LUCRARE DE LABORATOR NR. 1

Tema: Analiza algoritmilor (Timpul de execuţie al algoritmilor)

Author: Basso Nicolae

For examples in this laboratory work, desired input number n is chosen based on the execution time of the program on my machine, which takes ~1 second.

Algo №1 – Recursive:

***Time Complexity:***T(n) = T(n-1) + T(n-2) which is exponential. (O(2^n));

*Extra Space:* O(n) if we consider the function call stack size, otherwise O(1);

#include <iostream>

#include <string>

#include <chrono>

using namespace std;

using namespace std::chrono;

int fibN(unsigned long long x){

    if(x <= 2)

        return 1;

    return fibN(x - 1) + fibN(x - 2);

}

int main(){

    const int n = 40;

    unsigned long long fiboNums[n] = {0, 1, 1};

    auto start = high\_resolution\_clock::now();

    fiboNums[n-1] = fibN(n);

    auto stop = high\_resolution\_clock::now();

    auto duration = duration\_cast<milliseconds>(stop - start).count();

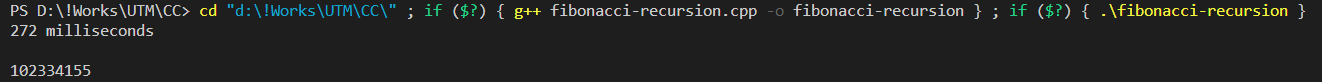
    cout << duration << " milliseconds" << "\n\n";

    cout << fiboNums[n-1];

    return 0;

}

***N=40, 272 milliseconds***

******

Algo №2 – Dynamic Programming (DP):

***Time Complexity:*** O(n);  
***Extra Space:***O(1);

#include <iostream>

#include <string>

#include <chrono>

#include "BigInteger.cpp"

using namespace std;

using namespace std::chrono;

// "Int" is a user-defined data type described in the "BigInteger.cpp" file

int main(){

    const int n = 50000;

    Int fiboNums[n] = {0, 1, 1};

    //cin >> n;

    //cout << fibN(n);

    auto start = high\_resolution\_clock::now();

    for(int i = 3; i < n; i++)

        fiboNums[i] = fiboNums[i - 1] + fiboNums[i - 2];

    auto stop = high\_resolution\_clock::now();

    auto duration = duration\_cast<milliseconds>(stop - start).count();

    /\*for(int i = 0; i < n; i++)

        cout << i << ": " << fiboNums[i] << "\n";\*/

    cout << duration << " milliseconds" << "\n\n";

    cout << fiboNums[n-1];

    return 0;

