



8INF870 - Algorithmique

Problème du voyageur de commerce (TSP)

Aurélien CHEVALLEREAU - Nicolas DEBEAULIEU



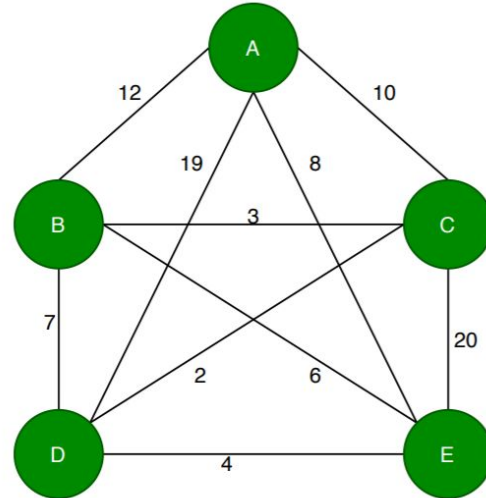
Présentation du problème

Énoncé simplifié : Un voyageur de commerce doit visiter une et une seule fois un nombre fini de villes et revenir à son point d'origine. Trouvez l'ordre de visite des villes qui minimise la distance totale parcourue par le voyageur.

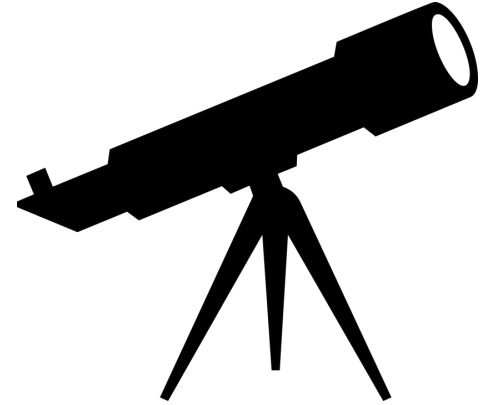
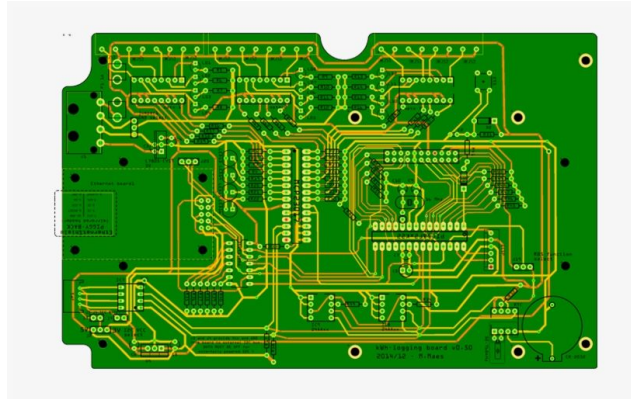
Approche mathématique :

Graphe $G = (S, A, \omega)$

=> plus court cycle hamiltonien dans G



Applications pratiques



Complexité du problème

Le TSP est NP-Difficile tandis que sa version décisionnelle est NP-complète.

- Complexité en temps : **$O(n!)$**
- Programmation dynamique => **$O(n^2 2^n)$**

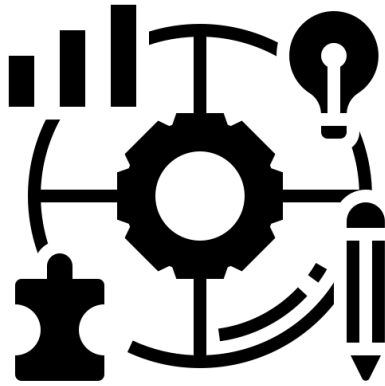
Nombre de chemins candidats en fonction du nombre de villes

| Nombre de villes n | Nombre de chemins candidats $\frac{1}{2}(n-1)!$ |
|----------------------|-------------------------------------------------|
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |
| 5 | 12 |
| 6 | 60 |
| 7 | 360 |
| 8 | 2 520 |
| 9 | 20 160 |
| 10 | 181 440 |
| 15 | 43 589 145 600 |
| 20 | $6,082 \times 10^{16}$ |
| 71 | $5,989 \times 10^{99}$ |

Revue de méthodes de résolution

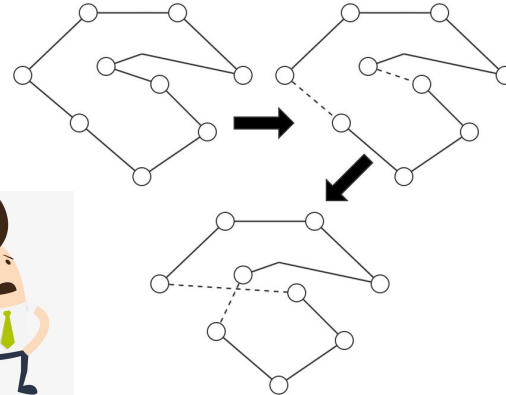
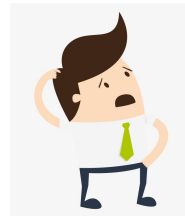
Méthodes exactes :

- Meilleure permutation
- Algorithme de Bellman-Held-Karp
- Algorithme des plans sécants



Méthodes par heuristiques:

- Heuristique du voisin le plus proche
- Heuristique par insertion
- Algorithmes génétiques
- Heuristique de Lin-Kernighan



Présentation détaillée de deux méthodes

Ant Colony Optimization

1 - Une colonie de fourmis dans la vraie vie

Caractéristiques :

- Nombreux spécimens
- Traverse tout son environnement
- Se repère via des traces de **phéromones**

Description :

