 20: Die Zustandsdichte aufgetragen gegen die Frequenz.

5.3.2 Atom-Molekül-Kette und Fehlstellen

In Abbildung 21 ist das Spektrum einer 50 mm-Röhre von 100 Hz bis 22 000 Hz zu sehen. Bis $f \approx 15\,000$ Hz sind die Peaks äquidistante longitudinale Moden mit $\Delta f = (3390 \pm 15)$ Hz. Für höhere Frequenzen sind die Abstände nicht mehr gleichmäßig und die Amplituden der Peaks wesentlich geringer. Sie beschreiben die transversalen Moden der Schallwelle in der Röhre.

In Abbildung 22 ist dasselbe Spektrum für eine 75 mm-Röhre aufgenommen. Auch hier sind die longitudinalen Moden durch äquidistante Peaks bis etwa 15 000 Hz zu erkennen mit $\Delta f = (2268 \pm 6)$ Hz.

In Abbildung 23 ist das Spektrum von 100 Hz bis 22 000 Hz einer Einheitszelle bestehend aus zwei über eine 10 mm-Iris gekoppelten 50 mm-Röhren zu sehen. Dieselbe Messung für eine 16 mm-Kopplung ist in Abbildung 24 zu sehen. Es zeigt sich, dass die Breite der Bänder bei größerer Kopplung steigt während die Höhe der Peaks abnimmt. Auch ist bei größerem Innendurchmesser der Iris ein stärkerer Untergrund zu beobachten. Bei zunehmender Anzahl von Zellen ist eine stärkere Ausprägung der Bänder und Bandlücken zu beobachten.

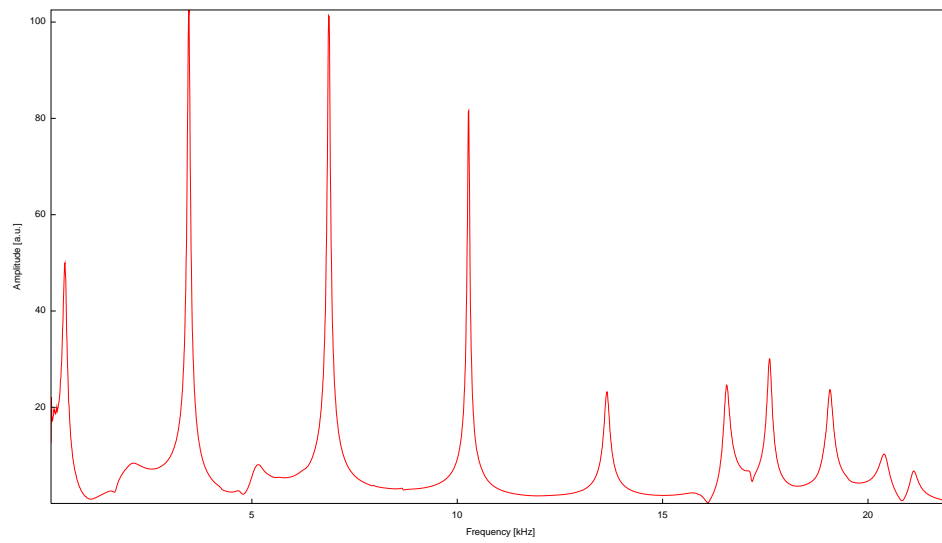


Abbildung 21: Spektrum von einer 50 mm-Röhre.

