V103

Doppler-Effekt

Patrick Schmidt patrick7.schmidt@tu-dortmund.de
Michael Windau michael.windau@tu-dortmund.de

Durchführung: 31.01.2017 Abgabe: 07.02.2017

1 Theorie

Bei der Ausbreitung von Wellen beliebiger Art gibt Sender und Empfänger. Der Doppler-Effekt tritt auf, sobald sich Sender und Empfänger relativ zueinander bewegen. Dieser Effekt beschreibt eine Frequenzänderung am Empfänger.

1.1 Ruhernde Quelle

Bewegt sich der Empfänger relativ zum ruhenden Sender(ruhende Quelle), so erfährt er

$$\Delta z = \frac{\Delta t v}{\lambda_0} \tag{1}$$

mehr Schwingungen als wenn er ruhen würde. Hierbei ist Δ t ein Zeitintervall welches betrachtet wird, v die Geschwindigkeit die Bewegung in Richtung des Senders , v_0 die Ruhefrequenz und λ_0 die Wellenlänge der ausgesendeten Welle. Addiert man diese zu der Grundanzahl von Schwingungen die er als ruhend erhalten würde, ergibt sich:

$$\Delta n + \Delta z = \Delta t \left(v_0 + \frac{v}{\lambda_0} \right) \tag{2}$$

Hier wird der Term, der von der Klammer eingeschlossen wird als Frequenz am Empfänger v_E definiert. Fügt man nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ein, ergibt sich schließlich:

$$v_E = v_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) \tag{3}$$

Mit der Frequenzänderung

$$\Delta v = v_0 \frac{v}{c} \tag{4}$$

1.2 Ruhender Empfänger

Ist umgekehrt der Empfänder derjenige der an einem Ort ruht und der Sender der Bewegende mit Geschwindigkeit v ist, so wird die Wellennlänge am Empfänger um

$$\Delta \lambda = \frac{v}{v_0} \tag{5}$$

gestaucht. Somit ergibt sich für die veränderte Frequenz:

$$v_Q = \frac{c}{\lambda_0 - \Delta \lambda} \tag{6}$$

Bezieht man nun wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle hinzu, so ergibt sich schließlich:

$$v_Q = \frac{c}{\frac{c}{v_0} - \frac{v}{v_0}} = v_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \tag{7}$$

Im Bereich der Optik muss der Doppler-Effekt relativistisch betrachtet werden, da sich Sender und Empfänger mit v c_0 nähern können. Hier spricht man nun vom quadratischen Doppler-Effekt:

$$v' = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{v}{c_0}} \tag{8}$$

2 Durchführung

2.1 Geschwindigkeitsmessung zwischen Sender und Empfänger

Wie in Abbildung 1 zu sehen befindet sich ein Schlitten auf dem ein Lautsprecher montiert ist auf einer Bahn der Länge s.

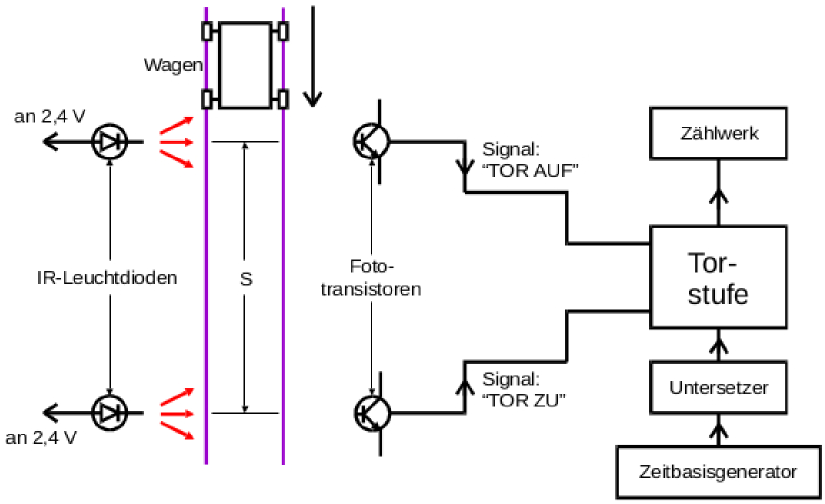

Abbildung 1: Aufbau zur Geschwindigkeitsmessung des Schlittens[1].

