

Dispersion am Glasprisma

Ann-Sophie Schubert
ann-sophie.schubert@udo.edu

Lars Funke
lars.funke@udo.edu

Durchführung: 28.06.2016

Abgabe: 05.07.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	4
2	Theorie	4
2.1	Brechung	4
2.1.1	Huygenssches Prinzip	4
2.2	Dispersionsgleichung	4
2.3	Auflösungsvermögen eines Prismen-Spektralapparates	6
3	Aufbau und Durchführung	7
3.1	Aufbau	7
3.2	Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen des Prismas	7
3.3	Brechungswinkel für die wichtigsten Spektrallinien des Hg-Cd-Spektrums	7
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen des Prismas	8
4.2	Dispersionskurve	8
4.3	Abbesche Zahl	9
4.4	Auflösungsvermögen	11
4.5	Absorptionsstelle	11
5	Diskussion	11
	Literatur	11

1 Ziel

In diesem Experiment soll der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge (Dispersion) an einem Glasprisma untersucht werden. Zunächst soll die Dispersionsgleichung bestimmt werden. Damit können die Abbesche Zahl, das Auflösungsvermögen des Spektralapparates und die zum sichtbaren Licht am nächsten gelegene Absorptionsstelle berechnet werden.

2 Theorie

2.1 Brechung

Trifft ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier optischer Medien, wird dieser gebrochen. Der Brechungsindex n , welcher spezifisch für das jeweilige Medium ist, ergibt sich aus folgendem Zusammenhang:

$$n = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1)$$

Dabei sind v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Lichts in den beiden Medien.

2.1.1 Huygenssches Prinzip

Um eine Aussage über die Richtungsänderung und die Geschwindigkeit des Strahls treffen zu können, wird das Huygenssche Prinzip betrachtet. Es besagt, dass von jedem Punkt einer Wellenfront eine kugelförmige Elementarwelle ausgeht. Somit ist jede Wellenfront die Einhüllende aller Elementarwellen. In Abbildung 1 ist dies graphisch dargestellt. Mit dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2)$$

mit α als Winkel vor und β als Winkel nach der Brechung an der Grenzfläche und Gleichung 1 folgt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n. \quad (3)$$

2.2 Dispersionsgleichung

Da es sich bei Licht um eine elektromagnetische Welle handelt, ist es in der Lage die sich im Material befindenden Elektronen und Ionenrümpfe zu Schwingungen anzuregen. Die Polarisation \vec{P} der Materie ist gegenüber der elektrischen Feldstärke \vec{E} der Lichtwelle vernachlässigbar. Durch das magnetische Wechselfeld der Welle wirkt eine Lorentzkraft auf die in der Materie befindlichen Elektronen und Ionenrümpfe, welche diese um \vec{x}_h verschiebt, wodurch ein elektrischer Dipol entsteht. Des Weiteren wirkt eine rücktreibende Kraft, welche proportional zur Auslenkung ist. Außerdem wird die Schwingung der Teilchen durch eine weitere Kraft gedämpft, welche proportional zu Geschwindigkeit der

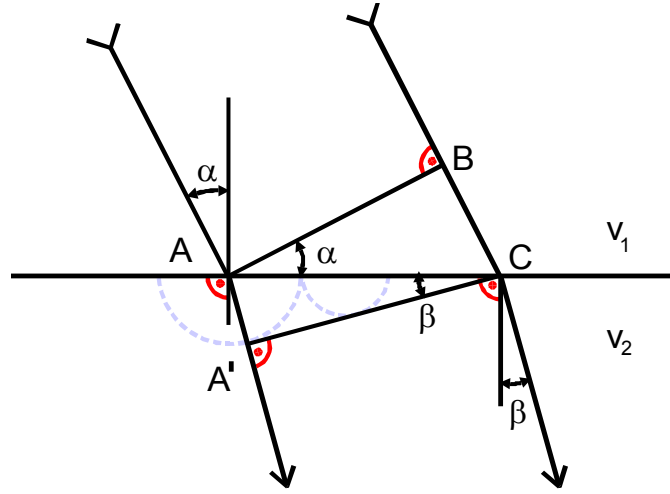


Abbildung 1: Ableitung des Snelliushen Brechungsgesetzes mit Hilfr des Huygensschen Prinzps.[1]

