Universidad AUTÓNOMA de Occidente

<u>Sección 5.1</u> Grafos y sus Representaciones. Pág. 340

Definición (Informal): Grafos. Un grafo es un conjunto no vacío de nodos (vértices) y un conjunto de arcos (arista ó borde), tal que cada arco conecta dos nodos.

Los grafos estudiados en este curso siempre tendrán un conjunto finito de nodos y arcos.

Ejemplo 2 Pág. 342. En el grafo hay 5 nodos y 6 arcos. El arco a_1 conecta los nodos 1 y 2, el arco a_3 conecta los nodos 2 y 2, y así sucesivamente.

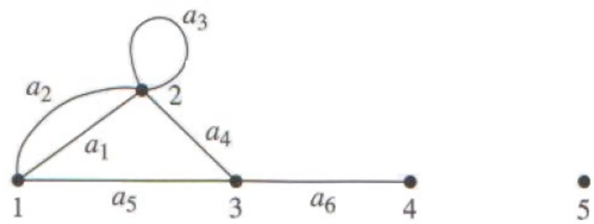


FIGURE 5.3

Definición (Formal): Grafo. Un grafo es una tripleta ordenada (N, A, g) donde
N = un conjunto no vacío de nodos.
A = un conjunto de arcos.
g = una función asociando cada arco a a un par no ordenado ***x-y*** de nodos llamados los puntos extremos de a.

Ejemplo 3 Pág. 342. Para el grafo anterior, la función g que asocia cada arco con puntos extremos tiene el siguiente mapeo:

g(a_1) = 1-2, g(a_2) = 1-2, g(a_3) = 2-2, g(a_4) = 2-3, g(a_5) = 1-3, g(a_6) = 3-4

Definición (Formal): Grafo dirigido. Un grafo es una tripleta ordenada (N, A, g) donde
N = un conjunto no vacío de nodos.
A = un conjunto de arcos.
g = una función asociando cada arco a a un par ordenado (***x,y***) de nodos, donde ***x*** es un punto inicial y ***y*** es el punto final de a.

En un grafo dirigido hay una dirección asociada con el arco.

Ejemplo 4 Pág. 343. La siguiente figura muestra un grafo dirigido. Hay 4 nodos y 5 arcos. La función g asociando arcos con puntos extremos muestra el mapeo g(a_1) = (1, 2) quiere decir que el arco a_1 **empieza** en el nodo 1 y termina en el nodo 2. También g(a_3) = (1, 3), pero g(a_4) = (3, 1).

<u>Aplicaciones de grafos:</u> En los modelos entidad relación en bases de datos relaciones, en redes neuronales, en modelos de transporte, en tipologías de las redes, etc.

<u>Terminología de Grafos.</u>

Universidad AUTÓNOMA de Occidente

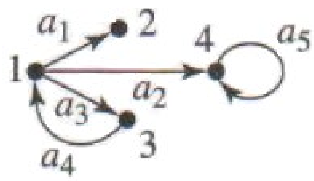


FIGURE 5.4

- Nodo adyacente: Puntos extremos asociados.
- Un **loop** en un grafo, es un arco con puntos n-n, para algún nodo n.
- 2 arcos con los mismos extremos se denominan **arcos paralelos**.
- Un **grafo simple** es un grafo sin loops y sin arcos paralelos.
- Un **nodo aislado** es un nodo no adyacente a otro.
- El **grado de un nodo** es el número de arcos que llegan a él.
- Una **trayectoria** desde un nodo n_0 a n_k es una secuencia n_0 , a_0, n_1 , a_1, . . . a_{k-1} , n_k de nodos y arcos donde cada i, los extremos de a_i son n_i-n_{i+1}.
- La **longitud de una trayectoria** es el número de arcos que ella contiene. Si un arco es usado más de una vez en una trayectoria, se cuenta las veces que se use.
- Un grafo es **completo** si cualquier dos nodos distintos son adyacentes.
- Un grafo es **conectado** si existe una trayectoria desde cualquier nodo a otro nodo.
- Un **ciclo** en un grafo es una trayectoria desde algún nodo n_o hasta él mismo, donde no aparecen arcos más de una vez en la trayectoria y n_o es el único nodo que aparece más de una vez, al comienzo y al final.
- Un grafo sin ciclos es **acíclico**.

