

V 353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Julian Hochhaus
julian.hochhaus@tu-dortmund.de

Niko Salewski
niko.salewski@tu-dortmund.de

Durchführung: 06.12.2016

Abgabe: 13.12.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Entladevorgang eines Kondensators	3
2.2	Aufladevorgang eines Kondensators	3
3	Fehlerrechnung	5
4	Durchführung	6
4.1	Versuchsaufbau	6
4.2	Versuchsdurchführung	6
5	Auswertung	7
5.1	Bestimmung der Zeitkonstanten RC mit der Entladekurve des Kondensators	7
5.2	Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude.	9
5.3	Bestimmung der Zeitkonstanten RC mit der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kosinusspannung	11
5.4	Das RC-Glied als Integrator	14
6	Diskussion	15
	Literatur	16

1 Zielsetzung

Im vorliegenden Versuch soll die Zeitkonstante eines RC-Glieds bestimmt werden. Dafür wird die Entladekurve eines Kondensators, die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung zwischen Generatorspannung und Kondensatorspannung untersucht. Außerdem soll gezeigt werden, dass das RC-Glied als Integrationsglied verwendet werden kann.

2 Theorie

Relaxation bezeichnet in der Physik einen nicht-oszillatorischen Übergang eines Systems hin zu einem stabilen Endzustand, nachdem es aus diesem entfernt wurde. Die Änderungsgeschwindigkeit \dot{A} einer physikalischen Größe A ist dabei meist proportional zur Abweichung zwischen A zu einem Zeitpunkt t und seinem Endzustand $A(\infty)$. Die Integration dieses Zusammenhangs vom Zeitpunkt 0 bis zu einem Zeitpunkt t liefert:

$$A(t) = A(\infty) + (A(0) - A(\infty)) \cdot e^{ct}, \text{ mit } c < 0. \quad (1)$$

c muss die Einheit $1/s$ haben, damit der Exponent der e-Funktion einheitenlos ist. c ist, wie im Weiteren genauer erläutert wird, die negative inverse Zeitkonstante der Relaxation des Systems und muss hierbei kleiner 0 sein, damit A beschränkt bleibt. Auf- und Entladevorgänge von Kondensatoren sind Beispiele für Relaxationsvorgänge und sollen im Folgenden detaillierter betrachtet werden.

2.1 Entladevorgang eines Kondensators

Bei einem geladenen Kondensator mit der Kapazität C befindet sich die Ladung Q auf den Platten. Zwischen den Kondensatorplatten liegt dabei die Spannung U_C an. Damit gilt:

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Nach dem Ohmschen Gesetz verursacht die Spannung U_C durch den Widerstand R einen Strom I . Mit $\dot{Q} = I$ lässt sich dies zu

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad (2)$$

umformen. Da sich der Kondensator nach unendlich langer Zeit entladen wird, folgt unter Verwendung von Formel (1) für den zeitlichen Verlauf der Entladung

$$Q(t) = Q(0)(e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (3)$$

2.2 Aufladevorgang eines Kondensators

Für die Aufladung des Kondensators durch eine Spannungsquelle mit U_0 über einen Widerstand erhält man mit ähnlichen Überlegungen unter Beachtung der Anfangsbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (4)$$

RC wird hierbei als Zeitkonstante des Systems bezeichnet.

Relaxationsvorgänge sind auch bei periodisch angeregten Systemen zu beobachten. Liegt an einem RC-Kreis eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ an, und $\omega \ll \frac{1}{RC}$ gilt, ist $U_C \approx U(t)$. Für große ω ist dies nicht mehr erfüllt, da die Amplitude von U_C mit größer werdenden ω abnimmt. Unter Verwendung des Ansatzes

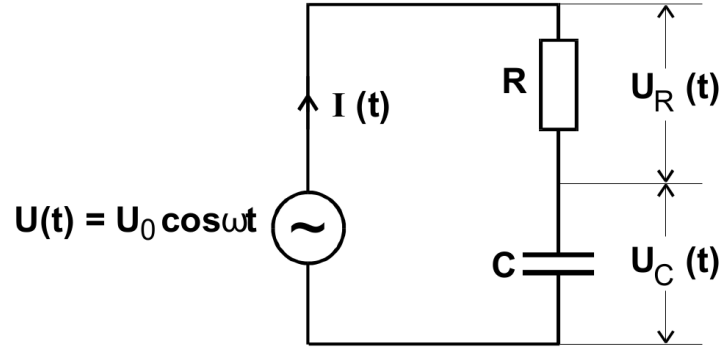


Abbildung 1: Schaltung zur Diskussion von Relaxationsvorgängen unter Einfluss von periodischer Anregung [1].

