

Demostración las distancias no disminuyen

Nicolás Cagliero

25 de junio de 2024

Theorem 1.

1. Dados vértices x, z se define, dado un flujo f en el network

$$d_f(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = z \\ \infty, & \text{si no existe } f - CA \text{ desde } x \text{ a } z \\ \text{mínima longitud de un } f - CA \text{ desde } x \text{ a } z, & \text{si existe} \end{cases}$$

2. Sean f_0, f_1, f_2, \dots los flujos que se van obteniendo en E-K:

$$d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$$

$$\text{Entonces } d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$$

Demostración. Esta será una idea de la demostración y sus partes, los detalles y ciertas cuentas no serán escritas.

Sea $A = \{x : d_{k+1}(x) < d_k(x)\}$, vamos a querer que $A = \emptyset$. Supongamos que no, es decir, tomemos un $x \in A$ y además le vamos a pedir que sea tal que $d_{k+1}(x) = \min\{d_{k+1}(y) : y \in A\}$

Acá ya podemos ver que $d_{k+1}(x) < d_k(x) \leq \infty \Rightarrow$ existe un $f_{k+1} - CA$ entre s y x . Y además es obvio ver que $x \neq s$.

De esta forma, sabemos que existe un z inmediatamente anterior a x tal que el $f_{k+1} - CA$ es de la forma $P_{k+1} = s \dots z x$. Y como estamos corriendo E-K, P_{k+1} es de longitud mínima.

$$\Rightarrow d_{k+1}(x) = d_{k+1}(z) + 1$$

De esta forma, sabemos que \overrightarrow{zx} o \overrightarrow{xz} .

1. Caso \overrightarrow{zx}

Notar ahora que $d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) \Rightarrow z \notin A \Rightarrow d_k(z) \leq d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) < \infty$. Luego, existe un $f_k - CA$ entre s y z . Acá nos preguntamos, puedo agregar a x al final de ese $f_k - CA$ dado que \overrightarrow{xz} es un lado. Si lo hacemos, dado que estamos corriendo E-K y los caminos aumentantes son de longitud mínima vamos a llegar a un absurdo contradiciendo la suposición que $x \in A$. Entonces si no lo podemos agregar forward al x , significa que \overrightarrow{xz} está saturado en el flujo k , pero ya vimos que P_{k+1} es un $f_{k+1} - CA \Rightarrow$ para pasar de f_k a f_{k+1} , el lado se usó y se usó backward $\Rightarrow P'_k = s \dots \overleftarrow{xz}$

Como es de longitud mínima, $d_k(z) = d_k(x) + 1 > d_{k+1}(x) + 1 = d_{k+1}(z) + 1 + 1 \geq d_k(z) + 2 \Rightarrow d_k(z) > d_k(z) + 2 \Rightarrow 0 > 2$. ABSURDO.

2. Caso \overrightarrow{xy}

Muy parecido al caso anterior, vamos a llegar que existe un $f_k - CA$ entre s y z y al querer agregar a x backward llegaríamos a una contradicción y vamos a tener que agregar ese lado forward obteniendo las mismas ecuaciones que en el caso anterior y llegando al absurdo de $0 > 2$.

De esta forma se llega a un absurdo de suponer que $A \neq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ y el teorema queda demostrado.

□