- Insecte social
- **Intelligence collective**
- Intelligence individuelle



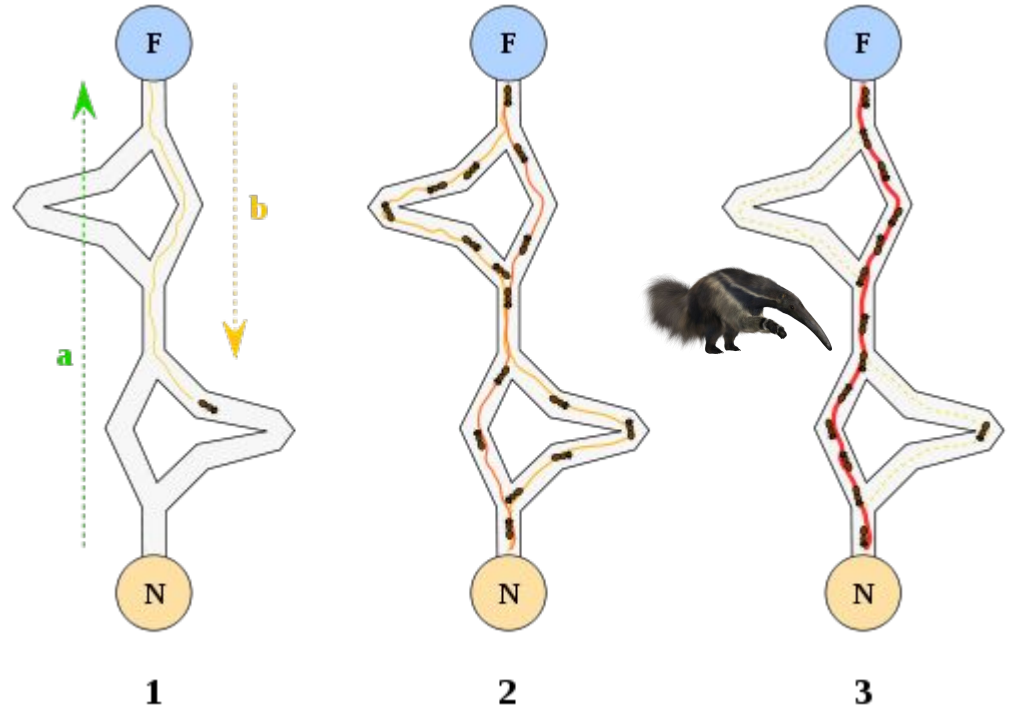
Ant Colony Optimization

2 - Les phéromones

Explications :

Les phéromones sont des substances chimiques laissées par les fourmis sur le chemin qu'elle emprunte. La quantité de phéromone est un repère pour les fourmis de la colonie.

Comment représenter ces données ?



Ant Colony Optimization

2 - Représentation

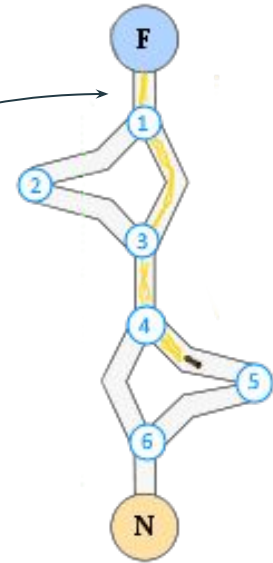
Intelligence collective :

- Phéromones attachées aux arêtes de notre graphe (jaune)

Intelligence individuelle :

- Heuristique basée sur la distance (par exemple la distance euclidienne)

| /// | F | 1 | 2 | 3 | ... |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| F | 0 | 0.1 | 0 | 0 | ... |
| 1 | 0.1 | 0 | 0.4 | 0.3 | ... |
| 2 | 0 | 0.4 | 0 | 0.4 | ... |
| 3 | 0 | 0.3 | 0.4 | 0 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |



Ant Colony Optimization

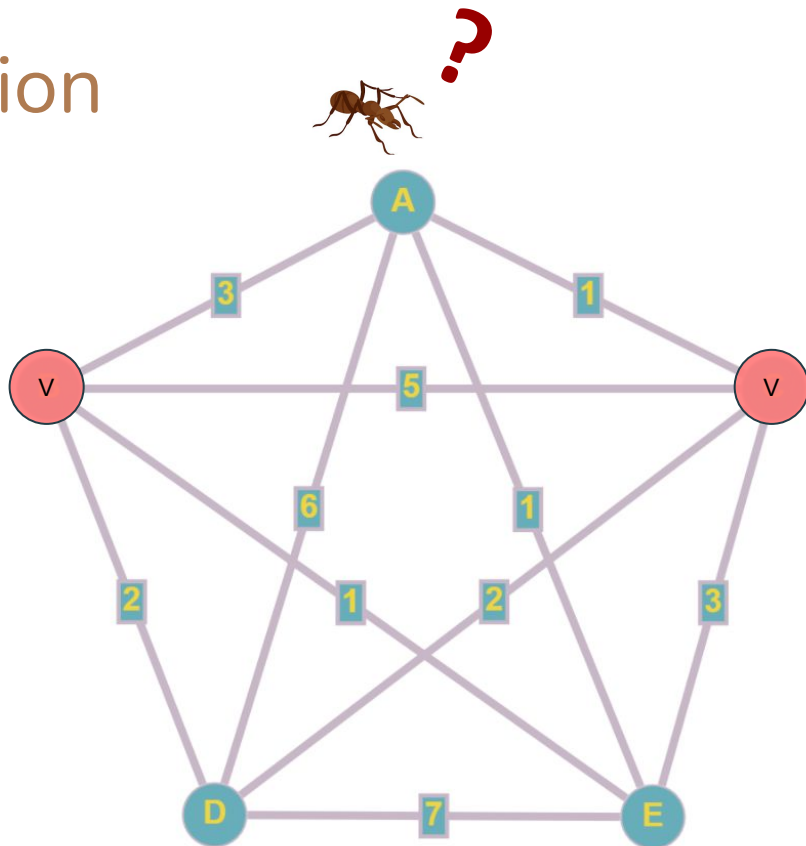
2 - Représentation

Intelligence collective :