Mit hilfe einer Zehngangschaltung wird der Schlitten auf dieser Bahn bewegt. Dabei fährt er durch zwei Lichtschranken die am Anfang und Ende der Bahn montiert sind. Diese Lchtschranken sind mit der Torstufe aus Abbildung 2 verbunden.

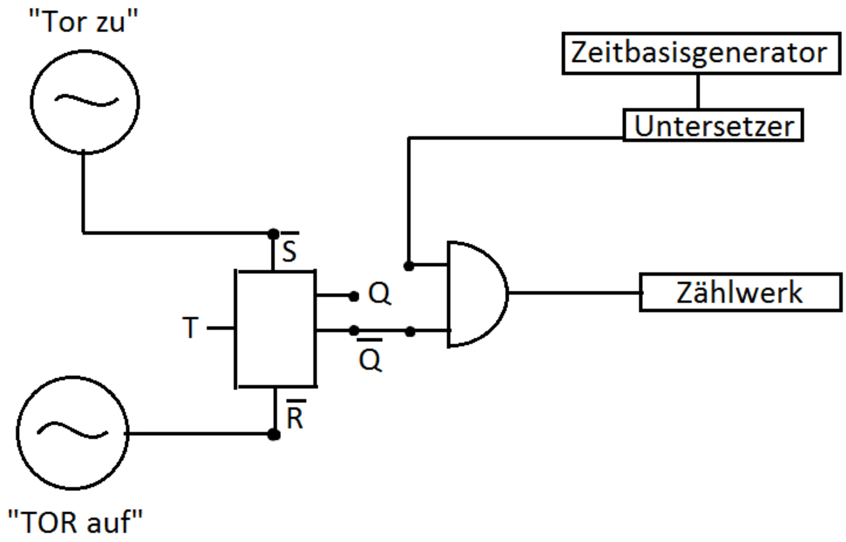

Abbildung 2: Schaltungsaufbau der Torstufe.

Das Zählwerk gibt hierbei die Zeit an, die der Wagen benötigt um von der ersten zur zweiten Lichtschranke zu kommen.

2.2 Messung der Schallgeschwindigkeit über die Wellenlänge

Hierbei wird ein Lautsprecher auf einen Präzisionsschlitten befestigt und an einen Frequenzgenerator augeschlossen(Abbildung 3). Der erzeugte Schall wird auf ein Mikrofon geworfen, welches das Signal verstärkt und in ein Oszilloskop gegeben. Die Spannung vom Generator wird auf die X-Ablenkung gelegt. Sind die beiden Spannungen in Phase (eine Gerade als Lissajous-Figur am Oszilloskop), so entspricht der Verschiebeweg auf dem Präzisionsschlitten genau der Wellenlänge. Die Schallgeschwindigkeit c lässt sich nun mit Hilfe von v_0 und λ bestimmen.

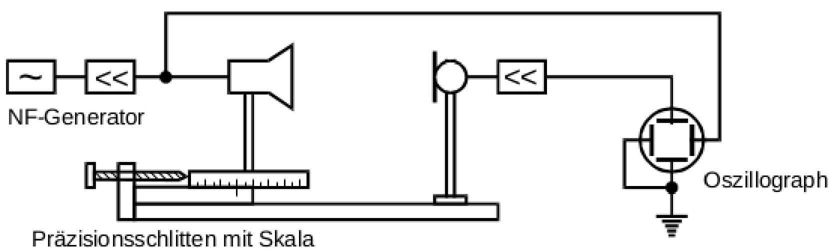

Abbildung 3: Aufbau zur Bestimmung der Wellenlänge [1].

2.3 Frequenzmessung

Der Aufbau in Abbildung 4 beschreibt die Messun der Frequenz. Hierbei wird der auf dem Schlitten befestigte Lautsprecher durch die Zehngangschaltung vor und zurückbewegt. Durchquert der Schlitten eine der Lichtschranken, so werden Schwingungen innerhalb von 1 s gezählt und am Zählwerk ausgegeben. Die hierfür benötigte Schaltun ist in Abbildung 5 abgebildet.