$$U_C = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)),$$

ergibt sich mit den Kirchhoffschen Regeln und einigen Umformungen

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (5)$$

Weitere Umformungen liefern

$$\sin(\phi) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}, \quad (6)$$

sowie

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (7)$$

Für sehr kleine, beziehungsweise sehr große Frequenzen erhält man die folgenden Grenzfälle:

Da die Kondensatorspannung U_C für $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null geht, kann das RC-Glied als Tiefpass verwendet werden. Große Frequenzen werden weitestgehend unterdrückt und kleine Frequenzen passieren das RC-Glied nahezu unverändert.

$\omega \ll \frac{1}{RC}$	$\omega \gg \frac{1}{RC}$
$\phi \rightarrow 0$	$\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$A(\omega) \rightarrow U_0$	$A(\omega) \rightarrow 0$

Für genügend große Frequenzen ω ergibt sich aus Abbildung 1 wiederum mit den Kirchhoffschen Regeln, dass U_C klein gegen U_R und U ist, also $U(t) \approx U_R(t)$ gilt. Mittels Umformungen erhält man

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (8)$$

Der RC-Kreis kann also - bei hohen Frequenzen - verwendet werden, um eine angelegte Spannung $U(t)$ zu integrieren.

3 Fehlerrechnung

Alle berechneten Mittelwerte werden mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (9)$$

wobei x_i den einzelnen (insgesamt N) Messwerten entspricht. Der zugehörige Fehler des Mittelwerts bestimmt sich mit:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (10)$$

Wenn fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel weiter verwendet werden, so wird der sich fortpflanzende Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (11)$$

Die Regression von Polynomen und Ausgleichsgrade, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler werden mit IPython 5.1.0 mittels Scipy 0.18.1 durchgeführt. Parameter linearer Ausgleichsgeraden

$$y = a \cdot x + b \quad (12)$$

werden bestimmt über

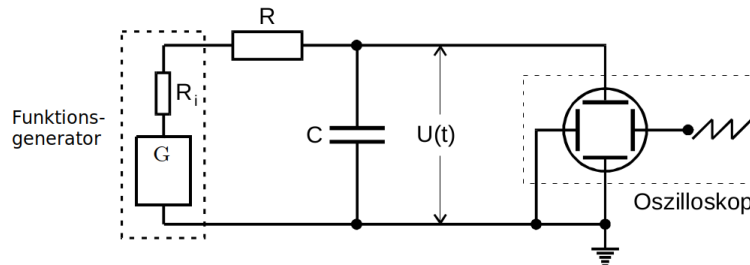
$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (13)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (14)$$

4 Durchführung

4.1 Versuchsaufbau

Abbildung 2: Prinzipieller Versuchsaufbau.



Der prinzipielle Versuchsaufbau ist in Abbildung 2 dargestellt. Dieser entspricht einem Funktionsgenerator, einem RC-Glied sowie einem Zweikanal-Oszilloskop. An dem Generator lassen sich die Spannungsfrequenzen sowie verschiedene Spannungstypen - wie beispielsweise die verwendete Rechteck-, Sinus- oder Dreiecksspannung - einstellen. Der Funktionsgenerator besitzt einen Innenwiderstand R_i , der allerdings unbekannt ist, ebenso wie der ohmsche Widerstand R und die Kapazität C des RC-Gliedes. Auf dem Zweikanal-Oszilloskop kann die Kondensatorspannung sowie die Generatorspannung aufgezeichnet werden.

4.2 Versuchsdurchführung

Wie schon in Abschnitt 1 angesprochen soll in diesem Versuch die Zeitkonstante RC bestimmt werden. Dazu werden drei verschiedene Methoden verwendet. Des Weiteren wird gezeigt, dass ein RC-Glied bei hohen Frequenzen einem Integrationsglied entspricht.