Consideremos ahora el siguiente grafo. Este no es un grafo completo porque no es verdad que todo nodo es adyacente a cualquier otro nodo. Sin embargo, los nodos pueden ser divididos en 2 conjuntos disyuntos {1, 2}, {3, 4, 5} tales que cualquier par de nodos escogidos del mismo conjunto no son adyacentes, pero cualquier par de nodos escogidos uno de cada conjunto, son adyacentes. Este tipo de grafo se denomina **grafo completo bipartito.**

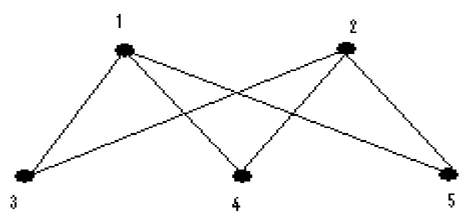


FIGURA 5.12

Definición: Un grafo es un **grafo completo bipartito**, si los nodos pueden ser particionados en dos conjuntos disyuntos no vacíos N_1 y N_2 tal que 2 nodos **x** y **y** son adyacentes, si y solamente si, **x** $\in N_1$ y **y** $\in N_2$. Si $|N_1| = m$ y $|N_2| = n$, tal grafo se denota por $K_{m,n}$.

Práctica 5. 348. Dibuje $K_{3,3}$.

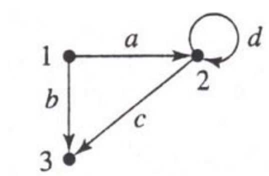
Si una trayectoria existe desde un nodo n_0 al nodo n_k , entonces se dice que n_k es alcanzable desde n_0.

Práctica 6. 348. a. Pruebe que todo grafo completo es conectado.

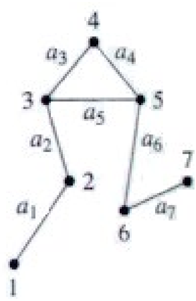
b. Encuentre un grafo conectado que no es completo.

Ejercicios 5.1 Pag. 361

1. Describa la función g que es parte de la definición formal de grafo dirigido.

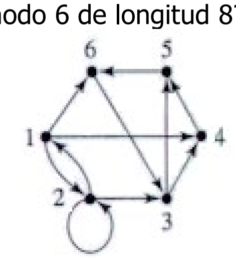


2. Responda las siguientes preguntas acerca del grafo.
   a. ¿Es un grafo simple?
   b. ¿Es un grafo Completo?
   c. ¿Es un grafo conectado?
   d. ¿Puede usted encontrar 2 trayectorias desde el nodo 3 al nodo 6?
   e. ¿Puede usted encontrar un ciclo?
   f. ¿Puede usted encontrar un arco el cual al ser removido volvería el grafo acíclico?
   g. ¿Puede usted encontrar un arco al cual al removerlo convierta al grafo en no conectado?



3. Dibuje un grafo que cumpla con cada una de las siguientes características.
   a. Grafo simple con 3 nodos, cada uno de grado 2.
   b. Grafo con 4 nodos, con ciclos de longitud 1, 2, 3 y 4.
   c. Grafo no completo con 4 nodos, cada uno de grado 4.

4. Use el presente grafo para responder las preguntas.
   a. ¿Cuáles nodos son alcanzables desde el nodo 3?
   b. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria más corta desde el nodo 3 hasta el nodo 6?
   c. ¿Cuál es la trayectoria del nodo 1 al nodo 6 de longitud 8?



