Master Recherche: Mécanique Physique et Modélisation
Spécialité: Acoustique

Physique des sons et vibrations

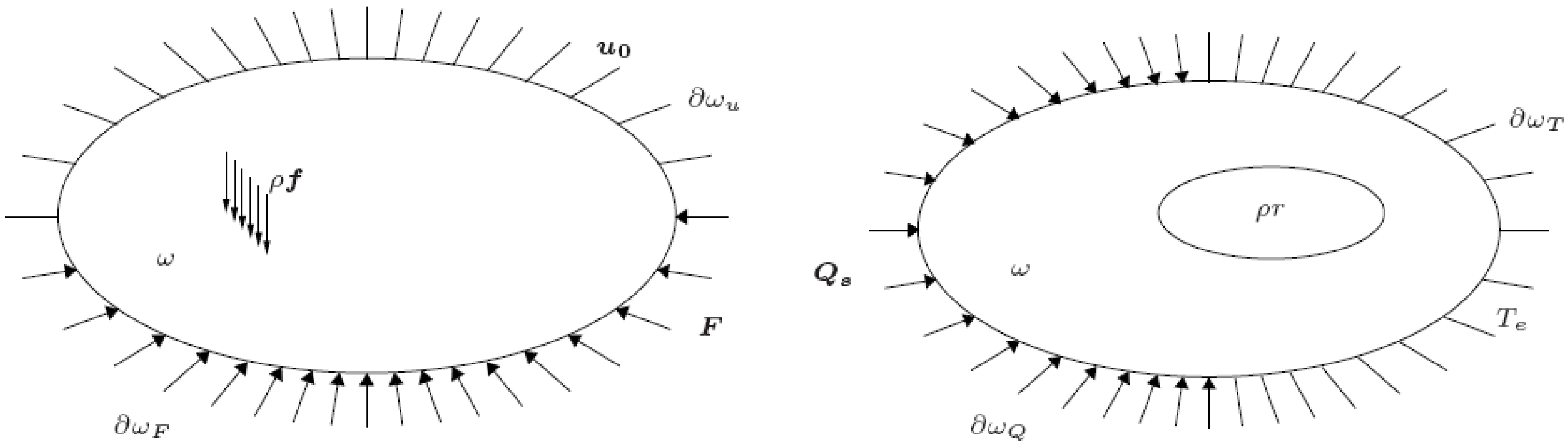
Viscoélasticité

A. Boukamel

Octobre 2009

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Position du problème



(a) Problème mécanique. (b) Problème thermique.

- Problème thermo-mécanique:
  - Equations de conservation
  - Equations constitutives

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Lois de conservation
  - Conservation de la masse

Enoncé 1. *Pour un système "milieu continu"* **fermé**, *il n'y a ni production ni perte de masse.*

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega}\rho\left(\boldsymbol{x},t\right)dv=0$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho\,\boldsymbol{v}\right)=0}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\left(\boldsymbol{v}\right)=0}$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Lois de conservation
  - Conservation de la quantité de mouvement

Enoncé 2. *La variation du torseur cinétique est, pour un domaine matériel ω, égale à la somme des torseurs des efforts extérieurs exercés sur ω.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\omega} \rho\, \boldsymbol{v} dv = \int_{\omega} \rho\, \boldsymbol{f} dv + \int_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\omega} \boldsymbol{x} \wedge \rho\, \boldsymbol{v} dv = \int_{\omega} \boldsymbol{x} \wedge \rho \boldsymbol{f} dv + \int_{\partial\omega} \boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})\, ds \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho\, \boldsymbol{f} \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \omega}$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Lois de conservation
  - Conservation de l'énergie: ***Premier Principe***

Enoncé 3. *La variation de l'énergie totale (énergie cinétique et énergie interne) est, pour un système matériel ω, égale à la somme du travail des efforts extérieures exercés sur ω et de la quantité de chaleur apportée à ω.*

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega}\rho\left(e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^{2}\right)dv=\int_{\omega}\rho\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dv+\int_{\partial\omega}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}\,ds+\int_{\omega}r\,dv-\int_{\partial\omega}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho\frac{d\,e}{dt}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}+r-\operatorname{div}\boldsymbol{q}}$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Le second principe
  - Bilan d'entropie:

Enoncé 4. *Il existe une fonction thermodynamique extensive, appelée* **entropie** *et une température absolue strictement positive notée T, telles que le taux de production d'entropie, pour un domaine matériel ω est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçu divisé par la température.*

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho\, s\, dv = -\int_{\partial\omega} \frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\boldsymbol{n}\, ds + \int_\omega \frac{r}{T}\, dv + \int_\omega \rho\, \varpi_s^{int}\, dv$$

$$\boxed{\rho\varpi_s^{int} = \rho\frac{ds}{dt} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) - \frac{r}{T} \geq 0}$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Le second principe
  - Inégalité de Clausius-Duhem:

$$\Psi = e - T\,s.$$

$$\boxed{\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \rho\left(\frac{d\Psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) - \frac{1}{T}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \geq 0}$$

- Dissipation intrinsèque

$$\Phi_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \rho\left(\frac{d\Psi}{dt} + s\dot{T}\frac{dT}{dt}\right)$$

- Dissipation thermique

$$\Phi_{ther} = -\frac{1}{T}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Cas de l'H.P.P.
  - Cinématique:

$$|\boldsymbol{u}| \ll 1,$$
$$\|\boldsymbol{\nabla u}\| \ll 1,$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) \simeq \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x},t))_{sym}\,.$$

Lois de conservation

- Conservation de la masse :

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \simeq \rho_0(\boldsymbol{x})\left(1 - Trace\left(\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\right)\right) = \rho_0(\boldsymbol{x})\left(1 - \operatorname{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\right),$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho_0\,\boldsymbol{f},$$

- Premier principe de la thermodynamique :

$$\rho_0 \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} + r - \operatorname{div}\boldsymbol{q},$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Cas de l'H.P.P.
  - Second principe:

• l'inégalité de Clausius-Duhem ou le second principe :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} - \rho_0 \left(\dot{\Psi} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \geq 0.$$

Rappels en thermodynamique des matériaux

- Lois constitutives
  - Principe de l'état local:

Variables d'état: (T, ε, χ_k)

Fonctions d'état: $\Psi(T, \varepsilon, \chi_k) \quad \text{et} \quad s(T, \varepsilon, \chi_k)$

  - Dissipation:

Postulant l'existence d'un **pseudo-potentiel de dissipation**, fonction convexe positive de $(\dot{\varepsilon}, \dot{\chi}_k)$ telle que:

$$\Phi_{int} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\chi}_k} \bullet \dot{\chi}_k$$

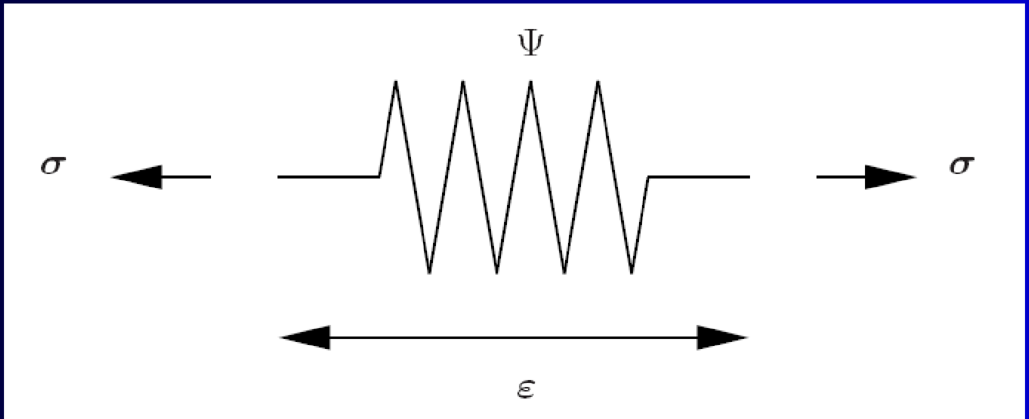
Rappels en thermodynamique des matériaux

- Lois constitutives
  - Loi de comportement-lois complémentaires:

$$\begin{cases} s = -\rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial T} & \text{Loi d'état d'entropie} \\[2ex] \boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}} & \text{Loi de comportement} \\[2ex] 0 = \rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varepsilon}} + \dfrac{\partial \phi}{\partial \dot{\chi}_k} & \text{Lois complémentaires} \end{cases}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Eléments rhéologiques simples
  - Le ressort:



- En 3D (isotrope)

$$\rho_0 \Psi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\lambda\ (\mathrm{Tr}\varepsilon)^2 + 2\mu\ \mathrm{Tr}\varepsilon^2\right]$$

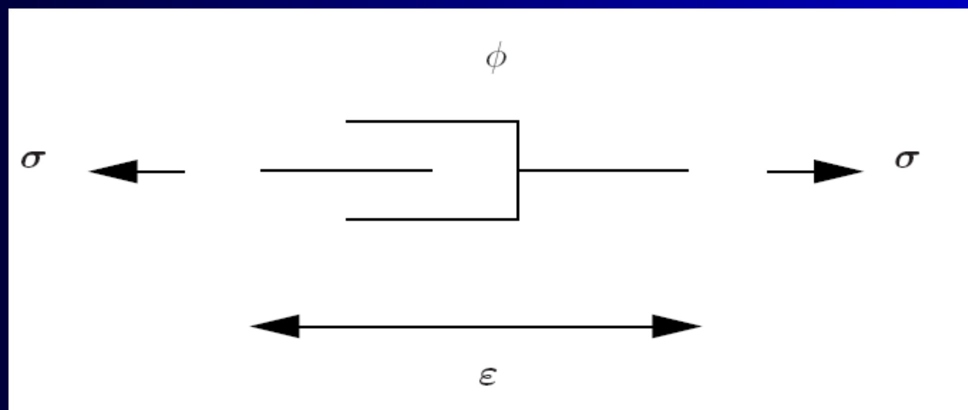
$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = \lambda\ \mathrm{Tr}\varepsilon\ 1 + 2\mu\ \varepsilon$$

- En 1D

$$\rho_0 \Psi(\varepsilon) = \frac{1}{2} E\ \varepsilon^2, \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = E\ \varepsilon$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Eléments rhéologiques simples
  - L'amortisseur:



- En 3D (isotrope)

$$\phi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left[\Lambda\ (\mathrm{Tr}\dot{\varepsilon})^2 + 2M\ \mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}^2\right]$$

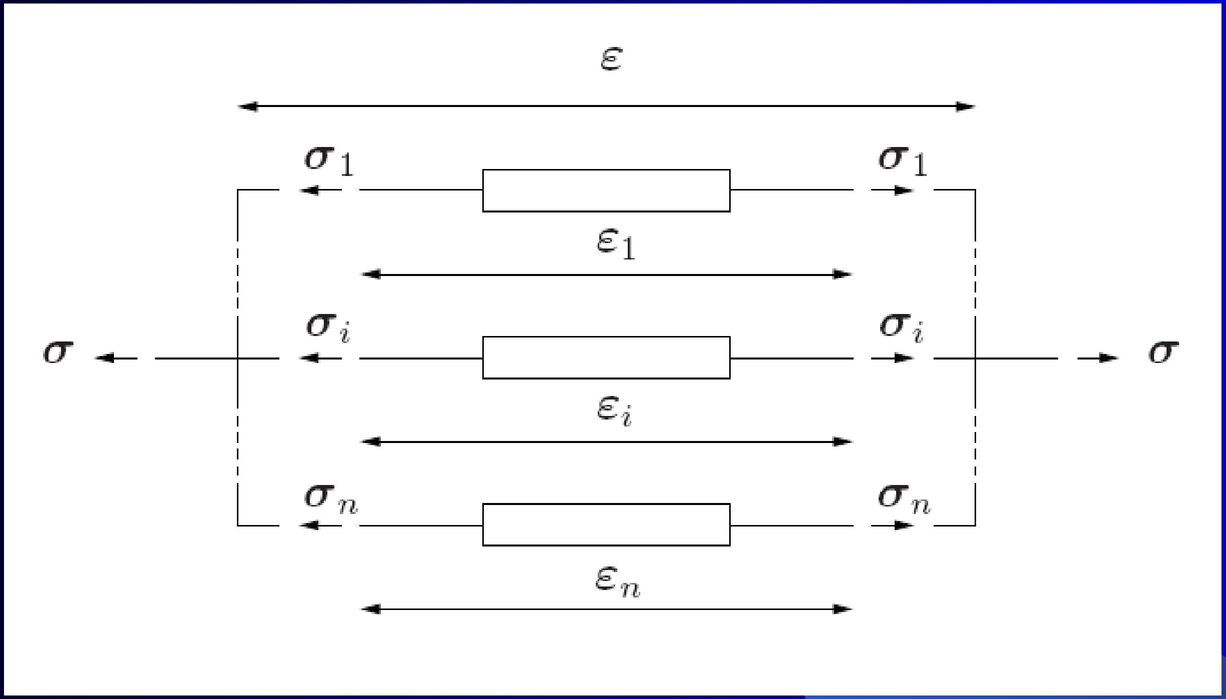
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\phi}{\partial\dot{\varepsilon}} = \Lambda\ \mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}\ \mathbf{1} + 2M\ \dot{\varepsilon}$$

- En 1D

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\eta\ \dot{\varepsilon}^2, \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \eta\ \dot{\varepsilon}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

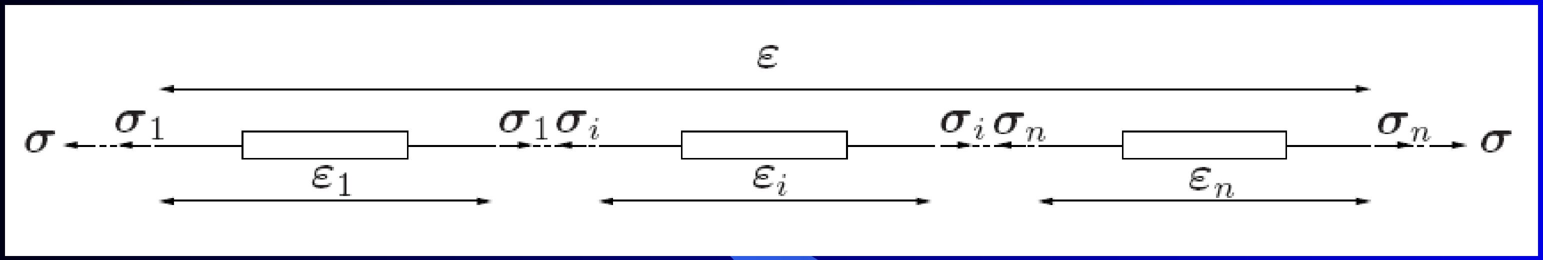
- Associations d'éléments
  - En parallèle:



$$\varepsilon = \varepsilon_i \quad \forall\, i = 1, n \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

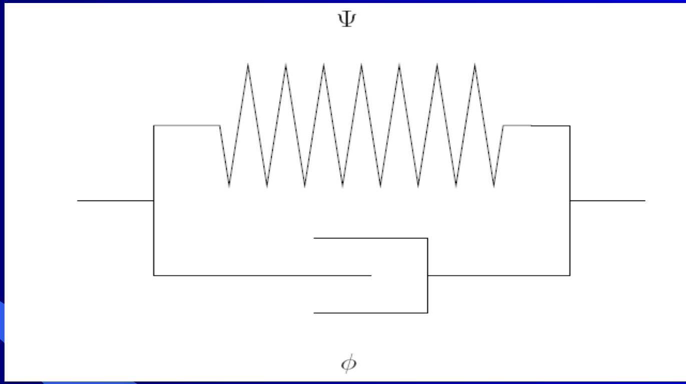
- Associations d'éléments
  - En série:



$$\sigma = \sigma_i \quad \forall\, i = 1, n \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Modèle:



  - En 3D (isotrope)

$$\begin{cases} \rho_0 \Psi(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}\left[\lambda\ (\mathrm{Tr}\varepsilon)^2 + 2\mu\ \mathrm{Tr}\varepsilon^2\right] \\ \\ \phi(\dot{\varepsilon}) = \dfrac{1}{2}\left[\Lambda\ (\mathrm{Tr}\dot{\varepsilon})^2 + 2M\ \mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}^2\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \lambda\left(\mathrm{Tr}\varepsilon + \tau\ \dot{\varepsilon}\right)\ \mathbf{1} + 2\mu\left(\varepsilon + \tau\ \dot{\varepsilon}\right)}$$

$$\tau = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{M}{\mu}$$

  - En 1D

$$\begin{cases} \rho_0 \Psi(\varepsilon) = \dfrac{1}{2} E\ \varepsilon^2 \\ \\ \phi(\dot{\varepsilon}) = \dfrac{1}{2} \eta\ \dot{\varepsilon}^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma = E\ \varepsilon + \eta\ \dot{\varepsilon} = E\left(\varepsilon + \tau\ \dot{\varepsilon}\right)}$$

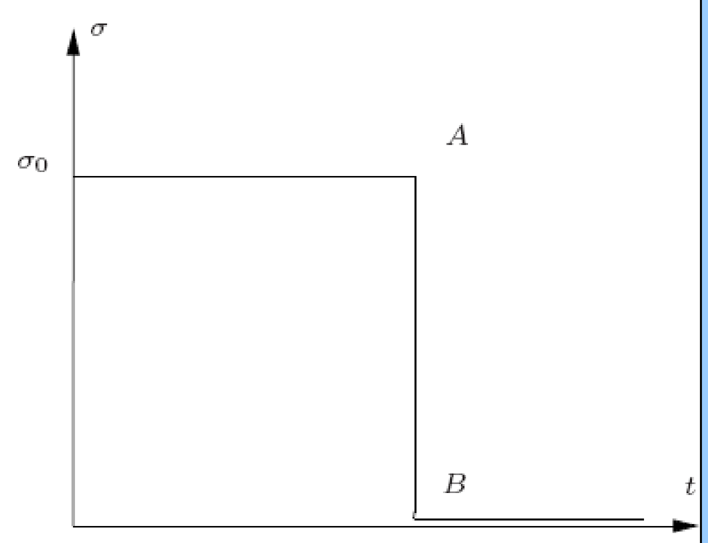
$$\text{avec } \tau = \frac{\eta}{E}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Réponse à un essai de fluage/recouvrance (en 1D)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

?