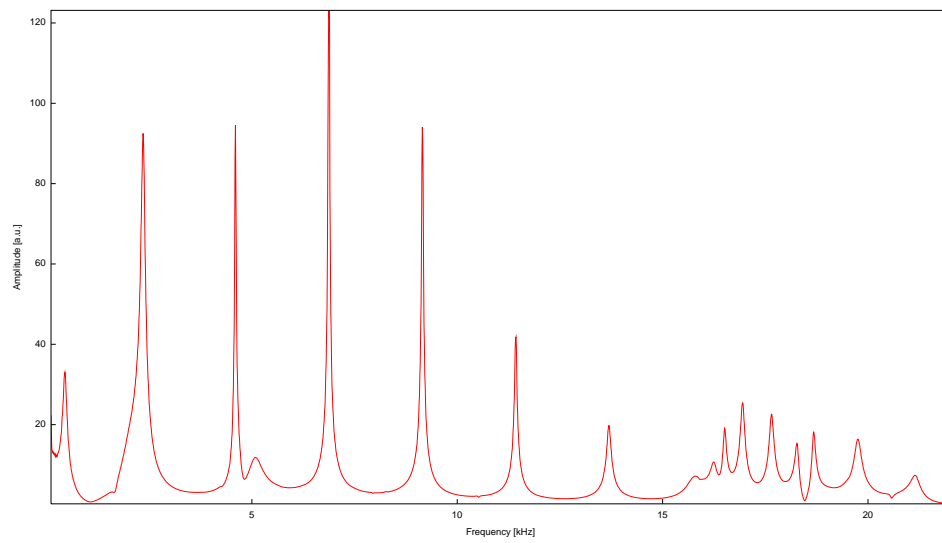


Abbildung 22: Spektrum von einer 75 mm-Röhre.

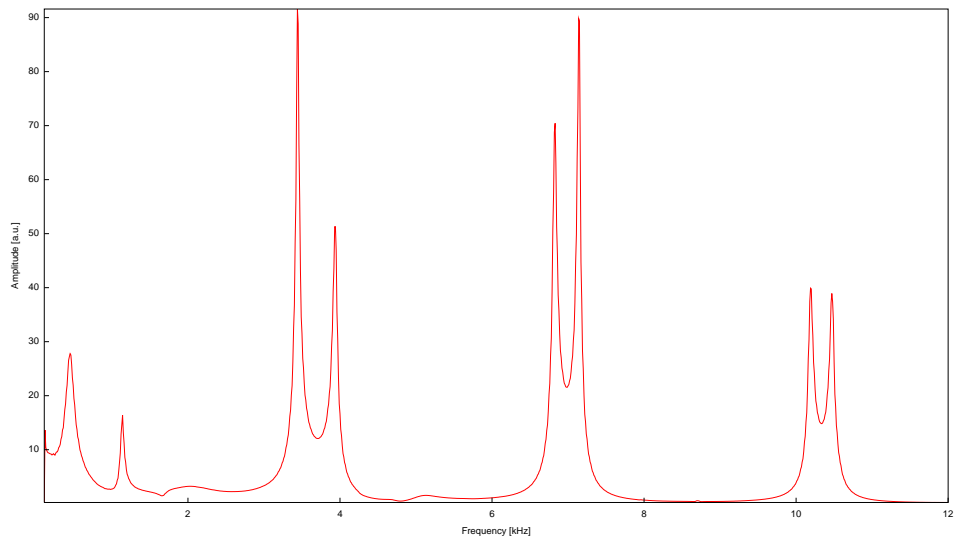


Abbildung 23: Spektrum von einer Einheitszelle bestehend aus zwei über 10 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