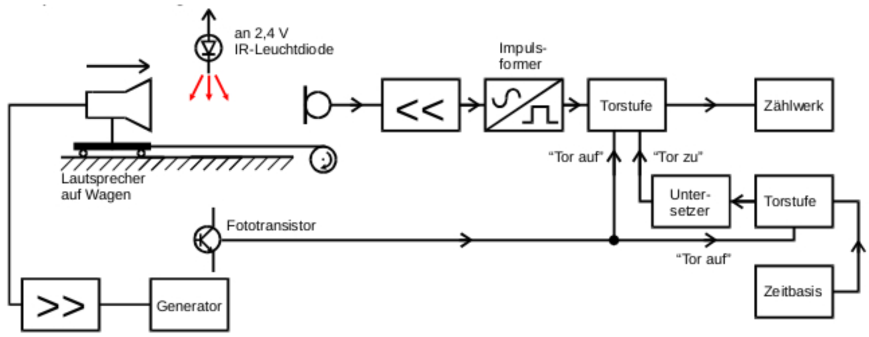

Abbildung 4: Aufbau zur Messung der Frequenz[1].

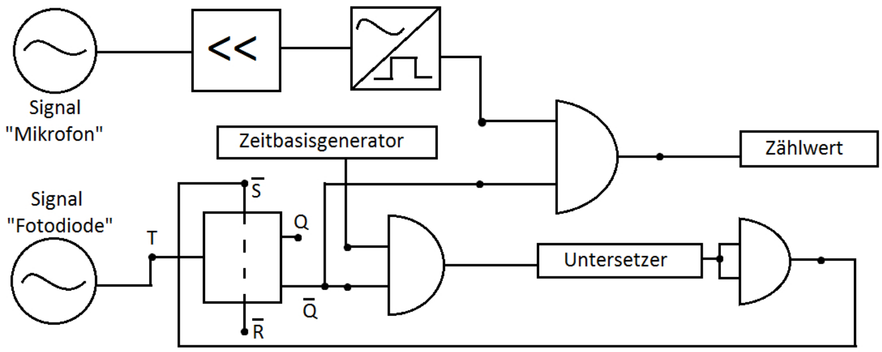

Abbildung 5: Schaltbild zur Messung der Frequenz.

3 Auswertung

Zunächst gilt es die Geschwindigkeit des Wagens auf der Schiene zu bestimmen. Dafür wird die Strecke s zwischen den Lichtschranken des Aufbaus durch die gemessene Zeit geteilt, die der Wagen braucht um im jeweiligen Gang die Strecke zu überqueren. Dabei fährt der Wagen vorwärts und rückwärts durch die Lichtschranken.

$$\mathrm{s} = (0.411 \pm 0.0003)\mathrm{m}$$

Der Ablesefehler der Strecke s ergibt sich durch das messen mit einem Maßband.

Tabelle 1: Zeiten in Sekunden die der Wagen braucht um die Länge der Strecke bei verschiedenen Gängen vorwärts und rückwärts zu überfahren.

$\frac{U}{min}$	Vor/s	Rck/s	$\frac{U}{min}$	Vor/s	Rck/s
6	9.0262	9.0587	36	1.5015	1.5201
	9.0116	9.0707		1.5015	1.5184
	9.0195	9.0596		1.5037	1.5167
	9.0211	9.0583		1.5011	1.5205
	9.0403	9.0577		1.5021	1.5159
12	4.4997	4.7534	42	1.2659	1.3019
	4.5219	4.7652		1.2891	1.3039
	4.5018	4.7714		1.2879	1.3016
	4.5031	4.7783		1.2845	1.3025
	4.5062	4.7652		1.2868	1.3043
18	3.0037	3.1533	48	1.1252	1.1402
	3.0017	3.1304		1.1253	1.1415
	3.0153	3.1089		1.1262	1.1414
	3.0061	3.0975		1.1270	1.1375
	2.9926	3.1402		1.1278	1.1404
24	2.2531	2.2805	54	0.9996	1.0124
	2.2576	2.2728		0.9996	1.0136
	2.2579	2.2849		1.0010	1.0156
	2.2574	2.2691		0.9962	1.0141
	2.2552	2.2740		0.9975	1.0133
30	1.8053	1.8174	60	0.8971	0.9116
	1.8074	1.8179		0.8968	0.9114
	1.8078	1.8172		0.8975	0.9106
	1.8045	1.8224		0.8981	0.9096
	1.8035	1.8189		0.8993	0.9134