Grafos Isomorfos

Dos grafos pueden parecer visualmente distintos, pero estructuralmente ser el mismo.

f_1: $1 \to a$ $\quad$ f_2: $a_1 \to e_2$
$2 \to c$ $\quad$ $a_2 \to e_1$
$3 \to b$
$4 \to d$

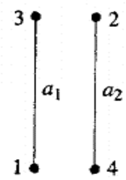


FIGURE 5.14

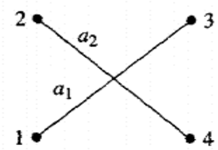


FIGURE 5.15

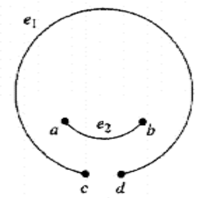


FIGURE 5.16

Estructuras que son la misma excepto por los nombres de sus arcos y nodos (re-etiquetar) son llamados estructuras isomorfas ó isomórficas.
Para mostrar que 2 estructuras son isomorfas, debemos producir re- etiquetada uno a uno sobre los elementos de las 2 estructuras y luego mostrar que las propiedades importantes de las estructuras se preservan. La "propiedad importante" en un grafo, es que arcos están conectados con que nodos.

Definición: Grafos Isomorfos. Dos grafos (N_1, A_1, g_1) y (N_2, A_2, g_2) son isomorfos, si existen funciones biyectivas f_1: N_1 ----→ N_2 y f_2: A_1---→ A_2 tales que para cada arco $a \in A_1$, $g_1(a) = x - y$ si y solo si $g_2[f_2(a)] = f_1(x) - f_1(y)$.

Ejemplo 11. Pág. 350 Los siguientes grafos son isomorfos

f_1: $1 \to c$ $\quad$ f_2: $a_1 \to e_1$
$2 \to e$ $\quad$ $a_2 \to e_4$
$3 \to d$ $\quad$ $a_3 \to e_2$
$4 \to b$ $\quad$ ⋮
$5 \to a$

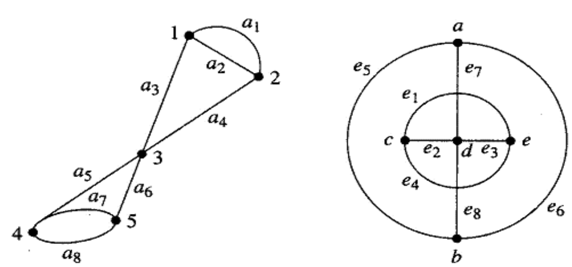


FIGURE 5.17

Usando estas biyecciones $g_1(a_3) = 1 - 3$ y $g_2[f_2(a_3)] = g_2(e_2) = c - d = f_1(1) - f_1(3)$.

Para probar que los grafos son isomorfos, debemos completar la definición de la función f_2 y luego demostrar que la relación arco - puntos extremos (nodos) se mantiene sobre este mapeo examinando todos los posibles casos.

Práctica 7. Pág. 350 Complete la definición de la función f2 del ejemplo anterior.

Teorema. Isomorfismo sobre un grafo simple. Dos grafos simples (N_1, A_1, g_1) y (N_2, A_2, g_2) son isomorfos si hay una biyección f: N_1 ----→ N_2 tal que para cualquier nodos n_i y n_j de N_1, n_i y n_j son adyacentes si y solo si f(n_i) y f(n_j) son adyacentes. La función f se denomina un isomorfismo del grafo 1 al grafo 2.

Práctica 8. Pág. 351 Encuentre un isomorfismo del grafo (a) al grafo (b).