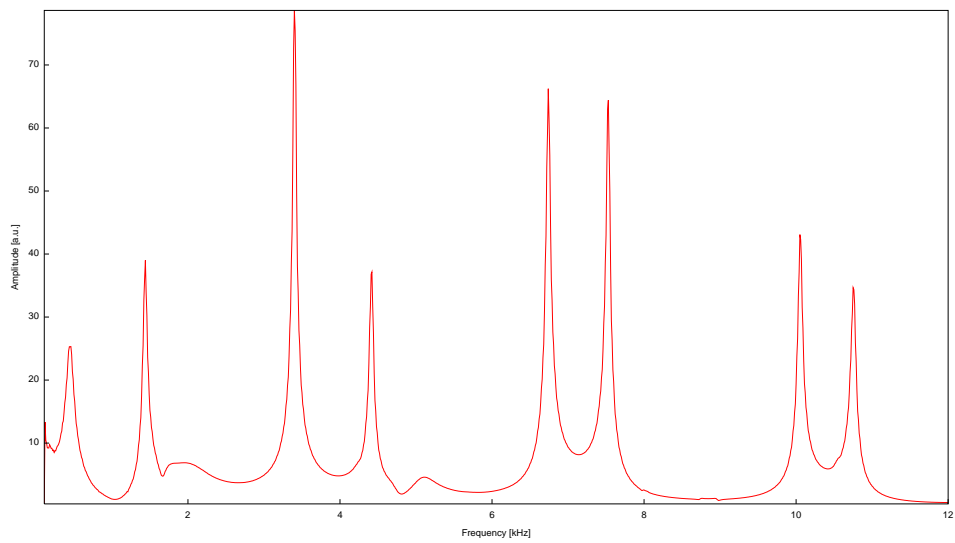


Abbildung 24: Spektrum von einer Einheitszelle bestehend aus zwei über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

In Abbildung 25 ist das Spektrum einer Folge von zwölf 50 mm-Röhren, die abwechselnd über 13 mm- und über 16 mm-Iriden gekoppelt sind. Der Vergleich mit Abbildung 18 zeigt, dass sich bei alternierender Kopplung innerhalb der Bänder eine Substruktur bildet, die Anzahl der Peaks jedoch konstant bleibt. In den Abbildungen 26 und 27 sind die Bandstrukturen im reduzierten Zonenschema zu sehen.

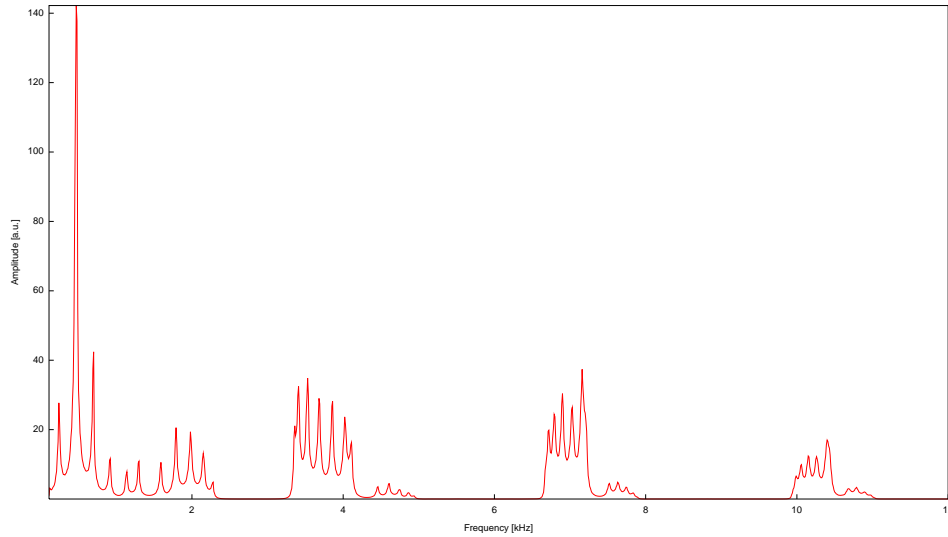


Abbildung 25: Spektrum von zwölf abwechselnd über 13- und 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