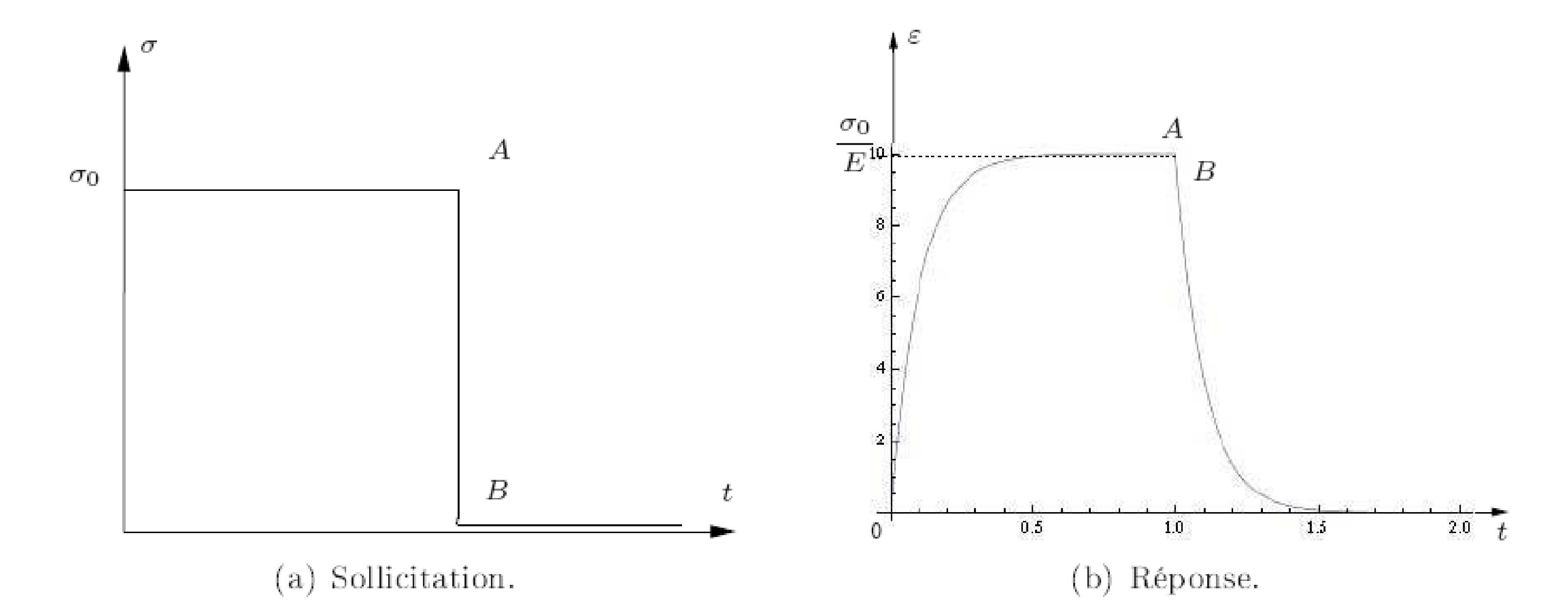
(a) Sollicitation.

?

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Réponse à un essai de fluage/recouvrance (en 1D)

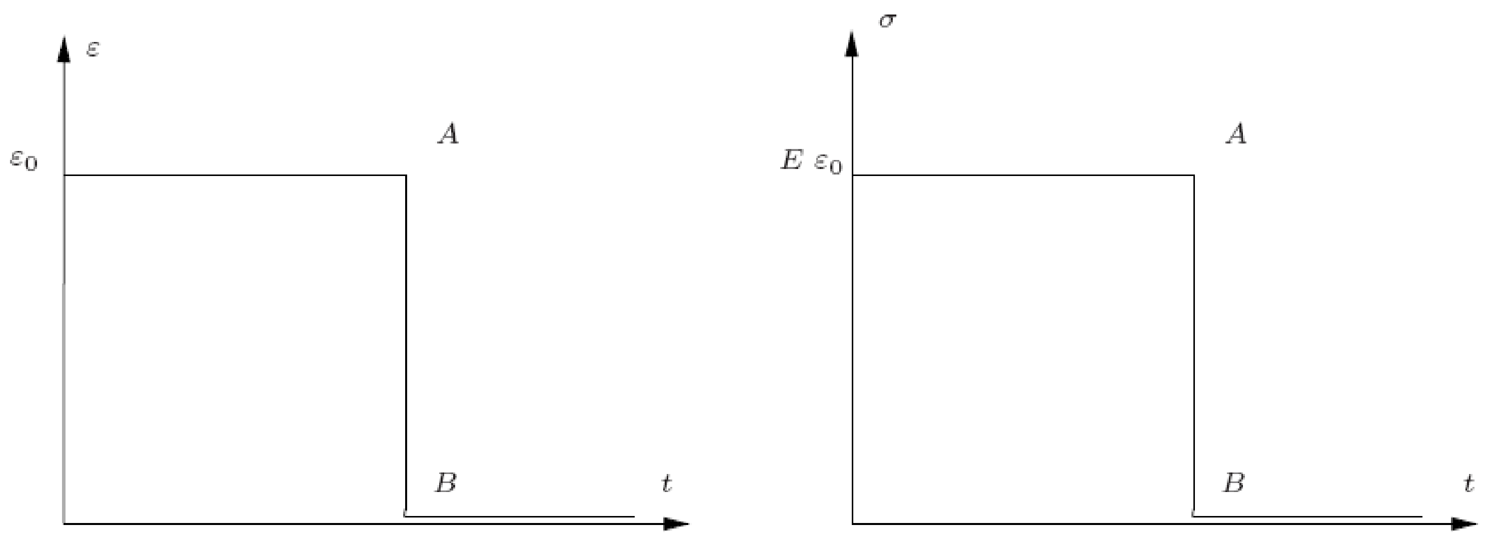
$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{E}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right] & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ \varepsilon(T)\exp\left(-\dfrac{t-T}{\tau}\right) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$



Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Réponse à un essai de relaxation/effacement

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$



(a) Sollicitation. (b) Réponse.

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Réponse à une sollicitation harmonique

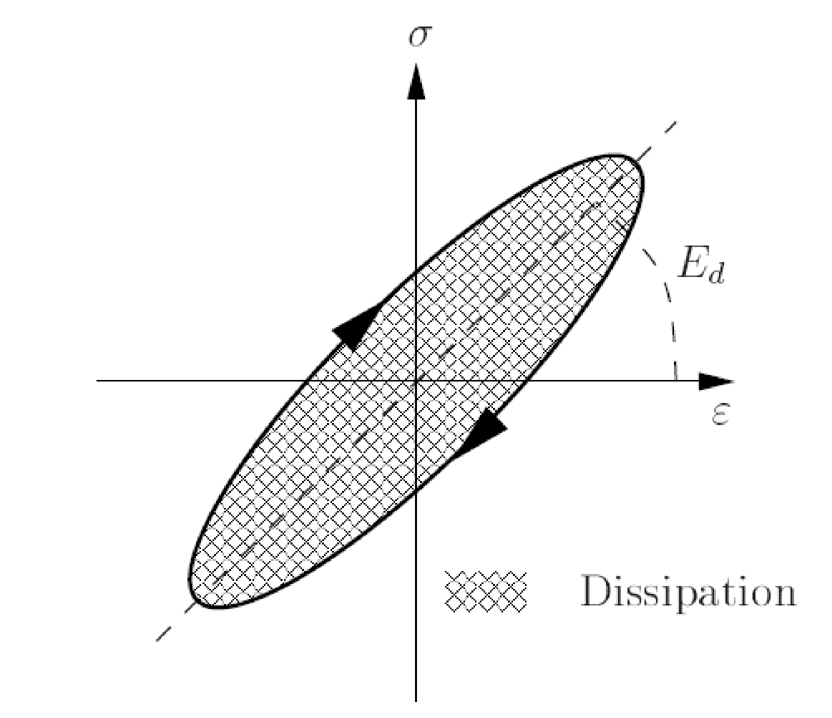
$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{R}_e \left[\exp\left(j\omega t\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = E_d\, \varepsilon_0\, \mathcal{R}_e \left[\exp j\left(\omega t + \delta\right)\right]}$$

?

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Réponse à une sollicitation harmonique

$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{R}_e \left[\exp\left(j\omega t\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = E_d \, \varepsilon_0 \, \mathcal{R}_e \left[\exp j\left(\omega t + \delta\right)\right]}$$

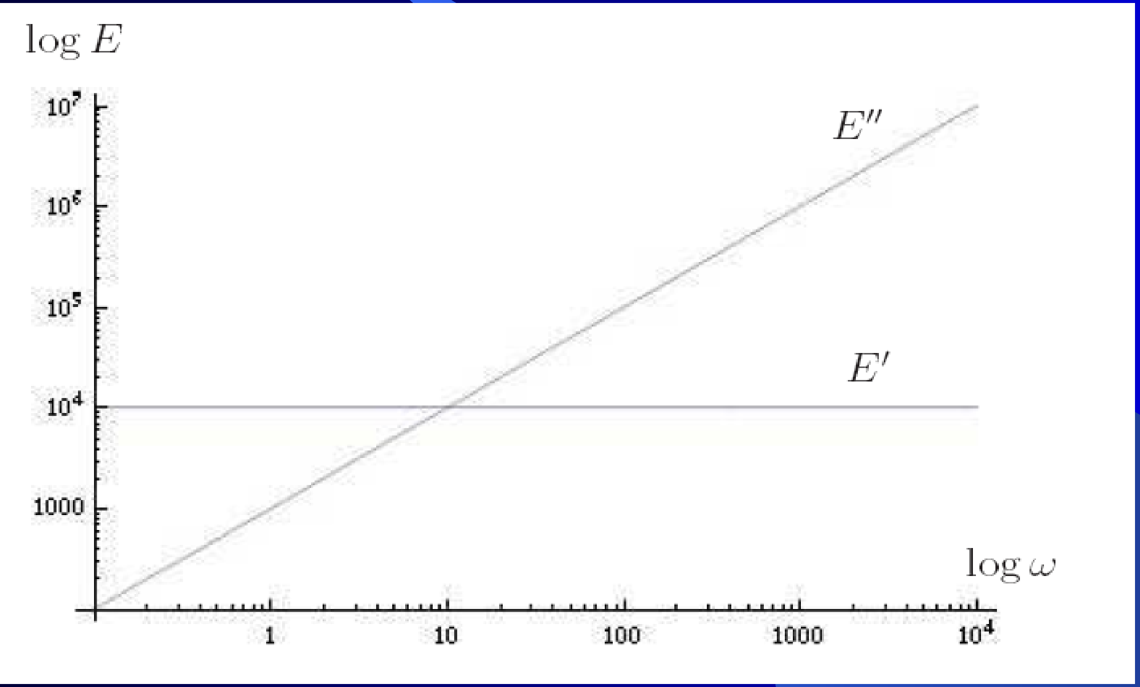


$$\boxed{\begin{cases} \text{Module dynamique:} & E_d = \sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2} \\ \text{Angle de perte} & \delta = \arctan\left(\dfrac{\eta\,\omega}{E}\right) \end{cases}}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Module complexe

Module complexe : $\bar{E} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp(j\delta) = E' + j\,E''$ $\quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Module de stockage:} & E' = E_d \cos\delta = E \\ \text{Module de perte} & E'' = E_d \sin\delta = \eta\,\omega \end{array} \right.$



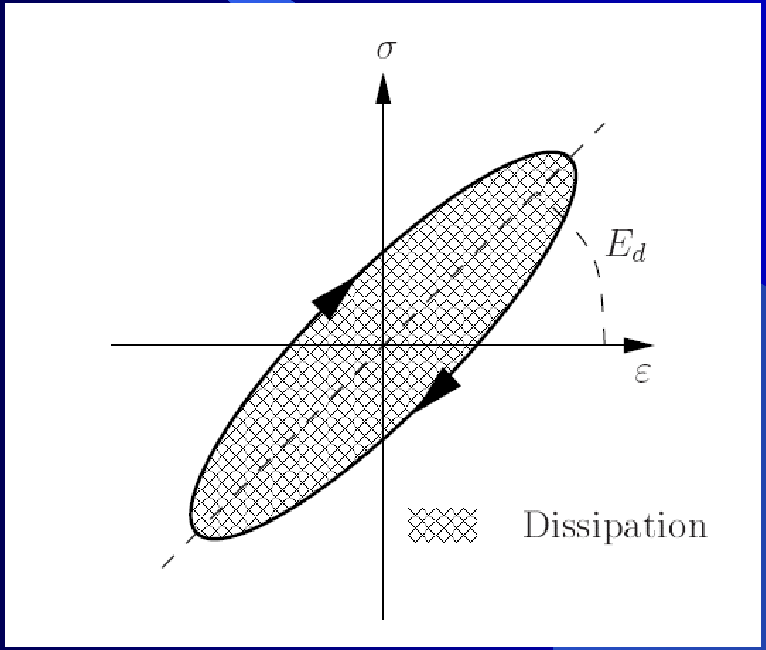
Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt
  - Dissipation hystérétique

L'énergie dissipée au cours d'un cycle:

$$\Delta W = \oint \Phi_{int} dt = \oint \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}} \cdot \dot{\varepsilon} dt = \oint \eta \, \dot{\varepsilon} d\varepsilon = \oint (\sigma - E\varepsilon) \, d\varepsilon = \oint \sigma \, d\varepsilon$$