}

***N=50000, 596 milliseconds***



666100648565481205010951547560750933431950479937080994773751415475329647357449820574055869101354533179842571730518504252690058309030165957793611893184804604322634950697308315493285225827521968081167628872452768615738108939224876141123321314473270269465000697651877688322772577296187089266717271846243032342710169463007536900896948726682347470396722227545422828097990563697789828879621460065715309733855859315802250715487615816509617290450469997736430690473288367991638342872414940097748223932840620504428668520921655344430301224215692897710294618083941298394708009681899419228230959458929147242702905587860930816067641195022945573432258310501457406158453985387540996675518570815051459141923719868534748290307729399974816799507877982414057300447384236578708136869220018082040204979278639844104757994501020243076351266748128805893493483388168490769849952216805657010874821090514296406355110553853620293655313964806869929662365912232407486790482290214419052737478156102371122601126269716933969142851424928376050243479723763826825290719288650668925541910835478719090753282030915936853660001042090112056551037656921633144893206490532744723980391060344012105109041485463735778178695972346419842041360816069653760816717602148456722833643023802496324551697060976893855597905167037325153206289367148296194735202448911826351569038642836373273388438749220506838097571642903225609197374346730325128298541730100868662836408370652884683285634505652640553978383638747687616980404728716061328452648302998982054812903248737902508504748147966013614486993459268653853968661755091110112836831904518162502479003093926076241103832746864779503324612870238425655535310753031768424140386727074621268211011923361554582637672555763296766763854351892413797277286060361458119987282967951684241873325465716615261286317039991891544731713205149083895650120764948564143504675774742730781931928449575390256866738150275504189195079536502592392448642504625645222976625257159399314999623324197626795103321718324580761387037914189285639982327419211417271975071509612777714938378809871158377357033535038841919249248086467043409693138137112595014692834270711500010138506524349690071946393449648099208714463687090366864945411336246942663509789781079889019967268789357869074643331574973686481450223653389822460520183558105963223746605217997222387889751383509988082580944620464366163610679825916386927892295095374801191974096436340267734433730251299313389962413993201863403083841538686348160621073767578057926062012975065413640006600693103780549028905864574886005678966392854693541230730899811945995142389153270240354100999411437018828868859400252967613211726276446551737789380742131931227839657181988118865833480816151389108105528537216403964625087028986820520228715010685007591856614514778740893057418957567038483687071966812519841489146071253869889423050709567596610799719867036770761423744800930144446719985845639071948611549514167774740990909139060327587087707067165105903518512015008461478015071165612693027121166154673444805231514777642042786026879557204719340331591136844403791499153922402086325805819134623464621695959806096503918813601014444481497906000448189658304143531211623553079844917054983082998776950836009095453318030659296363742980120743822658798934449668379206415174607506093762182254110615681569717083211494114018772250097676725941157779174932734820568414226363304237968436842248075823282963543871105638202916945277814768864354916760621028779029538705578282925816579093772231288716013708194434438394149151491195572603314854012840149606398382269625517147771137052311883362797842053344005270594854159706295373797302632356629421276081517886019790032658026956610798949752129107805929458801027179475571809611111740758763373153476180800487503600606253740331201651721614058623392972202709529281690876761917422759364320015857427391270406331078878439305356665324344974924966088691546853401573510776119213632887236814855337852815095530230952927329556374671331803148352243251263283265128614261836045147294319819688471388326969417579904757464922708053628945150223335578551759081194695982876790011669825263518704133543095719051298714606579941128392101513434827920391242277081025094359551288317988893709534781978393945117097207076724791494616138837298981254940507843176701027248285993023860493750030475545967637215092330757914527051682535238578874169416419343826813276679317873998472471749686675765314934017559446883914428510562722864433439498146495120119913901346238077941728002849108235739773630267418055647587363776504486028675431129509545059403089455946519091959257301580675673458296214369105815004711115705568732078472962138306788772718702122766701488203167194502460046797772368844117678537000296384367003298371856809743914987011520470356450353074991325681614617984049912889619058746341502133349510556965392824027344424606453707377080729843402550151444160443240205434479868981609992585944572035786195485899532860763384337256250361518098480850231197439501006641686919198156639962949704149039218332928999679805750001308229279436709963263406239794882894065682638778935094093844765547146298281525989658002832701160413802748514986615725425904543562884354377218482717540397490074759993076664214614879978262310338197341128247873923938475147973518