- La fourmi applique des phéromones à la fin ou durant son tour dans l'environnement

Intelligence individuelle :

- La fourmi prend une décision lorsque plusieurs chemins s'offrent à elle



Ant Colony Optimization

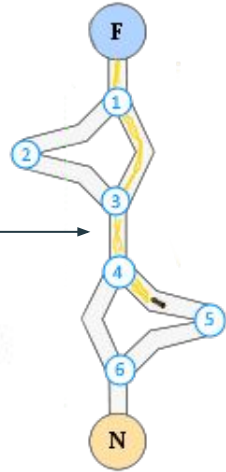
2 - Représentation

Intelligence collective :

- rho ρ : dissipation des phéromones
- tau τ : valeur de phéromone
- k : fourmi

$$\tau_{ij}(t + 1) = (1 - \rho)\tau_{ij}(t) + \sum_k^n \Delta\tau_{ij}^k(t)$$

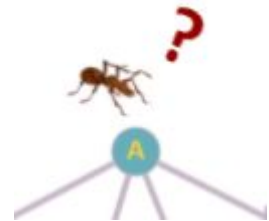
T_{34}



Intelligence individuelle :

- a : exposant de la composante phéromones
- b : exposant de la composante heuristique
- p : la probabilité

$$p_{ij}^k = \frac{[\tau_{ij}(t)]^a [\eta_{ij}]^b}{\sum_{l \in d_k} [\tau_{il}(t)]^a [\eta_{il}]^b}$$



Ant Colony Optimization

2 - Représentation

Intelligence collective :

- rho ρ : dissipation des phéromones
- tau τ : la valeur de phéromone
- k : fourmi

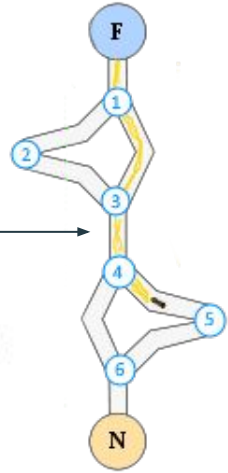
Remarque :

Le calcul des phéromones déposées par la fourmi est une question de stratégie :

