Lenguajes Formales y Computabilidad

Teoremas: Combo 4

Nicolás Cagliero

June 27, 2025

Proposición (Caracterización básica de conjuntos Σ-enumerables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:*

1. S es Σ-enumerable.
2. Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que:
   (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $[\![x]\!]$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*
   (b) *Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $[\![x]\!]$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$.*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2). Ya que S es no vacío, por definición existe una función

$$F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$$

tal que $I_F = S$ y cada componente $F_{(i)}$ es Σ-computable, para $i = 1, 2, 3$.

Por el Primer Manantial de Macros, existen los siguientes macros:

$$[\text{V2} \leftarrow F_{(1)}(\text{V1})]$$
$$[\text{V2} \leftarrow F_{(2)}(\text{V1})]$$
$$[\text{W1} \leftarrow F_{(3)}(\text{V1})]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$[\text{P1} \leftarrow F_{(3)}(\text{N1})]$$
$$[\text{N2} \leftarrow F_{(2)}(\text{N1})]$$
$$[\text{N1} \leftarrow F_{(1)}(\text{N1})]$$

donde se supone que las expansiones de los macros usan variables auxiliares que no aparecen en la lista $\text{N1}, \text{N2}, \text{P1}$ y tampoco se repiten labels auxiliares.

Ver que se cumplan las condiciones de 2 es fácil: nuestro programa copia el comportamiento de cada componente de F que ya sabemos que enumera a S, por lo tanto, para cada $x \in \omega$ nuestro programa termina y llega a un estado con la forma esperada y además, sabemos que para cada elemento de S existe algún $x \in \omega$ que lo enumera, por lo tanto, nuestro programa se detendrá en ese x llegando a un estado de la forma esperada.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ cumple (a) y (b) de (2). Sea:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\text{N1} \leftarrow \text{N1}$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\text{N1} \leftarrow \text{N2}$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\text{P1} \leftarrow \text{P2}$$

Definimos entonces:

$$F_1 = \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}$$
$$F_2 = \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#}$$
$$F_3 = \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}$$

Nótese que cada F_i es Σ-computable y tiene dominio ω. Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$. Por definición, $D_F = \omega$ y como $F_{(i)} = F_i$ para $i = 1, 2, 3$, tenemos que cada componente de F es Σ-computable.

Necesito verificar que $I_F = S$.

Aclaración 1:

$\mathcal{P}_1$ deja en N1 el valor que $\mathcal{P}$ deja en N1
$\mathcal{P}_2$ deja en N1 el valor que $\mathcal{P}$ deja en N2
$\mathcal{P}_3$ deja en P1 el valor que $\mathcal{P}$ deja en P1

Aclaración 2:

$\Psi_E^{1,0,\#}(x)$ = valor que representa N1 tras correr E partiendo desde el estado $[\![x]\!]$
$\Psi_E^{1,0,*}(x)$ = valor que representa P1 tras correr E partiendo desde el estado $[\![x]\!]$

($\subseteq$) Para todo $t \in \omega$, por (2a) sabemos que P partiendo de $[\![t]\!]$ llega a un estado de la forma $((x, y, z, \dots), (\alpha, \beta, \dots))$ donde $(x, y, \alpha) \in S$ y como $F = [F_1, F_2, F_3]$ y teniendo en cuenta ambas aclaraciones, $F(x) = (x, y, \alpha)$

($\supseteq$) Sea $(x, y, \alpha) \in S$ sabemos que $\exists t \in \omega$ tal que correr $\mathcal{P}$ partiendo del estado $[\![t]\!]$ llega a un estado de la forma $((x, y, z, \dots), (\alpha, \beta, \dots))$. Entonces, por ambas aclaraciones, $(x, y, \alpha) = (F_{(1)}(t), F_{(2)}(t), F_{(3)}(t)) = F(t)$, luego, pertenece a I_F

■

Lemma 2 (Lema de la sumatoria). *Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$*

no vacíos, entonces la función

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

es Σ*-p.r.*

Proof. Sea

$$G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{t} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{y} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \ldots, p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$$

basta con probar que G es Σ-p.r. Primero note que

$$G(0,x,\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$G(t+1,x,\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

O sea que si definimos h y g apropiadamente, tenemos que $G = R(h,g)$. Definamos h y g y definamos los conjuntos D_1, D_2, H_1, H_2 basados en las condiciones de los casos.

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m : x > 0\} \\
D_2 &= \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m : x = 0\} \\
H_1 &= \{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m : x > t+1\} \\
H_2 &= \{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m : x \leq t+1\}
\end{aligned}$$

Ahora, h y g correspondientes:

$$h = C_0^{n+1,m}\big|_{D_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})\right]\big|_{D_2}$$

$$g = C_0^{n+3,m}\big|_{H_1} \cup \lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})\right]\big|_{H_2}$$

Ya que f es Σ-p.r. y las funciones $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ y $\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ se pueden escribir como composición de funciones Σ-p.r., estas también son Σ-p.r. Solo falta ver que los conjuntos D_1, D_2, H_1, H_2 son Σ-p.r. Veamos por ejemplo que H_1 es Σ-pr. Ya que f es Σ-p.r., su dominio $D_f = \omega \times S_1 \times \cdots \times S_n \times L_1 \times \cdots \times L_m$ es Σ-p.r., lo que implica que S_i y L_j son Σ-p.r. Por lo tanto, el conjunto $R = \omega^3 \times S_1 \times \cdots \times L_m$ es Σ-p.r. Nótese que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}} = (\chi_R^{\omega^{3+n} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}[x > t+1])$, y como es la conjunción de dos predicados Σ-p.r., es Σ-p.r. ■