208725384873960246416763890489102999975017553478512459882618858334522285043766936484250110365909823001346728831403112210757004910897939860331633776262670716334868107386964506795963587304507408784081379727762610979152292320358478558706063821848616759228308451800969357027404759064318842378084092315173807524269604159146455211809665956036125198199064555802995538741179855329046922085858818028719242720320756267564991603927439237662286873972153269427651011235776687764275443675406561338563010027840718479862348591917953933994821284372280834889531645178403889948454266146190305939429767502629047826504253391658577635431374402785042293344010121069723509203600429348621981859733004535580888240359962243091362619987113834608216353140281542703151377407446724934788657087070356643740959095887668655129378518257991750140164754529691806673352241155899083959191871012780666725664381728302763413740883234510412767276595568556388063610723825329062674666971943247295036113072723265285584887408747520460330374437559798490506055045514064213832024627976351774570181205497658698375716324872741302409695277078424193438335439292377835057730034036145478052900402863148060495085323281842554651451036178213074357384018808581022331092529011187533277675824202856654414408717211908307376739819453635469072101848013176903862214060551709095000905074280971252452952909536451044791498647604893557873228056987657309671604147796665461589224998202540292423728222584648338588736664143022108815460974616828866988926345892872995571292422421773913479426380919060101391760420261420730453554287085513644899186880442361412631217758879550052882439598889457830856779410842513718768766091275135456380178178300617147751177790796952021354316582389053446353859076939551592384382774428962913131759132408131282868099485912859413029256311254587488212460831011124533510559924989863658143059250059774988707261404862833412102527976188330569397378668933475880809400830766736994040555356783641599760677810636466319728397018292100355127463837362740187333750034023892811300477151403790798603023100128610555550613790049616753892668808336749283366803306386255139739200520795547147713447959609503199036667286329077255924746918923652728312207868221104322516466728395553078246174620007843839145562059618308045132403907998960823112902275962909973027107655355753904048396067828089331591269404084934464120850296853594525628909527716103596016612755534356543244626443354995929675356741004157822959814523198218428406546177374802501921215250213079420934002604758784198250768562575771064769772000368187985559402552864559144184644579246642229835234324930558261825479606065297775518810717430372785680588824256604595020620542104279192252958742341699434491865985473991665889763758076619448944029251378170452192928104719929641595346467381297599346164809015557379482897429306632382718572359080200580125769912394268937425208471739498198294039857540747406725444057946732876949278204480286629256472353068058903699307994090916485647143450897246288120405624044272974581328543171842457960024273937994430303017416394043067083128885809213554212555454076560792542180784246519970324808557913497445167628369709876846332995607902679917364426349371775777894415979568094641873322943199022719563252749184400889845604530664204285868733579775816968832666680229105313367395422727986751689021732800376241526129309622574934865789670249661111729875503959405546498195859589055079973719910765291871059200578848376091382450827936346881093595641008636086660186437476419800866837924558581042971863841046902667299007595753977851094063304503639295603862415053601506791945752875688662852884259197089038836135664288165187408459281783504155854777313151613458774746417419908057567542628145693509766340480961263449080763343524370041474279899270297150716040301621228556313386834331553726237194024539232248304826810025215970632165794694360001925915558517317086796919038131136526735629682618234254690009699824548131542889727269915091378373526676061198785310756633059057477359341351019021807301233526081109778738179038665569950748548783317916516531990441083102618945701517010622590869651328033237579383625761930852080497002516434690134150677105528818731097339202012653039585356617091832439042951712221740827068604212723039524324615603136864188680891174417641489121494660755507003886549855291095862457104577939327455945605614519889510432311246894620989335653836679059538065437524829322117732552766511970700736821870037554214173785971048690499128614852714423373079479669815004079790437478405606774318669283764771464300583751653017433237361104801425733258035970901068212527401383741872107655688495567909246297629646550462643273447770343300210223279668754011716842718361977583092506467739884269913691250449405207875729401675856977466707283966223128881659500958944593836216397235863285323613591565012073847795737172930233933594485324619433561564931911914888793630226393645387832882895644605397261496725355227817783507292619445421611950535223331719341500756971803362136404519452880893229885903007294748984670394618952806821098740393146788700124820764553041872496073332651308037095119882100202710186702753433978399149908454238724269918322749507909772992037226532802201150761626111638906545107602875995114792979876216193958825864398145879704552311475748837637501

