Guía del Curso Previo de Matemáticas

Nicolas Argañaraz

5 de Marzo de 2024

1 Evaluación Diagnóstica

1.1 Si $0 < a$ y el 25% de b menos el 25% de a es 100, entonces $b - a$ es:

Primero, expresamos la condición dada en términos de a y b:

$$\frac{25}{100}b - \frac{25}{100}a = 100$$

Simplificamos los porcentajes:

$$\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}a = 100$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 4 para eliminar los denominadores:

$$b - a = 400$$

Por lo tanto, $b - a = 400$.

1.2 el conjunto solución de la desigualdad $|x + 2| \leq |x - 3|$.

Primero, determinamos los puntos donde $|x + 2|$ y $|x - 3|$ son iguales:

Cuando $x + 2 = x - 3$, entonces $x = -\frac{5}{2}$.

Cuando $x + 2 = -(x - 3)$, entonces $x = \frac{1}{2}$.

Entonces, los puntos de intersección son $x = -\frac{5}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

Ahora, evaluamos $|x + 2|$ y $|x - 3|$ en los intervalos determinados por estos puntos.

Cuando $x < -\frac{5}{2}$, $|x+2| = -(x+2)$ y $|x-3| = -(x-3)$. Por lo tanto, la desigualdad se convierte en $-(x+2) \leq -(x-3)$, que es cierta para todos los valores de x en este intervalo.

Cuando $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $|x+2| = x+2$ y $|x-3| = -(x-3)$. Por lo tanto, la desigualdad se convierte en $x+2 \leq -(x-3)$, que es cierta para todos los valores de x en este intervalo.

Cuando $x > \frac{1}{2}$, $|x+2| = x+2$ y $|x-3| = x-3$. Por lo tanto, la desigualdad se convierte en $x+2 \leq x-3$, que no es cierta para ningún valor de x en este intervalo.

Entonces, el conjunto solución de la desigualdad $|x+2| \leq |x-3|$ es

$$\boxed{x \leq -\frac{5}{2} \text{ o } -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}}.$$

1.3 Dado que el punto medio de a y b es 1, tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{a+b}{2} = 1$$

Multiplicando ambos lados por 2, obtenemos:

$$a+b=2$$

Dado que la distancia entre a y b es 8, tenemos la siguiente ecuación:

$$|a-b| = 8$$

Consideramos dos casos para $|a-b|$: Caso 1: $a-b=8$

Resolviendo $a+b=2$ y $a-b=8$ simultáneamente, obtenemos:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=8 \end{cases}$$

Sumando estas ecuaciones, obtenemos $2a = 10$ y $a = 5$. Entonces, $b = -3$. Caso 2: $b-a=8$

Resolviendo $a+b=2$ y $b-a=8$ simultáneamente, obtenemos:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ b-a=8 \end{cases}$$

Sumando estas ecuaciones, obtenemos $2b = 10$ y $b = 5$. Entonces, $a = -3$.

Por lo tanto, las posibles soluciones para a y b son $(5, -3)$ y $(-3, 5)$.

1.4

$$\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^4}{\left(\frac{-1}{2}\right)^3}$$

Para simplificar esta expresión, primero resolvemos los exponentes:

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{2\times 1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3\times 1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$$

Ahora, sustituimos estos valores en la expresión original:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\frac{-1}{8}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\frac{-1}{8}} \times \frac{8}{8} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times 8}{-1} = \frac{1^4 \times 8}{4^4 \times -1} = \frac{8}{256 \times -1} = \frac{8}{-256} = -\frac{1}{32}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-1}{2}\right)^2)^4 / \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{32}$.

1.5 Los siguientes dos números enteros mayores que -1009 son

$$-1009 + 1 = -1008$$

$$-1008 + 1 = -1007$$

1.6 El conjunto solución de $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$

Caso 1: Ambos términos son positivos:

Si $x^2 - 9 \geq 0$ y $x^2 - 4 \geq 0$, entonces $x^2 \geq 9$ y $x^2 \geq 4$. Esto ocurre cuando $x \geq 3$ y $x \geq 2$. El conjunto solución para este caso es $x \geq 3$. Caso 2: Ambos términos son negativos:

Si $x^2 - 9 \leq 0$ y $x^2 - 4 \leq 0$, entonces $x^2 \leq 9$ y $x^2 \leq 4$. Esto ocurre cuando $x \leq -3$ y $x \leq -2$. El conjunto solución para este caso es $x \leq -3$. Caso 3: El primer término es positivo y el segundo término es negativo:

