Demostración que el valor de todo flujo es menor que la capacidad de todo corte y que si f es flujo, entonces es flujo maximal si y solo si existe un corte S tal que $v(f) = cap(S)$ (y S es minimal)

Nicolás Cagliero

25 de junio de 2024

Theorem 1.
El valor de todo flujo es menor que la capacidad de todo corte y si f es flujo, entonces es flujo maximal si y solo si existe un corte S tal que $v(f) = cap(S)$ (y S es minimal).

Demostración. Sabemos que $v(f) = f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}, S) \leq f(S, \overline{S}) \leq c(S, \overline{S}) = cap(S, \overline{S})$

Aclaración: el primer $\leq$ es pues

$$f(\overline{S}, S) = \sum_{\substack{x \notin S \\ y \in S \\ \overrightarrow{xy} \in E}} f(\overrightarrow{xy}) \geq 0 \text{ pues } f(\overrightarrow{xy}) \geq 0, \forall \overrightarrow{xy} \in E$$

Aclaración: el segundo $\leq$ es pues

$$f(S, \overline{S}) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \notin S \\ \overrightarrow{xy} \in E}} f(\overrightarrow{xy}) \leq c(S, \overline{S}) \text{ pues } f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}), \forall \overrightarrow{xy} \in E$$

Ahora analicemos la vuelta del "si y solo si". Sea f flujo, S corte tal que $v(f) = cap(S)$. Sea g otro flujo, por lo que ya vimos $v(g) \leq cap(S) = v(f) \Rightarrow f$ es maximal. Y sea T corte, $cap(T) \geq v(f) = cap(S) \Rightarrow S$ es minimal.

Ahora veamos la ida, es decir, asumamos f maximal. Ahora construiremos un corte S a partir de f y vamos a ver que $v(f) = cap(S)$. Sea

$$S = \{s\} \cup \{x \in V : \text{existe un } f - CA \text{ entre } s \text{ y } x\}$$

Primero veamos que en efecto S sea corte, supongamos que no $\therefore t \in S$. Esto es absurdo pues existiría un camino aumentante y se podría aumentar el flujo lo cual es absurdo pues f es maximal.

Una vez visto esto, veamos que se cumple la implicación. Sabemos que $v(f) = f(S, \overline{S}) - f(\overline{S}, S)$

Analicemos

$$f(S, \overline{S}) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \notin S \\ \overrightarrow{xy} \in E}} f(\overrightarrow{xy})$$

Como $y \notin S \Rightarrow f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ pues no existe camino aumentante entre s e y

$$\Rightarrow f(S,\overline{S}) = \sum_{\substack{x\in S\\ y\notin S\\ \overrightarrow{xy}\in E}} f(\overrightarrow{xy}) = c(S,\overline{S})$$

Ahora analicemos

$$f(\overline{S},S) = \sum_{\substack{w\notin S\\ x\in S\\ \overrightarrow{wx}\in E}} f(\overrightarrow{wx})$$

Como $w \notin S \Rightarrow f(\overrightarrow{wx}) = 0$ porque sino podría devolver flujo desde x en un camino aumentante que sabemos que existe pues $x \in S$

$$\Rightarrow f(\overline{S},S) = \sum_{\substack{w\notin S\\ x\in S\\ \overrightarrow{wx}\in E}} f(\overrightarrow{wx}) = 0$$

Luego, $v(f) = f(S,\overline{S}) - f(\overline{S},S) = c(S,\overline{S}) - 0 = c(S,\overline{S}) = cap(S,\overline{S})$ $\square$