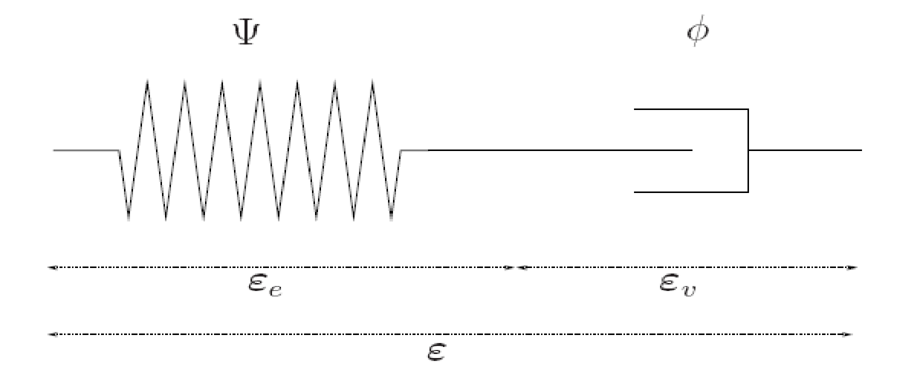
$$\boxed{\Delta W = \oint \sigma \cdot \dot{\varepsilon} \, dt = \pi \, \eta \, \omega \, \varepsilon_0^2}$$



$$\boxed{W = \frac{1}{2} E \, \varepsilon_0^2}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Modèle:



  - En 3D (isotrope)

$$\begin{cases} \rho_0 \Psi(\varepsilon, \varepsilon_v) = \dfrac{1}{2}\left[\lambda\ (\mathrm{Tr}(\varepsilon - \varepsilon_v))^2 + 2\mu\ \mathrm{Tr}(\varepsilon - \varepsilon_v)^2\right] \\ \phi(\dot{\varepsilon}_v) = \dfrac{1}{2}\left[\Lambda\ (\mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}_v)^2 + 2M\ \mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}_v^2\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathrm{Tr}(\varepsilon - \varepsilon_v)\ 1 + 2\mu\,(\varepsilon - \varepsilon_v) = \Lambda \mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}_v\ 1 + 2M\dot{\varepsilon}_v}$$

  - En 1D

$$\begin{cases} \rho_0 \Psi(\varepsilon, \varepsilon_v) = \dfrac{1}{2}E\ (\varepsilon - \varepsilon_v)^2 \\ \phi(\dot{\varepsilon}_v) = \dfrac{1}{2}\eta\ \dot{\varepsilon}_v^2 \end{cases}$$

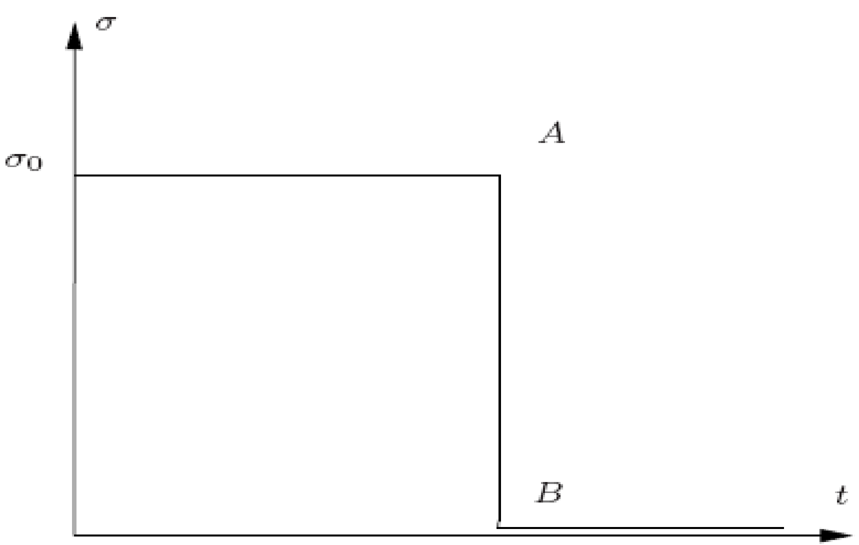
$$\begin{cases} \boxed{\sigma = E\,(\varepsilon - \varepsilon_v) = \eta\ \dot{\varepsilon}_v} \\ \boxed{E\ \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \dfrac{\sigma}{\tau} \qquad \text{avec} \quad \tau = \dfrac{\eta}{E}} \end{cases}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Réponse à un essai de fluage/recouvrance (en 1D)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \Longrightarrow$$

?



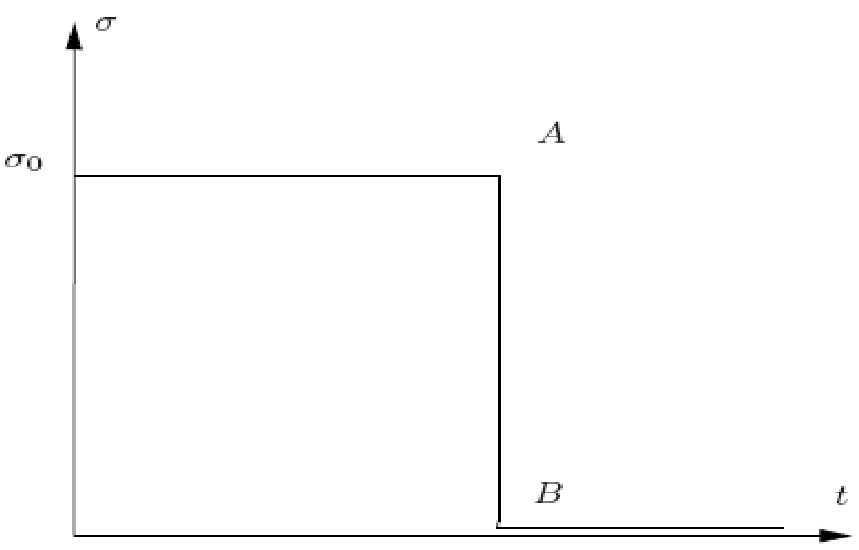
(a) Sollicitation.

?

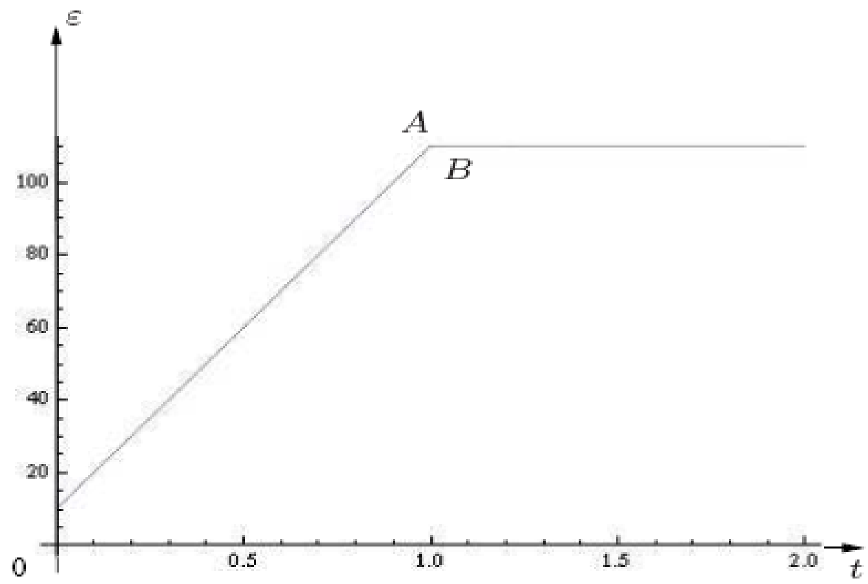
Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Réponse à un essai de fluage/recouvrance (en 1D)

$$\sigma(t)=\begin{cases}\sigma_0 & \text{si} \quad 0\le t\le T\\ 0 & \text{si} \quad t>T\end{cases} \Longrightarrow \varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_0}{E}\left(1+\dfrac{t}{\tau}\right) & \text{si} \quad 0\le t\le T\\ \varepsilon(T) & \text{si} \quad t>T\end{cases}$$



(a) Sollicitation.



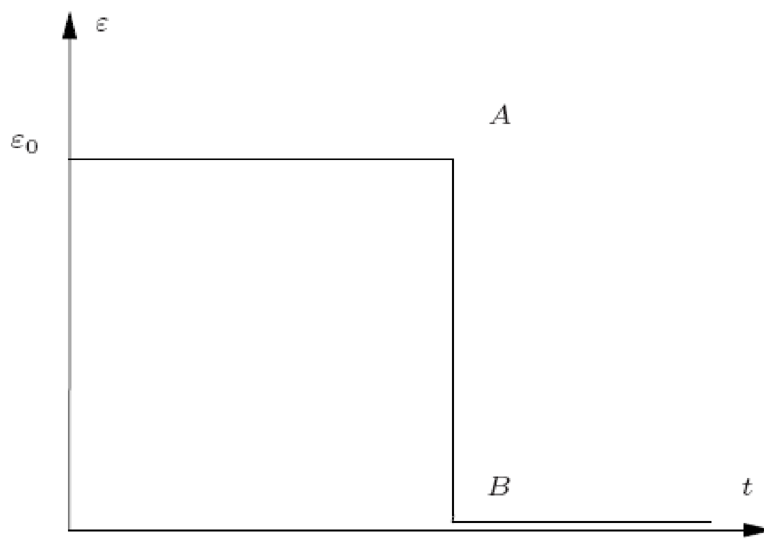
(b) Réponse.

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Réponse à un essai de relaxation/effacement

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

?



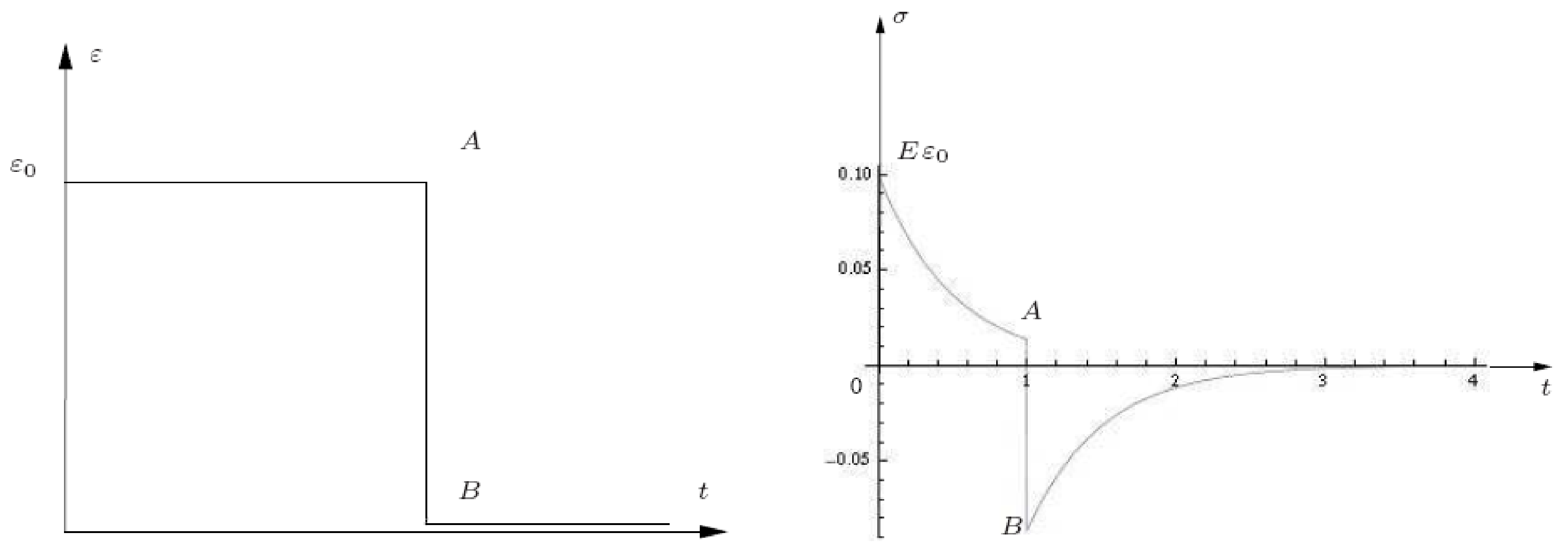
(a) Sollicitation.

?

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Réponse à un essai de relaxation/effacement

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ E\varepsilon_0 \left[\exp\left(-\dfrac{T}{\tau}\right) - 1\right] \exp\left(-\dfrac{t-T}{\tau}\right) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$



(a) Sollicitation. (b) Réponse.

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Réponse à une sollicitation harmonique

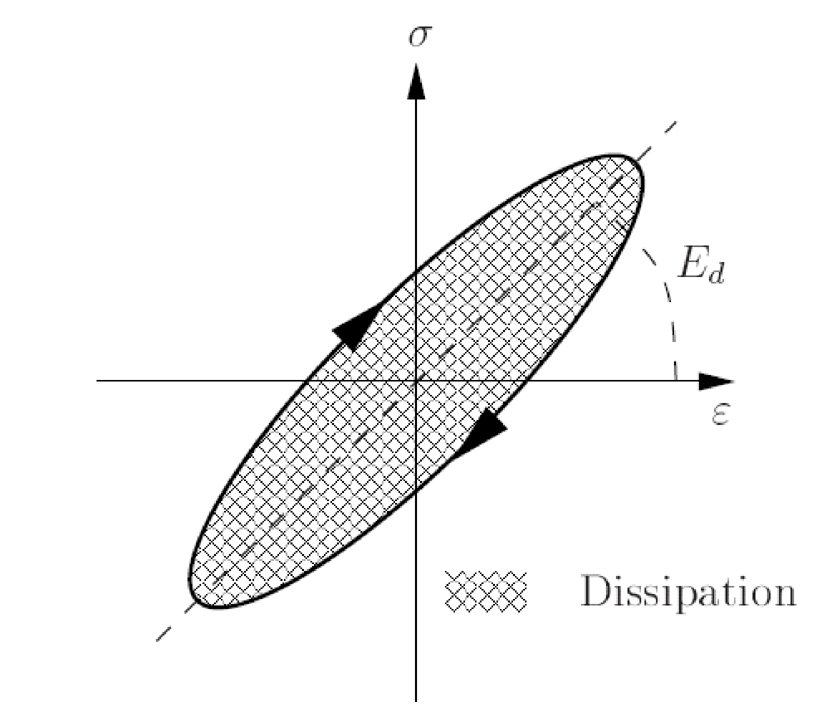
$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{R}_e \left[\exp\left(j\omega t\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = E_d\, \varepsilon_0\, \mathcal{R}_e \left[\exp j\left(\omega t + \delta\right)\right]}$$

?