Bei der ersten Methode bestimmt man die Zeitkonstante RC durch Beobachtung der Relaxationsvorgänge mit dem Oszilloskop. Am Generator wird eine Rechteckspannung eingestellt. Die Kondensatorspannung wird auf den ersten Kanal des Oszilloskops gegeben, auf welchem - durch die Rechteckspannung bedingte - Auflade- und Entladekurven zu sehen sind. Daraufhin wird die Frequenz der Rechteckspannung und der Triggerpegel solange variiert, bis auf dem Oszilloskop eine Entladekurve zu sehen ist, auf der die Kondensatorspannung während der Aufzeichnungszeit um einen Faktor 5 bis 10 sinkt [1]. Nachdem die Entladekurve auf dem Oszilloskop dargestellt ist, können mit der Cursor-Funktion des Oszilloskops 5-10 Messwerte der Kondensatorspannung U_C sowie der Zeit t abgelesen werden. Die Frequenz f des Nadelimpulsgenerators muss also so gewählt werden, dass die Zeit zwischen zwei Impulsen, also die Periodendauer $T = \frac{1}{f}$, größer ist als die Entladedauer Δt des Kondensators.

Des Weiteren muss noch der Spannungsnullpunkt U_0 ermittelt werden. Hierzu wählt man auf dem Generator eine Spannungsfrequenz ω_0 für die gilt $\omega_0 \ll \frac{1}{RC}$, damit gilt $U_C \approx U_0$.

Die Messwerte für die zweite und dritte Methode zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC werden in einem Messdurchgang bestimmt. Bei diesem ist der Aufbau unverändert, außer, dass man zusätzlich die Generatorspannung auf den zweiten Eingang des Oszilloskops gibt und eine Sinusspannung eingestellt wird. Für die zweite Methode bestimmt man 15 Messwerte für die Spannungsamplitude der Kondensatorspannung mit der zugehörigen Frequenz. Zu ergänzen ist hier, dass die Frequenzen logarithmisch im Bereich von 4Hz bis 10000Hz variiert werden. Parallel dazu werden für die dritte Methode die zeitlichen Abstände der Nulldurchgänge von Kondensatorspannung und Generatorspannung bestimmt. Die Bestimmung der Messwerte wird erneut mit der Cursor-Funktion des Oszilloskops realisiert. Außerdem wird jeweils die Amplitude der Kondensatorspannung notiert.

Zuletzt soll gezeigt werden, dass ein RC-Glied als Integrationsglied dient. Hierzu wird bei unverändertem Aufbau eine Frequenz ω_1 eingestellt, für die $\omega_1 \gg RC$ gilt. Dann kann am Generator der Reihe nach eine Rechteck-, Sinus- sowie Dreiecksspannung eingestellt und die auf dem Oszilloskop dargestellten Spannungsverläufe von Generatorspannung und Kondensatorspannung gespeichert werden.

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Zeitkonstanten RC mit der Entladekurve des Kondensators

Zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC werden aus der Entladekurve in Abbildung 3 die Werte für U_C abgelesen. U_0 wurde bestimmt zu $U_0 = 6,04\text{ V}$. Die abgelesenen Daten finden sich in Tabelle 1. Durch Umformung wird Formel (3) zu

$$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC}t \quad (y = -a \cdot t + b). \quad (15)$$

Zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC wird nun $\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$ gegen die Zeit t aufgetragen. Aus den Parametern der Regressionsgeraden nach Gleichung (15) ergibt sich nun die berechnete Zeitkonstante zu

$$RC = a = (0.48 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}\text{s}.$$

$$b = (0.17 \pm 0.13)$$

Die Messdaten sowie die berechnete lineare Regression befinden sich in Abbildung 4.

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC .

U_C/V	$\ln(\frac{U_C}{U_0})$	$t / 10^{-3}s$
6.04	0.0000	0.00
4.04	-0.4022	0.25
2.76	-0.7832	0.50
1.80	-1.2106	0.75
1.08	-1.7214	1.00
0.56	-2.3782	1.25
0.24	-3.2255	1.50

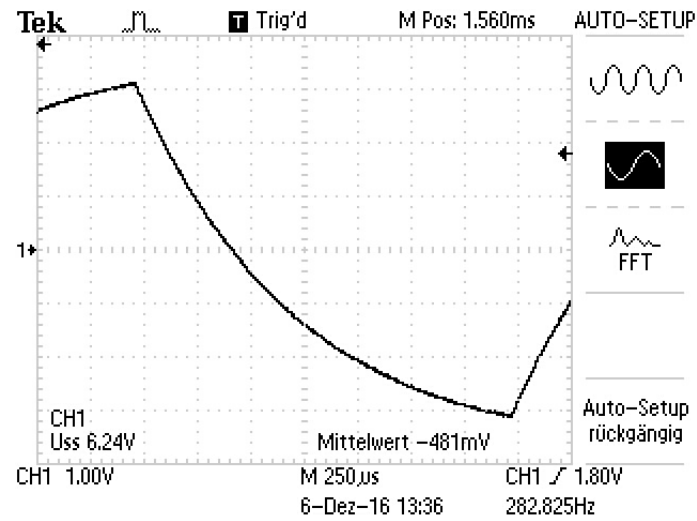


Abbildung 3: Aufgabenteil a: Entladekurve des Kondensators zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC .

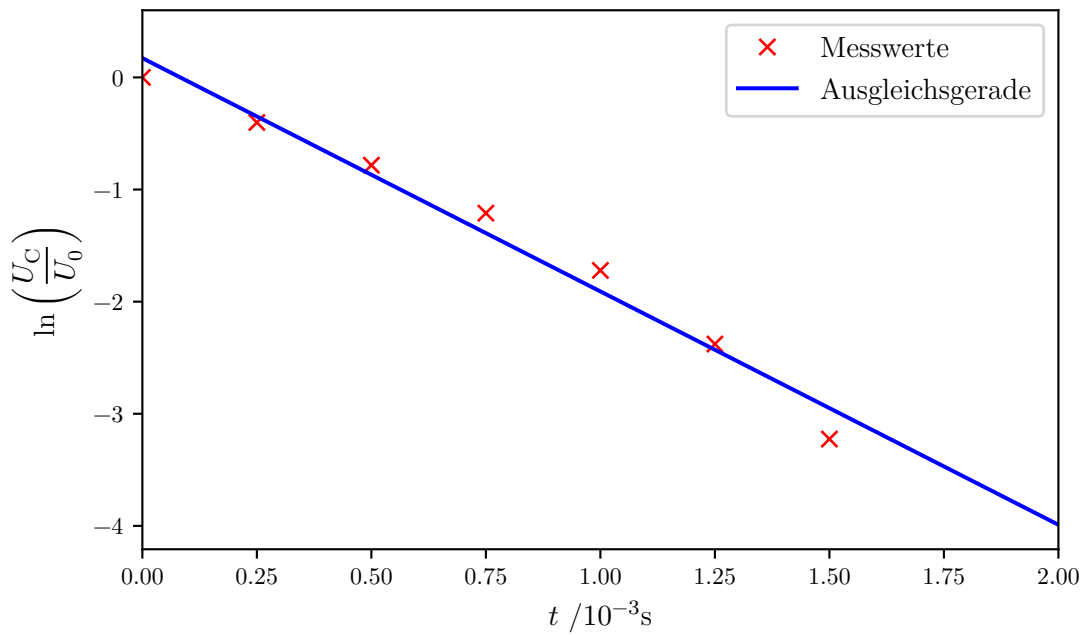


Abbildung 4: Lineare Regression zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC .

5.2 Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude.

Die Zeitkonstante RC soll nun erneut bestimmt werden, indem die Frequenzabhängigkeit der Amplitude $A(\omega)$ der Spannung U_C am Kondensator untersucht wird. Dazu wird $\frac{A(\omega)}{U_0}$ in Abhängigkeit zur Frequenz ω aufgetragen. Die verwendeten Daten befinden sich in Tabelle 2. U_0 beträgt hierbei 6.04 V. Eine Regression mit Gleichung (7) liefert für die Zeitkonstante :

$$RC = a = (6.3 \pm 1.5) \cdot 10^{-3} \text{s}.$$

Mit Python und Matplotlib [2] wurde hierfür die Funktion

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 a^2}}$$

nach ω für den Parameter a gefittet. Werden die ersten vier Messpunkte ausgenommen, da sie relativ große Abweichungen von der Theoriekurve zeigen, ergibt sich ein etwas kleinerer Fehler:

$$RC = a = (6.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-3} \text{s}.$$

Somit haben die ersten Messpunkte nahezu keine Auswirkung auf das berechnete RC , obwohl sie sehr stark von der Regression abweichen, sie beeinflussen lediglich den Fehler

der Zeitkonstanten.

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude $A(\omega)$.