Algo №3 – Matrix Exponentiation, optimized version:

***Time Complexity:*O(Log n)** ;  
***Extra Space:*** O(Log n) if we consider the function call stack size, otherwise O(1);

#include <iostream>

#include <string>

#include <chrono>

// "Int" is a user-defined data type described in the "BigInteger.cpp" file

#include "BigInteger.cpp"

using namespace std;

using namespace std::chrono;

Int fibN(int);

void power(Int F[2][2], int);

void multiply(Int [2][2], Int [2][2]);

Int fibN(int n)

{

    Int F[2][2] = {{1, 1}, {1, 0}};

    if (n == 0)

        return 0;

    power(F, n - 1);

    return F[0][0];

}

// Optimized version of matrix exponentiation

// compared to for loop straight-forward multiplication on M{{1, 1}, {1, 0}}

void power(Int F[2][2], int n)

{

    if(n == 0 || n == 1)

       return;

    Int M[2][2] = {{1, 1}, {1, 0}};

    power(F, n / 2);

    multiply(F, F);

    if (n % 2 != 0)

        multiply(F, M);

}

void multiply(Int F[2][2], Int M[2][2])

{

    Int x = F[0][0] \* M[0][0] + F[0][1] \* M[1][0];

    Int y = F[0][0] \* M[0][1] + F[0][1] \* M[1][1];

    Int z = F[1][0] \* M[0][0] + F[1][1] \* M[1][0];

    Int w = F[1][0] \* M[0][1] + F[1][1] \* M[1][1];

    F[0][0] = x;

    F[0][1] = y;

    F[1][0] = z;

    F[1][1] = w;

}

int main(){

    const int n = 50000;

    Int fiboNums[n] = {0, 1, 1};

    auto start = high\_resolution\_clock::now();

    fiboNums[n-1]=fibN(n-1);

    auto stop = high\_resolution\_clock::now();

    auto duration = duration\_cast<milliseconds>(stop - start).count();

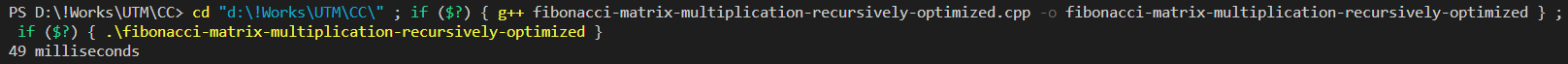
    cout << duration << " milliseconds" << "\n\n";

    cout << fiboNums[n-1];

    return 0;

