



École des Ponts
ParisTech

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Recherche Opérationnelle

Projet

Nicolas BESSIN

Erwann ESTEVE

Tidiane POLO

1 Questions

1. Les contraintes suivantes sur μ permettent la linéarisation de $\mu = \alpha\beta$ avec $\alpha \in \{0, 1\}$ et $\beta \in [0, M]$:

$$\begin{cases} \mu \in [0, M] & \text{(domaine de définition)} \\ \mu \leq \alpha M & \text{(impose } \mu = 0 \text{ si } \alpha = 0) \\ \beta - (1 - \alpha)M \leq \mu \leq \beta & \text{(impose } \mu = \beta \text{ si } \alpha = 1) \end{cases}$$

2. Les contraintes suivantes sur μ et α permettent la linéarisation de $\mu = [\beta]^+$ avec $\beta \in [-M, M]$:

$$\begin{cases} \mu \in [0, M], \alpha \in \{0, 1\} & \text{(domaine de définition)} \\ \beta \leq M\alpha \leq M + \beta & \text{(impose } \alpha = 1 \text{ si } \beta > 0, \alpha = 0 \text{ si } \beta < 0) \\ \beta - (1 - \alpha)M \leq \mu \leq \beta + (1 - \alpha)M & \text{(impose } \mu = \beta \text{ si } \alpha = 1) \\ \mu \leq \alpha M & \text{(impose } \mu = 0 \text{ si } \alpha = 0) \end{cases}$$

Notons que α est indéterminé pour $\beta = 0$, mais qu'on a tout de même $\mu = 0 = [\beta]^+$.

3. Les contraintes suivantes sur γ et δ permettent la linéarisation de $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ avec $\alpha, \beta \in [-M, M]$:

$$\begin{cases} \gamma \in [-M, M], \delta \in \{0, 1\} & \text{(domaine de définition)} \\ \beta - \alpha \leq 2M\delta & \text{(impose } \delta = 1 \text{ si } \beta > \alpha) \\ \alpha - \beta \leq 2M(1 - \delta) & \text{(impose } \delta = 0 \text{ si } \beta < \alpha) \\ \beta - 2M\delta \leq \mu \leq \beta + 2M\delta & \text{(impose } \gamma = \beta \text{ si } \beta < \alpha) \\ \alpha - 2M(1 - \delta) \leq \mu \leq \alpha + 2M(1 - \delta) & \text{(impose } \gamma = \alpha \text{ si } \beta > \alpha) \end{cases}$$

Noton que δ est indéterminé pour $\alpha = \beta$, mais qu'on a tout de même $\gamma = \alpha = \beta = \min(\alpha, \beta)$.

Autre méthode

On introduit les variables binaires y_α et y_β , et la variable continue y . Le problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \beta, y_\alpha, y_\beta, y} \quad & y \\ \text{s.c.} \quad & y \leq \alpha \\ & y \leq \beta \\ & y \geq \alpha - 2My_\alpha \\ & y \geq \beta - 2My_\beta \\ & y_\alpha + y_\beta = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

La contrainte $y_\alpha + y_\beta = 1$ assure que l'un des y_α ou y_β vaut zéro, c'est-à-dire que l'on a bien y qui prend la valeur α ou β . De plus, puisque c'est un problème de minimisation, on a bien $y = \min(\alpha, \beta)$.

N.B. : Nous avons trouvé cette élégante méthode à [ce lien](#).

4. On a le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \beta, \gamma} \quad & \max(\alpha, \beta) + \gamma \\ \text{s.c.} \quad & A(\alpha, \beta, \gamma)^T \leq b \end{aligned} \tag{2}$$

On introduit la variable continue δ et les contraintes suivantes :

$$\delta \geq \alpha$$

$$\delta \geq \beta$$

Le problème initial s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \delta + \gamma \\ \text{s.c. } & A(\alpha, \beta, \gamma)^T \leq b \\ & \alpha \leq \delta \\ & \beta \leq \delta \end{aligned} \tag{3}$$

5. Considérons le problème suivant :

$$\min_{a, b, c} [a - \min(b, c)]^+ \tag{4}$$

On a $\forall b, c : -\min(b, c) = \max(-b, -c)$

Puisque c'est un problème de minimisation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (4) \iff & \min_{a, b, c, d} d \\ & \text{s.c. } d \geq 0 \\ & d \geq a - \min(b, c) \end{aligned} \iff \begin{aligned} & \min_{a, b, c, d, e} d \\ & \text{s.c. } d \geq 0 \\ & d \geq a + e \\ & e \geq -b \\ & e \geq -c \end{aligned} \tag{5}$$