$A(\omega)/\text{ V}$	$\frac{A(\omega)}{U_0}$	ω/Hz
2.80	0.46	4.2
4.40	0.73	10.0
4.88	0.81	15.0
5.04	0.83	20.0
5.20	0.86	35.0
5.12	0.85	60.0
4.88	0.81	90.0
4.32	0.72	150.0
3.60	0.60	230.0
2.88	0.48	320.0
2.08	0.34	500.0
1.12	0.19	1000.0
0.68	0.11	2000.0
0.23	0.04	5000.0
0.12	0.02	10000.0

Die Messdaten und die berechnete Regression sind in Abbildung 5 abgebildet.

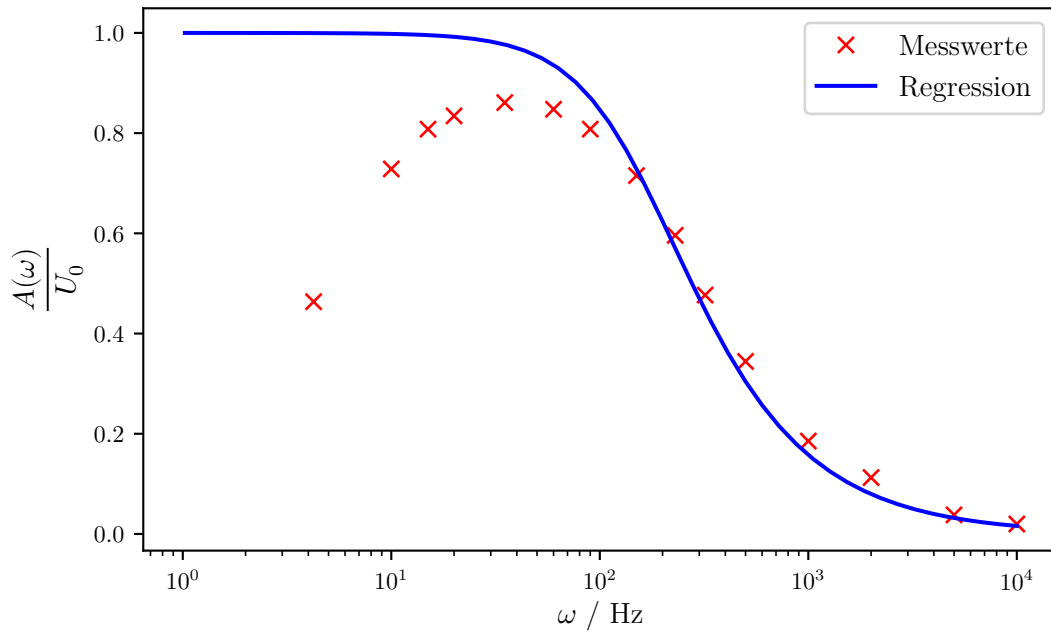


Abbildung 5: Regression zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude.

5.3 Bestimmung der Zeitkonstanten RC mit der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kosinusspannung

Nun wird die Zeitkonstante mithilfe der Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung bestimmt. Die Phasenverschiebung ϕ ergibt sich zu

$$\phi = \frac{a}{b} 2\pi,$$

wobei a dem gemessenen zeitlichen Abstand der Nulldurchgänge der Spannungskurven entspricht und b als Periodendauer durch die Frequenz ω bestimmt wird.

Die sich ergebenden Werte für die Frequenz ω und die Phasenverschiebung ϕ sind in Tabelle 3 aufgetragen. Nach Formel (5) wird eine Ausgleichskurve bestimmt (siehe Abbildung 6). Für die Zeitkonstante RC ergibt sich damit der Wert

$$RC = (3,67 \pm 0,45) \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Mit der bestimmten Zeitkonstante RC lassen sich in einem Polarkoordinatensystem die gemessenen Tupel $\{A(\omega_i), \phi(\omega_i)\}$ sowie eine Theoriekurve gemäß Formel (6) also

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = -\frac{\sin(\phi(\omega))}{\omega RC}, \quad (16)$$

auftragen (siehe Abbildung 7).

Die benötigten Messwerte sind in Tabelle 4 aufgetragen.

Tabelle 3: Messdaten zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Phasenverschiebung ϕ .