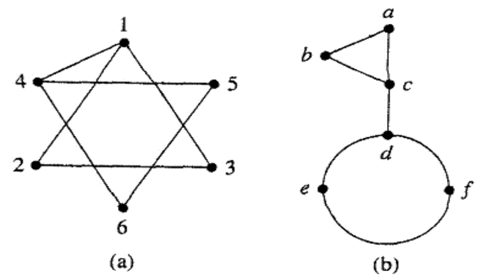


FIGURE 5.18

Probar que 2 grafos son isomorfos requiere encontrar la biyección ó biyecciones (grafos no simples) y luego mostrar que la propiedad de adyacencia (relación arco - puntos extremos (nodos)) es preservada.
Para probar que 2 grafos no son isomorfos, debemos mostrar que las biyecciones no existen (nada fácil). Hay ciertas condiciones sobre las cuales es claro que dos grafos no son isomorfos, estas son:

1. Un grafo tiene más nodos que el otro.
2. Un grafo tiene más arcos que el otro.
3. Un grafo tiene arcos paralelos y el otro no.
4. Un grafo tiene un loop y el otro no.
5. Un grafo tiene un nodo de grado k y el otro no.
6. Un grafo es conectado y el otro no.
7. Un grafo tiene un ciclo y el otro no.

Práctica 9. Pág. 351 Pruebe que los dos grafos de la siguiente figura no son isomorfos.

Figura 5.19

Ejemplo 12. Pág. 350 Pruebe que los dos grafos de la siguiente figura no son isomorfos

Figura 5.20

Universidad AUTÓNOMA de Occidente

Matriz de adyacencia ó Matriz adyacente
Lista de adyacencia ó Lista adyacente

Definición: Supongamos un grafo que tiene n nodos, n_1, n_2, n_3, **. . .** n_n. con un ordenamiento arbitrario de nodos. Podemos formar una matriz n x n donde la entrada i,j es el número de arcos entre los nodos n_i y n_j. Esta matriz es llamada **Matriz de adyacencia A** del grafo de acuerdo al ordenamiento de sus nodos.

Ejemplo 17. Pág. 357 Elabore la matriz de adyacencia del siguiente grafo.

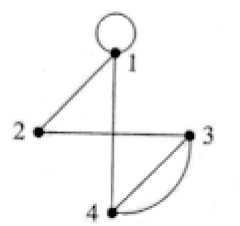


FIGURE 5.25

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 18. Pág. 358 Elabore la matriz de adyacencia del siguiente grafo.

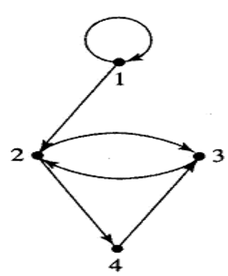


FIGURE 5.26

$$A = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix}$$

Definición: Un grafo con relativamente pocos arcos puede ser representado más eficientemente almacenado solamente las entradas distintas de cero en la matriz de adyacencia. Esta representación consiste de una lista para cada nodo de todos los nodos adyacentes a él. Punteros son usados para llegar de un ítem de la lista al próximo. Tal ordenamiento es llamado Lista Encadenada. Hay un arreglo de n punteros, uno para cada nodo para llegar a cada lista. Esta representación de la **lista de adyacencia**, aunque requiere almacenamiento extra para los punteros, puede ser aun más eficiente que una matriz de adyacencia.

Universidad
AUTÓNOMA
de Occidente

Ejemplo 19. Pág. 359 La lista de adyacencia para el grafo de la figura del ejemplo 17 contiene un arreglo de 4 elementos de punteros, uno para cada nodo. Los punteros de cada nodo apuntan a un nodo adyacente, los cuales apuntan a otro nodo adyacente y así continúa. La estructura de la lista de adyacencia se muestra en la siguiente figura.

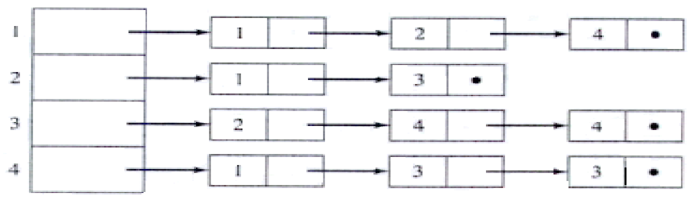


FIGURE 5.27

En la figura los puntos indican punteros nulos, mostrando que no hay más nodos adyacentes ó que se ha llegado al último nodo de la lista.

