

Problème de partitionnement robuste

Modélisation et étude théorique

Nicolas BESSIN, Natello DESCORMIER

Table des matières

1	Modélisation du problème statique	1
2	Modélisation du problème robuste	3
2.1	Fonction objectif	3
2.2	Contraintes	4
2.3	Synthèse de la modélisation	4
3	Résolution par plans coupants	5
4	Résolution par dualisation	7
4.1	Dualisation de l'objectif	7
4.2	Dualisation des contraintes	8
4.3	Synthèse	9

1 Modélisation du problème statique

Le problème statique consiste à partitionner les sommets d'un graphe (V, E) en au plus K parties de poids inférieur ou égal à B , de façon à minimiser le poids des arêtes à l'intérieur des parties.

On définit deux familles de variables binaires de la manière suivante :

- x_{ij} indique si l'arête $ij \in E$ entre les sommets i et j est sélectionnée.
- y_{ik} indique si le sommet $i \in V$ est assigné à la partie $k \in [K]$.

Le programme doit assurer les contraintes suivantes :

- Chaque sommet $i \in V$ doit être assigné à une unique partie, i-e, un unique élément de $[K]$:

$$\forall i \in V, \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$$

- La somme des poids des sommets dans une partie ne doit pas dépasser un certain poids maximal (ou budget) B :

$$\forall k \in [K], \sum_{i \in V} w_i y_{ik}$$

- Les membres d'une même partie doivent être reliés par une arête sélectionnée. Pour tout $ij \in E$ et $k \in [K]$, on a $x_{ij} \geq y_{ik}y_{jk}$. Inversement, si une arête est sélectionnée et qu'une de ses extrémités est dans une partie, alors il en est de même pour l'autre. Ainsi pour tout $ij \in E$ et $k \in [K]$, $y_{jk} \geq x_{ij}y_{ik}$. Comme nous travaillons avec des variables binaires, on peut linéariser ces contraintes :

$$x_{ij} \geq y_{ik} + y_{jk} - 1$$

$$y_{jk} \geq x_{ij} + y_{ik} - 1$$

$$y_{ik} \geq x_{ij} + y_{jk} - 1$$

On peut d'ailleurs remarquer que si on a : $\forall ij \in E, l_{ij} \geq 0$, on peut alors se contenter de la première de ces trois contraintes, puisqu'on travaille en minimisation. En effet, on est assuré (si le problème est faisable) qu'il existe une solution optimale avec

$$\forall i, j \in V, x_{ij} = 1 \Leftrightarrow (\exists k_0 \in [K], y_{ik_0} = y_{jk_0} = 1)$$

(D'ailleurs toutes les solutions optimales vérifient cela lorsque $l_{ij} > 0$). Pour une telle solution, on a bien le caractère suivant : $x_{ij} = 1$ si et seulement si i et j sont dans la même sous-partie.

Enfin, on cherche à minimiser la somme des longueurs des arêtes sélectionnées.

On aboutit donc au programme linéaire en variables 0-1 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \sum_{ij \in E} l_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} & x_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \geq -1 \quad \forall ij \in E, \forall k \in [K] \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \\ & \sum_{i \in V} w_i y_{ik} \leq B \quad \forall k \in [K] \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in E \\ & y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \end{array} \right.$$

Ce programme contient $|E| + nK$ variables et $n + (|E| + 1)K$ contraintes, et puisqu'une partition de V contient au plus n sous-ensembles, on peut toujours considérer $K \leq n$, donc la taille du programme est polynomiale en la taille du graphe.

2 Modélisation du problème robuste

Pour modéliser le problème robuste sous la forme d'un PLNE, on modifie la fonction objectif et les contraintes.

2.1 Fonction objectif

La fonction objectif évolue à cause des incertitudes sur les longueurs. On cherche à minimiser la fonction objectif dans le pire cas, c'est-à-dire :

$$\max_{l^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij}^1 = \max_{\delta^1 \in \Delta \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in E} x_{ij} (l_{ij} + \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j)) = \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1 \in \Delta \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j)$$

$$\text{où } \Delta \mathcal{U}^1 = \left\{ \delta^1 \in \mathbb{R}^{|E|} : \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \leq L; \forall ij \in E, \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \right\}.$$