ω / Hz	a / s	b / s	ϕ / rad
4.2	0.00000	0.23585	0.00000
10.0	0.00020	0.10000	0.01257
15.0	0.00076	0.06667	0.07163
20.0	0.00080	0.05000	0.10053
35.0	0.00072	0.02857	0.15834
60.0	0.00068	0.01667	0.25635
90.0	0.00067	0.01111	0.37888
150.0	0.00063	0.00667	0.59376
230.0	0.00052	0.00435	0.75147
320.0	0.00044	0.00313	0.88467
500.0	0.00033	0.00200	1.03673
1000.0	0.00018	0.00100	1.13097
2000.0	0.00009	0.00050	1.13097
5000.0	0.00005	0.00020	1.57080
10000.0	0.00002	0.00010	1.25664

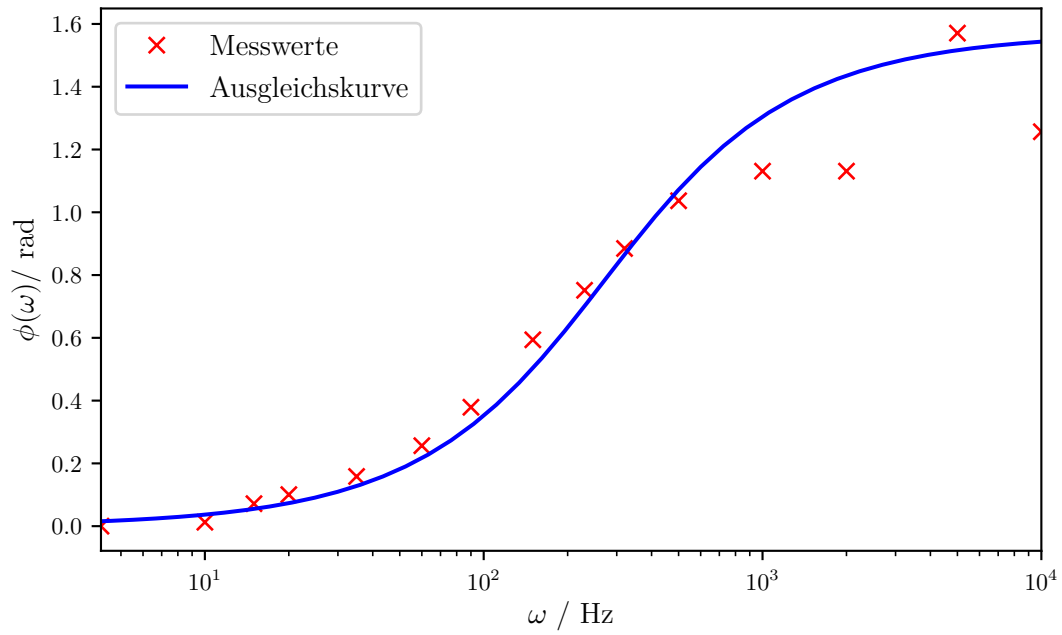


Abbildung 6: Regression zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Phasenverschiebung von Generator- und Kondensatorspannung.

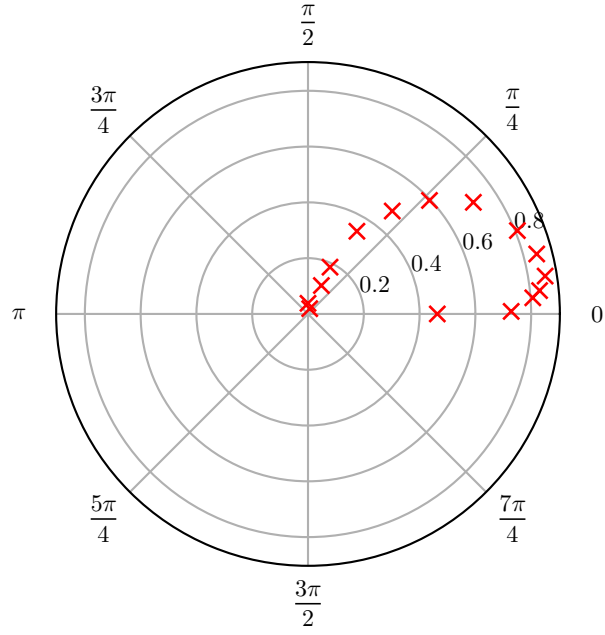


Abbildung 7: Polardarstellung von Messtupeln $\{A(\omega_i), \phi(\omega_i)\}$ und erwarteter Theoriekurve.