Práctica 17. Pág. 360 Dibuje la lista de adyacencia que representa al grafo de la siguiente figura.

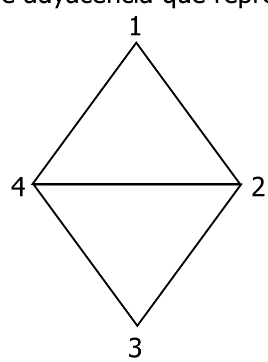


Figura 5.28

Ejemplo 20. Pág. 360 La figura (a) muestra un grafo dirigido con peso y la figura (b) muestra la lista de a adyacencia correspondiente al grafo. Para cada registro en la lista el primer dato es el nodo, el segundo es el peso del arco y el tercero es el puntero.

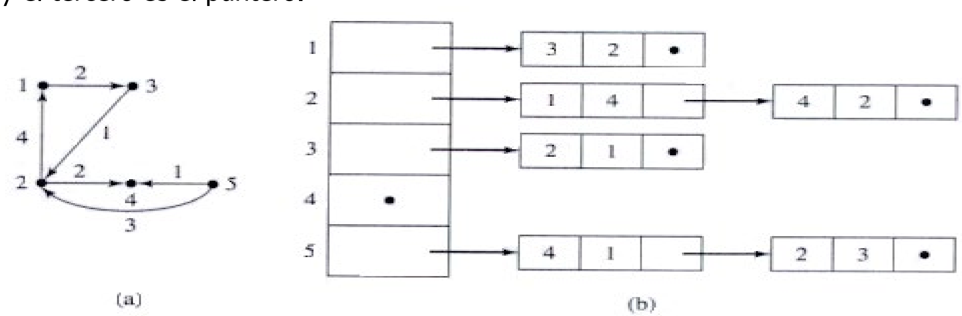


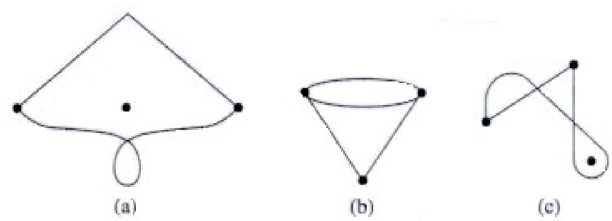
FIGURE 5.29

<u>EJERCICIOS</u> 5.1 Pág. 361

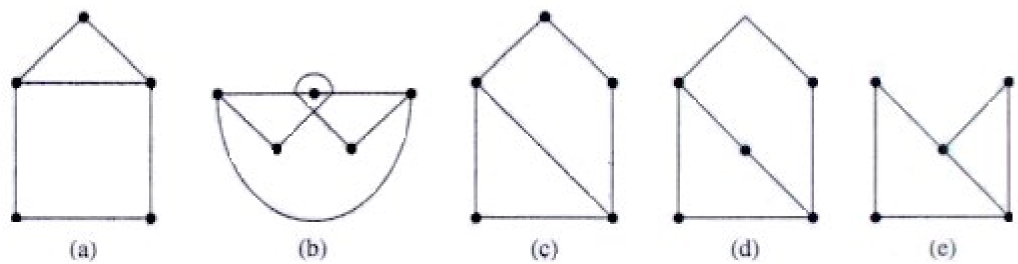
6. Para cada una de las siguientes características, dibuje un grafo ó explique por qué tales grafos no existen.

a. cuatro nodos de grados 1, 2, 3 y 4 respectivamente.
b. Simple, cuatro nodos de grados 1, 2, 3 y 4 respectivamente.
c. Cuatro nodos de grado 2, 3, 3 y 4 respectivamente.
d. Cuatro nodos de grado 2, 3, 3 y 3 respectivamente.

7. ¿Cuáles de los siguientes grafos no son isomorfos entre ellos y por qué?