Für die Bestimmung der Geschwindigkeit werden die gemessenen Zeiten gemittelt. Die daraus enstehende Abweichung des Mittelwertes, wird dabei über ”Python” mit dem Paket ”uncertainties” ermittelt. Werden fehlerbehaftete Größen in weiteren Rechnungen verwendet, ergibt sich der neue Fehler ebenfalls durch Python.

Tabelle 2: Gemittelte Zeiten und die daraus resultierenden Geschwindigkeiten.

$\frac{U}{min}$	Rueck/s	Vor/s	Vor/$\frac{m}{s}$	Rueck/$\frac{m}{s}$
6	9.060±0.002	9.023±0.005	0.04554±0.00004	-0.04536±0.00003
12	4.766±0.004	4.506±0.004	0.0912±0.0001	-0.08622±0.00001
18	3.12±0.01	3.003±0.004	0.1368±0.0002	-0.1315±0.0004
24	2.276±0.003	2.2562±0.0009	0.1822±0.0001	-0.1805±0.0003
30	1.8187±0.0009	1.8057±0.0008	0.2276±0.0002	-0.2261±0.0002
36	1.5183±0.0009	1.5019±0.0004	0.2736±0.0002	-0.2707±0.0002
42	1.3028±0.0005	1.282±0.004	0.320±0.001	-0.3155±0.0003
48	1.1402±0.0007	1.1263±0.0005	0.3649±0.0003	-0.3605±0.0003
54	1.0138±0.0005	0.9988±0.0008	0.4115±0.0005	-0.4054±0.0004
60	0.9113±0.0006	0.8977±0.0004	0.4578±0.0004	-0.4509±0.0004

Für die Bestimmung der Wellenlängen wurden Abstände gemessen in denen die Lissajou-Figuren zu Geraden werden.

Tabelle 3: Abstände in denen die Lissajou-Figuren zu Geraden werden.

Abstand/mm
7.115
16.45
24.94
33.43
41.945
49.485

Der Abstand zwsichen zwei Positionen stellt jeweils eine halbe Wellenlänge dar.

Tabelle 4: Differenz der Abstände zur Bestimmung der Wellenlänge.

Abstnde	$\frac{\lambda}{2}$/m	λ/m
2-1	0.009335	0.01867
3-2	0.00849	0.01698
4-3	0.00849	0.01698
5-4	0.008515	0.01703
6-5	0.00754	0.01508

Aus den gemessenen Wellenlängen wird der Mittelwert bestimmt, wobei in diesem Fall die erste und letzte Differenz nicht mit im Mittelwert betrachtet werden, da sich diese zu stark von den restlichen unterscheiden. Für den so gebildeten Mittelwert von λ ergibt sich:

$$\lambda = (0.01699 \pm 0.00002)m$$

Als nächstes gilt es die Ruhefrequenz ν_0 zu messen. In dieser Durchführung wird die Messung jedoch nicht durchgeführt, und stattdessen für weitere Rechnungen der Wert

$$\nu_0 = (20741.8 \pm 0.4)\mathrm{Hz}$$

verwendet.