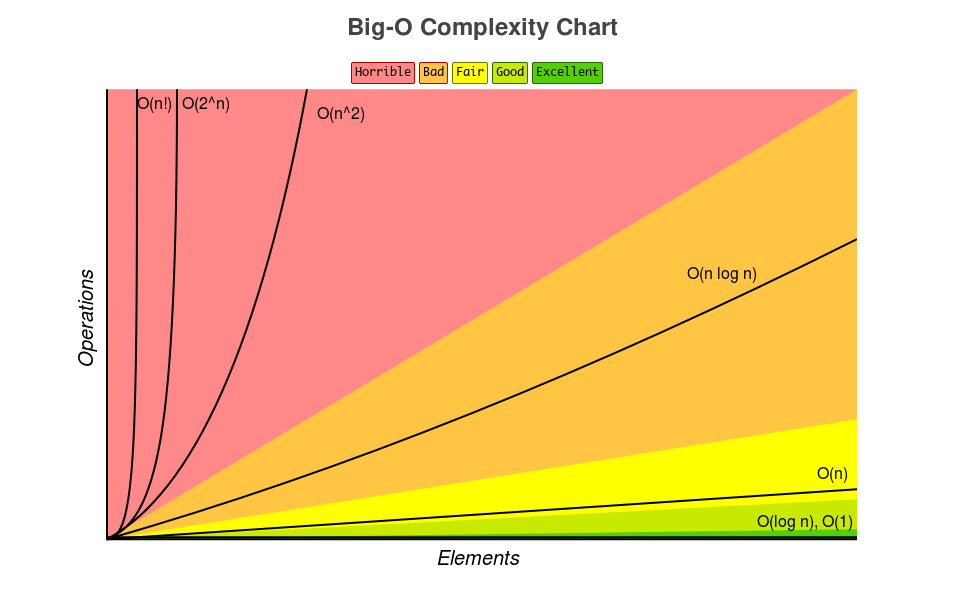
}

***N=50000, 49 milliseconds***



666100648565481205010951547560750933431950479937080994773751415475329647357449820574055869101354533179842571730518504252690058309030165957793611893184804604322634950697308315493285225827521968081167628872452768615738108939224876141123321314473270269465000697651877688322772577296187089266717271846243032342710169463007536900896948726682347470396722227545422828097990563697789828879621460065715309733855859315802250715487615816509617290450469997736430690473288367991638342872414940097748223932840620504428668520921655344430301224215692897710294618083941298394708009681899419228230959458929147242702905587860930816067641195022945573432258310501457406158453985387540996675518570815051459141923719868534748290307729399974816799507877982414057300447384236578708136869220018082040204979278639844104757994501020243076351266748128805893493483388168490769849952216805657010874821090514296406355110553853620293655313964806869929662365912232407486790482290214419052737478156102371122601126269716933969142851424928376050243479723763826825290719288650668925541910835478719090753282030915936853660001042090112056551037656921633144893206490532744723980391060344012105109041485463735778178695972346419842041360816069653760816717602148456722833643023802496324551697060976893855597905167037325153206289367148296194735202448911826351569038642836373273388438749220506838097571642903225609197374346730325128298541730100868662836408370652884683285634505652640553978383638747687616980404728716061328452648302998982054812903248737902508504748147966013614486993459268653853968661755091110112836831904518162502479003093926076241103832746864779503324612870238425655535310753031768424140386727074621268211011923361554582637672555763296766763854351892413797277286060361458119987282967951684241873325465716615261286317039991891544731713205149083895650120764948564143504675774742730781931928449575390256866738150275504189195079536502592392448642504625645222976625257159399314999623324197626795103321718324580761387037914189285639982327419211417271975071509612777714938378809871158377357033535038841919249248086467043409693138137112595014692834270711500010138506524349690071946393449648099208714463687090366864945411336246942663509789781079889019967268789357869074643331574973686481450223653389822460520183558105963223746605217997222387889751383509988082580944620464366163610679825916386927892295095374801191974096436340267734433730251299313389962413993201863403083841538686348160621073767578057926062012975065413640006600693103780549028905864574886005678966392854693541230730899811945995142389153270240354100999411437018828868859400252967613211726276446551737789380742131931227839657181988118865833480816151389108105528537216403964625087028986820520228715010685007591856614514778740893057418957567038483687071966812519841489146071253869889423050709567596610799719867036770761423744800930144446719985845639071948611549514167774740990909139060327587087707067165105903518512015008461478015071165612693027121166154673444805231514777642042786026879557204719340331591136844403791499153922402086325805819134623464621695959806096503918813601014444481497906000448189658304143531211623553079844917054983082998776950836009095453318030659296363742980120743822658798934449668379206415174607506093762182254110615681569717083211494114018772250097676725941157779174932734820568414226363304237968436842248075823282963543871105638202916945277814768864354916760621028779029538705578282925816579093772231288716013708194434438394149151491195572603314854012840149606398382269625517147771137052311883362797842053344005270594854159706295373797302632356629421276081517886019790032658026956610798949752129107805929458801027179475571809611111740758763373153476180800487503600606253740331201651721614058623392972202709529281690876761917422759364320015857427391270406331078878439305356665324344974924966088691546853401573510776119213632887236814855337852815095530230952927329556374671331803148352243251263283265128614261836045147294319819688471388326969417579904757464922708053628945150223335578551759081194695982876790011669825263518704133543095719051298714606579941128392101513434827920391242277081025094359551288317988893709534781978393945117097207076724791494616138837298981254940507843176701027248285993023860493750030475545967637215092330757914527051682535238578874169416419343826813276679317873998472471749686675765314934017559446883914428510562722864433439498146495120119913901346238077941728002849108235739773630267418055647587363776504486028675431129509545059403089455946519091959257301580675673458296214369105815004711115705568732078472962138306788772718702122766701488203167194502460046797772368844117678537000296384367003298371856809743914987011520470356450353074991325681614617984049912889619058746341502133349510556965392824027344424606453707377080729843402550151444160443240205434479868981609992585944572035786195485899532860763384337256250361518098480850231197439501006641686919198156639962949704149039218332928999679805750001308229279436709963263406239794882894065682638778935094093844765547146298281525989658002832701160413802748514986615725425904543562884354377218482717540397490074759993076664214614879978262310338197341128247