Lenguajes Formales y Computabilidad

Teoremas: Combo 7

Nicolás Cagliero

July 3, 2025

Lema (Lema de la minimización acotada). Sean $n, m \geq 0$. Sea

$$P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^m \to \omega$$

un predicado Σ-p.r. Entonces:

(a) $M(P)$ es Σ-recursiva.

(b) Si hay una función Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^m \to \omega$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \quad \text{para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ es Σ-p.r.

Dem (a) Sea $\widetilde{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{[\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}] - D_P}$. Note que $\widetilde{P}$ es Σ-p.r.. Veremos a continuación que $M(P) = M(\widetilde{P})$. Nótese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \widetilde{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\widetilde{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\widetilde{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, por lo cual $M(P) = M(\widetilde{P})$. Veremos entonces que $M(\widetilde{P})$ es Σ-recursiva. Sea k tal que $\widetilde{P} \in PR_k^\Sigma$. Ya que $\widetilde{P}$ es Σ-total y $\widetilde{P} \in PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$, tenemos que $M(\widetilde{P}) \in R_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(P) \in R^\Sigma$.

(b) Ya que $M(P) = M(\widetilde{P})$, basta con probar que $M(\widetilde{P})$ es Σ-p.r. Primero veremos que $D_{M(\widetilde{P})}$ es un conjunto Σ-p.r. Nótese que

$$\chi^{\omega^n \times \Sigma^m}_{D_{M(\widetilde{P})}} = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left([\exists t \in \omega]_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \ \widetilde{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right)$$

lo cual nos dice que

$$\chi^{\omega^n \times \Sigma^m}_{D_{M(\widetilde{P})}} = \lambda x \vec{x}\vec{\alpha} \left((\exists t \in \omega)_{t \leq x} \ \widetilde{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right) \circ [f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}]$$

Pero el Lema de Cuantificación Acotada nos dice que $\lambda x \vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \ \widetilde{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-p.r., por lo cual $\chi^{\omega^n \times \Sigma^m}_{D_{M(\widetilde{P})}}$ lo es.

Sea

$$P_1 = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left(\widetilde{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j\leq t}\ j = t \vee \neg\widetilde{P}(j,\vec{x},\vec{\alpha})\right)$$

Note que P_1 es Σ-total y Σ-p.r. Además, para $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que $P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha}) = 1$ si y solo si $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M(\widetilde{P})}$ y $t = M(\widetilde{P})(\vec{x},\vec{\alpha})$. Esto nos dice que

$$M(\widetilde{P}) = \left(\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\right)|_{D_{M(\widetilde{P})}}$$

Solo resta probar que

$$F = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \circ [C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}]$$

y por el Lema de la Sumatoria, F es Σ-p.r. ■

Lema Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ-r.e., entonces $f|_S$ es Σ-recursiva.

Dem Haremos el caso $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$. Tenemos que hay una función $F : \omega \to \omega \times \Sigma^*$ tal que $\operatorname{Im} F = S$ y $F_{(1)}, F_{(2)}$ son Σ-recursivas. Por el Primer Manantial en $\mathcal{S}^\Sigma$ hay macros

$$[\mathrm{W2} \leftarrow f(\mathrm{V1},\mathrm{W1})]$$
$$[\mathrm{V2} \leftarrow F_{(1)}(\mathrm{V1})]$$
$$[\mathrm{W1} \leftarrow F_{(2)}(\mathrm{V1})]$$

Ya que los predicados $D = \lambda xy[x \neq y]$ y $D' = \lambda\alpha\beta[\alpha \neq \beta]$ son Σ-p.r., en $\mathcal{S}^\Sigma$ hay macros

$$[\mathrm{IF}\ D(\mathrm{V1},\mathrm{V2})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$
$$[\mathrm{IF}\ D'(\mathrm{W1},\mathrm{W2})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$

Para hacer más amigable la lectura los escribiremos de la siguiente manera

$$[\mathrm{IF\ V1} \neq \mathrm{V2\ GOTO\ A1}]$$
$$[\mathrm{IF\ W1} \neq \mathrm{W2\ GOTO\ A1}]$$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$
\begin{array}{ll}
\text{L2} & [\text{N2} \leftarrow F_{(1)}(\text{N20})] \\
 & [\text{P2} \leftarrow F_{(2)}(\text{N20})] \\
 & [\text{IF N1} \neq \text{N2 GOTO L1}] \\
 & [\text{IF P1} \neq \text{P2 GOTO L1}] \\
 & [\text{P1} \leftarrow f(\text{N1}, \text{P1})] \\
 & \text{GOTO L3} \\
\text{L1} & \text{N20} \leftarrow \text{N20} + 1 \\
 & \text{GOTO L2} \\
\text{L3} & \text{SKIP}
\end{array}
$$

Es fácil ver que $\mathcal{P}$ computa a $f|_S$ ■