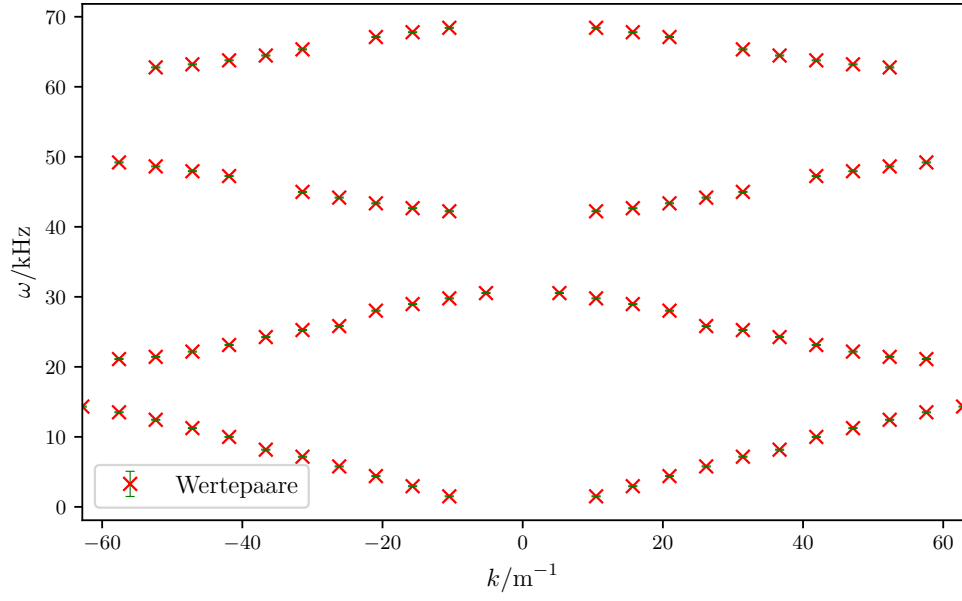


Abbildung 26: Bandstruktur von zwölf abwechselnd über 13- und 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

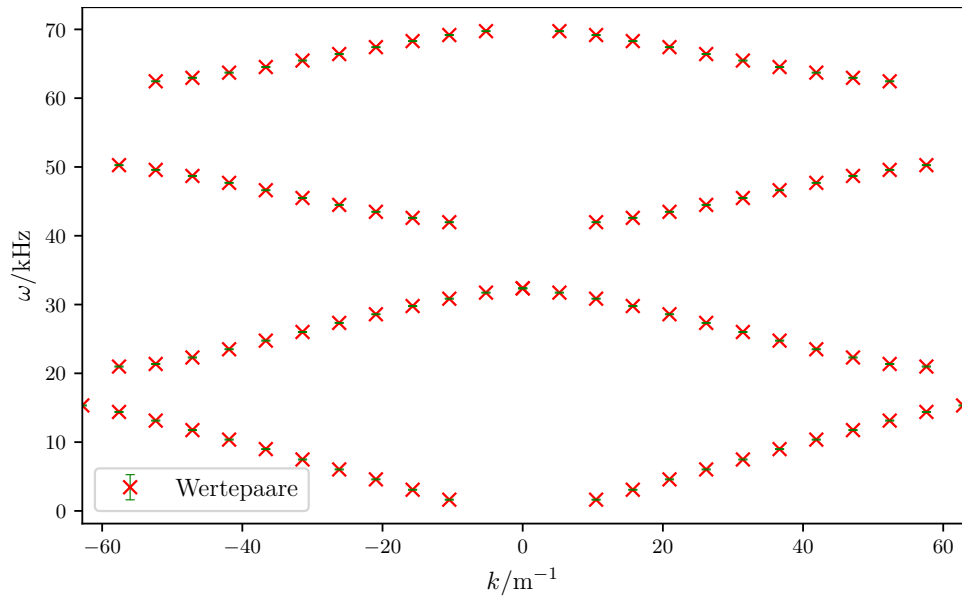


Abbildung 27: Bandstruktur von zwölf über 16 mm-Iriden gekoppelten 50 mm-Röhren.

In Abbildung 28 ist das Spektrum einer Folge von fünf Zellen bestehend aus einer 50 mm-Röhre mit einer 16 mm-Iris und einer 75 mm-Röhre mit einer 16 mm-Iris. In den Abbildungen 29 und 30 sind die Bandstrukturen im erweiterten, wie im reduzierten Zonenschema zu sehen. Um das reduzierte Schema etwas anschaulicher zu machen, sind die Werte in einem Band mit einer Linie verbunden.

Es ist zu erkennen, dass sich jeweils zwei Bänder mit fünf Peaks ohne Bandlücke, gefolgt von drei Bändern mit fünf Peaks mit Bandlücke bilden. Das Verhältnis von $\frac{2}{3}$ entspricht dem aus den atomaren Zellen aus den Abbildungen 21 und 22.