873923938475147973518208725384873960246416763890489102999975017553478512459882618858334522285043766936484250110365909823001346728831403112210757004910897939860331633776262670716334868107386964506795963587304507408784081379727762610979152292320358478558706063821848616759228308451800969357027404759064318842378084092315173807524269604159146455211809665956036125198199064555802995538741179855329046922085858818028719242720320756267564991603927439237662286873972153269427651011235776687764275443675406561338563010027840718479862348591917953933994821284372280834889531645178403889948454266146190305939429767502629047826504253391658577635431374402785042293344010121069723509203600429348621981859733004535580888240359962243091362619987113834608216353140281542703151377407446724934788657087070356643740959095887668655129378518257991750140164754529691806673352241155899083959191871012780666725664381728302763413740883234510412767276595568556388063610723825329062674666971943247295036113072723265285584887408747520460330374437559798490506055045514064213832024627976351774570181205497658698375716324872741302409695277078424193438335439292377835057730034036145478052900402863148060495085323281842554651451036178213074357384018808581022331092529011187533277675824202856654414408717211908307376739819453635469072101848013176903862214060551709095000905074280971252452952909536451044791498647604893557873228056987657309671604147796665461589224998202540292423728222584648338588736664143022108815460974616828866988926345892872995571292422421773913479426380919060101391760420261420730453554287085513644899186880442361412631217758879550052882439598889457830856779410842513718768766091275135456380178178300617147751177790796952021354316582389053446353859076939551592384382774428962913131759132408131282868099485912859413029256311254587488212460831011124533510559924989863658143059250059774988707261404862833412102527976188330569397378668933475880809400830766736994040555356783641599760677810636466319728397018292100355127463837362740187333750034023892811300477151403790798603023100128610555550613790049616753892668808336749283366803306386255139739200520795547147713447959609503199036667286329077255924746918923652728312207868221104322516466728395553078246174620007843839145562059618308045132403907998960823112902275962909973027107655355753904048396067828089331591269404084934464120850296853594525628909527716103596016612755534356543244626443354995929675356741004157822959814523198218428406546177374802501921215250213079420934002604758784198250768562575771064769772000368187985559402552864559144184644579246642229835234324930558261825479606065297775518810717430372785680588824256604595020620542104279192252958742341699434491865985473991665889763758076619448944029251378170452192928104719929641595346467381297599346164809015557379482897429306632382718572359080200580125769912394268937425208471739498198294039857540747406725444057946732876949278204480286629256472353068058903699307994090916485647143450897246288120405624044272974581328543171842457960024273937994430303017416394043067083128885809213554212555454076560792542180784246519970324808557913497445167628369709876846332995607902679917364426349371775777894415979568094641873322943199022719563252749184400889845604530664204285868733579775816968832666680229105313367395422727986751689021732800376241526129309622574934865789670249661111729875503959405546498195859589055079973719910765291871059200578848376091382450827936346881093595641008636086660186437476419800866837924558581042971863841046902667299007595753977851094063304503639295603862415053601506791945752875688662852884259197089038836135664288165187408459281783504155854777313151613458774746417419908057567542628145693509766340480961263449080763343524370041474279899270297150716040301621228556313386834331553726237194024539232248304826810025215970632165794694360001925915558517317086796919038131136526735629682618234254690009699824548131542889727269915091378373526676061198785310756633059057477359341351019021807301233526081109778738179038665569950748548783317916516531990441083102618945701517010622590869651328033237579383625761930852080497002516434690134150677105528818731097339202012653039585356617091832439042951712221740827068604212723039524324615603136864188680891174417641489121494660755507003886549855291095862457104577939327455945605614519889510432311246894620989335653836679059538065437524829322117732552766511970700736821870037554214173785971048690499128614852714423373079479669815004079790437478405606774318669283764771464300583751653017433237361104801425733258035970901068212527401383741872107655688495567909246297629646550462643273447770343300210223279668754011716842718361977583092506467739884269913691250449405207875729401675856977466707283966223128881659500958944593836216397235863285323613591565012073847795737172930233933594485324619433561564931911914888793630226393645387832882895644605397261496725355227817783507292619445421611950535223331719341500756971803362136404519452880893229885903007294748984670394618952806821098740393146788700124820764553041872496073332651308037095119882100202710186702753433978399149908454238724269918322749507909772992037226532802201150761626111638906545107602875995114792979876216193958825864398145879704552311475748837637501

