¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Edmonds-Karp?

Nicolás Cagliero

24 de junio de 2024

Teorema: el algoritmo Edmonds-Karp termina siempre con complejidad $O(n \cdot m^2)$

Demostración. E-K constituye una sucesión de caminos aumentantes, Cada uno de ellos encontrado usando BFS, que es $O(m)$.

$$\therefore \text{Su complejidad es } O(m \cdot \#CaminosAumentante)$$

$$\therefore \text{Solo debemos probar que, en E-K, } \#CA = O(n \cdot m)$$

Definición: un lado es (o "se vuelve") crítico en un punto dado si es usado para construir el siguiente flujo en modo forward y se satura o en modo backward y se vacía.

¿Cuántas veces puede un lado volverse crítico?

Para calcular esto, veamos unas definiciones auxiliares:

1. dados vértices x, z se define, dado un flujo f en el network

$$d_f(x,z) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = z \\ \infty, & \text{si no existe } f-CA \text{ desde } x \text{ a } z \\ \text{mínima longitud de un } f-CA \text{ desde } x \text{ a } z, & \text{si existe} \end{cases}$$

2. Sean $f_0, f_1, f_2, ...$ los flujos que se van obteniendo en E-K:

$$d_k(x) = d_{f_k}(s,x)$$
$$b_k(x) = d_{f_k}(x,t)$$

Prop: $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$

Prop: $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$

Sea $\overrightarrow{xy}$ un lado que se vuelve crítico en el paso k, hay 2 casos:

1. se saturó
2. se vació

- Caso en el cual el lado saturó: es decir, $f_k(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})$ pero $f_{k+1}(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$
  $\therefore$ para pasar de f_k a f_{k+1} usamos un $f_k - CA$ de la forma $s...xy...t$
  Como estamos usando E-K, ese camino es de longitud mínima $\therefore d_k(y) = d_k(x) + 1$
  Supongamos que $\overrightarrow{xy}$ se vuelve crítico otra vez en un paso $j > k$

- Se vació, i.e, usamos $\overrightarrow{xy}$ backward en el paso j
- Se saturó

Como luego del paso k ya estaba saturado, para poder volverse a saturar debemos haberle devuelto el flujo en algún paso $k < i < j$

En cualquier caso, $\exists i : k < i \leq j$ tal que $\overrightarrow{xy}$ se usa en forma backward, es decir, usamos un $f_i - CA$ de la forma $s...\overleftarrow{yx}...t$. Como E-K, este camino es de longitud mínima $\Rightarrow d_i(x) = d_i(y) + 1$

Entonces $d_j(t) \geq d_i(t)$

$$
\begin{gathered}
d_i(t) = d_i(x) + b_i(x) \\
d_i(t) = d_i(y) + 1 + b_i(x) \\
d_i(t) \geq d_k(y) + 1 + b_k(x) \\
d_i(t) \geq d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x) \\
d_i(t) \geq d_k(t) + 2
\end{gathered}
$$

$\Rightarrow d_j(t) \geq d_k(t) + 2$ si $\overrightarrow{xy}$ se satura en el paso k

- Caso en el cual se vació: la próxima vez que se vuelva crítico será porque se saturó, o bien, se vació de vuelta $\therefore$ antes debo haberlo llenado un poco. En cualquier caso: $\exists i : k < i \leq j$ tal que $\overrightarrow{xy}$ se usa en forma forward, es decir, usamos un $f_i - CA$ de la forma $s...\overrightarrow{xy}...t$. Como E-K, este camino es de longitud mínima. Luego $d_j(t) \geq d_i(t)$

$$
\begin{gathered}
d_i(t) = d_i(y) + b_i(y) \\
d_i(t) = d_i(x) + 1 + b_i(y) \\
d_i(t) \geq d_k(x) + 1 + b_k(y) \\
d_i(t) \geq d_k(y) + 1 + 1 + b_k(y) \\
d_i(t) \geq d_k(t) + 2
\end{gathered}
$$

$\Rightarrow d_j(t) \geq d_k(t) + 2$ si $\overrightarrow{xy}$ se vacía en el paso k

Conclusión: $d_j(t) \geq d_k(t) + 2$ en ambos casos

Es decir, cuando un lado se vuelve crítico, para que pueda volver a ser crítico, la distancia entre s y t debe aumentar en al menos 2

Como la distancia entre puede variar entre 1 y $n-1 \Rightarrow$ un lado puede volverse crítico a lo sumo $O(\frac{n}{2}) = O(n)$ veces

Resumen:

- cada CA vuelve crítico al menos un lado
- cada lado se vuelve crítico a los sumpo $O(n)$ veces
- hay m lados

$\Rightarrow$ hay $O(m \cdot n)$ caminos aumentantes.

$\square$