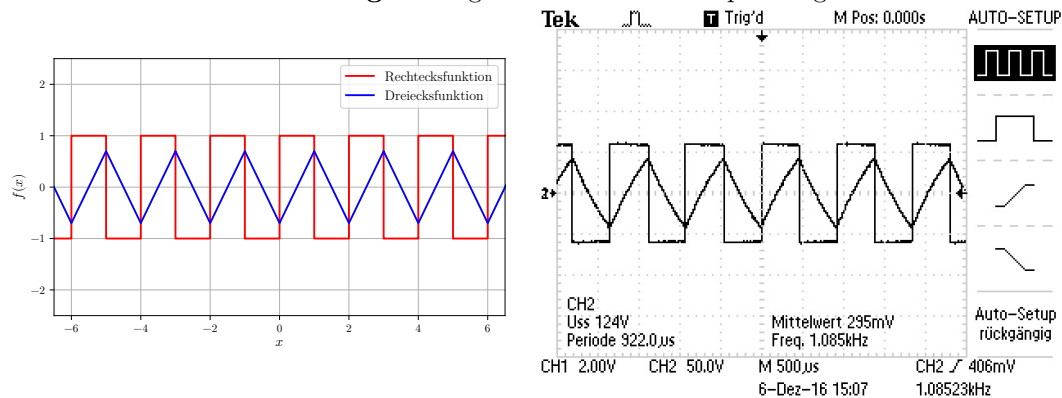
Tabelle 4: Messdaten von Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ und Relativamplitude $\frac{A(\omega)}{U_0}$.

ϕ / rad	$\frac{A}{U_0}$
0.00000	0.46358
0.01257	0.72848
0.07163	0.80795
0.10053	0.83444
0.15834	0.86093
0.25635	0.84768
0.37888	0.80795
0.59376	0.71523
0.75147	0.59603
0.88467	0.47682
1.03673	0.34437
1.13097	0.18543
1.13097	0.11258
1.57080	0.03808
1.25664	0.01987

5.4 Das RC-Glied als Integrator

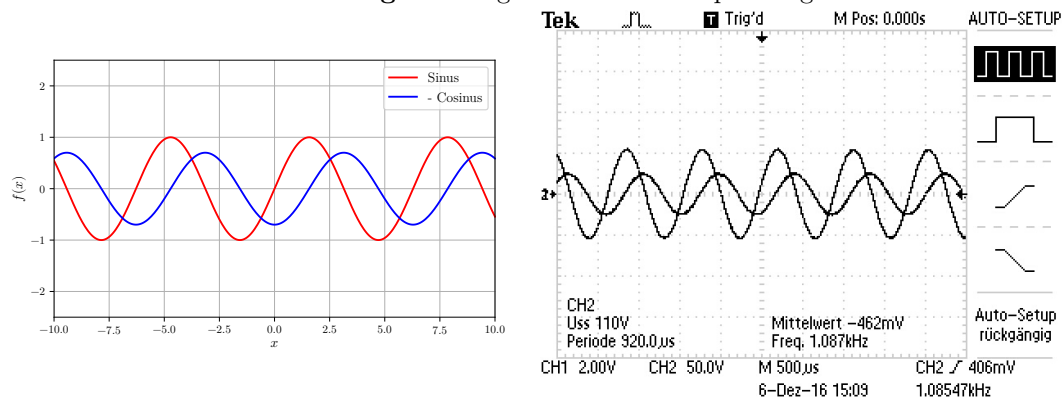
Zur besseren Vergleichbarkeit sind neben den gemessenen Spannungsverläufen jeweils beispielhaft berechnete Funktionsgraphen zu den jeweils erwarteten Spannungen und ihren Integrierten, eingefügt.

Abbildung 8: Aufgabenteil d: Rechteckspannung



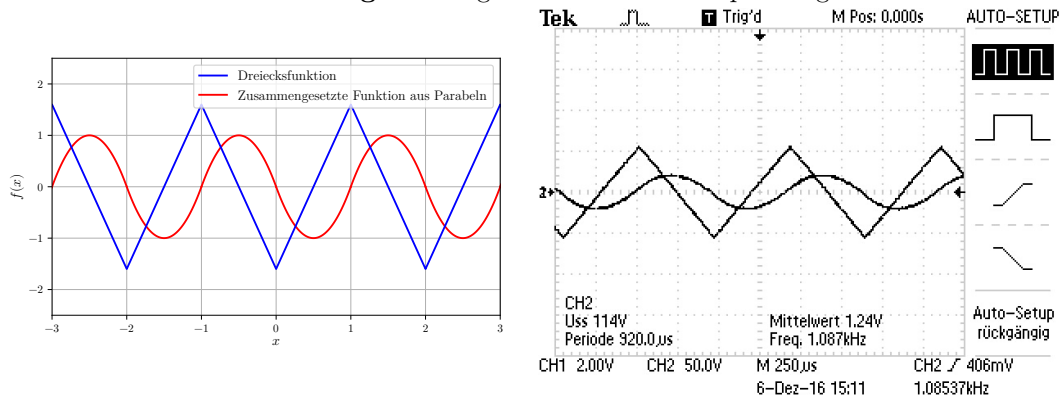
In Abbildung 8 ist die Rechteckspannung sowie die über das RC-Glied integrierte Rechteckspannung dargestellt. Die integrierte Rechteckspannung ist wie zu erwarten eine Dreiecksspannung.

