Lenguajes Formales y Computabilidad

Teoremas: Combo 5

Nicolás Cagliero

June 28, 2025

Lema. Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y sea $\mathcal{G}_a$ una familia Σ-indexada de funciones tal que

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. Si f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

Proof.

$$\begin{aligned}
&R(f, \mathcal{G}) : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega \\
&R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \varepsilon) = f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \\
&R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha a) = \mathcal{G}_a(R(f, \mathcal{G})(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)
\end{aligned}$$

Ahora quiero un procedimiento que compute a $R(f, \mathcal{G})$. Sean $x, y, \alpha, \beta, \gamma$ datos de entrada:

1. Corro el procedimiento efectivo de f con datos de entrada x, y, α, β y guardo el resultado en x_0. Hago la asignación $\sigma \leftarrow \gamma$ y la asignación $A \leftarrow \varepsilon$.

2. Si $\sigma \neq \varepsilon$ entonces hago la asignación $\gamma_1 \leftarrow [\sigma]_1$ y hago la asignación $\sigma \leftarrow ^{\frown} \sigma$.

   $$\begin{aligned}
   &\text{Si } \gamma_1 = @ \text{ voy a 3.} \\
   &\text{Si } \gamma_1 = \% \text{ voy a 4.} \\
   &\text{Si } \gamma_1 = \ ! \text{ voy a 5.}
   \end{aligned}$$

   Si $\sigma = \varepsilon$, devuelvo x_0

3. Corro el procedimiento efectivo de $\mathcal{G}_@$ con datos de entrada $x_0, x, y, \alpha, \beta, A$ y guardo el resultado en x_0. Hago la asignación $A \leftarrow A.@$ y voy a 2.

4. Corro el procedimiento efectivo de $\mathcal{G}_\%$ con datos de entrada $x_0, x, y, \alpha, \beta, A$ y guardo el resultado en x_0. Hago la asignación $A \leftarrow A.\%$ y voy a 2.

5. Corro el procedimiento efectivo de $\mathcal{G}_!$ con datos de entrada $x_0, x, y, \alpha, \beta, A$ y guardo el resultado en x_0. Hago la asignación $A \leftarrow A.!$ y voy a 2.

Lema (Lema de cuantificación acotada). Sea Σ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m \to \omega$ un *predicado* Σ-p.r., con $S, S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos. Supongamos $\overline{S} \subseteq S$ es Σ-p.r. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \overline{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ-p.r.

Proof. Sea

$$\tilde{P} = P|_{\overline{S} \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m} \cup C_1^{1+n,m}|_{(\omega - \overline{S}) \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m}$$

Nótese que $\tilde{P}$ tiene dominio $\omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m$ y es Σ-p.r. Ya que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \overline{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{x} \tilde{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

$$= \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{y} \tilde{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \circ [C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n,m}, \ldots, p_{1+n+m}^{1+n,m}]$$

el Lema de la sumatoria implica que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \overline{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ-p.r. Ya que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists t \in \overline{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\forall t \in \overline{S})_{t \leq x} \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}[(\exists t \in \overline{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ-p.r.