- Calcul en fin de parcours
- Calcul durant le parcours

$$\tau_{ij}(t + 1) = (1 - \rho)\tau_{ij}(t) + \sum_k^n \Delta\tau_{ij}^k(t)$$

T_{34}

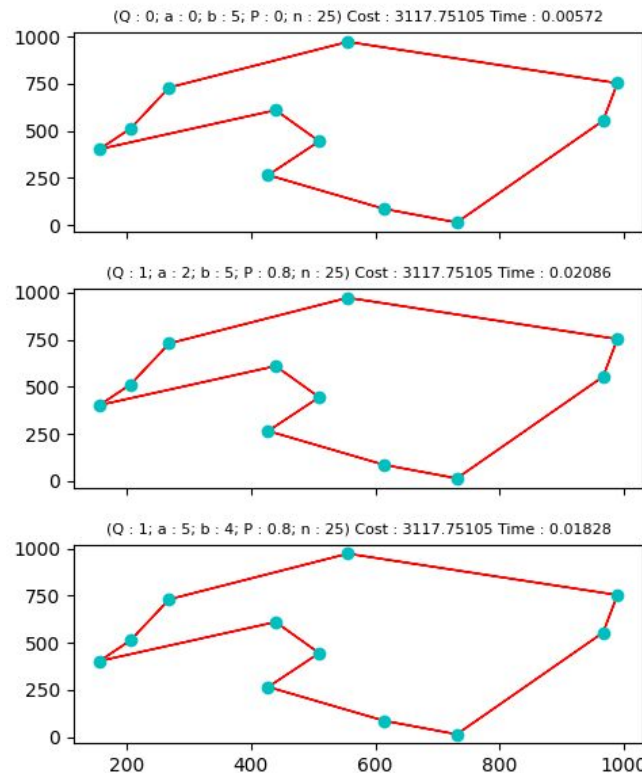


$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \frac{Q}{L_k}$$

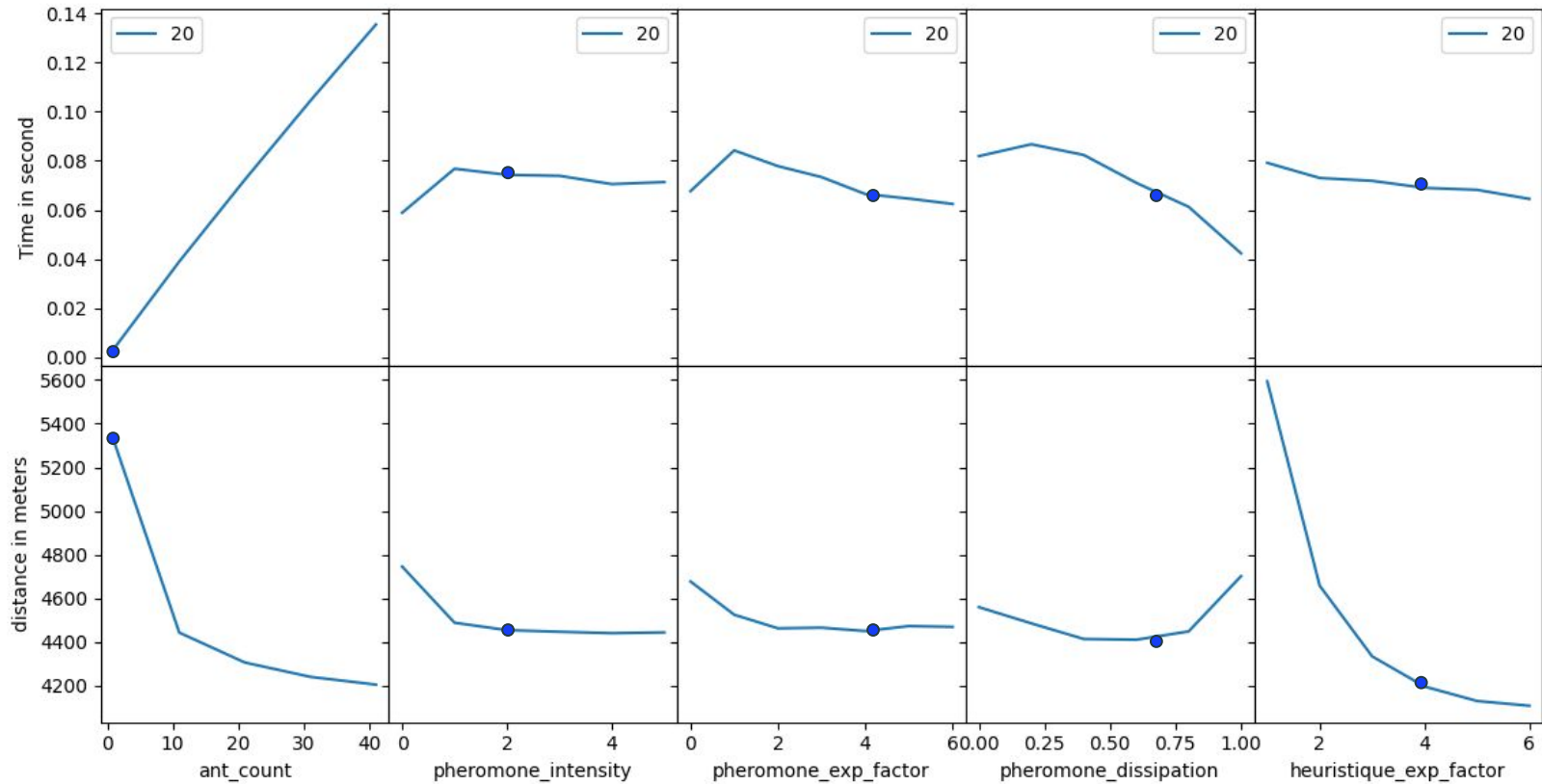
Pour aller un peu plus loin

Trouver les bons paramètres pour une colonie de fourmis

- Nombre de fourmis **n** ?
 - exposant de l'heuristique **b** ?
 - exposant des phéromones **a** ?
 - Constante de phéromone **Q** ?
 - Nombre de cycle optimal ?
 - Facteur de dissipation des phéromones **p** ?
-
- Meilleure stratégie pour déposer les phéromones ?