Time Complexity comparison chart:



Another reference to the study of the topic:

https://www.nayuki.io/page/fast-fibonacci-algorithms

**Table**

| ***n*** | **Fast doubling, Karatsuba multiplication** | **Fast matrix, Karatsuba multiplication** | **Fast doubling, naive multiplication** | **Fast matrix, naive multiplication** | **Slow dynamic programming** | **Slow recursive** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 5 414 | 1 042 | 4 197 | 887 | 10 | 4 |
| 2 | 5 638 | 2 092 | 4 442 | 1 822 | 53 | 22 |
| 3 | 5 708 | 2 740 | 4 509 | 2 342 | 92 | 56 |
| 4 | 5 945 | 3 027 | 4 733 | 2 660 | 133 | 114 |
| 5 | 5 989 | 3 677 | 4 787 | 3 147 | 172 | 219 |
| 6 | 5 972 | 3 956 | 4 765 | 3 371 | 211 | 400 |
| 8 | 6 191 | 3 972 | 4 969 | 3 428 | 289 | 1 161 |
| 10 | 6 283 | 4 952 | 5 022 | 4 154 | 370 | 3 113 |
| 13 | 6 307 | 5 610 | 5 046 | 4 667 | 488 | 13 480 |
| 16 | 6 479 | 4 955 | 5 177 | 4 210 | 605 | 57 300 |
| 20 | 6 542 | 5 923 | 5 234 | 4 985 | 763 | 394 000 |
| 25 | 6 632 | 6 565 | 5 263 | 5 479 | 964 | 4 373 000 |
| 32 | 6 794 | 5 887 | 5 388 | 4 908 | 1 235 | 127 500 000 |
| 40 | 6 818 | 6 880 | 5 433 | 5 715 | 1 552 | 5 980 000 000 |
| 50 | 6 806 | 7 742 | 5 486 | 6 446 | 2 023 |  |
| 63 | 6 931 | 10 180 | 5 589 | 8 339 | 2 598 |  |
| 79 | 7 162 | 11 090 | 5 753 | 9 187 | 3 396 |  |
| 100 | 7 279 | 9 225 | 5 904 | 7 717 | 4 472 |  |
| 126 | 7 427 | 12 410 | 6 059 | 10 220 | 5 866 |  |
| 158 | 7 600 | 13 090 | 6 141 | 10 900 | 7 888 |  |
| 200 | 8 006 | 11 700 | 6 556 | 9 969 | 10 640 |  |
| 251 | 8 146 | 15 660 | 6 672 | 13 060 | 14 280 |  |
| 316 | 8 597 | 18 810 | 7 089 | 16 530 | 19 610 |  |
| 398 | 9 501 | 20 550 | 8 078 | 18 120 | 27 650 |  |
| 501 | 9 964 | 24 050 | 8 492 | 21 340 | 38 970 |  |
| 631 | 11 070 | 38 790 | 9 510 | 35 720 | 55 540 |  |
| 794 | 13 020 | 41 810 | 11 520 | 39 380 | 80 280 |  |
| 1 000 | 14 660 | 50 870 | 13 130 | 48 230 | 118 000 |  |
| 1 259 | 18 640 | 99 020 | 16 990 | 95 640 | 175 300 |  |
| 1 585 | 25 300 | 113 500 | 23 660 | 110 800 | 263 000 |  |
| 1 995 | 32 360 | 148 100 | 30 770 | 144 700 | 397 500 |  |
| 2 512 | 45 540 | 314 800 | 43 980 | 311 400 | 608 800 |  |
| 3 162 | 67 800 | 372 200 | 66 250 | 369 000 | 937 200 |  |
| 3 981 | 98 560 | 491 500 | 96 780 | 488 100 | 1 457 000 |  |
| 5 012 | 143 500 | 1 050 000 | 145 900 | 1 132 000 | 2 269 000 |  |
| 6 310 | 214 100 | 1 284 000 | 227 700 | 1 357 000 | 3 546 000 |  |
| 7 943 | 320 300 | 1 662 000 | 351 300 | 1 821 000 | 5 547 000 |  |