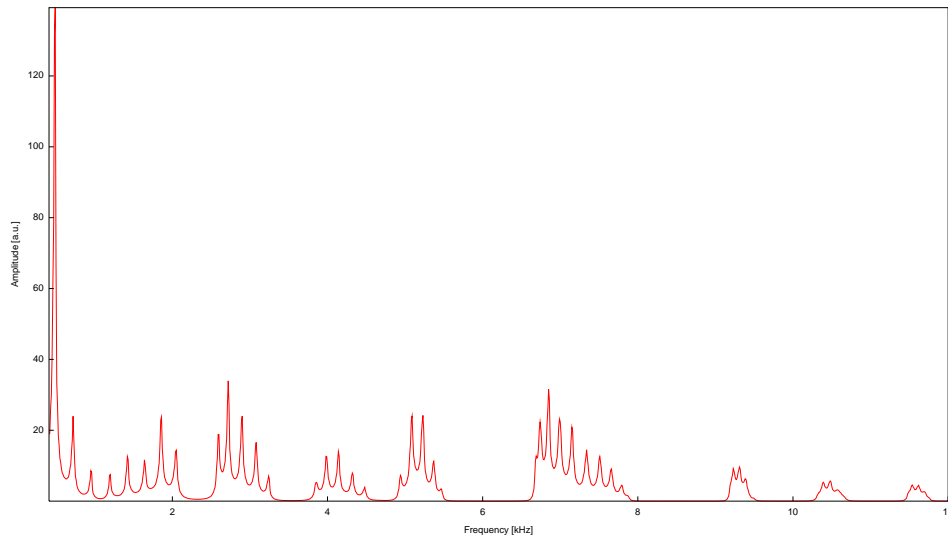


Abbildung 28: Spektrum von fünf Zellen bestehend aus einer 50 mm-Röhre und einer 75 mm-Röhre jeweils gekoppelt mit einer 16 mm-Iris.

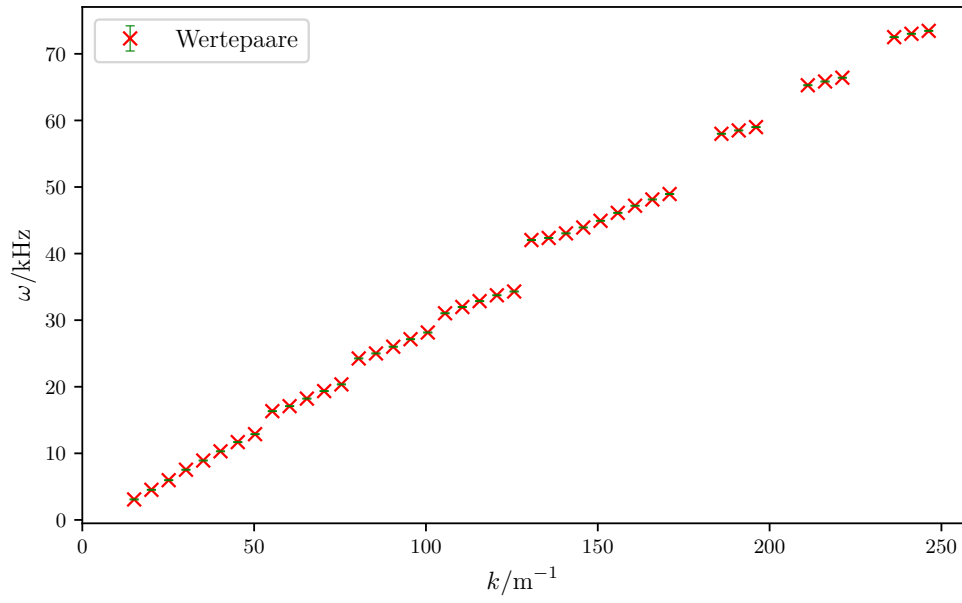


Abbildung 29: Bandstruktur von fünf Zellen bestehend aus einer 50 mm-Röhre und einer 75 mm-Röhre jeweils gekoppelt mit einer 16 mm-Iris im erweiterten Schema.