Si $x^2 - 9 \geq 0$ y $x^2 - 4 \leq 0$, entonces $x^2 \geq 9$ y $x^2 \leq 4$. Esto ocurre cuando $x \geq 3$ y $-2 \leq x \leq 2$. El conjunto solución para este caso es $-2 \leq x \leq 2$.
Caso 4: El primer término es negativo y el segundo término es positivo:

Si $x^2 - 9 \leq 0$ y $x^2 - 4 \geq 0$, entonces $x^2 \leq 9$ y $x^2 \geq 4$. Esto ocurre cuando $x \leq -3$ y $x \geq 2$. El conjunto solución para este caso es $2 \leq x \leq -3$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$ es

$$\boxed{x \geq 3}, \boxed{x \leq -3}, \boxed{-2 \leq x \leq 2} \text{ y } \boxed{2 \leq x \leq -3}.$$

1.7 $\log_3\left(3^{\log_{\frac{1}{3}}(27)}\right)$

Para resolver $\log_3\left(3^{\log_{\frac{1}{3}}(27)}\right)$, primero calculamos el exponente interno:

$$\begin{aligned} 3^{\log_{\frac{1}{3}}(27)} &= 3^{\log_{\frac{1}{3}}(3^3)} \\ &= 3^{3\cdot\log_{\frac{1}{3}}(3)} \\ &= 3^{3\cdot 1} \\ &= 3^3 \\ &= 27 \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, evaluamos $\log_3(27)$:

$$\log_3(27) = \log_3(3^3) = 3$$

Por lo tanto

$$\log_3\left(3^{\log_{\frac{1}{3}}(27)}\right) = \boxed{3}.$$

1.8 $\log_{10}(0.2) + \log_{10}(0.1) + \log_{10}(0.05)$

primero combinamos los términos utilizando la propiedad del logaritmo de la suma:

$$\begin{aligned} &\log_{10}(0.2) + \log_{10}(0.1) + \log_{10}(0.05) \\ &\qquad = \log_{10}(0.2 \times 0.1 \times 0.05) \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, multiplicamos los números dentro del logaritmo:

$$\log_{10}(0.2 \times 0.1 \times 0.05) = \log_{10}(0.001)$$

Finalmente, evaluamos el logaritmo base 10 de 0.001:

$$\log_{10}(0.001) = -3$$

Por lo tanto,

$$\log_{10}(0.2) + \log_{10}(0.1) + \log_{10}(0.05) = \boxed{-3}.$$

1.9 Un producto aumenta el 10% y a la semana siguiente vuelve a aumentar el 10%. ¿Qué porcentaje aumentó en total?

Para resolver el problema, calcularemos el aumento porcentual después de cada incremento del 10%.

Primer aumento del 10% Después del primer aumento del 10%, el producto aumentará en un 10% de su valor original. Por lo tanto, el nuevo valor será 100% + 10% = 110% del valor original.

Segundo aumento del 10%

Después del segundo aumento del 10%, el producto aumentará en un 10% de su nuevo valor. Por lo tanto, el nuevo valor será 110% + 10% = 121% del valor original.

Aumento total

El aumento total es la diferencia entre el nuevo valor y el valor original, expresado como un porcentaje del valor original.

$$\text{Aumento total} = 121\% - 100\% = 21\%$$

Por lo tanto, el producto aumentó en un $\boxed{21\%}$ **en total.**

1.10 Un automovil viaja a 80km/h y es pasado por una camioneta que viaja a velocidad constante. Luego de 6 segundos de haber pasado al automóvil, la camioneta se encuentra a 45 metros más adelante que el auto. ¿A qué veñpcodad va la camioneta?

Sea:

$$\begin{aligned} v_a &= 80 \text{ km/h} \\ t &= 6 \text{ s} \\ d &= 45 \text{ m} \\ v_c &= \text{velocidad de la camioneta (en km/h)} \end{aligned}$$

La velocidad del automóvil se puede convertir a metros por segundo (m/s) usando la relación 1 km/h $= \frac{5}{18}$ m/s:

$$v_a = 80 \times \frac{5}{18} = \frac{400}{18} \text{ m/s} = \frac{200}{9} \text{ m/s}$$

El desplazamiento del automóvil durante los 6 segundos es:

$$d_a = v_a \times t = \frac{200}{9} \times 6 = \frac{1200}{9} = \frac{400}{3} \text{ m}$$

El desplazamiento de la camioneta durante los 6 segundos es $d_c = d + d_a$.