Mithilfe der Ruhefrequenz und der Wellenlänge lässt sich die Schallgeschwindigkeit c berechnen:

$$\mathrm{c} = \nu_0 \lambda = (352.5 \pm 0.3)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Weiter lässt sich der Faktor ν_0/c bzw. $1/\lambda$ bestimmen:

$$\frac{\nu_0}{\mathrm{c}} = (58.83 \pm 0.05)\mathrm{m}^{-1}$$

Mit der bekannten Ruhefrequenz, der Schallgeschwindigkeit und der maximalen Geschwindigkeit $\mathrm{v}_{\mathrm{max}} = (0.4578 \pm 0.0004)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ lässt sich nun überprüfen ob bei der Berechnung der veränderten Frequenzen ein Unterschied zwischen bewegter Quelle und bewegtem Empfänger zu erkennen ist.

$$\nu_{\mathrm{E}} = (20768.73 \pm 0.4)\mathrm{Hz}$$
$$\nu_{\mathrm{Q}} = (20768.77 \pm 0.4)\mathrm{Hz}$$

Wie zu erkennen ist der Unterschied verschwindend gering und liegt im Fehlerintervall der beiden Werte.

Eine Messung der Frequenz von bewegten Quellen wird trotzdem durchgeführt, sie sind in folgender Tabelle abgebildet. Zu beachten ist, dass die gemessenen Werte aufgrund eines Systemsfehler um einen Faktor von 4/5 vom eigentlich gemessenen Wert verschieden sind.

Tabelle 5: Frequenz in Sekunden die durch die Vorwärts- und Rückwärtsbewegung verändert wird.

$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$	Vor/Hz	Rueck/Hz	$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$	Vor/Hz	Rueck/Hz
6	16596	16592	36	16609	16579
	16596	16591		16608	16579
	16596	16591		16608	16579
	16597	16591		16609	16579
	16596	16591		16608	16579
12	16598	16589	42	16611	16577
	16598	16589		16611	16577
	16598	16589		16611	16576
	16598	16589		16611	16577
	16598	16590		16611	16577
18	16601	16587	48	16613	16575
	16600	16586		16613	16574
	16600	16586		16613	16574
	16600	16587		16613	16574
	16601	16587		16613	16574
24	16604	16584	54	16616	16572
	16604	16584		16615	16572
	16603	16584		16615	16572
	16603	16584		16615	16572
	16604	16584		16615	16572
30	16606	16582	60	16618	16569
	16606	16582		16618	16569
	16605	16582		16618	16570
	16605	16581		16618	16569
	16605	16582		16618	16570

Im folgenden wird die Differenz $\Delta\nu$ der Frequenz von ν_0 betrachtet.

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0$$

Diese lässt sich auch in Abhängigkeit zur Geschwindigkeit mit dem Faktor $\frac{\nu_0}{c}$ darstellen. Unter dieser Betrachtung wird sie als Gerade gegen v aufgetragen, wobei die Steigung den Faktor ergibt. Über eine lineare Regression lässt sich dieser Faktor dann bestimmen.