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Réponse à une sollicitation harmonique

$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{R}_e\left[\exp\left(j\omega t\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = E_d\, \varepsilon_0\, \mathcal{R}_e\left[\exp j\left(\omega t + \delta\right)\right]}$$



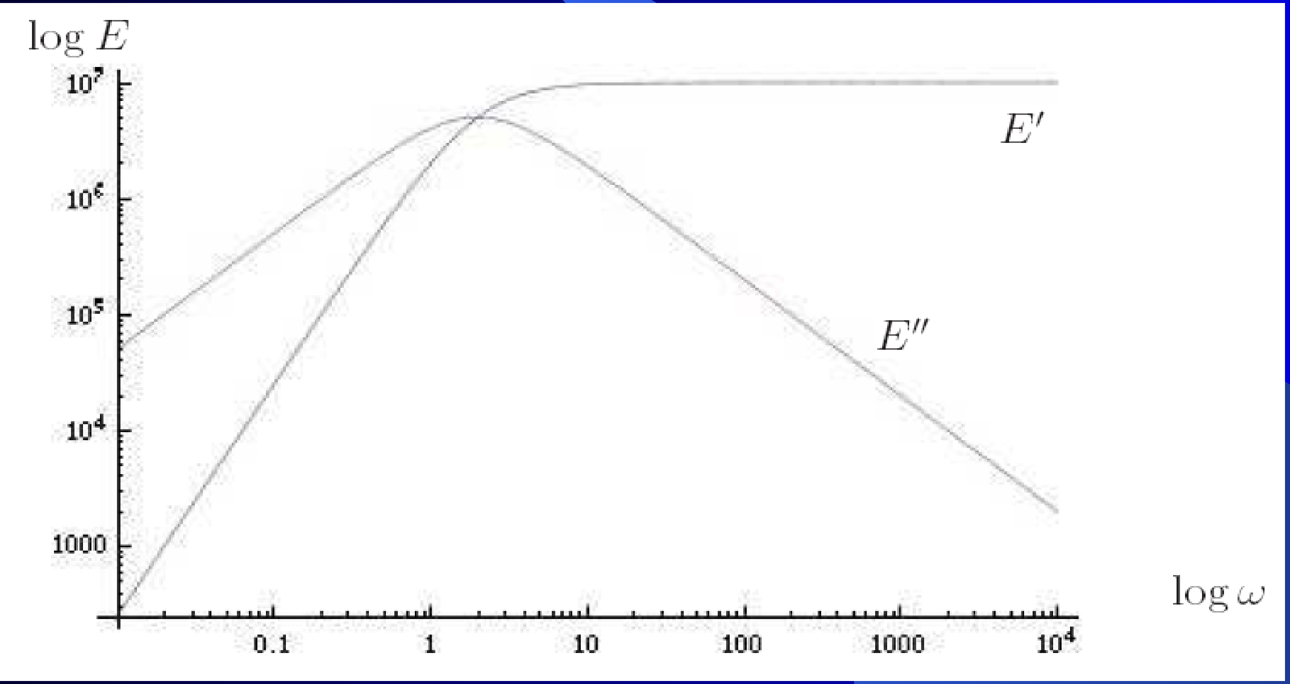
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Module dynamique:} & E_d = \dfrac{E\,\eta\,\omega}{\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}} \\[2ex] \text{Angle de perte} & \delta = \arctan\left(\dfrac{E}{\eta\,\omega}\right) \end{array}\right.$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Module complexe

Module complexe : $\bar{E} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp(j\delta) = E' + j\,E''$

$$\begin{cases} \text{Module de stockage:} \quad E' = \dfrac{E\,\eta^2\omega^2}{E^2+\eta^2\omega^2} \\ \text{Module de perte} \quad E'' = \dfrac{E^2\eta\,\omega}{E^2+\eta^2\omega^2} \end{cases}$$



Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell
  - Dissipation hystérétique

$$\Delta W = \oint \Phi_{int} dt = \oint \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}_v} \cdot \dot{\varepsilon}_v dt = \oint \eta \, \dot{\varepsilon}_v \cdot \dot{\varepsilon}_v dt = \oint \frac{\sigma^2}{\eta} \, dt$$

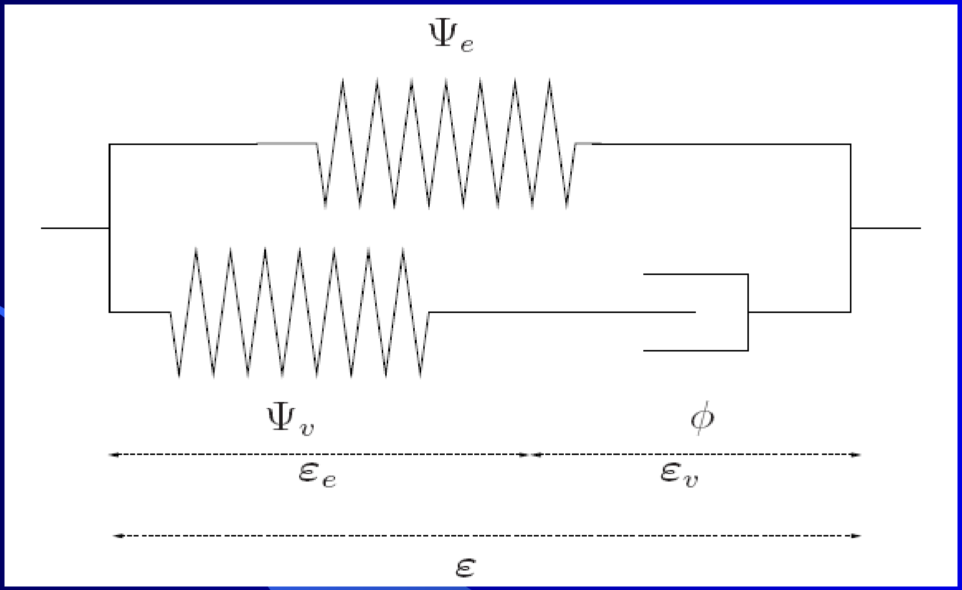
$$\boxed{\Delta W = \frac{E^2 \eta \, \omega}{E^2 + \eta^2 \omega^2} \, \pi \, \varepsilon_0^2}$$

  - Energie stockée

$$\boxed{W = \frac{E \, \eta^2 \omega^2}{2 \left(E^2 + \eta^2 \omega^2\right)} \, \varepsilon_0^2}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Modèle:

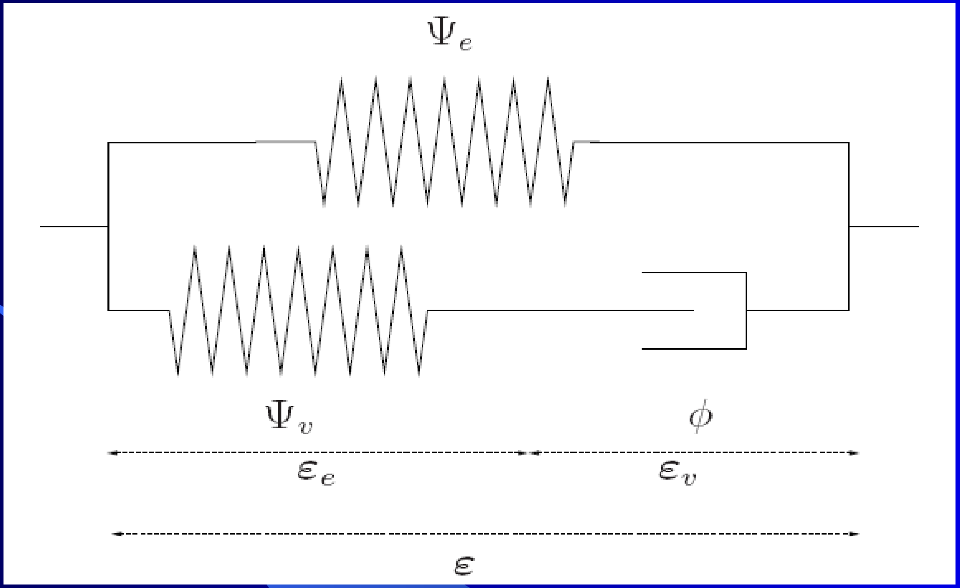


  - En 3D (isotrope)

$$
\left\{
\begin{array}{lcccc}
\rho_0 \Psi(\varepsilon, \varepsilon_v) & = & \rho_0 \Psi_e(\varepsilon) & + & \rho_0 \Psi_v(\varepsilon, \varepsilon_v) \\
 & = & \frac{1}{2}\left[\lambda_e \left(\mathrm{Tr}\varepsilon\right)^2 + 2\mu_e \mathrm{Tr}\varepsilon^2\right] & + & \frac{1}{2}\left[\lambda_v \left(\mathrm{Tr}(\varepsilon - \varepsilon_v)\right)^2 + 2\mu_v \mathrm{Tr}(\varepsilon - \varepsilon_v)^2\right] \\
\phi(\dot{\varepsilon}_v) & = & \frac{1}{2}\left[\Lambda \left(\mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}_v\right)^2 + 2M \mathrm{Tr}\dot{\varepsilon}_v^2\right] & &
\end{array}
\right.
$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Modèle:

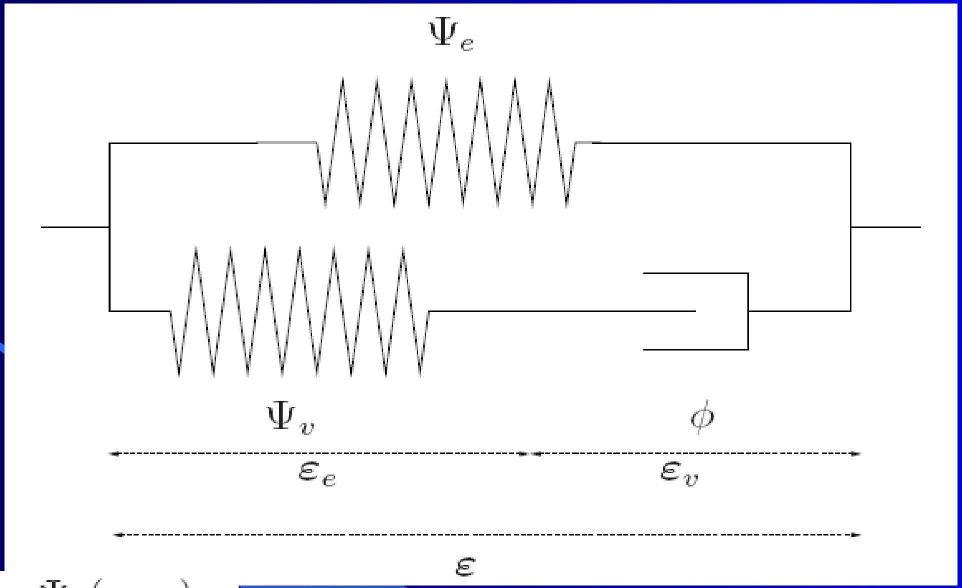


  - En 3D (isotrope)

$$\left\{\begin{array}{llcl} \boldsymbol{\sigma} & = \quad \boldsymbol{\sigma}_e & + & \boldsymbol{\sigma}_v \\ & = \quad \lambda_e \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\, \mathbf{1} + 2\mu_e\, \boldsymbol{\varepsilon} & + & \lambda_v \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_v)\, \mathbf{1} + 2\mu_v\, (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_v) \\ 0 & = \quad \Lambda \mathrm{Tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v\, \mathbf{1} + 2M\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v & - & \lambda_v \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_v)\, \mathbf{1} + 2\mu_v\, (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_v) \end{array}\right.$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Modèle:



  - En 1D

$$\left\{\begin{array}{rcccc} \rho_0 \Psi(\varepsilon, \varepsilon_v) & = & \rho_0 \Psi_e(\varepsilon) & + & \rho_0 \Psi_v(\varepsilon, \varepsilon_v) \\ & = & \frac{1}{2}\, E\, \varepsilon^2 & + & \frac{1}{2}\, e\, (\varepsilon - \varepsilon_v)^2 \\ \phi(\dot{\varepsilon}_v) & = & \frac{1}{2}\, \eta\, \dot{\varepsilon}_v^2 & & \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcccc} \sigma & = & \sigma_e & + & \sigma_v \\ & = & E\, \varepsilon & + & e\, (\varepsilon - \varepsilon_v) \\ 0 & = & \eta\, \dot{\varepsilon}_v & - & e\, (\varepsilon - \varepsilon_v) \end{array}\right.}$$

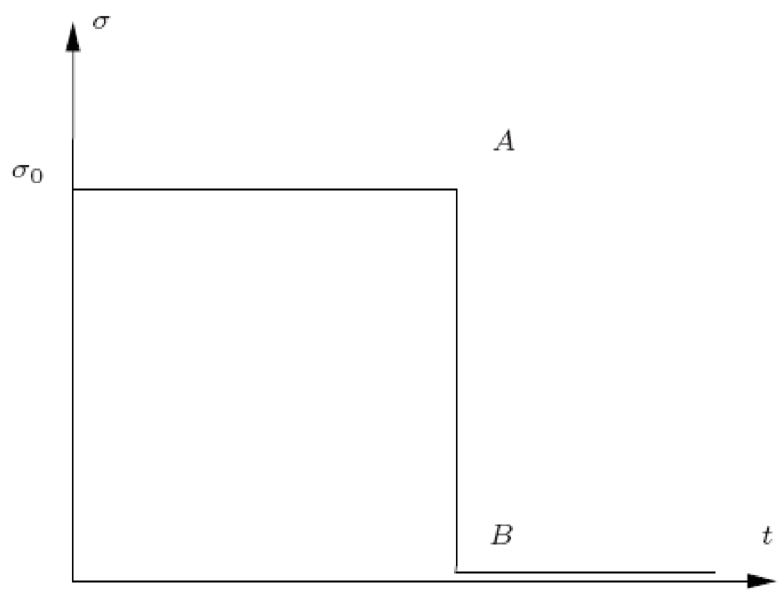
$$\boxed{(E + e)\left(\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau_F}\right) = \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_R} \qquad \text{avec} \quad \tau_F = \eta\, \frac{e + E}{E\, e} \qquad \text{et} \quad \tau_R = \frac{\eta}{e}}$$

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
    - Réponse à un essai de fluage/recouvrance (en 1D)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

?



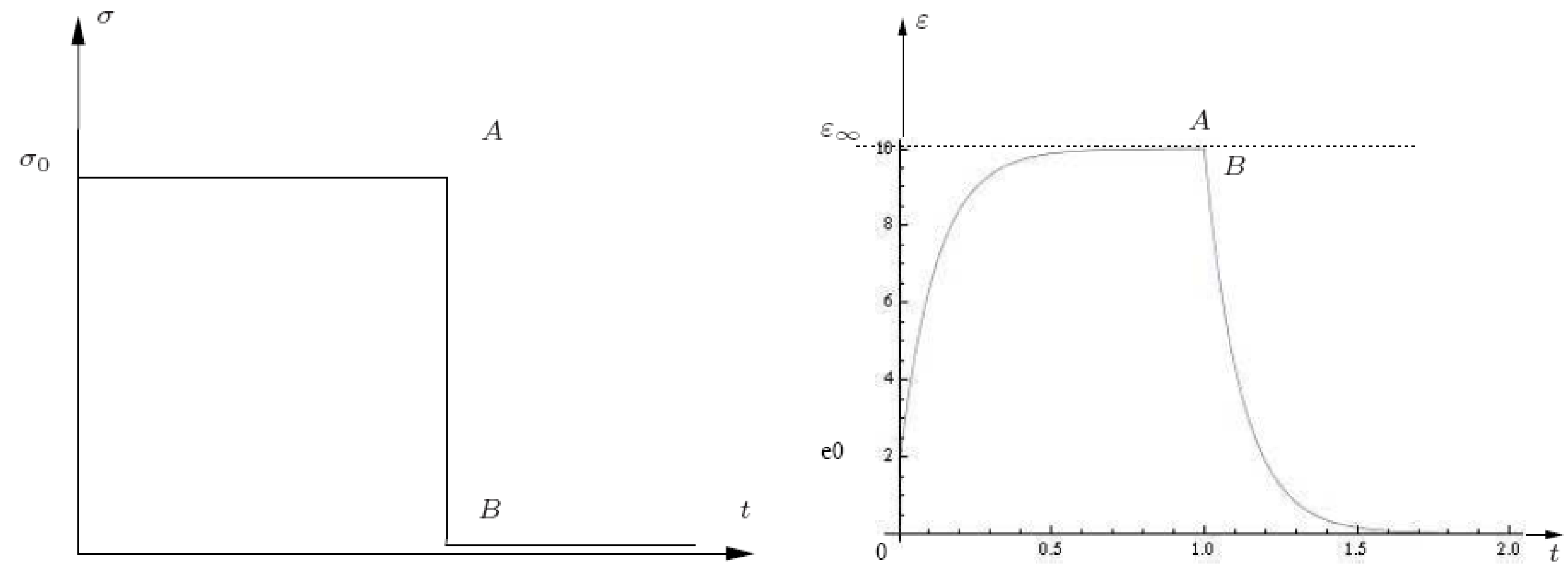
(a) Sollicitation.

?

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Réponse à un essai de fluage/recouvrance (en 1D)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \implies \varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{E}\left[1 - \dfrac{e}{E+e}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_F}\right)\right] & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ \varepsilon(T)\exp\left(-\dfrac{t-T}{\tau_F}\right) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$



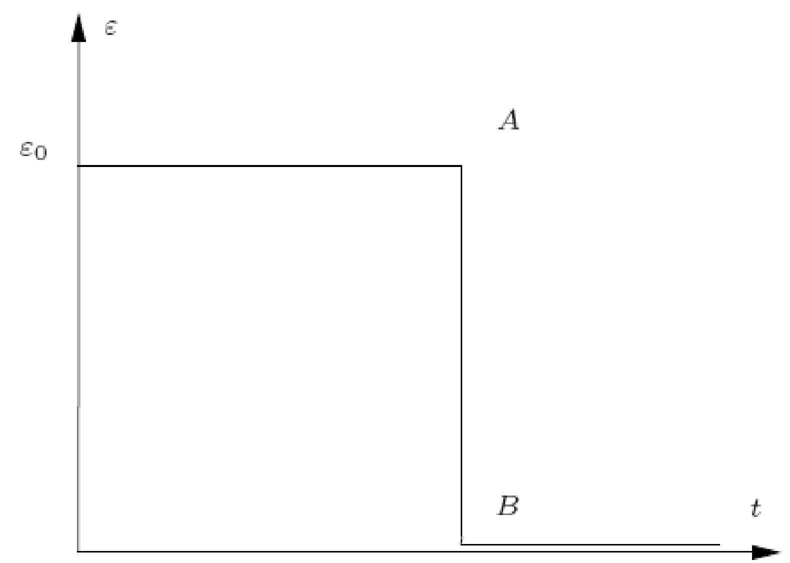
(a) Sollicitation. (b) Réponse.