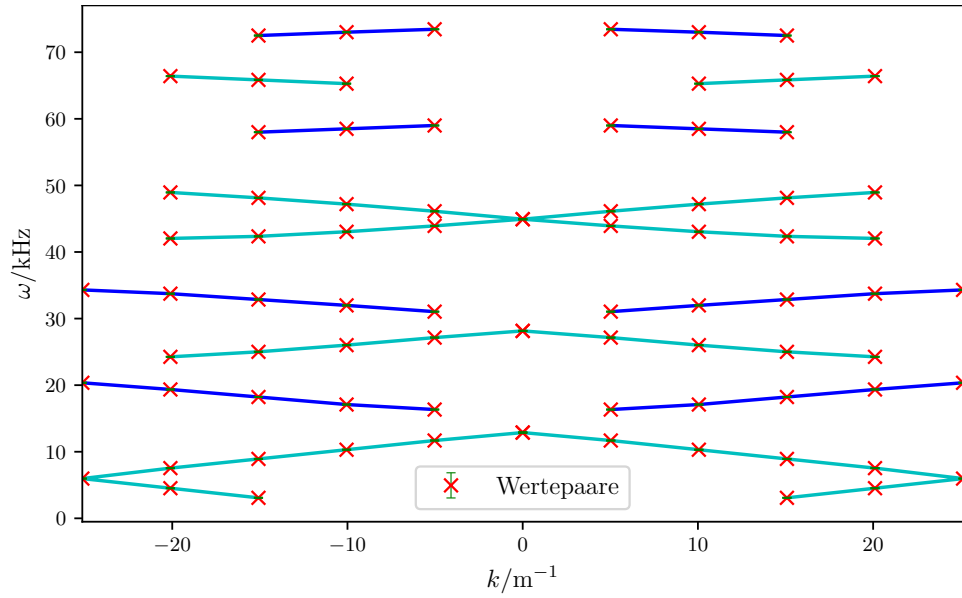


Abbildung 30: Bandstruktur von fünf Zellen bestehend aus einer 50 mm-Röhre und einer 75 mm-Röhre jeweils gekoppelt mit einer 16 mm-Iris im reduzierten Schema.

Im folgenden wird in einer Röhre bestehend aus 50 mm-Röhren mit 16 mm-Iriden eine Fehlstelle in Form einer 75 mm-Röhre eingebaut. In Abbildung 31 ist das Spektrum abgebildet, wenn das dritte Segment ausgetauscht wird. Im Vergleich zum Aufbau ohne Defekt in Abbildung 18 ist zu erkennen, dass das zweite Band nur noch elf Peaks besitzt und sich ein neuer Defekt-Peak in der ersten Bandlücke bildet. Dieser ist unabhängig von der Position, an der das Segment ausgetauscht wird, jedoch abhängig von der Länge dieses Segments. Die Lage der Peaks im zweiten Band ändert sich leicht je nachdem wo das Fehlsegment platziert wird.

In den Abbildungen 32 und 33 sind die Bandstrukturen im reduzierten Zonenschema zu sehen.

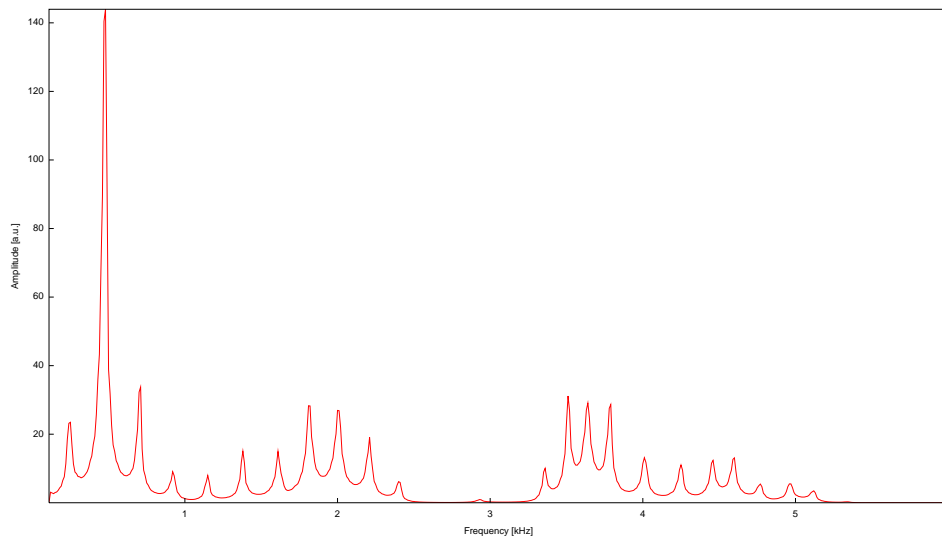


Abbildung 31: Spektrum einer Röhre bestehend aus 50 mm-Röhren getrennt durch 16 mm-Iriden mit einer 75 mm Fehlstelle im dritten Segment.