Elektronen und Ionenrumpfe ist. Mit diesen Kräften kann eine Differentialgleichung für die Bewegung der Teilchen aufgestellt werden:

$$m_h \frac{d\vec{x}_h}{dt^2} + f_h \frac{d\vec{x}_h}{dt} + a_h \vec{x}_h = q_h \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Daber entspricht m_h den Teilchenmassen, $d_h = q_h \vec{x}_h$ dem Dipolmoment (q_h ist Summe der Teilchen pro Volumeneinheit), f_h dem Dämpfungsfaktor und a_h dem Proportionaliätsfaktor der rücktreibenden Kraft. Mit Hilfe von

$$\vec{P} = \sum N_h q_h \vec{x}_h \quad (5)$$

und $n^2 = \epsilon$ folgt:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega m_h \epsilon_0} \quad (6)$$

mit ω_h als Resonanzfrequenz des Systems. \tilde{n} ist komplex. Es wird nur der Bereich $n^2 k \approx 0$ betrachtet, da die Gleichung für andere Fälle nicht zutrifft. Dann gilt für den Brechungsindex n :

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} \quad (7)$$

Bei der normalen Dispersion nimmt der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge ab. Dabei können zwei Fälle unterschieden werden: Der erste Fall ist in Abbildung 2 dargestellt. Dieser wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \dots \quad (8)$$

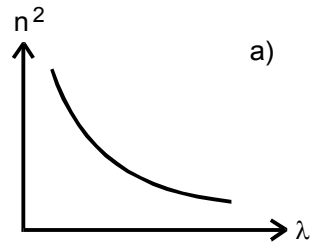


Abbildung 2: Dispersionskurve für normale Dispersion nach Gleichung 8.[1]

Der zweite Fall der normalen Dispersion erfüllt die Gleichung

$$n^2(\lambda) = A'_0 - A'_2 \lambda^2 - \dots \quad (9)$$

Die graphische Darstellung dieses Zusammenhangs ist in Abbildung 3 zu sehen. Die

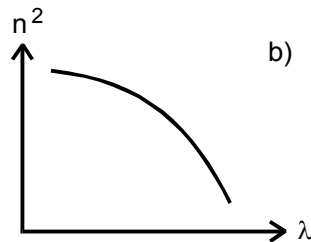


Abbildung 3: Dispersionskurve für Dispersion nach Gleichung 9.[1]

Absorptionsstelle $\lambda_i < \lambda$ liegt für beide Fälle der normalen Dispersion im ultravioletten Bereich.

Im Gegensatz zur normalen Dispersion wird bei der Brechungsindex bei anomaler Dispersion mit steigender Wellenlänge größer. Für die Absorptionsstelle gilt $\lambda_i > \lambda$. Sie befindet sich somit im Infraroten.

2.3 Auflösungsvermögen eines Prismen-Spektralapparates

Das Auflösungsvermögen A beschreibt den kleinstmöglichen Abstand zwei nebeneinanderliegender Spektrallinien $\Delta\lambda$, bei dem Der Prismen-Spektralapparat in der Lage ist, diese zu trennen.

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (10)$$

Weiterhin gilt:

$$A = b \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}. \quad (11)$$

Dabei ist b die Basisbreite des Prismas.

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Das verwendete Prisma besteht aus Flintglas und bei der Lampe handelt es sich um eine Hg-Cd-Lampe. Der Aufbau ist in Abbildung 4 zu sehen. Nachdem das Licht durch einen Spalt und eine Sammellinse gefallen ist, trifft es auf das Prisma. Anschließend gelangt es in ein Fernrohr. Durch die Objektivlinse entsteht ein reelles Bild in der Brennebene, welche mittels eines Okulars vergrößert wird.