Abbildung 10: Aufgabenteil d: Sinusspannung



Der Spannungsverlauf der Sinusspannung ist in Abbildung 10 dargestellt. Wie zuvor ist die Kosinusspannung - integrierte Sinusspannung - außerdem in diesem Plot aufgezeichnet. In Abbildung 12 ist eine Dreieck- und die sich ergebende Parabelspannung aufgetragen.

Abbildung 12: Aufgabenteil d: Dreiecksspannung



6 Diskussion

Bereits bei der Verwendung der ersten Methode zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC (vgl. Abschnitt 5.1) fiel auf, dass der Generator keine reine Rechteckspannung lieferte, sondern Schwankungen und Abweichungen von der idealen Rechteckspannung zeigte.

Tabelle 5: Alle bestimmten Zeitkonstanten RC samt ihrer prozentualen Fehler

$RC/10^{-3}s$ bestimmt über...	...Entladekurve	... $A(\omega)$...Phasenverschiebung
Berechneter Wert \pm Fehler	(0.48 ± 0.03)	(6.2 ± 0.5)	$(3,67 \pm 0,45)$
Prozentualer Fehler	6.25%	8.1%	13.1%

Bei dem berechneten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude wurden erneut die ersten vier Messpunkte aufgrund ihrer großen Abweichung zur Theoriekurve nicht berücksichtigt. Die bestimmten Zeitkonstanten RC (vgl. 5) weichen deutlich voneinander ab. Dies deutet, ebenso wie die starke Abweichung der Messwerte von der Regressionskurve in Abbildung 5 für kleine Frequenzen ($\omega \ll 35 \text{ Hz}$) darauf hin, dass die Messung fehlerbehaftet war. Beispielsweise könnte ein Wackelkontakt an einer der Steckverbindungen vorgelegen haben. Des Weiteren war das Maximum von $A(\omega)$ bei etwa 35 Hz nicht zu erwarten. Für kleine Frequenzen scheint der Funktionengenerator nicht die gleiche Spannungsamplitude liefern zu können, wie für große Frequenzen. Wie in Tabelle 6 zu sehen, scheint hier ein Defekt am Funktionengenerator vorzuliegen. Erwartet worden wäre, dass die gelieferte Spannungsamplitude frequenzunabhängig ist, also nahezu konstant bleibt.

Diese Frequenzabhängigkeit der Generatorspannung für kleine Frequenzen ist sehr wahrscheinlich der Grund, warum sowohl in der Bestimmung der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude in Abbildung 5 als auch im Polarplot die Tupel $\{A(\omega_i), \phi(\omega_i)\}$ (siehe Abbildung 7) so stark von der Theoriekurve abweichen.

Außerdem zu erwähnen ist, dass die gemessenen Werte im hochfrequenten Bereich eine geringe Diskrepanz zur Theoriekurve zeigen. Diese Abweichungen lassen sich auf

Tabelle 6: Starke Frequenzabhängigkeit der Generatorspannung für niedrige Frequenzen

ω/Hz	$U_C/\text{ V}$	$U(t)/\text{ V}$
4.24	2.80	56.0
10	4.40	88.0
15	4.88	97.6
20	5.04	102.0
35	5.20	107.0

zufällige Fehler zurückführen. Die Integratorfunktion des RC-Gliedes konnte außerdem - bei erforderlichen hohen Frequenzen - nachgewiesen werden.

Weiterhin müssen systematische Fehler - wie zum Beispiel die Vernachlässigung der Innenwiderstände von Generator und Oszilloskop - berücksichtigt werden.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2016. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf> (besucht am 12.12.2016).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.