Demostración del Teorema del Matrimonio de Konig

Nicolás Cagliero

25 de julio de 2025

Theorem 1. *Todo grafo G bipartito regular ($\chi(G) = 2$ y $\delta = \Delta$) tiene un matching perfecto.*

Demostración. Dado un $W \subseteq V$ definimos

$$E_w = \{wv : w \in W\}$$

Sea X e Y las partes de G
Sea $S \subseteq X$
Sea $l \in E_s \Rightarrow \exists x \in S, y \in Y : l = xy$. Por lo tanto $y \in \Gamma(x) \Rightarrow y \in \Gamma(S) \Rightarrow l \in E_{\Gamma(S)}$

Luego $E_s \subseteq E_{\Gamma(S)} \Rightarrow |E_s| \leq |E_{\Gamma(S)}|$

Veamos ahora E_w cuando $W \subseteq X$ o $W \subseteq Y$. Si $wv \in E_w \Rightarrow v \notin W$ pues si

$$W \subseteq X \Rightarrow v \in Y$$

$$W \subseteq Y \Rightarrow v \in X$$

Luego $E_w = \{wv : v \in \Gamma(w)\}$ y esta unión es disjunta por lo recién visto. Luego

$$|E_w| = \sum_{w \in W} \delta(w) = \Delta \cdot |W|$$

Aplicando todo lo aprendido, $|S| \cdot \Delta \leq |\Gamma(S)| \cdot \Delta \Rightarrow |S| \leq |\Gamma(S)|$. Luego, se cumple Hall y sabemos que existe un matching completo de X a Y. Ahora solo resta ver que $|X| = |Y|$.

Sabiendo que existe matching completo de X a Y sabemos que $|X| \leq |Y|$ pero debemos recordar que la elección de X fue arbitraria, luego podemos repetir los pasos para Y y llegaríamos a que existe matching completo de Y a X. Y así llegamos a que $|X| = |Y|$.

$\square$