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Réponse à un essai de relaxation/effacement

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

?



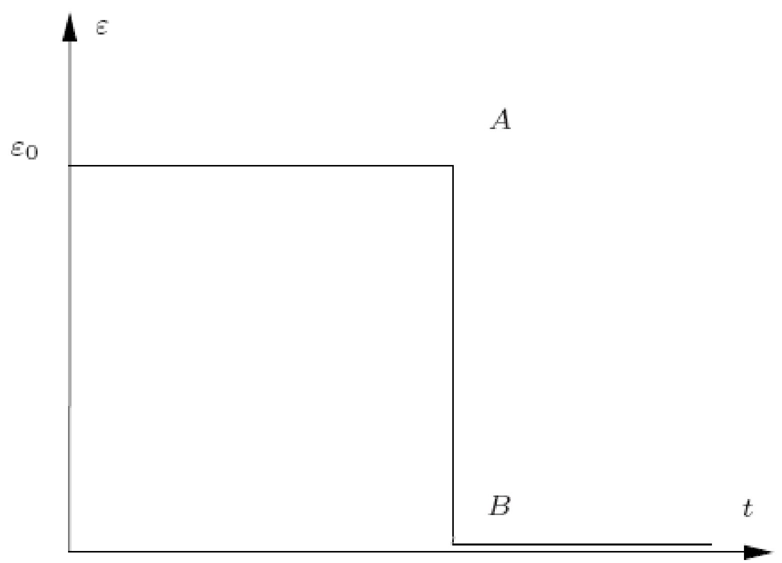
(a) Sollicitation.

?

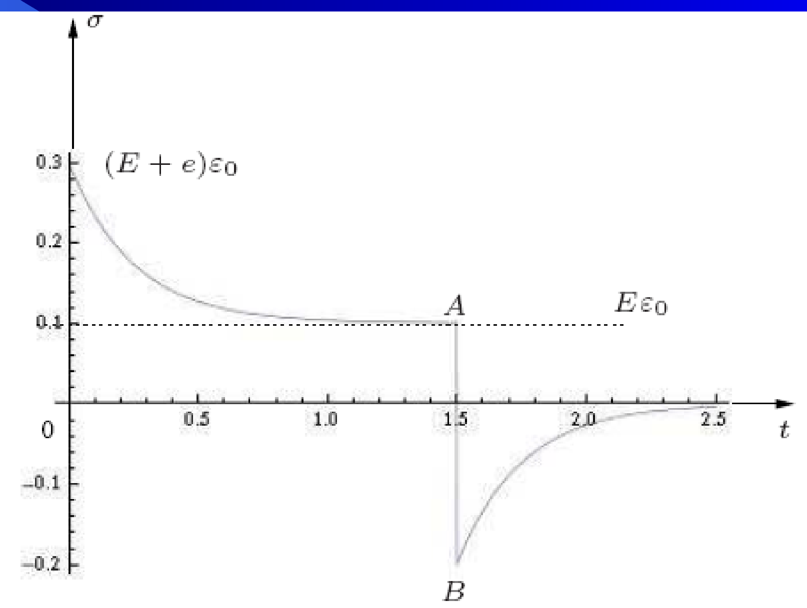
Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Réponse à un essai de relaxation/effacement

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 \left[E + e \, \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_R}\right) \right] & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ e \, \varepsilon_0 \left[\exp\left(-\dfrac{T}{\tau_R}\right) - 1 \right] \exp\left(-\dfrac{t-T}{\tau_R}\right) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$



(a) Sollicitation.



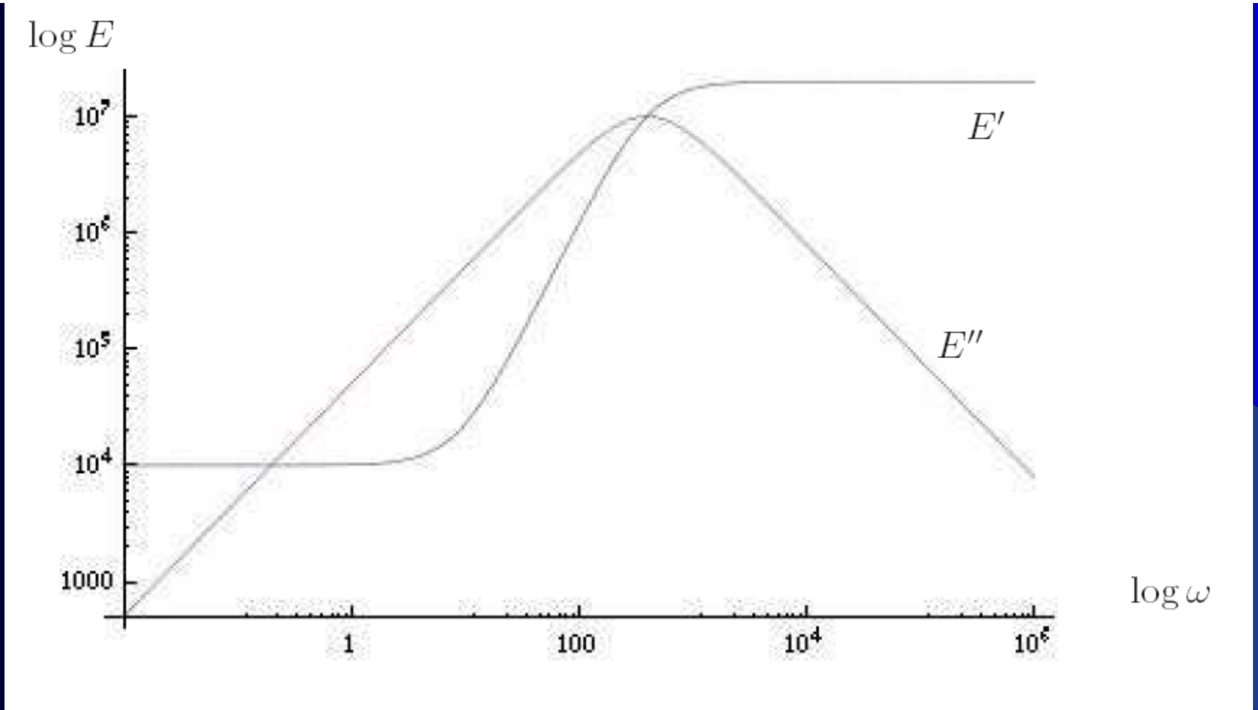
(b) Réponse.

Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Zener
  - Module complexe

Module complexe : $\bar{E} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp(j\delta) = E' + j\,E''$

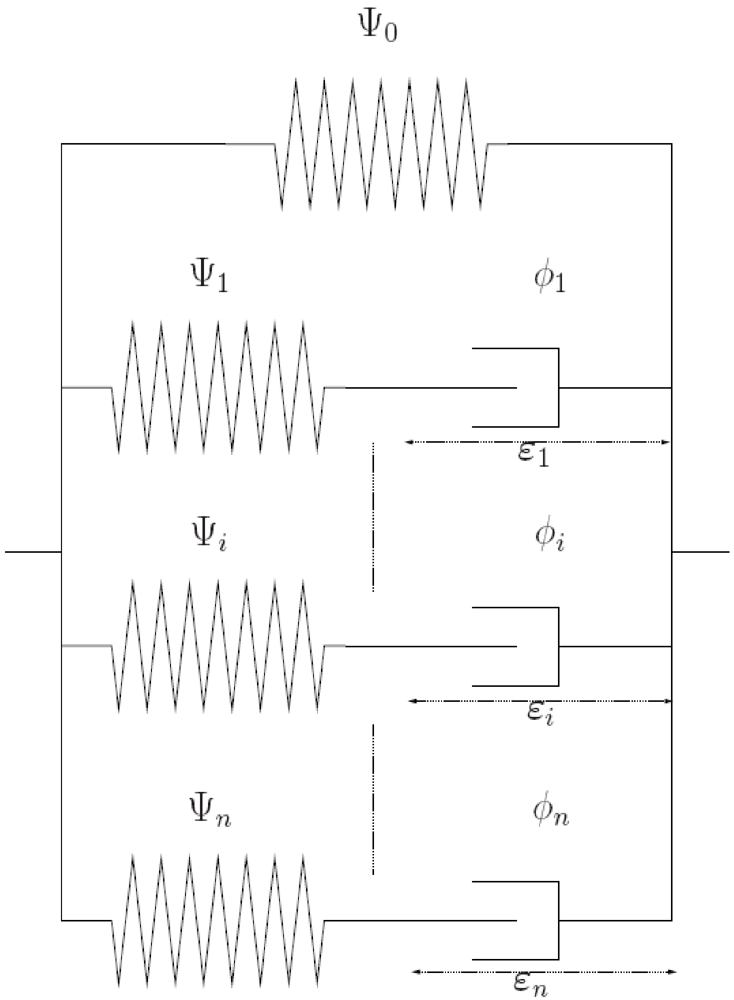
$$\begin{cases} \text{Module de stockage:} \quad E' = E + \dfrac{e\,\eta^2\omega^2}{e^2 + \eta^2\omega^2} \\ \text{Module de perte} \quad E'' = \dfrac{e^2\eta\,\omega}{e^2 + \eta^2\omega^2} \end{cases}$$



Modèles rhéologiques en viscoélasticité

- Modèle de Maxwell généralisé (En 1D)

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \rho_0 \Psi(\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n) & = & \rho_0 \Psi_0(\varepsilon) & + & \sum_{i=1}^{n} \rho_0 \Psi_i(\varepsilon, \varepsilon_i) \\ & = & \frac{1}{2} E\, \varepsilon^2 & + & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e_i\, (\varepsilon - \varepsilon_i)^2 \\ \phi(\dot{\varepsilon}_1, \ldots \dot{\varepsilon}_i \ldots, \dot{\varepsilon}_n) & = & & & \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\dot{\varepsilon}_i) \\ & = & & & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\, \eta_i \dot{\varepsilon}_v^2 \end{array}\right.$$

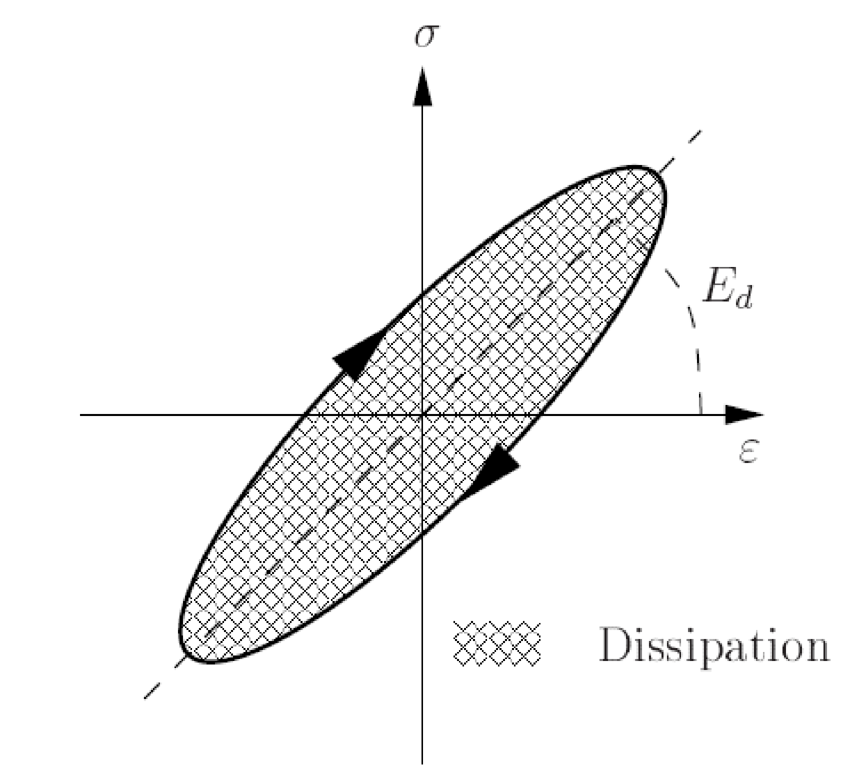


$$\boxed{\left\{\begin{array}{lclcl} \sigma & = & \sigma_0 & + & \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \\ & = & E\, \varepsilon & + & \sum_{i=1}^{n} e_i\, (\varepsilon - \varepsilon_i) \\ 0 & = & \eta_i\, \dot{\varepsilon}_i & - & e_i\, (\varepsilon - \varepsilon_i) \end{array}\right.}$$

Réponse sous sollicitations harmoniques

- Généralisation

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{R}_e \left[\exp\left(j\omega t\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \sigma_0 \mathcal{R}_e \left[\exp j\left(\omega t + \delta\right)\right]$$



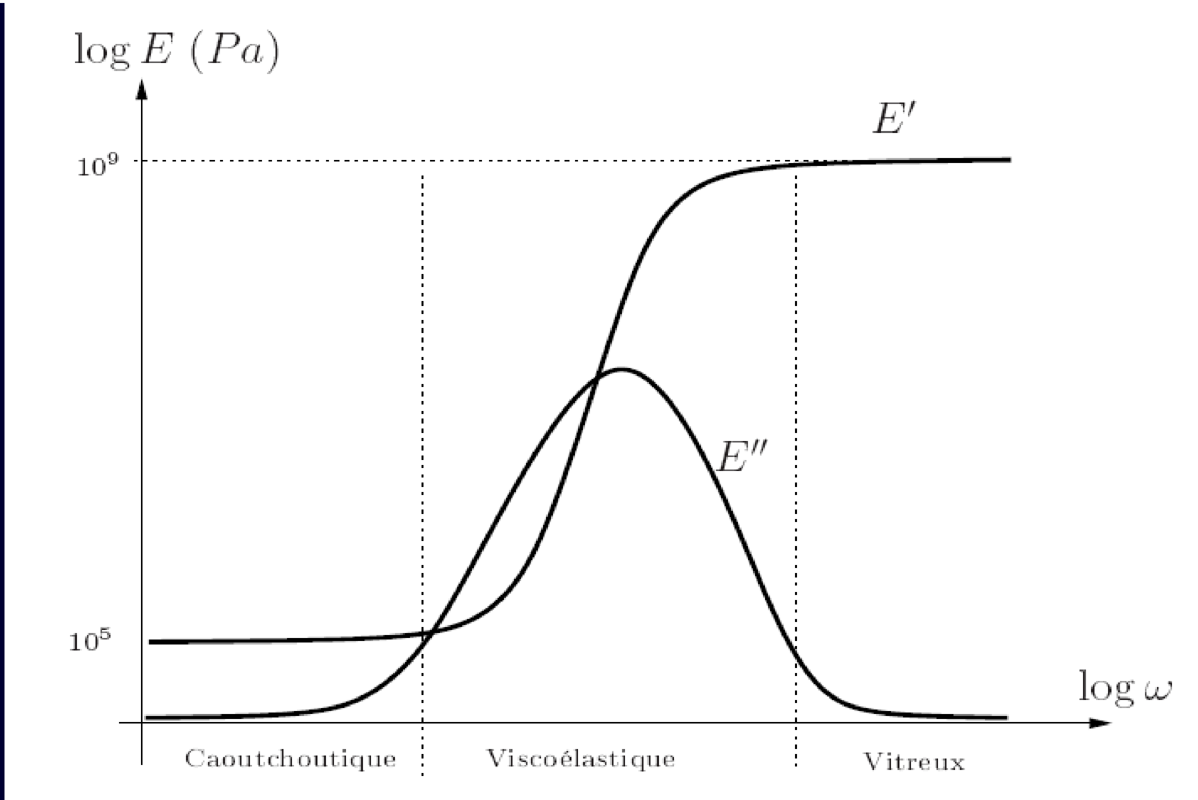
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Module dynamique:} & E_d = \sqrt{E'^2 + E''^2} \\ \text{Angle de perte} & \delta = \arctan\left(\dfrac{E''}{E'}\right) \end{array} \right.$$