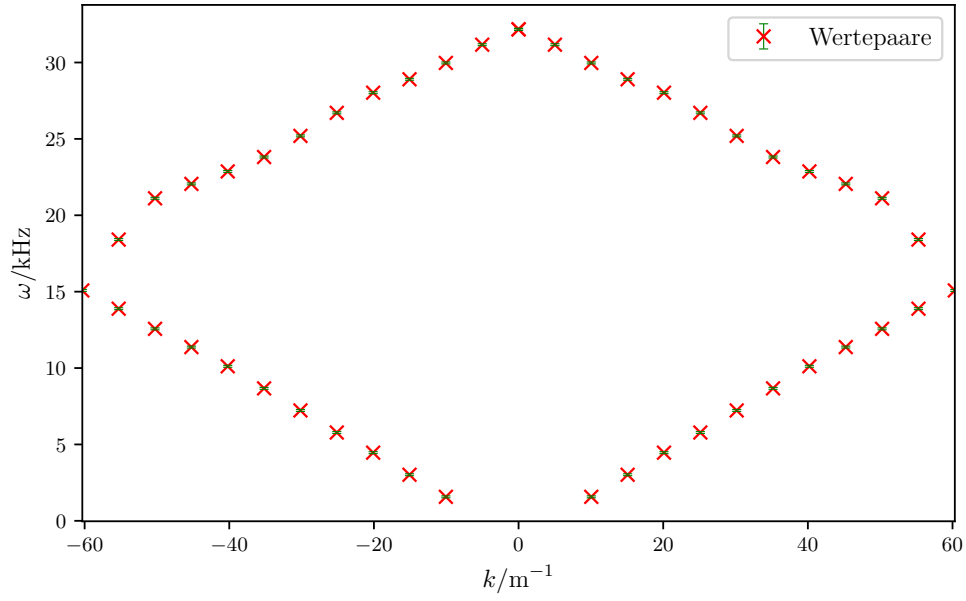


Abbildung 32: Bandstruktur einer Röhre bestehend aus 50 mm-Röhren getrennt durch 16 mm-Iriden mit einer 75 mm Fehlstelle im dritten Segment.

