Ejemplos FUNDAMENTALES (son en sí mismos parte fundamental de la teoría). SOBRE funciones de densidad y distribución

Ejemplo 1. Caracteriza a las variables discretas y tiene nombre propio:

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL:

tiramos una moneda cinco veces o cinco monedas a la vez. Variable aleatoria a estudiar: nº de caras:

x_i	p_i
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$
1	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$
2	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$
3	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$
4	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$

función de densidad

El cálculo de estas probabilidades en la otra cara. T11

Sin demostración:

tiramos m veces una moneda.

p: prob. de que salga cara
$q = (1-p)$: prob. de que salga cruz

n: nº de veces que sale cara: variable aleatoria

$$\Rightarrow p(n \text{ caras}) = \binom{m}{n} p^n \cdot q^{m-n}$$

→ fórmula de la función densidad de una variable con distribución BINOMIAL

donde $\boxed{\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}}$

por ejemplo:
caso anterior: m: 5 veces tiramos la moneda; n: nº de caras.

x_i = nº de caras	p_i
0	
1	
2	
3	
4	
5	

$3 \rightarrow \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$= \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \frac{5\,4\,\cancel{3\,2\,1}}{\cancel{3\,2\,1}\cdot 2\cdot 1} = 10$$

Seguimos con la función de densidad de nº de caras:

x_i	p_i
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$
1	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$
2	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$
3	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$
4	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$

Se define a partir de aquí:

$\Rightarrow F(x_i) = p(x \leq x_i) \Rightarrow$

x_i	F_i
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$
1	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5$
2	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5$
3	
4	
5	1

Así: p. de que salgan como mucho 3 caras:

$$p(x \leq 3) = F(3) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$= —$

Se define también a partir de la función de densidad los siguientes parámetros:

Esperanza matemática: también se llama η ("media")

$\to$ $\boxed{E(x) = \sum p_i x_i}$

Varianza y desviación típica

$\to$ $\boxed{\sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - E(x)^2}$ — varianza. $\Rightarrow$ σ: desviación típica.

Se insiste en que tengamos presente que estamos con variable discreta.

En nuestro caso:

$$E(x) = 0\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 1\cdot 5\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 2\cdot 10\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 3\cdot 10\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 4\cdot 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left[5 + 20 + 30 + 20 + 5\right] =$$

$$= 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 (1 + 4 + 6 + 4 + 1)$$

$$= 16\cdot 5\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^4\cdot 5}{2^5} = \frac{5}{2}$$

Se demuestra que para una distribución BINOMIAL (n, p)

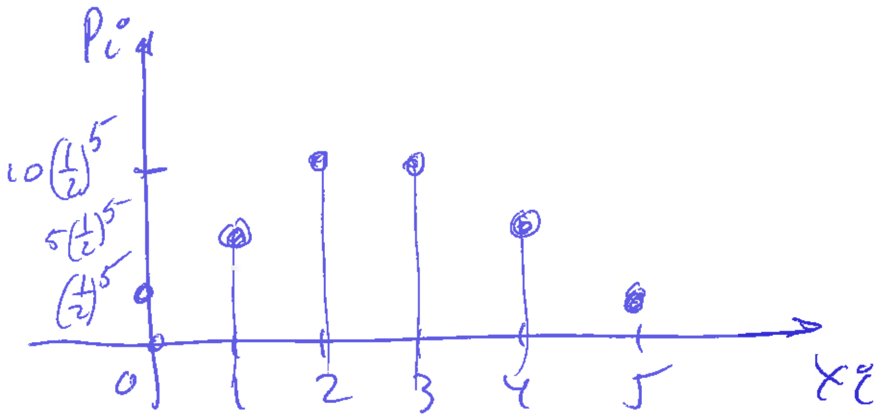
en nuestro caso $\left(5, \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{E(X) = n \cdot p} = 5 \cdot \frac{1}{2}$ para toda distribución BINOMIAL

y $\boxed{\sigma^2 = npq}$

$\sigma^2 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \sigma$

varianza



Ejemplo 2 Variable continua:

Como ya quedamos aquí la función de densidad es una función de x que nos da la probabilidad entre dos valores de la variable por medio de su AREA. NO es la p. de x $\boxed{p(x=x_0)=0}$

Si $y=f(x)$ es una función de densidad $\Rightarrow$

definición $\rightarrow$ $$\boxed{p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

por lo tanto si $f(x)$ es una función de densidad: $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1} \rightarrow \text{conclusión}$$

en todo el intervalo.