Para encontrar la velocidad de la camioneta, usamos la fórmula de velocidad promedio:

$$v_c = \frac{d_c}{t}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v_c = \frac{d + d_a}{t} = \frac{45 + \frac{400}{3}}{6} = \frac{135 + 400}{18} = \frac{535}{18} \text{ m/s}$$

Finalmente, convertimos la velocidad de la camioneta a km/h:

$$v_c = \frac{535}{18} \times \frac{18}{5} = 107 \text{ km/h}$$

Por lo tanto, la velocidad de la camioneta es de 107 km/h.

1.11 El padre de Dexter compra varios packs de gaseosas de modo tal que Dexter demoraría 15 días en tomarla. Si el primo de Dexter, que consume el triple de gaseosas que Dexter, vino de visita y la gaseosa duró sólo 9 días. ¿Cuántos días estuvo de visita el primo?

Dexter consume $\frac{1}{15}$ de la cantidad total de gaseosas en un día.

El primo de Dexter consume $3 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$ de la cantidad total de gaseosas en un día.

Si la gaseosa duró 9 días, se consumió $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ de la cantidad total de gaseosas.

Durante la visita del primo se consumió $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ de la cantidad total de gaseosas.

Si el primo consume $\frac{1}{5}$ de la cantidad total de gaseosas en un día, y durante su visita se consumió $\frac{2}{5}$ de la cantidad total de gaseosas, entonces el primo de Dexter estuvo de visita durante $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = 2$ días.

Por lo tanto, el primo de Dexter estuvo de visita durante 2 días.

1.12 En una reunión, el promedio de los pesos de los 5 hombres es 70kg y el promedio de los pesos de las 4 mujeres es 61kg. El promedio de los pesos de las 9 personas es...

Para encontrar el promedio de los pesos de las 9 personas en total, podemos sumar los pesos de todos y luego dividir esa suma por el número total de personas.

Dado que hay 5 hombres y 4 mujeres, sumaremos los pesos de los hombres y los pesos de las mujeres por separado y luego los combinaremos para encontrar el promedio total.

Dado que el promedio de los pesos de los 5 hombres es de 70 kg, y hay 5 hombres en total, la suma total de los pesos de los hombres es

$$70 \times 5 = 350 \text{ kg.}$$

De manera similar, el promedio de los pesos de las 4 mujeres es de 61 kg, y hay 4 mujeres en total, entonces la suma total de los pesos de las mujeres es

$$61 \times 4 = 244 \text{ kg.}$$

Entonces, la suma total de los pesos de las 9 personas es

$$350 + 244 = 594 \text{ kg.}$$

Finalmente, para encontrar el promedio de los pesos de las 9 personas, dividimos la suma total de los pesos por el número total de personas:

$$\text{Promedio total} = \frac{\text{Suma total de los pesos}}{\text{Número total de personas}} = \frac{594}{9} = 66 \text{ kg.}$$

Por lo tanto, el promedio de los pesos de las 9 personas en total es de 66 kg.

1.13 La ecuación dada es:

$$2^{|x^7-3x^2+100|} = \frac{1}{3}$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales.

La función exponencial $2^{|x^7-3x^2+100|}$ siempre es positiva o cero, mientras que $\frac{1}{3}$ es positivo. Por lo tanto, no hay valores de x que hagan que la ecuación sea verdadera en el conjunto de los números reales.

1.14 La expresión dada es:

$$\frac{\frac{3}{7}+\frac{7}{3}}{\frac{29}{42}}$$

Para resolverla, primero sumamos los numeradores de las fracciones en el numerador:

$$\frac{3}{7}+\frac{7}{3} = \frac{3\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{7\cdot 7}{3\cdot 7} = \frac{9}{21}+\frac{49}{21} = \frac{9+49}{21} = \frac{58}{21}$$

Entonces, la expresión original se convierte en:

$$\frac{\frac{58}{21}}{\frac{29}{42}}$$

Luego, para dividir fracciones, multiplicamos la primera fracción por el inverso de la segunda fracción:

$$\frac{\frac{58}{21}}{\frac{29}{42}} = \frac{58}{21}\times\frac{42}{29} = \frac{58\cdot 42}{21\cdot 29} = \frac{2436}{609}$$

Finalmente, podemos simplificar la fracción si es posible:

$$\frac{2436}{609} = \frac{4\cdot 609}{609} = \frac{4}{1} = 4$$

Por lo tanto, la expresión es igual a 4.