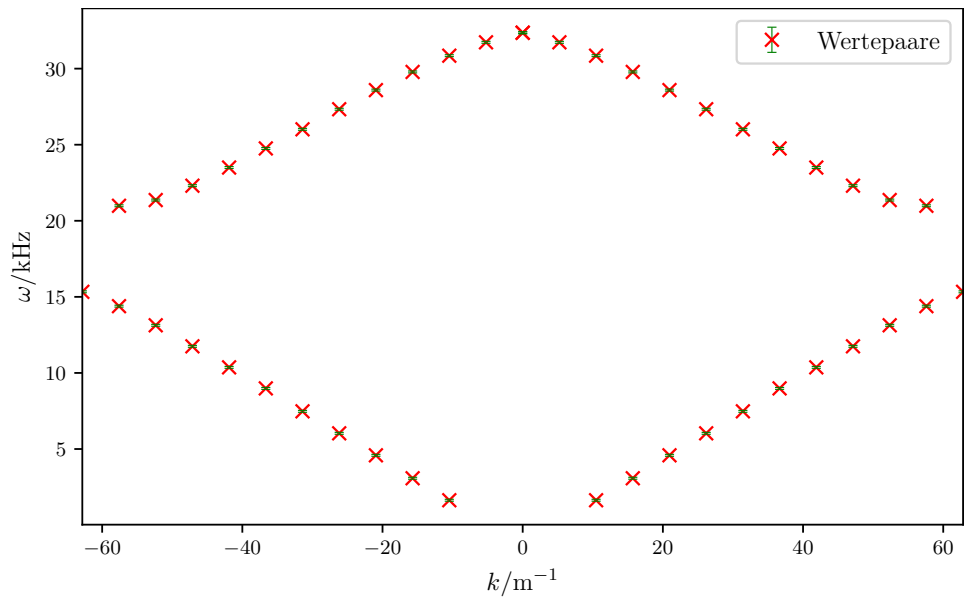


Abbildung 33: Bandstruktur einer Röhre bestehend aus 50 mm-Röhren getrennt durch 16 mm-Iriden ohne Fehlstelle.

6 Diskussion

Bei der Untersuchung der Reproduzierbarkeit der Messungen sind wie zu erwarten keine Abweichungen der Frequenzen zu beobachten. Die geringen Abweichungen der Amplitude liegen im Rahmen der statistischen Ungenauigkeit.

Bei der Modellierung des Wasserstoffatoms konnten die ersten vier Peaks gut den ersten Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ zugeordnet werden. Der letzte Peak lies sich nicht eindeutig zuordnen. Werden die vorherigen Peaks betrachtet, so würden die Quantenzahlen $m = 0$ und $l = 5$ erwartet werden. Der Plot sieht jedoch am ehesten nach einer Kugelflächenfunktion mit $m = 1$ und $l = 2$ aus.

Die Schallgeschwindigkeit c konnte sowohl über die Frequenzabstände der Resonanzen in Abhängigkeit von der Länge, als auch über die Dispersionskurve gut bestimmt werden. Der Vergleich mit der Literatur ist in Tabelle 4 zu sehen. Das die Werte der ersten Messung stärker von der Literatur abweichen, könnte an der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit liegen. Die lineare Dispersion stimmt mit der Theorie sehr gut überein.

Die Breiten der Bänder und Bandlücken aus Tabelle 3 verhalten sich ebenfalls wie erwartet, da ein schmalerer Durchmesser von der Iris eine schwächere Kopplung darstellt.

Beim Untersuchen von Zusammenhängen wurden direkte lineare Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Peaks pro Band und der Anzahl der Segmente, sowie zwischen der Länge der Segmente und der Banddichte entdeckt. Die Zustandsdichte steigt ebenfalls wie erwartet an den Rändern der Bänder stark an. Da es sich um einen endlichen Aufbau handelt ist sie dort nicht, wie in der Theorie, unendlich, sondern nimmt einen endlichen Wert an.

Bei periodischen Strukturen konnte die Ausbildung von Substrukturen beobachtet werden. Das Einführen einer Fehlstelle hingegen führte zu einem Defekt-Peak in der Bandlücke. Dies kann nützlich sein, um zum Beispiel Elektronen leichter in ein höheres Band anzuregen.

Tabelle 4: Die Werte für die Schallgeschwindigkeit c im Vergleich mit dem Referenzwert [1] bei 293,15 K.

gemessen	Referenzwert[1]	Abweichung
$(339,6 \pm 0,4) \text{ m/s}$	343,6 m/s	-1,16%
$(343,77 \pm 0,16) \text{ m/s}$	343,6 m/s	0,05%

Literatur

- [1] TU Chemnitz. *M 8 Schallgeschwindigkeit von Gasen*. URL: https://www.tu-chemnitz.de/physik/PGP/files/Anleitungen/Physik_2/M8.pdf (besucht am 23.01.2019).
- [2] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. Version 1.5.3. URL: <http://matplotlib.org/> (besucht am 13.11.2017).
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.18.1. URL: <http://www.scipy.org/> (besucht am 13.11.2017).
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 3.0.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/> (besucht am 13.11.2017).
- [5] Professor Rene Matzdorf. *Quantum Analogs Chapter 2*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/QAStudent2.pdf> (besucht am 24.01.2019).
- [6] Travis E. Oliphant. *NumPy: Python for Scientific Computing*. Version 1.11.1. URL: <http://www.numpy.org/> (besucht am 13.11.2017).