Demostración que 2-COLOR es polinomial

Nicolás Cagliero

25 de junio de 2024

Theorem 1. *2-COLOR es polinomial*

Demostración. Para la demostración de este teorema, daremos un algoritmo que dado un grafo G colorea en tiempo polinomial con 2 colores y revisa si el coloreo es propio, y si no lo es, es porque el grafo tiene un ciclo impar. Esto último implicaría que el número crómatico es mayor o igual a 3. Para este algoritmo se asume que G es conexo pero en caso que no lo sea, simplemente se corre el algoritmo en todas sus componentes.

El algoritmo arranca en un vértice arbitrario x coloreandoló con el color 0. Corremos BFS a partir de x coloreando a cada vértice de la forma $c(z) = Nivel_{BFS}(z)\ mod\ 2$. Esto nos dará un coloreo con 2 colores, pero no está garantizado que sea propio.

Ahora debemos revisar que el coloreo sea propio. Si lo es, $\chi(G) = 2$. Si no lo es $\Rightarrow$ existen u, v tal que $c(u) = c(v)$ y además $uv \in E$

De esta forma sabemos que $Nivel_{BFS}(u)\ mod\ 2 = Nivel_{BFS}(v)\ mod\ 2 \therefore$ tienen la misma paridad.

$\exists$ un camino de la forma $x...u$
$\exists$ un camino de la forma $x...v$
$\exists$ un vértice w a partir del cual se separan.
Como $uv \in E \Rightarrow$ existe un camino de la forma $w...uv...w$. Veamos la cantidad de lados que hay en ese camino. El lado uv suma 1 y podemos ver que $Nivel_{BFS}(u) - Nivel_{BFS}(w)$ y $Nivel_{BFS}(v) - Nivel_{BFS}(w)$ tienen la misma paridad. Luego, hay cantidad impar de lados $\Rightarrow$ tenemos un ciclo impar en G.

Este algoritmo primero recorre todo el grafo con BFS coloreando cada vértice. Correr BFS es $O(m)$ y colorear cada vértice es $O(1)$. Luego revisamos si es propio, lo cual es $\sum O(d(x)) = O(m)$. Luego la complejidad total es $O(m) + O(m) = O(m)$ □