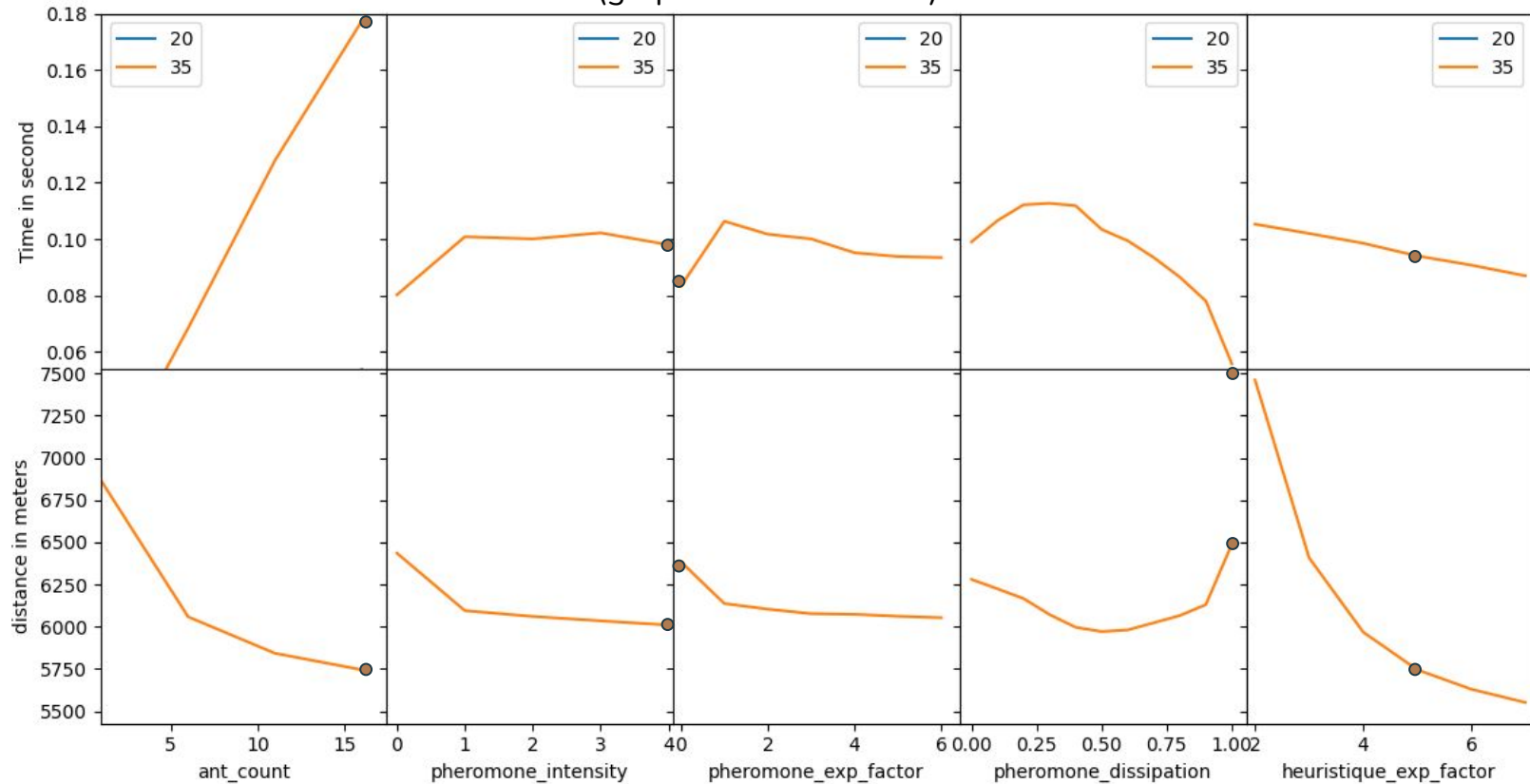


Influence des paramètres sur la durée de calcul et sur la meilleure distance (graphe à 20 sommets)



```
points = 20 : ([1, 2, 4, 0.7000000000000001, 4], [3607.220277418157, 0.0036512999999958])
```

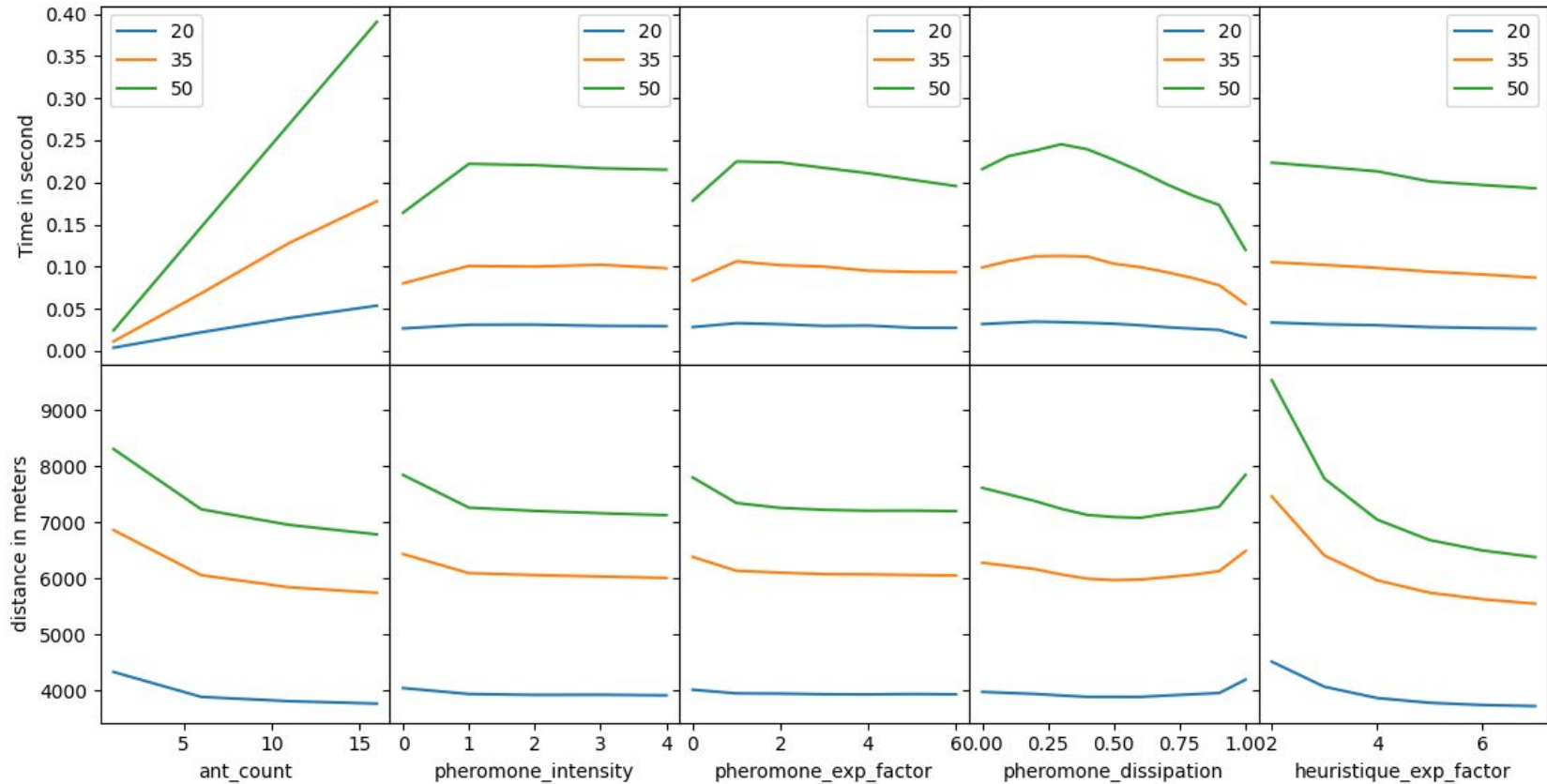
Influence des paramètres sur la durée de calcul et sur la meilleure distance (graphe à 35 sommets)