1.15 Al hacer una serie de sumas con la calculadora, un estudiante advirtió que había sumado 25095 en lugar de 35,95. Para obtener el total correcto en un solo paso tiene que...

Entonces, el estudiante debe realizar la siguiente operación para corregir su error:

$$\text{Total Correcto} = \text{Total Incorrecto} - 25095 + 35.95$$

Expresado en términos de ecuación:

$$\text{Total Correcto} = \text{Total Incorrecto} - (25095 - 35.95)$$

$$\text{Total Correcto} = \text{Total Incorrecto} - 25059.05$$

Por lo tanto, el estudiante debe restar 25059.05 al total incorrecto para obtener el total correcto en un solo paso.

Expresiones dadas:

$$p = \frac{0.1}{0.3}$$
$$q = \frac{1}{0.3}$$
$$r = \frac{0.3}{1}$$

Calculamos cada expresión numérica:

$$p = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$
$$q = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$$
$$r = \frac{0.3}{1} = 0.3$$

Por lo tanto, el orden de p, q y r es:

$$\boxed{q > p \quad \text{y} \quad p < r}$$

1.16 La sulución de la ecuación $2x + 5 = 5x - 11$

Para resolver la ecuación $2x + 5 = 5x - 11$, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 5x - 11 \\ 2x - 5x &= -11 - 5 \\ -3x &= -16 \\ x &= \frac{-16}{-3} \\ x &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = \frac{16}{3}$.

1.17 Si en la ecuación $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ se reemplaza $x = 2$ e $y = 3$, el valor de z es ...

Para resolver la ecuación y encontrar el valor de z cuando $x = 2$ e $y = 3$, procedemos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{z}$$

Restamos $\frac{1}{3}$ de ambos lados:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{z}$$

Invertimos ambos lados para encontrar z:

$$z = \frac{6}{1} = 6$$

Por lo tanto, el valor de z cuando $x = 2$ e $y = 3$ es $z = 6$.

1.18 $6(3 - x) - 2(1 - x)$ se simplifica a...

Para simplificar la expresión $6(3 - x) - 2(1 - x)$, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 6(3 - x) - 2(1 - x) &= 6 \cdot 3 - 6 \cdot x - 2 \cdot 1 + 2 \cdot x \\ &= 18 - 6x - 2 + 2x \\ &= (18 - 2) + (-6x + 2x) \\ &= 16 - 4x \end{aligned}$$

Entonces, la expresión simplificada es $16 - 4x$.

1.19 $$\frac{100^2 \times 21^4 \times 27^2}{2 \times 6^5 \times 15^2 \times 25^4}$$ se simplifica a

Para simplificar la expresión

$$\frac{100^2 \times 21^4 \times 27^2}{2 \times 6^5 \times 15^2 \times 25^4}$$

y obtener el resultado 27**, primero evaluemos las potencias de cada número. Observamos que** $100 = 10^2$**,** $21 = 3 \times 7$**,** $27 = 3^3$**,** $6 = 2 \times 3$**,** $15 = 3 \times 5$**, y** $25 = 5^2$**.**

Entonces, reemplazamos estos valores en la expresión original:

$$\frac{(10^2)^2 \times (3 \times 7)^4 \times (3^3)^2}{2 \times (2 \times 3)^5 \times (3 \times 5)^2 \times (5^2)^4}$$

Simplificamos cada término:

$$\frac{10^4 \times 3^4 \times 7^4 \times 3^6}{2 \times 2^5 \times 3^5 \times 5^4 \times 3^2 \times 5^8}$$

Agrupamos términos semejantes:

$$\frac{10^4 \times 7^4 \times 3^{10}}{2^6 \times 3^7 \times 5^8}$$

Dividimos cada término por el mayor factor común posible:

$$\frac{10^4 \times 7^4 \times 3^{10}}{2^6 \times 3^7 \times 5^8} = \frac{7^4 \times 3^7 \times 3^3}{2^6 \times 5^8} = \frac{7^4 \times 3^{10}}{2^6 \times 5^8}$$

Ahora, podemos observar que $3^{10} = (3^3)^3 = 27^3$**, entonces:**

$$\frac{7^4 \times 3^{10}}{2^6 \times 5^8} = \frac{7^4 \times (27)^3}{2^6 \times 5^8} = \frac{7^4 \times 27^3}{2^6 \times 5^8} = \frac{7^4 \times 27}{2^6 \times 5^3} = 27$$

Entonces, la expresión original se simplifica a 27**.**