Réponse sous sollicitations harmoniques

- Généralisation

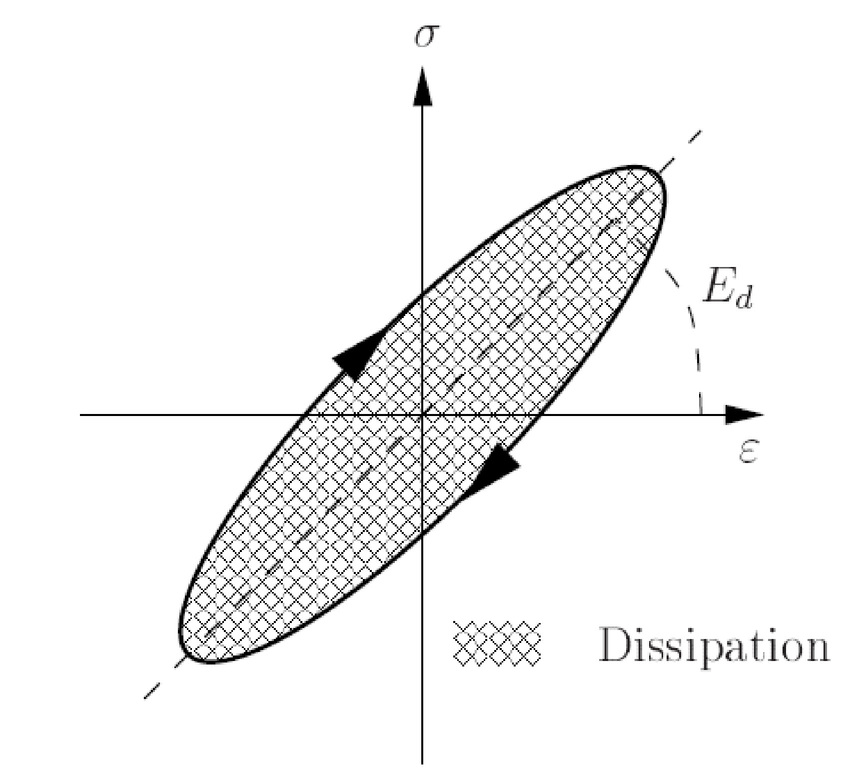
Module complexe : $\bar{E} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp(j\delta) = E' + j\,E''$

$$\begin{cases} \text{Module de stockage:} \quad E' = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos\delta \\ \text{Module de perte} \quad E'' = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin\delta \end{cases}$$



Réponse sous sollicitations harmoniques

- Généralisation



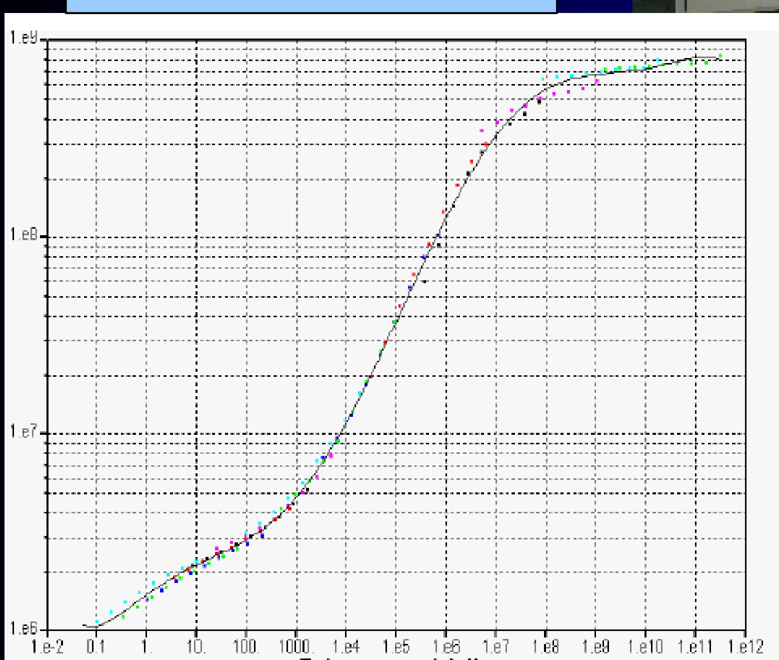
$$\boxed{\Delta W = \pi\, E''\, \varepsilon_0^2 \qquad \text{et} \qquad W = \frac{1}{2} E'\, \varepsilon_0^2}$$

$$\boxed{E' = \frac{2W}{\varepsilon_0^2}, \qquad E'' = \frac{\Delta W}{\pi \varepsilon_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{E''}{E'} = \tan\delta = \frac{\Delta W}{2\pi W}}$$

