ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Recherche Opérationelle

Projet

Nicolas BESSIN
Erwann ESTEVE
Tidiane POLO

1 Questions

1. Les contraintes suivantes sur μ permettent la linéarisation de $\mu = \alpha\beta$ avec $\alpha \in \{0, 1\}$ et $\beta \in [0, M]$:
$$\begin{cases} \mu \in [0, M] & \text{(domaine de définition)} \\ \mu \leq \alpha M & \text{(impose } \mu = 0 \text{ si } \alpha = 0\text{)} \\ \beta - (1-\alpha)M \leq \mu \leq \beta & \text{(impose } \mu = \beta \text{ si } \alpha = 1\text{)} \end{cases}$$

2. Les contraintes suivantes sur μ et α permettent la linéarisation de $\mu = [\beta]^+$ avec $\beta \in [-M, M]$:
$$\begin{cases} \mu \in [0, M], \alpha \in \{0, 1\} & \text{(domaine de définition)} \\ \beta \leq M\alpha \leq M + \beta & \text{(impose } \alpha = 1 \text{ si } \beta > 0, \alpha = 0 \text{ si } \beta < 0\text{)} \\ \beta - (1-\alpha)M \leq \mu \leq \beta + (1-\alpha)M & \text{(impose } \mu = \beta \text{ si } \alpha = 1\text{)} \\ \mu \leq \alpha M & \text{(impose } \mu = 0 \text{ si } \alpha = 0\text{)} \end{cases}$$
Notons que α est indéterminé pour $\beta = 0$, mais qu'on a tout de même $\mu = 0 = [\beta]^+$.

3. Les contraintes suivantes sur γ et δ permettent la linéarisation de $\gamma = min(\alpha, \beta)$ avec $\alpha, \beta \in [-M, M]$:
$$\begin{cases} \gamma \in [-M, M], \delta \in \{0, 1\} & \text{(domaine de définition)} \\ \beta - \alpha \leq 2M\delta & \text{(impose } \delta = 1 \text{ si } \beta > \alpha\text{)} \\ \alpha - \beta \leq 2M(1-\delta) & \text{(impose } \delta = 0 \text{ si } \beta < \alpha\text{)} \\ \beta - 2M\delta \leq \mu \leq \beta + 2M\delta & \text{(impose } \gamma = \beta \text{ si } \beta < \alpha\text{)} \\ \alpha - 2M(1-\delta) \leq \mu \leq \alpha + 2M(1-\delta) & \text{(impose } \gamma = \alpha \text{ si } \beta > \alpha\text{)} \end{cases}$$
Noton que δ est indéterminé pour $\alpha = \beta$, mais qu'on a tout de même $\gamma = \alpha = \beta = min(\alpha, \beta)$.

   Autre méthode
   On introduit les variables binaires y_α et y_β, et la variable continue y. Le problème s'écrit alors :
$$\begin{aligned} \min_{\alpha,\beta,y_\alpha,y_\beta,y} \quad & y \\ \text{s.c.} \quad y \leq & \quad \alpha \\ y \leq & \quad \beta \\ y \geq & \quad \alpha - 2My_\alpha \\ y \geq & \quad \beta - 2My_\beta \\ y_\alpha + y_\beta & = 1 \end{aligned} \tag{1}$$
La contrainte $y_\alpha + y_\beta = 1$ assure que l'un des y_α ou y_β vaut zéro, c'est-à-dire que l'on a bien y qui prend la valeur α ou β. De plus, puisque c'est un problème de minimisation, on a bien $y = min(\alpha, \beta)$.
N.B. : Nous avons trouvé cette élégante méthode à ce lien.

4. On a le problème suivant :
$$\begin{aligned} & \min_{\alpha,\beta,\gamma} \max(\alpha, \beta) + \gamma \\ & \text{s.c. } A(\alpha, \beta, \gamma)^T \leq b \end{aligned} \tag{2}$$

On introduit la variable continue δ et les contraintes suivantes :

$$\delta \geq \alpha$$

$$\delta \geq \beta$$

Le problème initial s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \ & \delta + \gamma \\ \text{s.c. } A(\alpha,\beta,\gamma)^T & \leq b \\ \alpha & \leq \delta \\ \beta & \leq \delta \end{aligned} \tag{3}$$

5. Considérons le problème suivant :

$$\min_{a,b,c} [a - \min(b,c)]^+ \tag{4}$$

On a $\forall b, c : -\min(b,c) = \max(-b,-c)$
Puisque c'est un problème de minimisation, on peut écrire :

$$(4) \iff \begin{aligned} \min_{a,b,c,d} & \ d \\ \text{s.c. } d & \geq 0 \\ d & \geq a - \min(b,c) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min_{a,b,c,d,e} & \ d \\ \text{s.c. } d & \geq 0 \\ d & \geq a + e \\ e & \geq -b \\ e & \geq -c \end{aligned} \tag{5}$$

Pour linéariser les termes $p_f(v,x,y)c^c(C^f(v,x,y,z,\omega))$, on doit distribuer la multiplication (On sait linéariser les multiplications de variables binaires et de variables continues). On a donc :

$$p_f(v,x,y)c^c(C^f(v,x,y,z,\omega)) = (\sum_{s\in S} p_s x_{vs} + \sum_{q\in Q_0} p_q y_{eq})(c^c(C^f(v,x,y,z,\omega)))$$

où $c^c(C^f(v,x,y,z,\omega))$ est une variable continue, issue du regroupement des composantes du coût et de la linéarisation de la pénalité.

$$\begin{aligned} p_f(v,x,y)c^c(C^f(v,x,y,z,\omega)) = & \sum_{s\in S} p_s x_{vs}(c^c(C^f(v,x,y,z,\omega))) \\ & + \sum_{q\in Q_0} p_q y_{eq}(c^c(C^f(v,x,y,z,\omega))) \end{aligned}$$

On a donc besoin d'une borne supérieure pour $C^f(v,x,y,z,\omega)$

Même raisonnement pour $(1 - \sum_{v\in V^s} p_f(v))c^c(C^n(\omega))$:

$$[1 - \sum_{v\in V^s} p_f(v)]c^c(C^n(\omega)) = c^c(C^n(\omega)) - \sum_{v\in V^s} [\sum_{s\in S} p_s x_{vs} c^c(C^n(\omega)) + \sum_{q\in Q_0} p_q y_{eq} c^c(C^n(\omega))]$$