ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Recherche Opérationelle

Projet

Nicolas Bessin

Erwann Esteve

Tidiane Polo

1 Questions

On veut linéariser des contraintes :

1. Contrainte de la forme : $\mu = \alpha\beta$ (1) avec $\alpha \in \{0, 1\}$ et $\beta \in [0, M]$
   On a
   $$(1) \iff 0 \leq \mu \leq \alpha M \text{ et } \beta - (1-\alpha)M \leq \mu \leq \beta$$

2. Contrainte de la forme : $\mu = [\beta]^+$ avec $\beta \in [-M, M]$
   On introduit une variable binaire α qui vaut 1 si $\beta > 0$ et 0 sinon.
   Pour cela, on introduit les contraintes suivantes :
   $$1 + \frac{\beta}{M} \geq \alpha \geq \frac{\beta}{M}$$
   La contrainte initiale s'écrit alors :
   $$\mu = \alpha\beta$$
   et on peut la linéariser comme dans la question précédente.
   Cas limite : $\beta = 0$, on a alors $1 \geq \alpha \geq 0$.
   Ce n'est pas un problème puisque $\mu = \alpha\beta = 0$ quel que soit la valeur prise par α

3. Contrainte de la forme : $\gamma = min(\alpha, \beta)$ avec $\alpha, \beta \in [-M, M]$
   On introduit une variable binaire δ qui vaut 1 si $\beta < \alpha$ et 0 sinon.
   Pour cela, on introduit les contraintes suivantes :
   $$\frac{\alpha - \beta}{2M} \leq \delta \leq 1 + \frac{\alpha - \beta}{2M}$$
   La contrainte initiale s'écrit alors :
   $$\gamma = \delta\beta + (1-\delta)\alpha$$
   et on peut la linéariser comme dans la question 1.

   Autre méthode :
   Toujours avec $\alpha, \beta \in [-M, M]$.
   On introduit les variables binaires y_α et y_β, et la variable continue y. Le problème s'écrit alors :
   $$\begin{aligned} \min_{\alpha,\beta,y_\alpha,y_\beta,y} \quad & y \\ \text{s.c.} \quad & y \leq \alpha \\ & y \leq \beta \\ & y \geq \alpha - 2My_\alpha \\ & y \geq \beta - 2My_\beta \\ & y_\alpha + y_\beta = 1 \end{aligned} \tag{1}$$
   La contrainte $y_\alpha + y_\beta = 1$ assure que l'un des y_α ou y_β vaut zéro, c'est-à-dire que l'on a bien y qui prend la valeur α ou β. De plus, puisque c'est un problème de minimisation, on a bien $y = min(\alpha, \beta)$. (J'ai pu trouver cette élégante méthode dans https ://doi.org/10.3390/math10020283)

4. On a le problème suivant :
$$\begin{aligned} &\min_{\alpha,\beta,\gamma} \max(\alpha,\beta)+\gamma \\ &\text{s.c. } A(\alpha,\beta,\gamma)^T \leq b \end{aligned} \tag{2}$$
On introduit la variable continue δ et les contraintes suivantes :
$$\delta \geq \alpha$$
$$\delta \geq \beta$$
Le problème initial s'écrit alors :
$$\begin{aligned} \min_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \delta + \gamma \\ \text{s.c. } A(\alpha,\beta,\gamma)^T \leq b \\ \alpha \leq \delta \\ \beta \leq \delta \end{aligned} \tag{3}$$

5. Considérons le problème suivant :
$$\min_{a,b,c} [a - \min(b,c)]^+ \tag{4}$$
On a $\forall b, c : -\min(b,c) = \max(-b,-c)$
Puisque c'est un problème de minimisation, on peut écrire :
$$(4) \iff \begin{aligned} &\min_{a,b,c,d} d \\ &\text{s.c. } d \geq 0 \\ &\qquad d \geq a - \min(b,c) \end{aligned} \iff \begin{aligned} &\min_{a,b,c,d,e}\ d \\ &\text{s.c. } d \geq 0 \\ &\qquad d \geq a + e \\ &\qquad e \geq -b \\ &\qquad e \geq -c \end{aligned} \tag{5}$$