On remarque que $\Delta \mathcal{U}^1$ est un polytope de $\mathbb{R}^{|E|}$ défini par la contrainte $A\delta^1 \leq \hat{L}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}; \hat{L} = \begin{pmatrix} L \\ 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice totalement unimodulaire : pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la ligne de 1 est totalement unimodulaire, puisque toute sous-matrice carrée de cette ligne est une matrice d'un seul élément égal à 1. De plus, \hat{L} est entier, donc $\Delta \mathcal{U}^1$ est un polytope entier, c'est-à-dire une enveloppe convexe de points entiers. On peut alors poser $\hat{\mathcal{U}}^1$ les points entiers de $\Delta \mathcal{U}^1$, on a donc :

$$\hat{\mathcal{U}}^1 = \Delta \mathcal{U}^1 \cap \mathbb{Z}^E = \left\{ \delta^1 \in \mathbb{N}^E : \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \leq L; \forall ij \in E, \delta_{ij}^1 \leq 3 \right\}$$

$$\Delta \mathcal{U}^1 = \text{Conv}(\hat{\mathcal{U}}^1)$$

$$\max_{l^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij}^1 = \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1 \in \hat{\mathcal{U}}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j)$$

2.2 Contraintes

La seule contrainte concernée par des incertitudes est la contrainte de poids maximal dans chaque partie. Des valeurs de x, y sont admissibles si et seulement si cette contrainte est respectée quelle que soit la réalisation de l'incertitude sur les poids. Soit $k \in [K]$. La contrainte $\sum_{i \in V} w_i y_{ik} \leq B$ devient :

$$\bigwedge_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \left[\sum_{i \in V} w_i^2 y_{ik} \leq B \right]$$

i-e,

$$\bigwedge_{\delta^2 \in \Delta \mathcal{U}^2} \left[\sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \leq B \right]$$

$$\text{où } \hat{\mathcal{U}}^2 = \left\{ \delta^2 \in \mathbb{R}^V : \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W; \forall i \in V, \delta_i^2 \in [0, W_i] \right\}.$$

Si les $(W_i)_{i \in V}$ sont entiers, on a de la même manière que précédemment :

$$\bigwedge_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \left[\sum_{i \in V} w_i^2 y_{ik} \leq B \right] \iff \bigwedge_{\delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2} \left[\sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \leq B \right]$$

$$\text{où } \hat{\mathcal{U}}^2 = \left\{ \delta^2 \in \mathbb{N}^V : \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W; \forall i \in V, \delta_i^2 \leq W_i \right\}$$

2.3 Synthèse de la modélisation

En utilisant les ensembles $\hat{\mathcal{U}}^1$ et $\hat{\mathcal{U}}^2$ qu'on vient de construire et qui sont de taille finie, on modélise le problème robuste de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x, y} & \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1 \in \hat{\mathcal{U}}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \\ \text{s.c.} & x_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \geq -1 \quad \forall ij \in E, \forall k \in [K] \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \\ & \sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \leq B \quad \forall k \in [K], \forall \delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in E \\ & y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \end{array} \right.$$

3 Résolution par plans coupants

On peut ré-écrire le problème sous la forme suivante, en introduisant la variable z qui correspond à la "partie robuste" de l'objectif, et en exhibant la partie des contraintes sur le poids qui dépend de l'incertitude δ^2 .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y,z} & \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + z \\ \text{s.c.} & z \geq \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \quad \forall \delta^1 \in \hat{\mathcal{U}}^1 \\ & \sum_{i \in V} w_i y_{ik} \delta_i^2 \leq B - \sum_{i \in V} w_i y_{ik} \quad \forall k \in [K], \forall \delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2 \\ & x_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \geq -1 \quad \forall ij \in E, \forall k \in [K] \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in E \\ & y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \end{array} \right.$$

Puisque $\hat{\mathcal{U}}^1$ et $\hat{\mathcal{U}}^2$ sont de taille exponentielle en L , on ne peut pas écrire toutes ces contraintes explicitement dans le modèle informatique. On peut alors utiliser une résolution par plans coupants, en ne considérant qu'une sous-partie $\mathcal{U}^{1*} \subset \hat{\mathcal{U}}^1$ et $\mathcal{U}^{2*} \subset \hat{\mathcal{U}}^2$ de ces contraintes, que l'on étend au cours de la résolution. Par exemple, on choisit initialement :

- $\mathcal{U}^{1*} = \{\min(3, L) \times e_{ij} : ij \in E\}$ l'ensemble des δ^1 qui mettent chacun un poids de 3 ou L (suivant quelle grandeur est la plus petite) sur exactement une des arêtes.
- $\mathcal{U}^{2*} = \{W_v \times e_v : v \in V\}$ l'ensemble des δ^2 qui mettent chacun un poids de W_v sur le sommet correspondant (on suppose pour cela $\forall v \quad W_v \leq W$)

Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ la solution courante du problème maître. On définit deux types de sous-problèmes de séparation qui vont nous amener à ajouter des plans coupants (i.e. ajouter des contraintes au problème maître en étendant les ensembles \mathcal{U}^{1*} et \mathcal{U}^{2*}) :

$$\begin{array}{ll} V_l^{SP} := \max_{\delta^1} & \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \tilde{x}_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \\ \text{s.c.} & \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \leq L \\ & \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \quad \forall ij \in E \end{array}$$

$$\begin{aligned}
V_w^{SP}(k) &:= \max_{\delta^2} \sum_{i \in V} w_i \tilde{y}_{ik} \delta_i^2 \\
\text{s.c.} \quad &\sum_{v \in V} \delta_v^2 \leq W \\
&\delta_v^2 \in [0, W_v] \quad \forall v \in V
\end{aligned}$$

Une solution $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ du problème maître est alors optimale si et seulement si $V_l^{SP} \leq \tilde{z}$ et $\forall k \in [K], V_w^{SP}(k) \leq B - \sum_{i \in V} w_i \tilde{y}_{ik}$, c'est-à-dire :

- On ne peut pas trouver de $\delta^1 \notin \mathcal{U}^{1*}$ qui empire la solution courante
- La solution courante vérifie la contrainte de poids pour toutes les parties, même pour les $\delta^2 \notin \mathcal{U}^{2*}$.

Notons alors $\tilde{\delta}^1$ (resp. $\tilde{\delta}^2(k)$) une solution optimale de ce premier problème de séparation (resp. du problème de séparation sur le poids de la partie k). Lorsque les conditions d'optimalité ne sont pas remplies, les plans coupants ajoutés correspondent alors aux contraintes pour les nouveaux $\tilde{\delta}^1, (\tilde{\delta}^2(k))_{k \in [K]}$ renvoyés par les problèmes de séparation.

- Si $V_l^{SP} > \tilde{z}$, on ajoute au problème maître la coupe :

$$z \geq \sum_{ij \in E} x_{ij} \tilde{\delta}_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j)$$

- S'il existe $k_0 \in [K]$ tel que $V_w^{SP}(k_0) > B - \sum_{i \in V} w_i \tilde{y}_{ik_0}$, on ajoute au problème maître toutes les coupes de la forme :

$$\sum_{i \in V} y_{ik} w_i (1 + \tilde{\delta}_i^2(k_0)) \leq B \quad \forall k \in [K]$$

(Puisque l'assignation des sommets aux parties est toujours à une permutation des parties près, il faut ajouter la coupe pour toutes les $k \in [K]$ afin d'éviter de juste "déplacer" l'infaisabilité vers un $k \neq k_0$ à l'itération suivante).

4 Résolution par dualisation

4.1 Dualisation de l'objectif

On rappelle le problème :

$$\min_{(x,y) \in \mathcal{X}} f(x) = \min_{(x,y) \in \mathcal{X}} \left[\sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1 \in \hat{\mathcal{U}}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \right]$$

où $\hat{\mathcal{U}}^1 = \Delta \mathcal{U}^1 \cap \mathbb{Z}^E = \left\{ \delta^1 \in \mathbb{N}^E : \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \leq L; \forall ij \in E, \delta_{ij}^1 \leq 3 \right\}$ et \mathcal{X} est l'ensemble des solutions (x, y) admissibles du problème robuste.

On a montré plus haut $\forall x, \max_{\delta^1 \in \hat{\mathcal{U}}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) = \max_{\delta^1 \in \Delta \mathcal{U}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j)$, d'où

$$\forall x, f(x) = \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + V_P^1 \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} V_P^1 &:= \max_{\delta^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \\ \text{s.c.} \quad &\sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \leq L \\ &\delta_{ij}^1 \in [0, 3] \quad \forall ij \in E \end{aligned}$$

On dualise ce problème en associant la variable z à la contrainte $\sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 \leq L$ et les variables $(\eta_{ij})_{ij \in E}$ aux contraintes $\forall ij \in E, \delta_{ij}^1 \leq 3$. On obtient :

$$\begin{aligned} V_D^1 &:= \min_{z, \eta} Lz + \sum_{ij \in E} 3\eta_{ij} \\ \text{s.c.} \quad &z + \eta_{ij} \geq x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \quad \forall ij \in E \\ &\eta_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in E \\ &z \geq 0 \end{aligned}$$

Par dualité forte, $V_P^1 = V_D^1$. Le problème devient donc :

$$\min_{(x,y) \in \mathcal{X}} f(x) = \min_{(x,y) \in \mathcal{X}} \left[\sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \min_{(z, \eta) \in \mathcal{Z}_x} Lz + \sum_{ij \in E} 3\eta_{ij} \right] = \min_{\substack{(x,y) \in \mathcal{X} \\ (z, \eta) \in \mathcal{Z}_x}} Lz + \sum_{ij \in E} (x_{ij} l_{ij} + 3\eta_{ij})$$

avec $\mathcal{Z}_x = \left\{ (z, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+)^E : \forall ij \in E, z + \eta_{ij} \geq x_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j) \right\}$