| 10 000 | 466 400 | 3 519 000 | 538 400 | 4 382 000 | 8 700 000 |  |
| 12 589 | 691 100 | 4 303 000 | 851 700 | 5 254 000 | 13 640 000 |  |
| 15 849 | 1 007 000 | 5 481 000 | 1 310 000 | 7 079 000 | 21 440 000 |  |
| 19 953 | 1 493 000 | 11 800 000 | 2 081 000 | 17 260 000 | 33 620 000 |  |
| 25 119 | 2 185 000 | 13 620 000 | 3 296 000 | 20 710 000 | 53 030 000 |  |
| 31 623 | 3 205 000 | 17 570 000 | 5 159 000 | 27 860 000 | 83 310 000 |  |
| 39 811 | 4 637 000 | 36 800 000 | 8 109 000 | 68 540 000 | 131 500 000 |  |
| 50 119 | 6 750 000 | 42 430 000 | 12 910 000 | 82 230 000 | 207 700 000 |  |
| 63 096 | 9 913 000 | 54 770 000 | 20 410 000 | 110 600 000 | 326 900 000 |  |
| 79 433 | 14 450 000 | 113 300 000 | 32 300 000 | 275 100 000 | 517 100 000 |  |
| 100 000 | 20 800 000 | 130 600 000 | 51 640 000 | 330 700 000 | 819 700 000 |  |
| 125 893 | 30 380 000 | 168 900 000 | 81 150 000 | 445 200 000 | 1 296 000 000 |  |
| 158 489 | 44 090 000 | 346 800 000 | 129 200 000 | 1 103 000 000 | 2 058 000 000 |  |
| 199 526 | 63 260 000 | 405 400 000 | 205 100 000 | 1 325 000 000 | 3 249 000 000 |  |
| 251 189 | 92 330 000 | 517 300 000 | 325 100 000 | 1 766 000 000 | 5 153 000 000 |  |
| 316 228 | 133 700 000 | 1 055 000 000 | 515 700 000 | 4 413 000 000 | 8 161 000 000 |  |
| 398 107 | 191 900 000 | 1 228 000 000 | 815 500 000 | 5 311 000 000 | 12 930 000 000 |  |
| 501 187 | 280 200 000 | 1 572 000 000 | 1 297 000 000 | 7 059 000 000 | 20 520 000 000 |  |
| 630 957 | 404 900 000 | 3 181 000 000 | 2 061 000 000 | 17 570 000 000 | 32 570 000 000 |  |
| 794 328 | 580 700 000 | 3 691 000 000 | 3 265 000 000 | 21 090 000 000 | 51 650 000 000 |  |
| 1 000 000 | 846 100 000 | 4 724 000 000 | 5 182 000 000 | 28 310 000 000 | 82 000 000 000 |  |
| 1 258 925 | 1 221 000 000 | 9 570 000 000 | 8 168 000 000 | 70 280 000 000 | 130 300 000 000 |  |
| 1 584 893 | 1 750 000 000 | 11 050 000 000 | 12 970 000 000 | 84 120 000 000 | 207 300 000 000 |  |
| 1 995 262 | 2 549 000 000 | 14 230 000 000 | 20 610 000 000 | 112 700 000 000 | 329 700 000 000 |  |
| 2 511 886 | 3 676 000 000 | 28 800 000 000 | 32 610 000 000 | 279 900 000 000 | 525 100 000 000 |  |
| 3 162 278 | 5 247 000 000 | 32 980 000 000 | 51 600 000 000 | 335 600 000 000 |  |  |
| 3 981 072 | 7 654 000 000 |  |  |  |  |  |

All times are given in nanoseconds (ns), given to 4 significant figures. All the tests above were performed on Intel Core 2 Quad Q6600 (2.40 GHz) using a single thread, Windows XP SP 3, Java 1.6.0\_22.