

Demostración que dado un grafo conexo no regular G , entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Nicolás Cagliero

25 de junio de 2024

Theorem 1. *Sea G un grafo conexo no regular, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$*

Demostración. Sea $x : \delta(x) = \delta$. Corramos BFS a partir de x . Como G es conexo, todos los vértices de G van a ser alcanzados y en particular, todo vértice que fue alcanzado es porque tiene un vecino anterior que lo agregó. Ahora vamos a querer correr Greedy pero utilizando el orden inverso al que obtuvimos corriendo BFS. De este modo, tendremos a x como el último vértice en colorearse y todo vértice tendrá por lo menos un vecino posterior. Veamos que pasa cuando quiero colorear un vértice $z \neq x$, Greedy lo que va a hacer es eliminar a lo sumo $\delta(z) - 1 \leq \Delta - 1$ colores, luego, podrá colorear con algún color $\in \{1 \dots \Delta\}$. Al colorear x , va a eliminar $\delta < \Delta$ colores \Rightarrow puede usar algún color $\in \{1 \dots \Delta\}$.

□