Lenguajes Formales y Computabilidad

Teoremas: Combo 2

Nicolás Cagliero

June 24, 2025

Lema (Lema de división por casos para funciones Σ-p.r.). *Supongamos* $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, *son funciones* Σ*-p.r. tales que* $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ *para* $i \neq j$. *Entonces* $f_1 \cup \ldots \cup f_k$ *es* Σ*-p.r.*

(Hacer el caso $k = 2$, $n = 2$ y $m = 1$)

Proof. Supongamos $k = 2$. Sean

$$\bar{f}_i : \omega^2 \times \Sigma^* \to \Sigma^*, \quad i = 1, 2,$$

funciones Σ-p.r. tales que $\bar{f}_i|_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 19). Por la Proposición 20 los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[\lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi^{\omega^2 \times \Sigma^*}_{D_{f_1}}, \bar{f}_1\right], \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi^{\omega^2 \times \Sigma^*}_{D_{f_2}}, \bar{f}_2\right]\right]\right)\Big|_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ-p.r. ■

Proposición (Caracterización básica de conjuntos Σ-enumerables). *Sea* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:*

1. S es Σ-enumerable.
2. Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tal que:
   (a) *Para cada* $x \in \omega$, *tenemos que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $[\![x]\!]$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, *donde* $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.
   (b) *Para cada* $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ *hay un* $x \in \omega$ *tal que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $[\![x]\!]$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$.

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que S es no vacío, por definición existe una función

$$F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$$

tal que $I_F = S$ y cada componente $F_{(i)}$ es Σ-computable, para $i = 1, 2, 3$.

Por el Primer Manantial de Macros, existen los siguientes macros:

$$[\text{V2} \leftarrow F_{(1)}(\text{V1})]$$
$$[\text{V2} \leftarrow F_{(2)}(\text{V1})]$$
$$[\text{W1} \leftarrow F_{(3)}(\text{V1})]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$[\text{P1} \leftarrow F_{(3)}(\text{N1})]$$
$$[\text{N2} \leftarrow F_{(2)}(\text{N1})]$$
$$[\text{N1} \leftarrow F_{(1)}(\text{N1})]$$

donde se supone que las expansiones de los macros usan variables auxiliares que no aparecen en la lista $\text{N1}, \text{N2}, \text{P1}$ y tampoco se repiten labels auxiliares. Corroborar que se cumplan las condiciones

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ cumple (a) y (b) de (2). Sea:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\text{N1} \leftarrow \text{N1}$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\text{N1} \leftarrow \text{N2}$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\text{P1} \leftarrow \text{P2}$$

Definimos entonces:

$$F_1 = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_1}$$
$$F_2 = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_2}$$
$$F_3 = \Psi^{1,0,*}_{\mathcal{P}_3}$$

Nótese que cada F_i es Σ-computable y tiene dominio ω. Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$. Por definición, $D_F = \omega$ y como $F_{(i)} = F_i$ para $i = 1, 2, 3$, tenemos que cada componente de F es Σ-computable.

Dejamos al lector verificar que $I_F = S$. $\blacksquare$