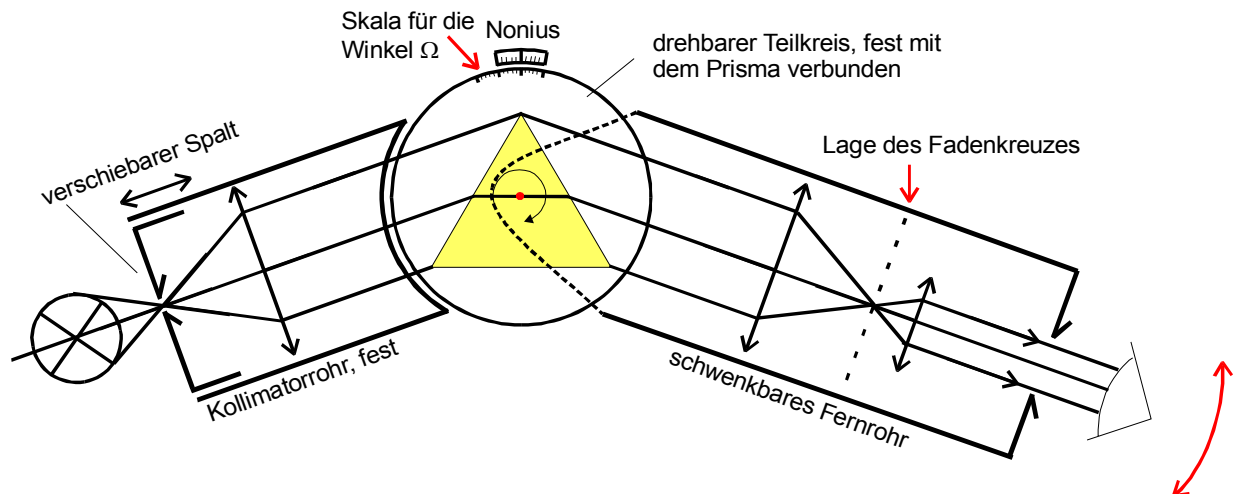


Abbildung 4: Schematische Darstellung eines Prismen-Spektralapparates. [1]

3.2 Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen des Prismas

Zunächst soll der Winkel ϕ zwischen den brechenden Flächen gemessen werden. Dazu wird die brechende Kante des Prismas in Richtung des Kollimatorrohrs positioniert (siehe Abbildung 5). Der Winkel ergibt sich aus den Winkeln ϕ_r und ϕ_l der reflektierten Strahlen rechts und links, welche gemessen werden:

$$\phi = \frac{1}{2}(\phi_r - \phi_l) \quad (12)$$

3.3 Brechungswinkel für die wichtigsten Spektrallinien des Hg-Cd-Spektrums

Um die Beugungswinkel messen zu können, wird ein symmetrischer Strahlengang benötigt. Dazu wird das Prisma so positioniert, dass der gebrochene und der reflektierte Strahl zusammenfallen. Der dazugehörige Winkel $\Omega_{r,l}$ kann abgelesen werden. Diese Messung

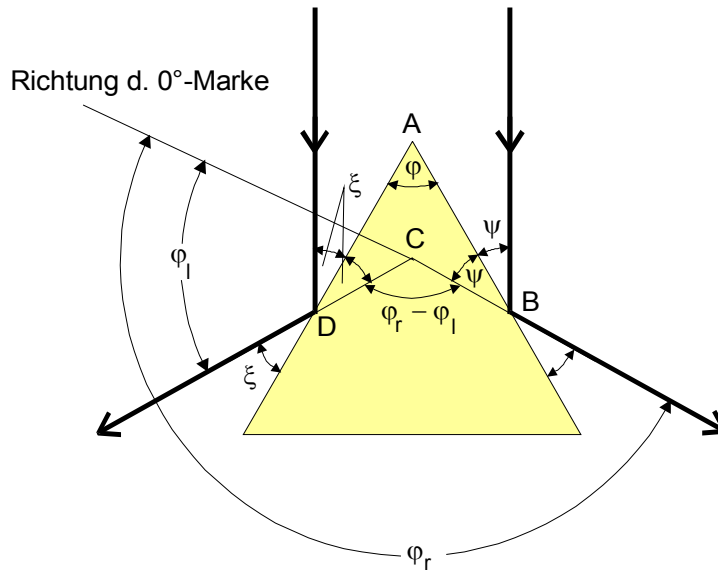


Abbildung 5: Aufbau zur Bestimmung des Winkels ϕ zwischen den brechenden Oberflächen des Prismas.[1]

wird für die linke und die rechte Seite durchgeführt. Der Brechungswinkel lässt sich daraus wie folgt berechnen:

$$\eta = 180 - (\Omega_r - \Omega_l). \quad (13)$$

Für den Brechungsindex gilt:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{n+\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}. \quad (14)$$