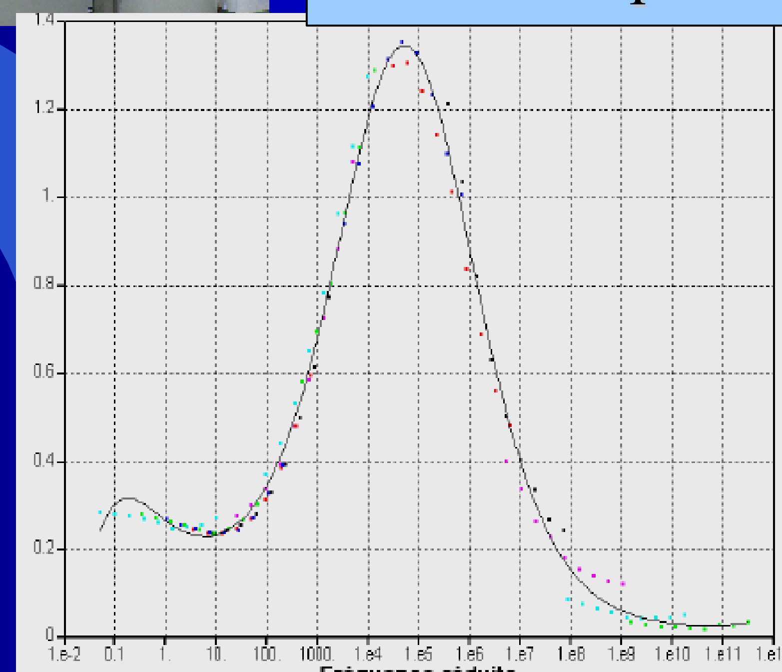
Réponse sous sollicitations harmoniques

- Caractérisation

Module

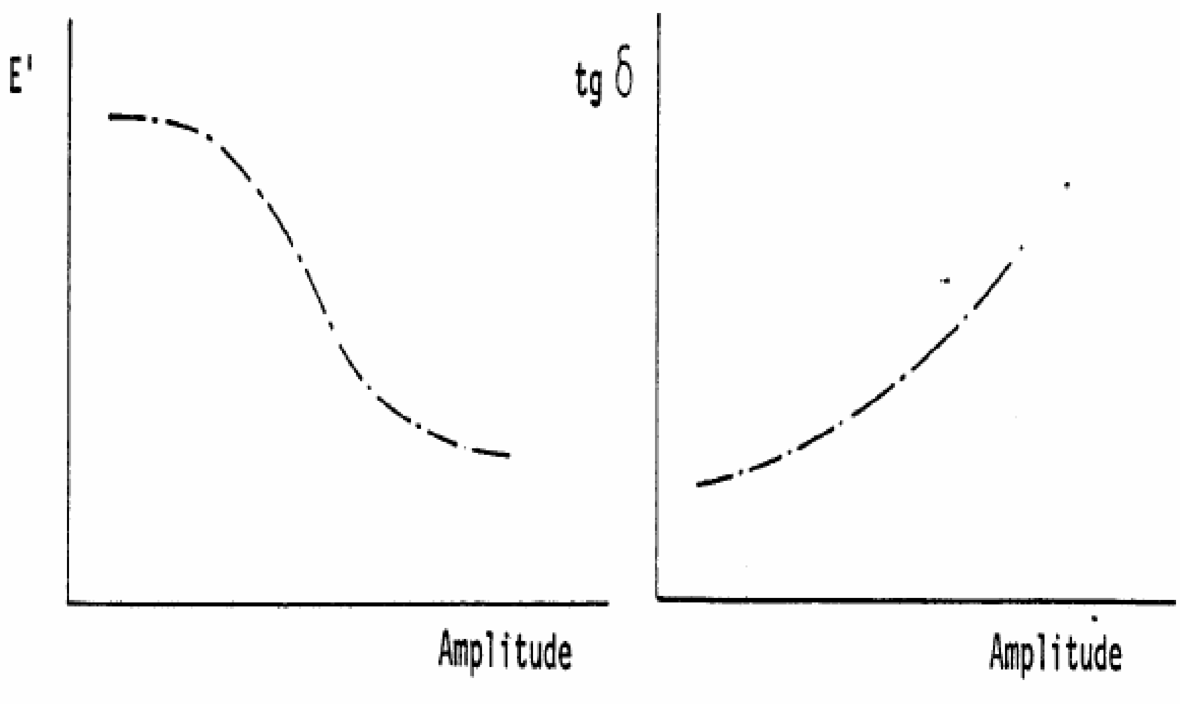


Facteur de perte



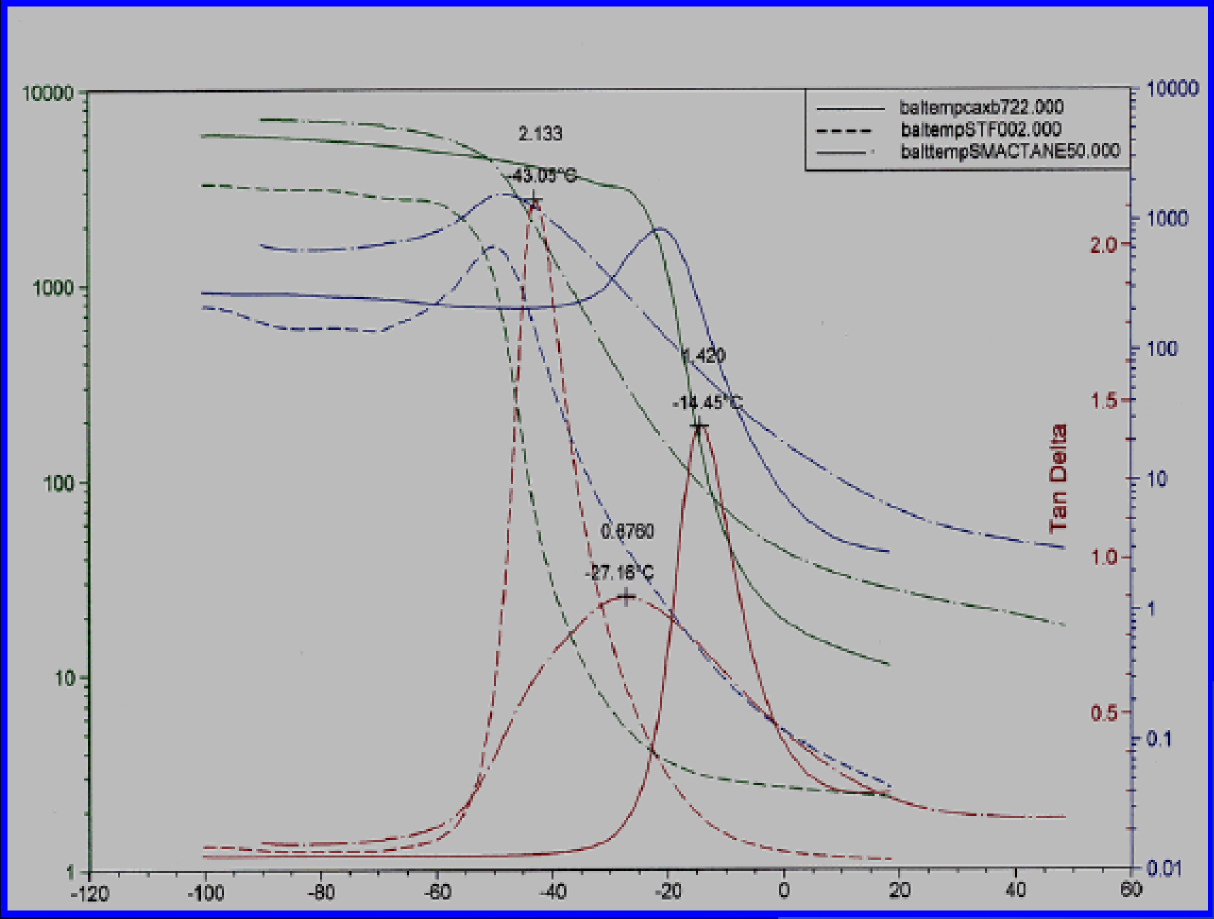
Réponse sous sollicitations harmoniques

- Influence de l'amplitude



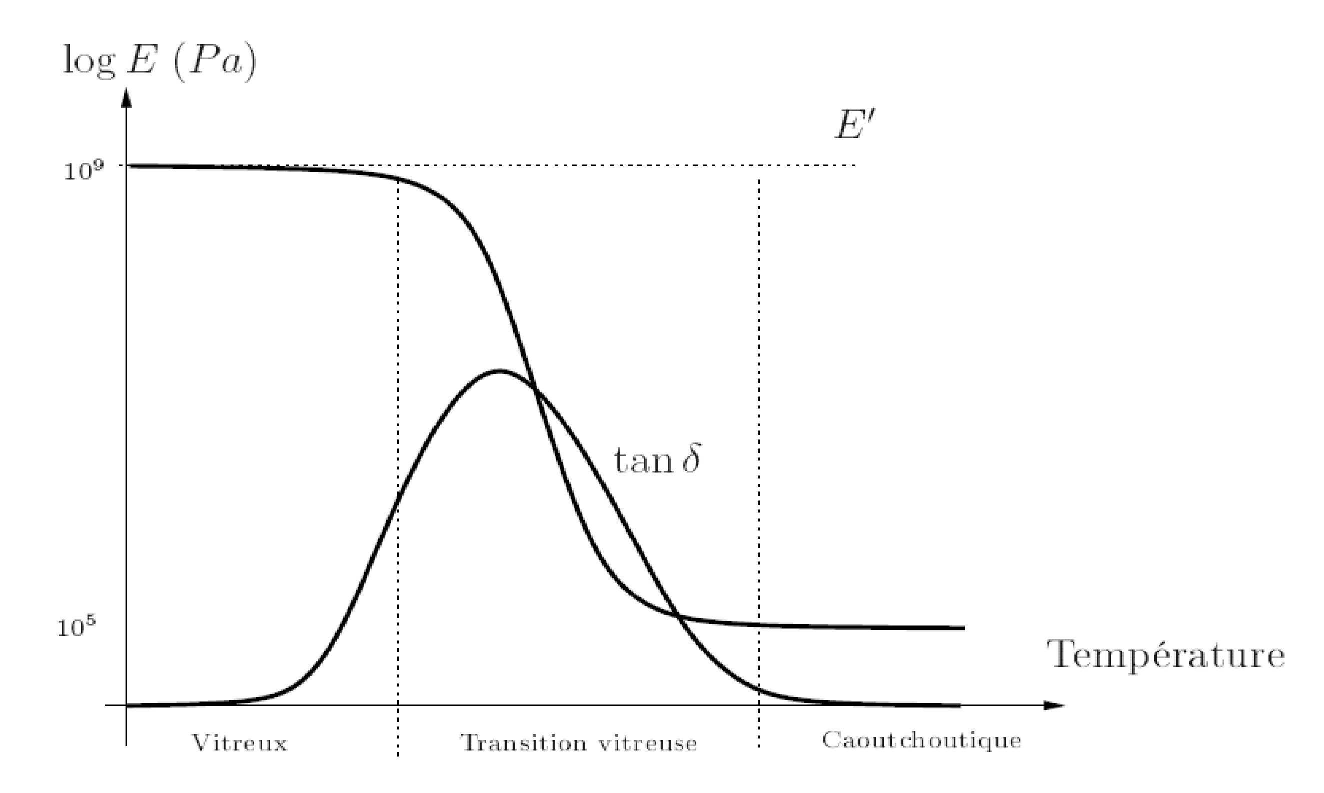
Réponse sous sollicitations harmoniques

- Influence de la température



Réponse sous sollicitations harmoniques

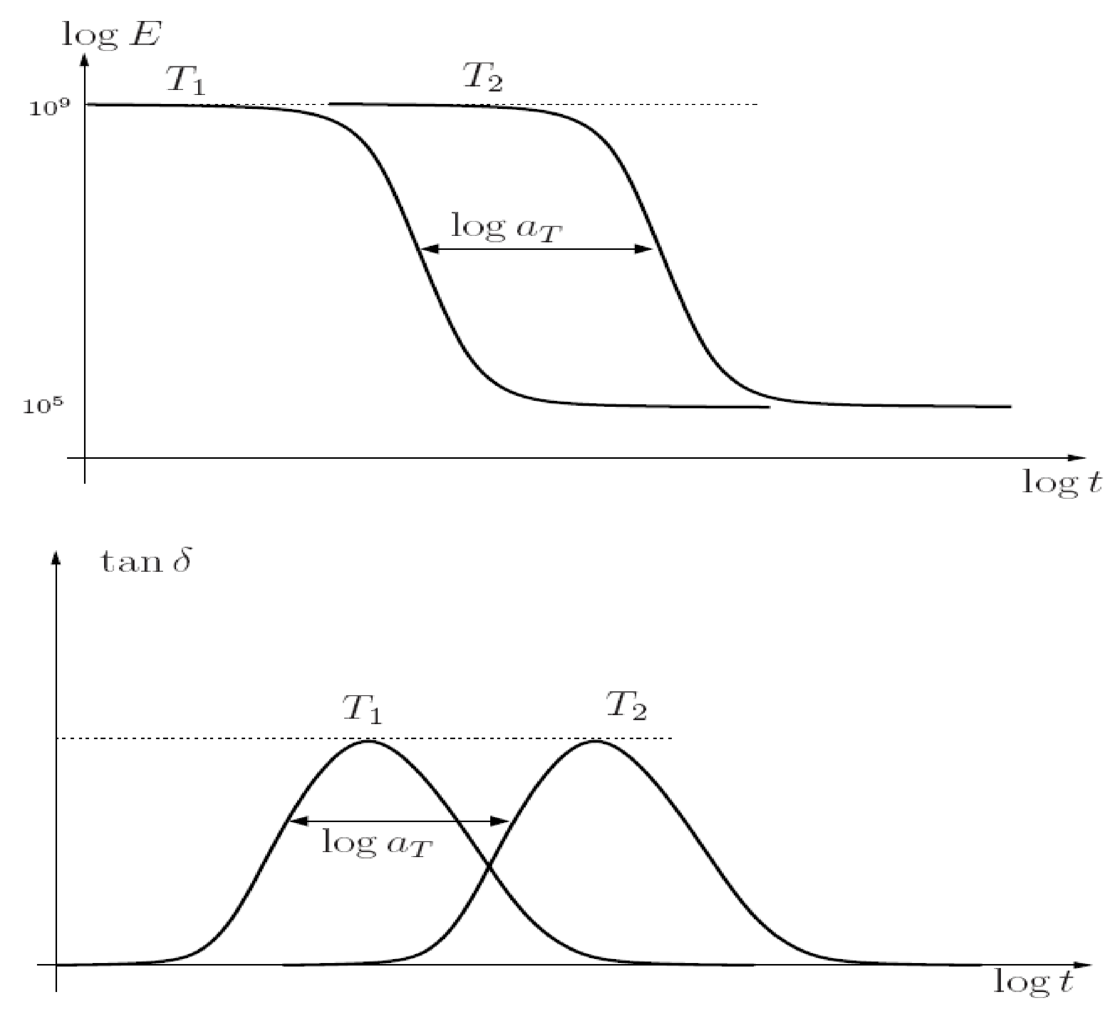
- Equivalence Temps-Température



Le comportement viscoélastique à une température donnée peut être déduit du comportement à une autre température via un changement de l'échelle du temps...

Réponse sous sollicitations harmoniques

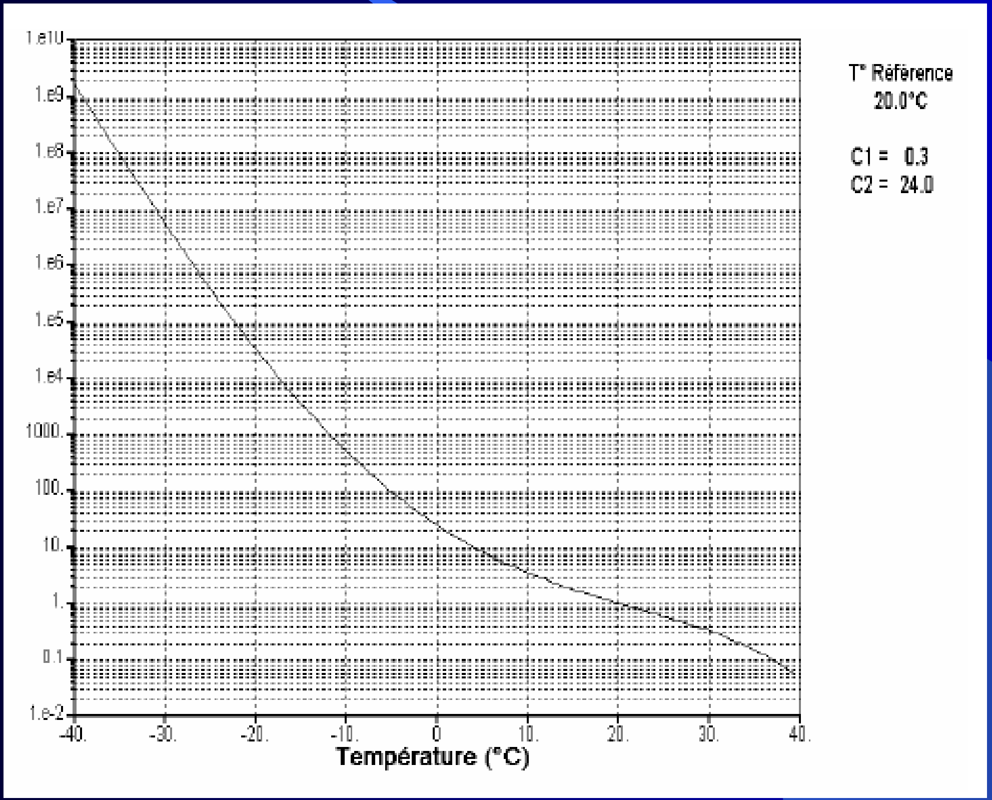
- Equivalence Temps-Température



Réponse sous sollicitations harmoniques

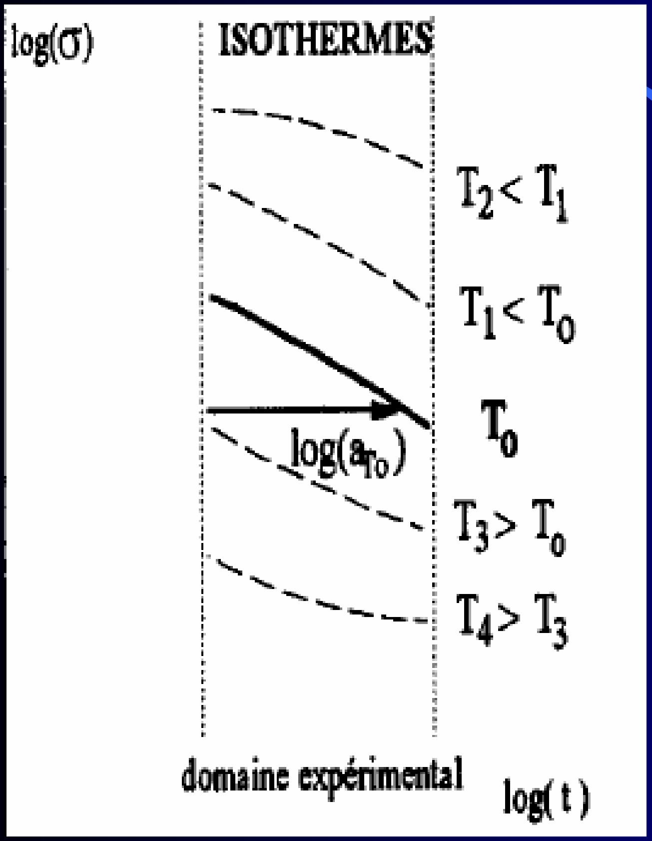
- Equivalence Temps-Température

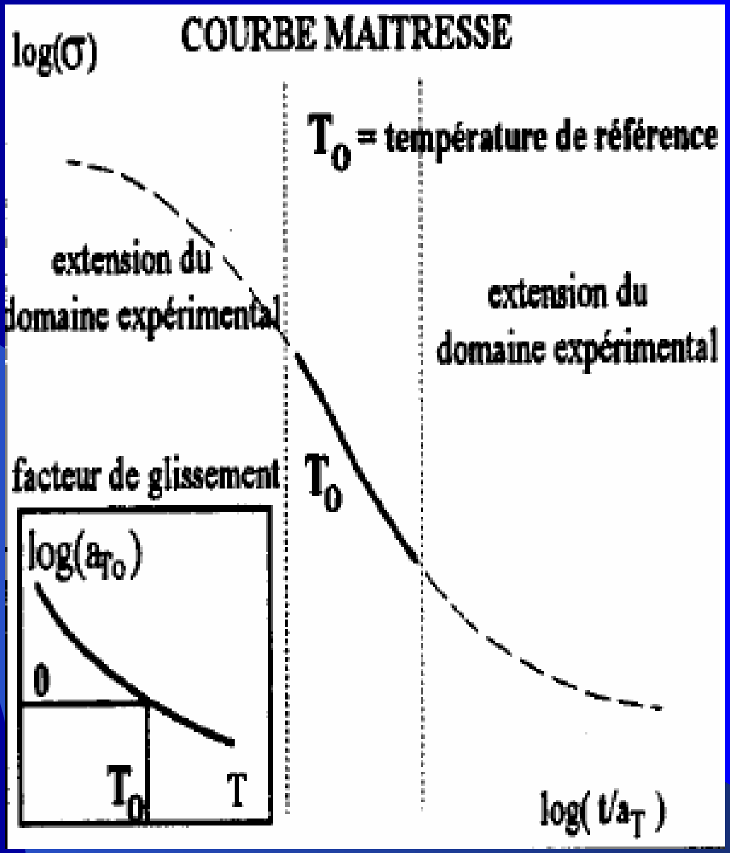
Facteur de décalage: $$\log a_T = \frac{C_1 (T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)}$$



Réponse sous sollicitations harmoniques

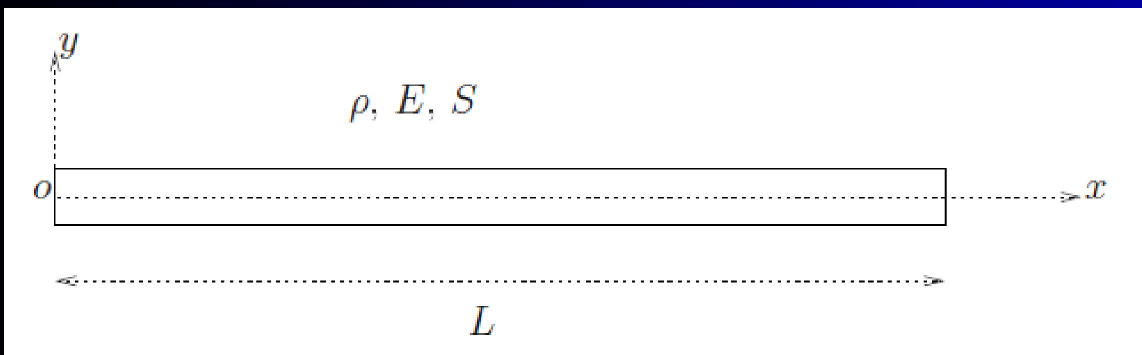
- Equivalence Temps-Température
  - Méthodologie





Propagation d'ondes dans un milieu élastique

- Cas d'une barre élastique
  - Position du problème



$$\begin{cases} e(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,t) = \rho\, S\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \\[2ex] N(x,t) = E\, S\, e(x,t) \\[2ex] C.L. + C.I. \end{cases}$$

Equation de propagation des ondes planes élastiques en traction:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 \\[2ex] C.L. + C.I. \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

c Célérité des ondes élastiques en traction.

Solution de la forme:

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

- f définit les propagations d'ondes simples progressives.
- g définit les propagations d'ondes simples régressives.

Propagation d'ondes dans un milieu élastique

- Cas d'une barre élastique
  - Ondes stationnaires

$$u(x,t) = X(x)\,Y(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{Y''(t)}{Y(t)} = Cste \quad \text{nécessairement négative} \quad (= -k^2)$$

$$\begin{cases} X"(x) + k^2\,X(x) = 0 \\ \\ Y"(t) + \omega^2\,Y(t) = 0 \qquad\qquad \text{avec} \quad \omega = k\,c \\ \\ C.L. + C.I. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} u(x,t) = X(x)\ \exp(j\omega\,t) \\ \\ X(x) = A\sin(k\,x + \phi) \end{cases}}$$

- ω est la **fréquence des vibrations propres**
- k est le **nombre d'ondes**
- $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ est la **longueur d'ondes**

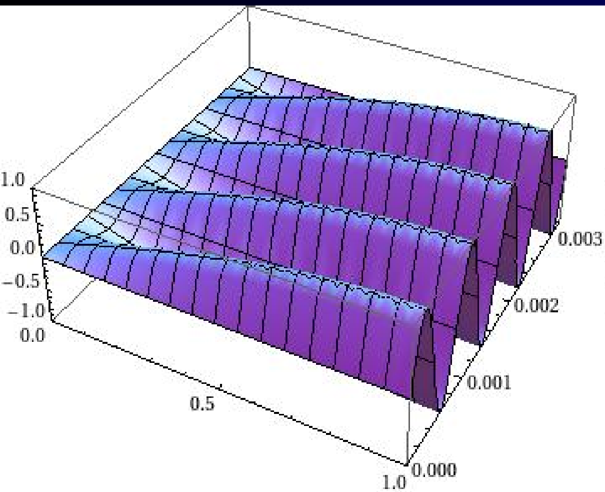
Propagation d'ondes dans un milieu élastique