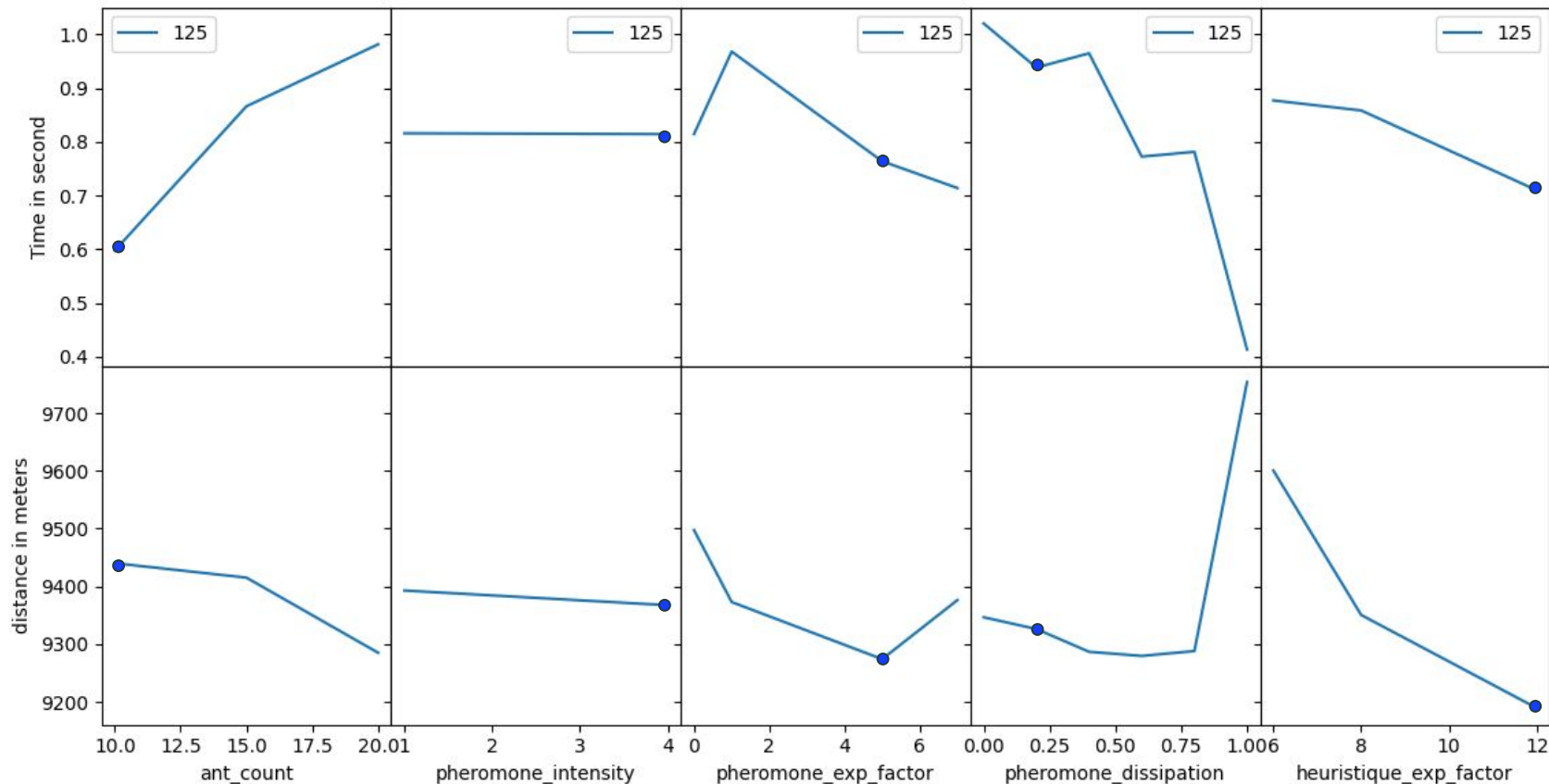
```
points = 35 : ([16, 4, 1, 1.0, 5], [4986.549023985952, 0.2197324999999637])
```

Influence des paramètres sur la durée de calcul et sur la meilleure distance

(graphe à 20/35/50 sommets)



Influence des paramètres sur le temps de calcul et sur la meilleure distance (graphe à 125 sommets)



```
points = 125 : ([10, 4, 5, 0.2, 12], [8739.861858042908, 0.2300845000000038])
Moyenne pour un configuration heuristique à 12 : [9954.794495504464, 0.2011035199999999]
```

