Lenguajes Formales y Computabilidad

Teoremas: Combo 2

Nicolás Cagliero

June 27, 2025

Lema (Lema de división por casos para funciones Σ-p.r.). *Supongamos* $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, *son funciones* Σ-*p.r. tales que* $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ *para* $i \neq j$. *Entonces* $f_1 \cup \ldots \cup f_k$ *es* Σ-*p.r.*

(Hacer el caso $k = 2$, $n = 2$ y $m = 1$)

Proof. Supongamos $k = 2$. Sean

$$\bar{f}_i : \omega^2 \times \Sigma^* \to \Sigma^*, \quad i = 1, 2,$$

funciones Σ-p.r. tales que $\bar{f}_i|_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 19). Por la Proposición 20 los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left[\lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_1}}^{\omega^2 \times \Sigma^*}, \bar{f}_1\right], \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ \left[\chi_{D_{f_2}}^{\omega^2 \times \Sigma^*}, \bar{f}_2\right]\right]\right)\Big|_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ-p.r. ∎

Proposición (Caracterización básica de conjuntos Σ-enumerables). *Sea* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:*

1. S es Σ-enumerable.
2. Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que:
   (a) *Para cada* $x \in \omega$, *tenemos que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $[\![x]\!]$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, *donde* $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.
   (b) *Para cada* $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ *hay un* $x \in \omega$ *tal que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo desde el estado* $[\![x]\!]$ *y llega a un estado de la forma* $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$.

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que S es no vacío, por definición existe una función

$$F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$$

tal que $I_F = S$ y cada componente $F_{(i)}$ es Σ-computable, para $i = 1, 2, 3$.

Por el Primer Manantial de Macros, existen los siguientes macros:

$$[\mathrm{V2} \leftarrow F_{(1)}(\mathrm{V1})]$$
$$[\mathrm{V2} \leftarrow F_{(2)}(\mathrm{V1})]$$
$$[\mathrm{W1} \leftarrow F_{(3)}(\mathrm{V1})]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$[\mathrm{P1} \leftarrow F_{(3)}(\mathrm{N1})]$$
$$[\mathrm{N2} \leftarrow F_{(2)}(\mathrm{N1})]$$
$$[\mathrm{N1} \leftarrow F_{(1)}(\mathrm{N1})]$$

donde se supone que las expansiones de los macros usan variables auxiliares que no aparecen en la lista $\mathrm{N1}, \mathrm{N2}, \mathrm{P1}$ y tampoco se repiten labels auxiliares. Ver que se cumplan las condiciones de 2 es fácil: nuestro programa copia el comportamiento de cada componente de F que ya sabemos que enumera a S, por lo tanto, para cada $x \in \omega$ nuestro programa termina y llega a un estado con la forma esperada y además, sabemos que para cada elemento de S existe algún $x \in \omega$ que lo enumera, por lo tanto, nuestro programa se detendrá en ese x llegando a un estado de la forma esperada.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ cumple (a) y (b) de (2). Sea:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\mathrm{N1} \leftarrow \mathrm{N1}$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\mathrm{N1} \leftarrow \mathrm{N2}$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\mathrm{P1} \leftarrow \mathrm{P2}$$

Definimos entonces:

$$F_1 = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_1}$$
$$F_2 = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}_2}$$
$$F_3 = \Psi^{1,0,*}_{\mathcal{P}_3}$$

Nótese que cada F_i es Σ-computable y tiene dominio ω. Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$. Por definición, $D_F = \omega$ y como $F_{(i)} = F_i$ para $i = 1, 2, 3$, tenemos que cada componente de F es Σ-computable.

Necesito verificar que $I_F = S$.

Aclaración 1:

$\mathcal{P}_1$ deja en N1 el valor que $\mathcal{P}$ deja en N1
$\mathcal{P}_2$ deja en N1 el valor que $\mathcal{P}$ deja en N2
$\mathcal{P}_3$ deja en P1 el valor que $\mathcal{P}$ deja en P1

Aclaración 2:

$\Psi^{1,0,\#}_E(x)$ = valor que representa N1 tras correr E partiendo desde el estado $[\![x]\!]$

$\Psi^{1,0,*}_E(x)$ = valor que representa P1 tras correr E partiendo desde el estado $[\![x]\!]$

($\subseteq$) Para todo $t \in \omega$, por (2a) sabemos que P partiendo de $[\![t]\!]$ llega a un estado de la forma $((x, y, z, \dots), (\alpha, \beta, \dots))$ donde $(x, y, \alpha) \in S$ y como $F = [F_1, F_2, F_3]$ y teniendo en cuenta ambas aclaraciones, $F(x) = (x, y, \alpha)$

($\supseteq$) Sea $(x, y, \alpha) \in S$ sabemos que $\exists t \in \omega$ tal que correr $\mathcal{P}$ partiendo del estado $[\![t]\!]$ llega a un estado de la forma $((x, y, z, \dots), (\alpha, \beta, \dots))$. Entonces, por ambas aclaraciones, $(x, y, \alpha) = (F_{(1)}(t), F_{(2)}(t), F_{(3)}(t)) = F(t)$, luego, pertenece a I_F

$\blacksquare$