- Cas d'une barre élastique

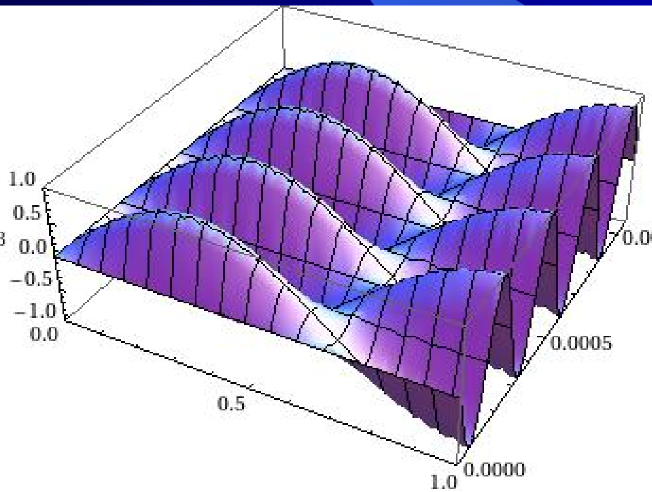
• BARRE ENCASTRÉE-LIBRE

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

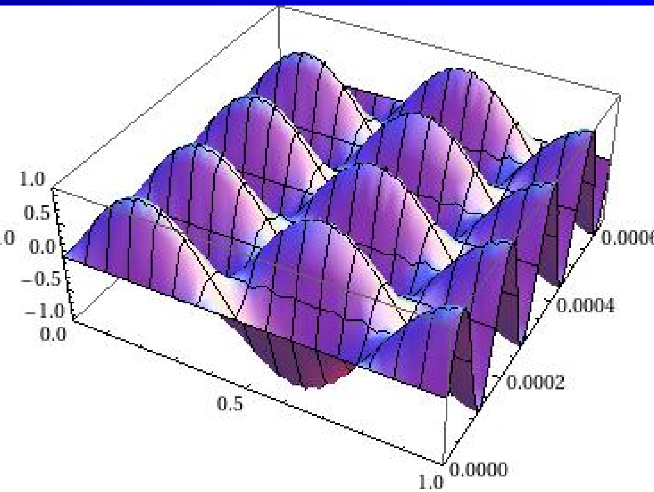
$$\boxed{u_p(x,t) = \sin(k_p\, x)\,(A_p \cos(\omega_p\, t) + B_p \sin(\omega_p\, t)) \quad \begin{cases} k_p = \dfrac{\pi}{2L}(1+2p) \\ \omega_p = \dfrac{\pi}{2L}c(1+2p) = \dfrac{\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}(1+2p) \end{cases} \quad p \geqslant 0}$$



p=0



p=1



p=2

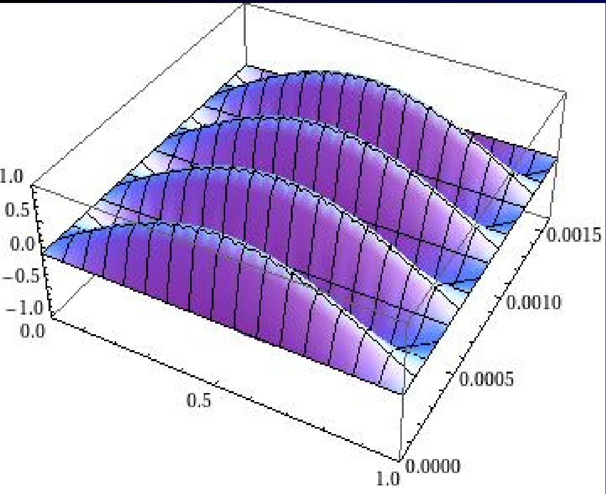
Propagation d'ondes dans un milieu élastique

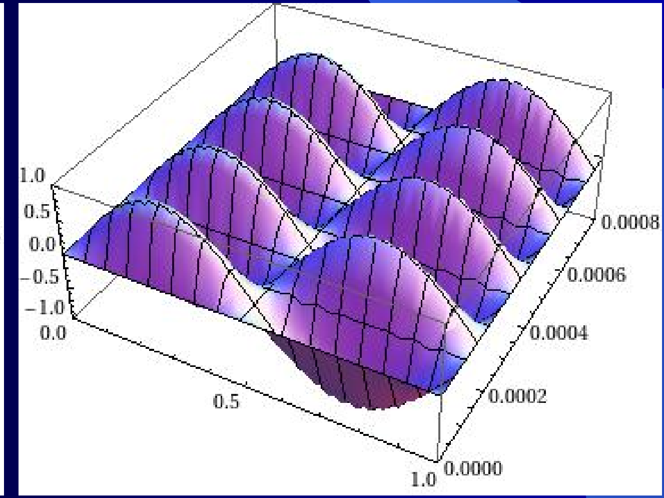
- Cas d'une barre élastique

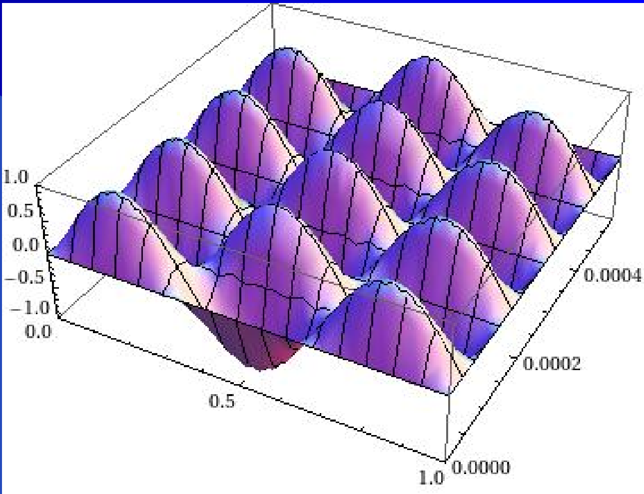
• Barre encastrée-encastrée

$$u(0,t)=0 \qquad \text{et} \qquad u(L,t)=0$$

$$\boxed{u_p(x,t)=\sin(k_p\,x)\,(A_p\cos(\omega_p\,t)+B_p\sin(\omega_p\,t)) \quad \begin{cases} k_p = p\dfrac{\pi}{L} \\ \omega_p = p\dfrac{\pi}{L}c = p\dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} \end{cases} \quad p \geqslant 1}$$







p=1 p=2 p=3

Propagation d'ondes dans un milieu visco-élastique

- Cas d'une barre visco-élastique
  - Position du problème

En considérant le **modèle visco-élastique de** KELVIN-VOIGT:

$$\begin{cases} e(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,t) = \rho\, S\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \\[2ex] N(x,t) = E\, S \left(e(x,t) + \tau\, \dfrac{\partial e}{\partial t}(x,t) \right) \\[2ex] C.L. + C.I. \end{cases}$$

Equation de propagation des ondes planes en traction:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \tau \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x,t) - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 \\[2ex] C.L. + C.I. \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{\eta}{E}$$

c Célérité des ondes élastiques en traction.

τ temps caractéristique de retard.

Propagation d'ondes dans un milieu visco-élastique

- Cas d'une barre élastique
  - Ondes stationnaires

$$u(x,t) = X(x)\,Y(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{Y''(t)}{Y(t)+\tau Y'(t)} = -k^2$$

$$\begin{cases} X''(x) + k^2\,X(x) = 0 \\ \\ Y''(t) + \omega^2\,(\tau Y'(t) + Y(t)) = 0 \qquad \text{avec} \quad \omega = k\,c \\ \\ C.L. + C.I. \end{cases}$$

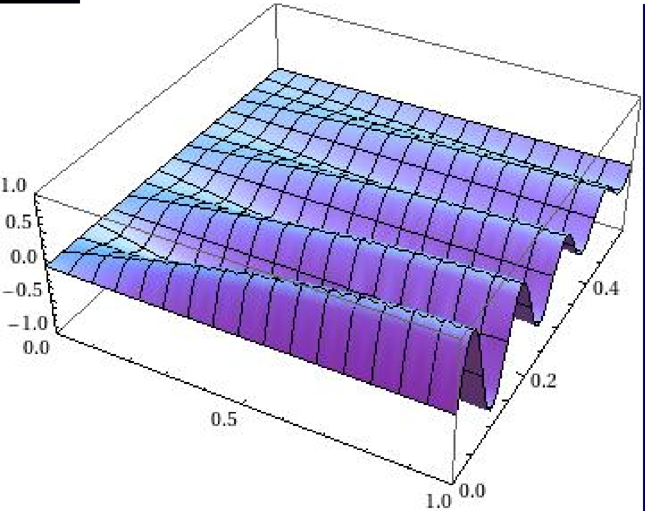
$$\boxed{\begin{cases} X(x) = A\sin(k\,x+\phi) \\ \\ Y(t) = e^{-r\,t}\,(B\cos(\bar\omega\,t) + C\sin(\bar\omega\,t)) \quad \text{si } \omega\tau < 2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \dfrac{\omega^2\tau}{2} \\ \\ \bar\omega = \dfrac{\omega}{2}\sqrt{4-\tau^2\omega^2} \end{cases} \end{cases}}$$

Propagation d'ondes dans un milieu visco-élastique

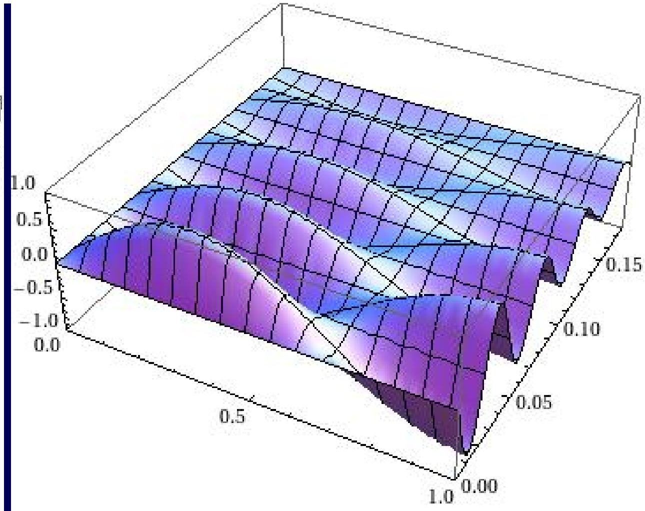
• BARRE ENCASTRÉE-LIBRE

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

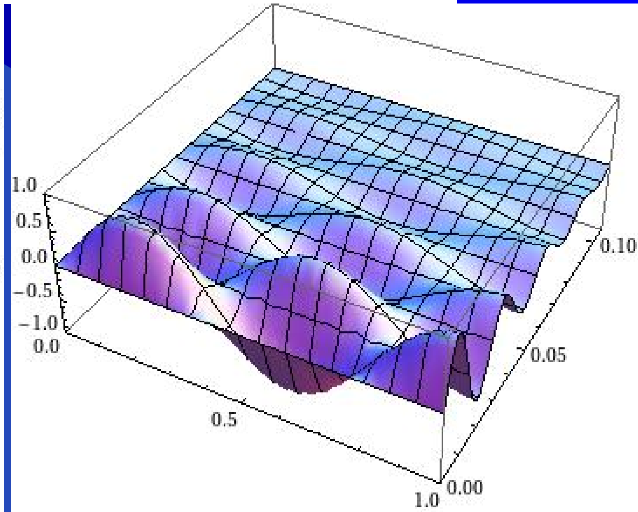
$$u_p(x,t) = \sin(k_p\, x)\left[e^{-r_p\, t}\left(B_p \cos(\bar{\omega}_p\, t) + C_p \sin(\bar{\omega}_p\, t)\right)\right] \qquad \begin{cases} k_p = \dfrac{\pi}{2L}(1+2p) \\ \omega_p = \dfrac{\pi}{2L} c(1+2p) \\ r_p = \dfrac{\omega_p^2 \tau}{2} \\ \bar{\omega}_p = \frac{\omega_p}{2}\sqrt{4 - \tau^2 \omega_p^2} \end{cases} \qquad p \geqslant 0$$



p=0



p=1



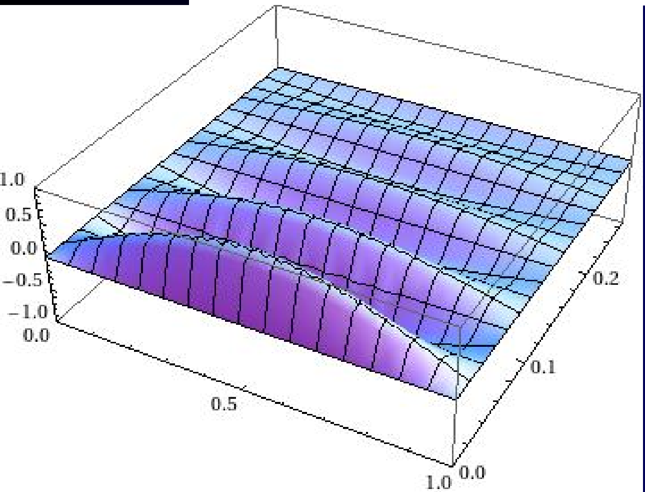
p=2

Propagation d'ondes dans un milieu visco-élastique

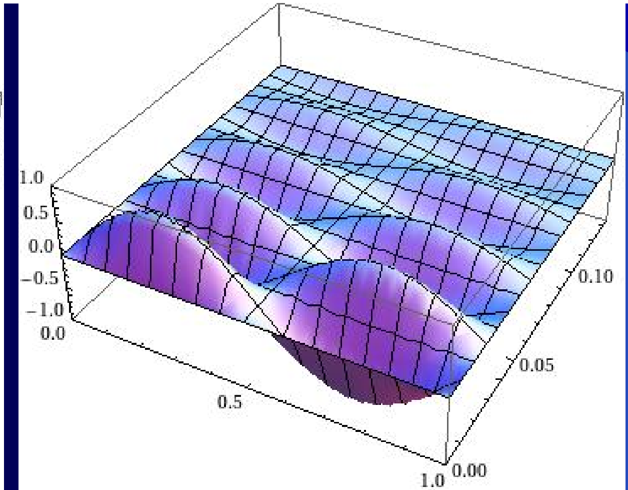
- BARRE ENCASTRÉE-ENCASTRÉE

$u(0,t)=0 \quad \text{et} \quad u(L,t)=0$

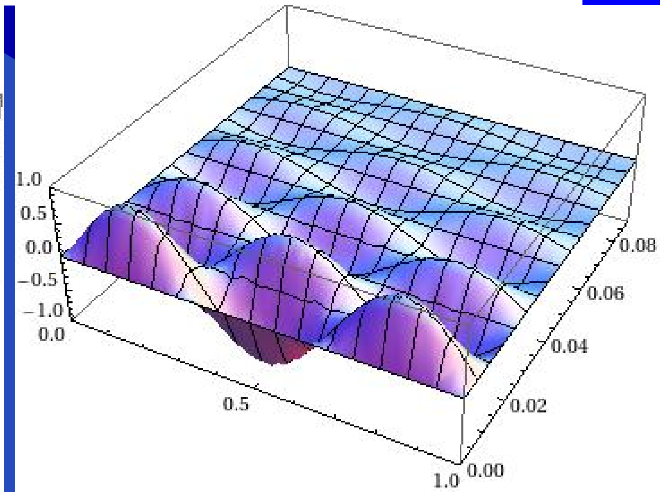
$$u_p(x,t)=\sin(k_p\, x)\left[e^{-r_p\, t}\left(B_p\cos(\bar{\omega}_p\, t)+C_p\sin(\bar{\omega}_p\, t)\right)\right] \quad \begin{cases} k_p = p\dfrac{\pi}{L} \\ \omega_p = p\dfrac{\pi}{L}c \\ r_p = \dfrac{\omega_p^2\tau}{2} \\ \bar{\omega}_p = \frac{\omega_p}{2}\sqrt{4-\tau^2\omega_p^2} \end{cases} \quad p \geqslant 1$$



p=1



p=2



p=3

Propagation d'ondes dans un milieu élastique

- Cas tridimensionnel

Sous l'H.P.P. les équations du mouvement en déplacement, pour un solide élastique:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu\, u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{k,ki}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\, \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\nabla}\,(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) = (\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\nabla}\,(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c_l^2\, \boldsymbol{\nabla}\,(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) + c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} c_l = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ \\ c_t = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} \end{cases}$$

- c_l célérité des ondes longitudinales.
- c_t célérité des ondes transversales.

Propagation d'ondes dans un milieu élastique

- Cas tridimensionnel

• **Ondes planes** *Le mouvement s'effectue par ondes planes dans la direction* $\boldsymbol{e}_1$ *si les déplacements* $\boldsymbol{u}$ *sont indépendants de* x_2 *et* x_3.

Les composantes de $\boldsymbol{u}$ sont solutions de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(x,t) - \dfrac{1}{c_l^2}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(x,t) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}(x,t) - \dfrac{1}{c_t^2}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(x,t) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}(x,t) - \dfrac{1}{c_t^2}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(x,t) = 0 \end{cases}$$

Propagation d'ondes dans un milieu visco-élastique de Kelvin-Voigt

- Cas tridimensionnel

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \left(u_{i,jj} + \tau u_{i,jjt}\right) + (\lambda + \mu)(u_{k,ki} + \tau u_{k,kit})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}\left(\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u} + \tau \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t})\right) - \mu \;\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{u} + \tau \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c_l^2\, \boldsymbol{\nabla}\left(\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u} + \tau \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t})\right) + c_t^2 \;\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{u} + \tau \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{cases} c_l = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\[2ex] c_t = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} \end{cases}$$