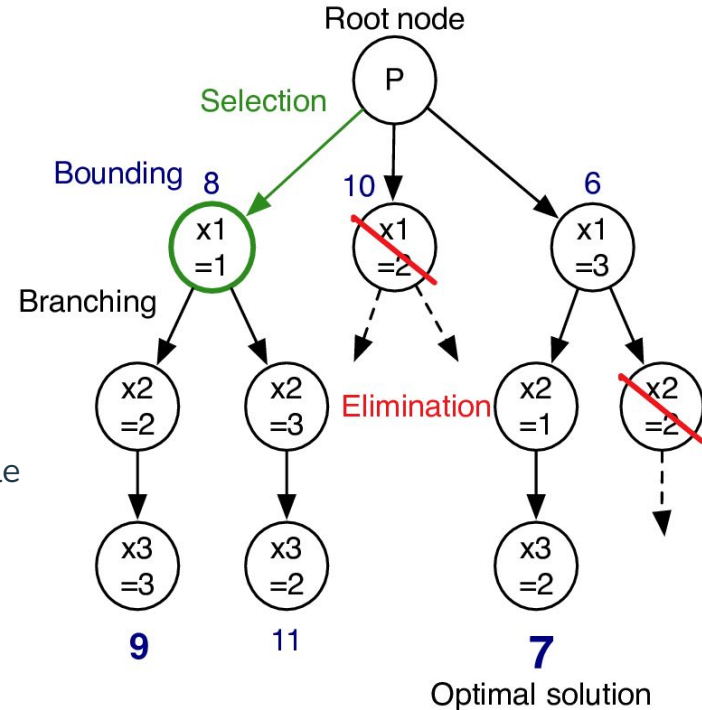
Branch and bound

1 - Description générale

- Enumérer des solutions intelligemment
- Fonction de sélection
- Structure d'arbre

Deux éléments principaux pour le TSP :

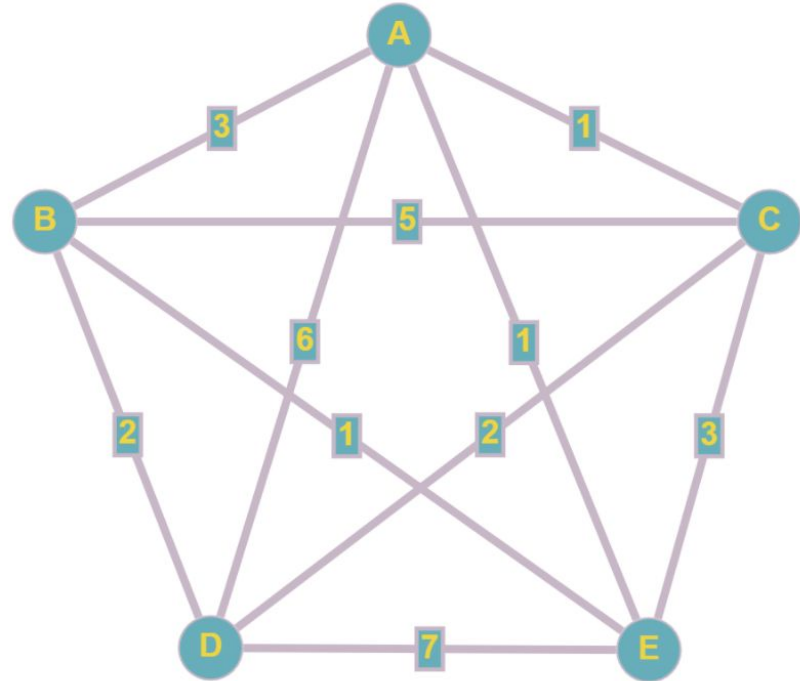
- Une borne inférieure pour chaque solution partielle
- Une stratégie de subdivision de l'espace



Branch and Bound

2 - Application au problème du TSP

- Point de départ : **sommet A**
- Borne inférieure pour chaque solution : v



Branch and Bound

Choix de la fonction de sélection :

Soit le cycle hamiltonien suivant : $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1} = u_1$. Alors, quelque soit la solution, le coût de ce cycle est supérieur à :

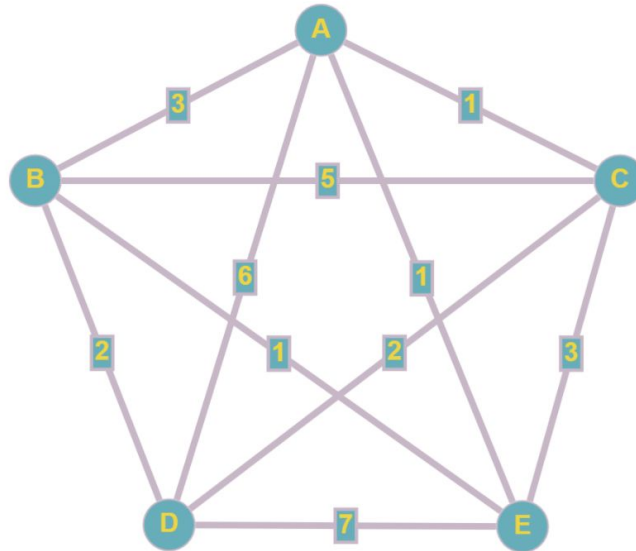
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\text{arc} - u_{i_1} + \text{arc} - u_{i_2})$$

où $\text{arc} - u_{i_1}$ et $\text{arc} - u_{i_2}$ représentent les deux arcs adjacents au sommet i ayant le plus petit poids.