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen des Prismas

Aus den gemessenen Winkeln $\phi_r = 21,84^\circ$ und $\phi_l = 98,3^\circ$ ergibt sich mit Gleichung 12

$$\phi = 60,05^\circ \quad (15)$$

für den Winkel zwischen den brechenden Flächen.

4.2 Dispersionskurve

In Tabelle 1 sind die Messwerte für die Winkel links und rechts, die zugeordnete Wellenlängen sowie die daraus berechneten Brechungsindizes nach Gleichung 14 dargestellt.

Tabelle 1: Winkel Ω_1 und Ω_r , zugeordnete Wellenlänge und daraus berechnete Brechungsindizes $n(\lambda)$.

$\Omega_1/^\circ$	$\Omega_r/^\circ$	λ/nm	$n(\lambda)$
107.3	110.8	579	1.76
106.9	111.0	577	1.77
105.0	111.8	492	1.79
106.0	111.9	509	1.78
104.8	113.0	468	1.80
103.8	114.0	436	1.81
103.7	114.0	405	1.81

Die berechneten Werte in Tabelle 1 für die Brechungsindizes $n(\lambda)$ nehmen mit sinkender Wellenlänge zu. Somit handelt es sich um normale Dispersion. In Abbildung 6 ist dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Mit einer Ausgleichsrechnung der Form

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda} \quad (16)$$

ergeben sich für die Parameter folgende Werte:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2.93 \pm 0.03 \\ A_2 &= (6.45 \pm 0.68) \cdot 10^{-14}. \end{aligned} \quad (17)$$

Damit gilt für den Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge

$$n(\lambda) = \sqrt{(2.93 \pm 0.03) + \frac{(6.45 \pm 0.68) \cdot 10^{-14}}{\lambda^2}} \quad (18)$$

4.3 Abbesche Zahl

Die Abbesche Zahl lässt sich nach folgender Gleichung berechnen:

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}. \quad (19)$$

Mit Gleichung 18 ergeben sich die Brechungsindizes zu den entsprechenden Wellenlängen, welche in Tabelle 2 zu finden sind.