4.2 Dualisation des contraintes

On rappelle les contraintes :

$$\forall k \in [K], \forall \delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2, \sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \leq B$$

$$\text{où } \hat{\mathcal{U}}^2 = \left\{ \delta^2 \in \mathbb{R}^V : \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W; \forall i \in V, \delta_i^2 \leq W_i \right\}.$$

Soit $k \in [K]$. Pour une solution y donnée, les contraintes sont satisfaites quel que soit $\delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2$ si et seulement si :

$$\left[\max_{\delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2} \sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \right] \leq B$$

qui équivaut à :

$$\sum_{i \in V} w_i y_{ik} + \max_{\delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2} \sum_{i \in V} w_i y_{ik} \delta_i^2 \leq B$$

i-e $\sum_{i \in V} w_i y_{ik} + V_k^2 \leq B$ où :

$$\begin{aligned} V_k^2 &:= \max_{\delta^2} \sum_{i \in V} w_i y_{ik} \delta_i^2 \\ \text{s.c.} \quad &\sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W \\ &\delta_i^2 \in [0, W_i] \quad \forall i \in V \end{aligned}$$

On dualise ce problème en associant la variable t à la contrainte $\sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W$ et les variables

$(\xi_i)_{i \in V}$ aux contraintes $\forall i \in V, \delta_i^2 \leq W_i$. La matrice de contraintes étant la même que lors de la dualisation de la fonction objectif, on peut établir en utilisant les mêmes arguments :

$$\begin{aligned}
V_k^2 := \min_{t, \xi} \quad & Wt + \sum_{i \in V} W_i \xi_i \\
\text{s.c.} \quad & t + \xi_i \geq w_i y_{ik} \quad \forall i \in V \\
& \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in V \\
& t \geq 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{i \in V} w_i y_{ik} + V_k^2 \leq B \iff \exists (t, \xi) \in \mathcal{T}_y^k, Wt + \sum_{i \in V} (w_i y_{ik} + W_i \xi_i) \leq B$$

où $\mathcal{T}_y^k = \{(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}_+)^V : \forall i \in V, t + \xi_i \geq w_i y_{ik}\}$.

La contrainte $\forall k \in [K], \forall \delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2, \sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \leq B$ peut donc être remplacée par

l'ajout de variables entières positives $(t^k, \xi^k)_{k \in [K]}$ et des contraintes :

- $\forall k \in [K], (t^k, \xi^k) \in \mathcal{T}_y^k$ (i-e, $\forall k \in [K], \forall i \in V, t^k + \xi_i^k \geq w_i y_{ik}$)
- $\forall k \in [K], Wt^k + \sum_{i \in V} (w_i y_{ik} + W_i \xi_i^k) \leq B$.

4.3 Synthèse

On rappelle la formulation du problème robuste :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x, y} & \sum_{ij \in E} x_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1 \in \hat{\mathcal{U}}^1} \sum_{ij \in E} \delta_{ij}^1 x_{ij} (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \\ \text{s.c.} & x_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \geq -1 \quad \forall ij \in E, \forall k \in [K] \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \\ & \sum_{i \in V} w_i y_{ik} (1 + \delta_i^2) \leq B \quad \forall k \in [K], \forall \delta^2 \in \hat{\mathcal{U}}^2 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in E \\ & y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \end{array} \right.$$

Avec les résultats précédents, ce programme devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y,z,t,\eta,\xi} & \textcolor{red}{L}z + \sum_{ij \in E} (x_{ij}l_{ij} + \textcolor{red}{3}\eta_{ij}) \\ \text{s.c.} & x_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \geq -1 \quad \forall ij \in E, \forall k \in [K] \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \\ & \textcolor{red}{z} + \eta_{ij} \geq x_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j) \quad \forall ij \in E \\ \textcolor{blue}{W}t^k + \sum_{i \in V} (w_i y_{ik} + W_i \xi_i^k) & \leq B \quad \forall k \in [K] \\ & t^k + \xi_i^k \geq w_i y_{ik} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall ij \in E \\ & y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \\ & \textcolor{red}{z} \geq \textcolor{red}{0} \\ & \textcolor{red}{\eta}_{ij} \geq \textcolor{red}{0} \quad \forall ij \in E \\ & \textcolor{blue}{t}^k \geq \textcolor{blue}{0} \quad \forall k \in [K] \\ & \textcolor{blue}{\xi}_i^k \geq \textcolor{blue}{0} \quad \forall i \in V, \forall k \in [K] \end{array} \right.$$