Branch and Bound

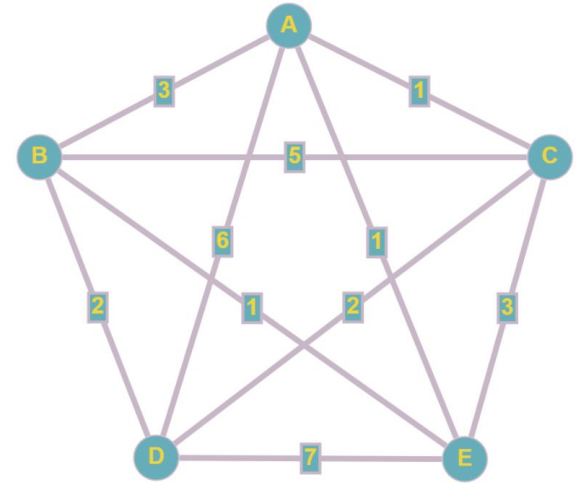
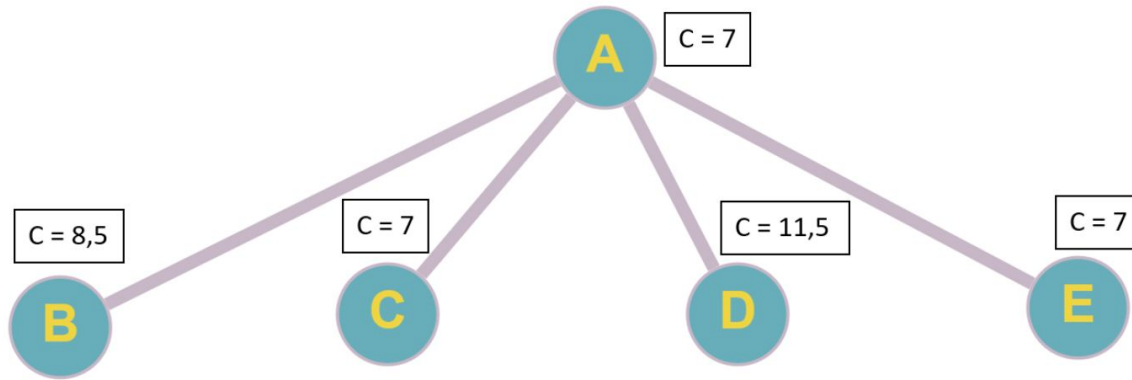
Application de la fonction de sélection :

Pour le sommet A : $\text{coût} \geq \frac{1}{2} \{(1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 2) + (2 + 2) + (1 + 1)\} = 7$



Branch and Bound

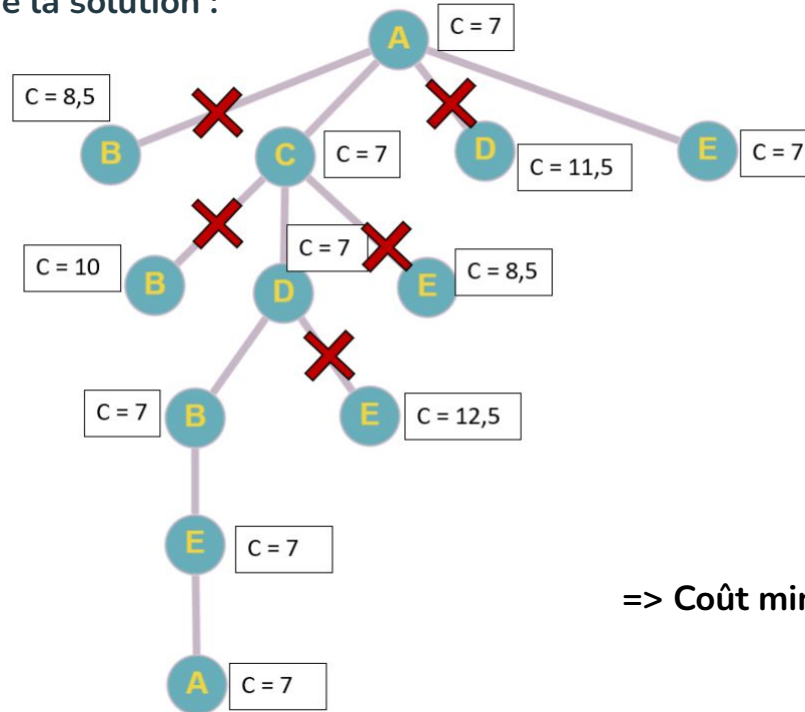
Après application aux premières solutions partielles :



Pour le sommet B : $\frac{1}{2} \{ (1 + 3) + (1 + 3) + (1 + 2) + (2 + 2) + (1 + 1) \} = 8,5$

Branch and Bound

Après exploration complète de la solution :



=> Coût minimal de la solution : 7

Comparaison des temps d'exécution

1 - Exemple d'application Branch and Bound (n = 5)

| Indice | Ant Colony | Branch and Bound |
|---------|------------|------------------|
| 1 | 0,29 | 2,09 |
| 2 | 0,31 | 1,03 |
| 3 | 0,39 | 1,45 |
| 4 | 1,91 | 1,23 |
| 5 | 0,59 | 2,98 |
| 6 | 0,07 | 2,40 |
| 7 | 0,83 | 1,47 |
| 8 | 0,52 | 1,04 |
| 9 | 0,71 | 1,38 |
| 10 | 0,38 | 1,66 |
| Moyenne | 0,6 ms | 1,67 ms |

Comparaison des temps d'exécution

2 - Exemple plus complexe (n = 11)

| Indice | Ant Colony time | Ant Colony Total Cost | Branch and Bound time | B&B Total Cost |
|---------|------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|
| 1 | 0,001 | 420 | 2,01 | 260 |
| 2 | 0,003 | 369 | 1,38 | 277 |
| 3 | 0,006 | 408 | 4,84 | 330 |
| 4 | 0,005 | 574 | 0,76 | 358 |
| 5 | 0,006 | 464 | 1,22 | 311 |
| 6 | 0,0009 | 440 | 5,30 | 296 |
| 7 | 0,0008 | 363 | 2,46 | 263 |
| 8 | 0,006 | 444 | 16,03 | 361 |
| 9 | 0,0007 | 450 | 6,36 | 303 |
| 10 | 0,0004 | 363 | 3,03 | 273,65 |
| Moyenne | 0,00298 s = 2,98 ms | 429,5 | 4,34 s | 275,9 |

Merci de votre attention