Mit den Werten aus Tabelle 2 und Gleichung 19 ergibt sich für die Abbesche Zahl

$$\nu = 21.9 \pm 10 \quad (20)$$

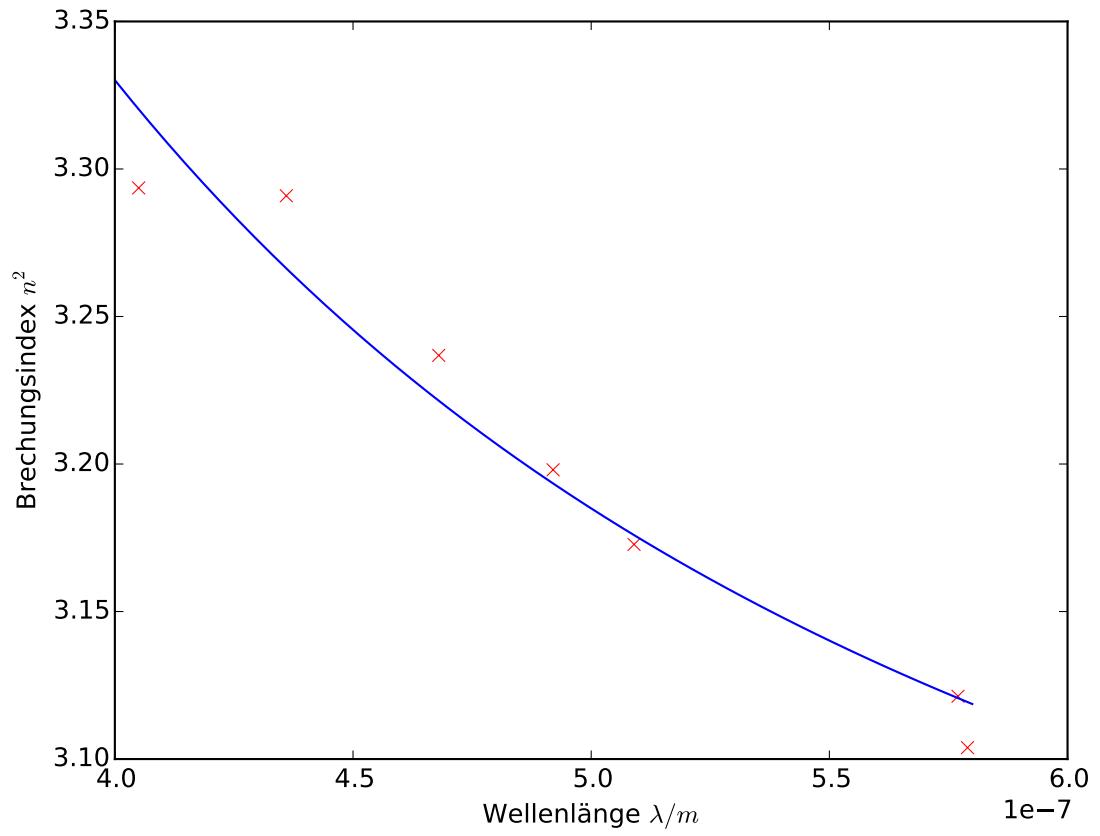


Abbildung 6: Brechungsindex n^2 in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ .

Tabelle 2: Aus Wellenlängen berechnete Brechungsindizes.

Fraunhoferlinie	Wellenlänge λ/nm	Brechungsindex n
C	656	1.755 ± 0.010
D	589	1.765 ± 0.010
F	486	1.790 ± 0.012

4.4 Auflösungsvermögen

Die Basisbreite des Primas beträgt $b = 0.03\text{m}$. Mit den Gleichungen 10, 11 und 18 folgt schließlich:

$$A = b \frac{A_2}{\lambda^3 \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}}. \quad (21)$$

Damit ergeben sich die Werte in Tabelle 3.

Tabelle 3: Auflösungsvermögen A für verschiedene Wellenlängen λ .

Fraunhoferlinie	Wellenlänge λ/nm	Auflösungsvermögen $A/10^3$
C	656	3.9 ± 0.4
D	589	5.4 ± 0.5
F	486	9.4 ± 1

4.5 Absorptionsstelle

Die Absorptionsstelle ergibt sich durch umformen nach λ von Gleichung 16 für $n = 1$.

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} = (183 \pm 10)\text{nm}. \quad (22)$$

Somit befindet sich die am nächsten zum sichtbaren Spektralbereich gelegene Absorptionsstelle im Bereich des für den Menschen nicht sichtbaren ultravioletten Lichts.

5 Diskussion

Der gemessene Winkel zwischen den brechenden Oberflächen beträgt $\phi = 60,05^\circ$. Da das Prisma im Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, sind alle Winkel gleich groß. Somit betragen alle drei Winkel $\phi = 60^\circ$. Damit weicht der gemessene Winkel um 0.083% vom tatsächlichen Winkel des Prismas ab. Der Brechungsindex nimmt mit steigender Wellenlänge ab. Es handelt sich wie erwartet um normale Dispersion. Dieser passt zum Einen zu den Messwerten und liefert, wie im Folgenden diskutiert wird, plausible Ergebnisse. Der Brechungsindex von Flintglas befindet sich im Bereich von 1.5 - 2.0 [2]. Das heißt, die berechneten Werte sind plausibel. Für Flintglas ist die Abbesche Zahl $\nu < 50$ [2]. Also ist der berechnete Wert $\nu = 21.9 \pm 10$ realistisch.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 402: Dispersionsmessungen am Glasprisma*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V402.pdf> (besucht am 05.07.2016).

- [2] *CHEMIE.DE*. URL: <http://www.chemie.de>.
- [3] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.