Se define en este caso la función de distribución como:

$$\boxed{F(x_0) = p(x \leq x_0)}$$

y por lo tanto:

$$\boxed{F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)\,dx}$$

o lo que es lo mismo: el área anterior a x_0

Como ejemplo vemos un tipo de función de densidad que Define a una distribución muy importante: LA NORMAL

$$\boxed{f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

parámetros de la NORMAL
μ: Esperanza o media
σ: desviación típica

$$\boxed{N(\mu, \sigma)}$$

Como hemos quedado, su función de distribución será

$$p(x \leq x_0) = F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

pero esta integral no se puede hacer "normalmente" y sus valores están TABULADOS y por eso para calcular las probabilidades de una NORMAL hay que utilizar siempre la tabla.

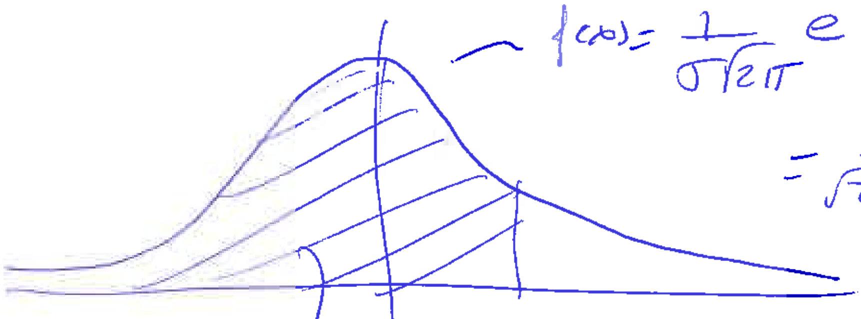
La integral que nos da la tabla es cuando los parámetros μ y σ valen:

$$\left.\begin{matrix} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{matrix}\right\}$$

a esto se le llama NORMAL STANDAR y se le suele llamar Z

Para saber utilizar la tabla tener en cuenta que:

STANDAR



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \left| \begin{matrix}\sigma=1\\ \mu=0\end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

este valor te da la tabla

pero como la curva es simétrica

empieza en $z=0$

centésimas

	0	1	2
0	0'5		
0'1			
0'2			
⋮			

y sólo nos da valores para

$z \geq 0$

Veamos un ejemplo (y hablamos ~~...~~ en la tabla a mano)

$N(80,5)$ pesos de una población NORMAL de $\begin{cases}\text{media } 80 \text{ kgr.}\\ \text{desviación típica } 5 \text{ kgr.}\end{cases}$

Para utilizar la Normal estandar (z)

T.19

tenemos que "estandarizar" la variable x cuya media no es cero ni su desviación típica 1

Hacemos siempre:

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$ standarizar la variable.

Nos preguntan: (a) probabilidad de que una persona pese menos de 85 kilos:

$N(80,5)$ $\quad P(x<85) = P\left(z < \frac{85-80}{5}\right) =$

$= P(z<1) = 0'$—

tabla directamente.

(b) probabilidad pese menos de 75 kgr.

$P(x \leq 75) = P\left(z \leq \frac{75-80}{5}\right) = P(z \leq -1)$

$=$ (negativo no sale en la tabla) $=$

pero

$= P(z>1) = 1 - P(z<1) = 1 - 0'$—

Tabla

$$\boxed{P(z<-a) = 1 - P(z<a)}$$

para z negativas.

por último:

$$P(a \leq z \leq b) = P(z \leq b) - P(z \leq a)$$

y se calcula $P(z \leq b)$

y $P(z \leq a)$

sean a y b positivas o negativas como se ha dicho.