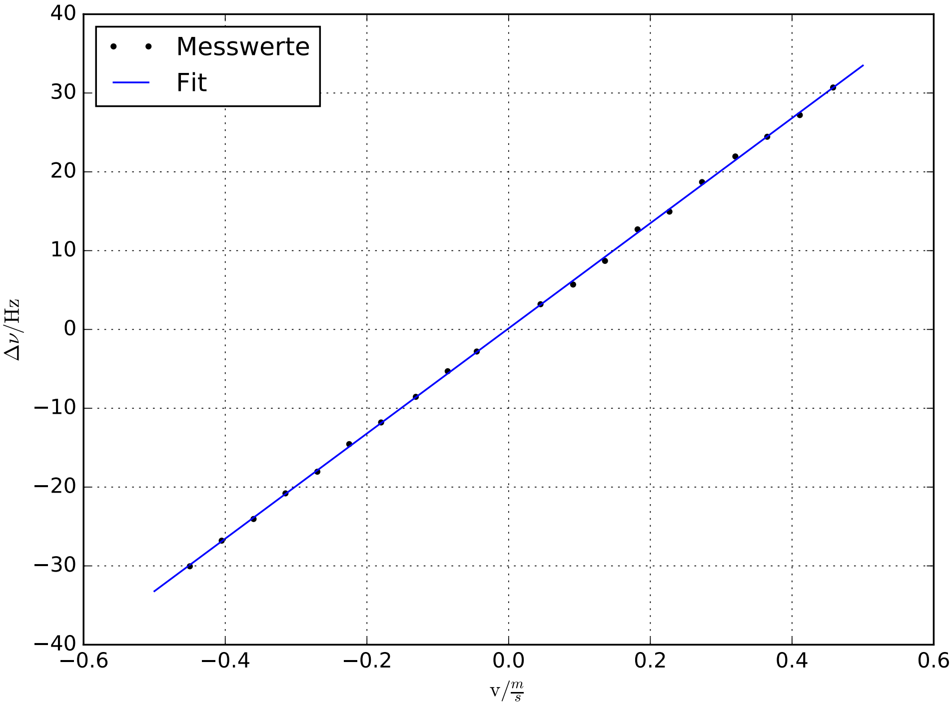

Abbildung 6: Graphik der Frequenzdifferenz.

Durch die lineare Regression ergibt sich die Steigung a und der Achsenabschnitt b:

$$\text{Steigung a:} \quad = (66.7 \pm 0.2)\mathrm{m}^{-1} = \frac{\nu_0}{\mathrm{c}}$$
$$\text{Achsenabschnitt b:} \quad = (0.14 \pm 0.06)\mathrm{Hz}$$

Die auf zwei Arten bestimmten Werte für ν_0/c lassen sich nun vergleichen. Dies geschieht über einen Studentschen t-Test, welcher durch vergleichen von zwei Messwerten angibt, ob eine systematische Abweichung vorliegt. Dafür wird die Prüfgröße t definiert:

$$\mathrm{t} = \overline{x_a} - \overline{x_b} \,/\, \sqrt{\frac{s_a^2(n_a-1)+s_b^2(n_b-1)}{n_a+n_b-2} \cdot \frac{n_a+n_b}{n_a \cdot n_b}} \tag{9}$$

$\overline{x}$ steht dabei für den Mittelwert der jeweiligen Messreihe, s für ihre Varianzen, und n

für die Anzahl der Messwerte. In diesem Fall würden das folgende Werte ergeben:

$$\overline{x_a} = 66.70$$
$$\overline{x_b} = 58.83$$
$$s_a = 0.2$$
$$s_b = 0.05$$
$$n_a = 20$$
$$n_b = 3$$
$$\mathrm{t} = 56.44$$

Als nächstes wird ein Signifikanzniveau fest gelegt, welches Auskunft darüber gibt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein systematischer Fehler vorliegt. Weiter wird die Anzahl der Freiheitsgerade f benötigt, die definiert ist als:

$$f = n_a + n_b - 2$$

Mit den Informationen über t, und f lässt sich in so genannten t-Tabellen die Wahrscheinlichkeit eines systematischen Fehlers ermitteln.

In diesem Fall ergibt dies eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 99.9% das ein systematischer Fehler vorliegt.

4 Diskussion

Zuerst ist die nicht vorgenommene Messung der Ruhefrequenz ν_0 anzumerken. Auch wenn der verwendete Wert nahe an der Richtigen liegen sollte, könnte es so zu Abweichungen kommen.

Weiter ist der Systemfehler bei der Messung der veränderten Frequenzen anzumerken. Dieser führte zu einem Faktor von 5/4 der zu den gemessenen Werten multipliziert werden musste. Nähere Informationen zur Herkunft dieses Fehlers sind nicht bekannt.

Ein weitere größere Ungenauigkeit könnte durch die Messung der Strecke zwischen den Lichtschranken enstehen, da diese lediglich mit einem Maßband einmal durchgeführt wurde.

Wichtig ist zudem das Ergebnis des Studentschen t-Test zu diskutieren. Dieser ergab nämlich ein t von 56.44, wobei bei einer Wahrscheinlichkeit von unter 99.5% für einen systematischen Fehler, t bereits unter 2.831 sein müsste. Dies führt dazu das mit ziemlicher Sicherheit gesagt werden kann, dass die Abweichung zwischen den Werten einer systematische Natur und keiner statischen zugrunde liegt.

5 Literatur

[1] TU Dortmund.Versuchsanleitung zum Versuch V102, Drehschwingungen. 2016
URL://http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V104.pdf