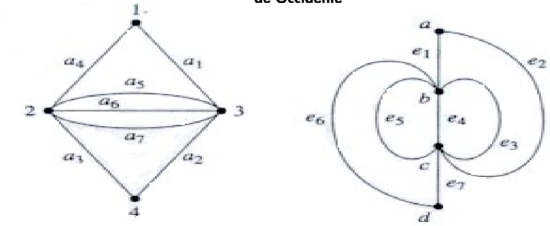


8. ¿Cuáles de los siguientes grafos no son isomorfos entre ellos y por qué?



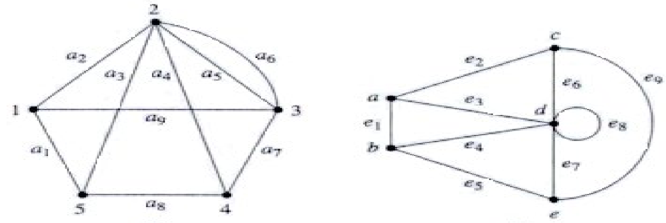
Para los ejercicios 9 al 12 decida si los dos grafos son isomorfos. Si es así, describa la función ó las funciones que establecen el isomorfismo; y si no, explique por que.

★9.



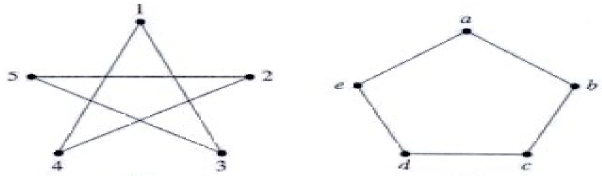
(a) (b)

10.



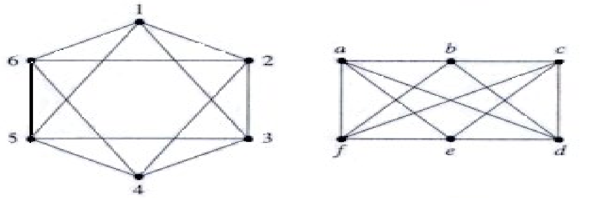
(a) (b)

11.



(a) (b)

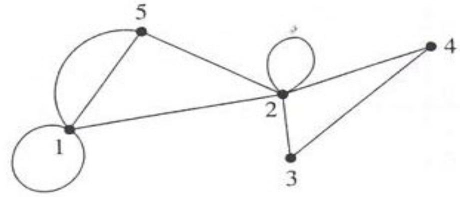
12.



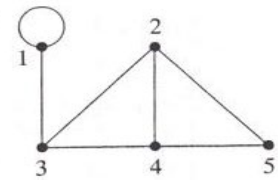
(a) (b)

Para los ejercicios 31 al 36 escriba la matriz y lista de adyacencia para los grafos especificados.

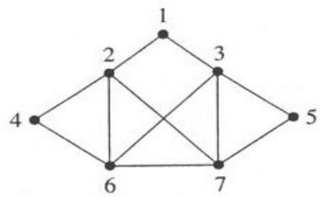
★31.



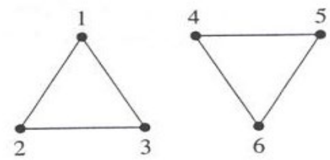
32.



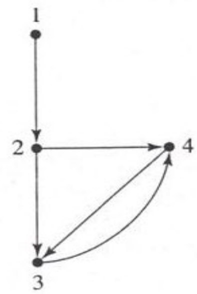
33.



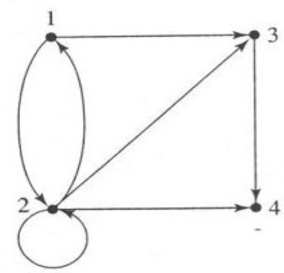
34.



★35.



36.



Para los ejercicios 37 al 40 dibuje el grafo representado por la matriz de adyacencia.

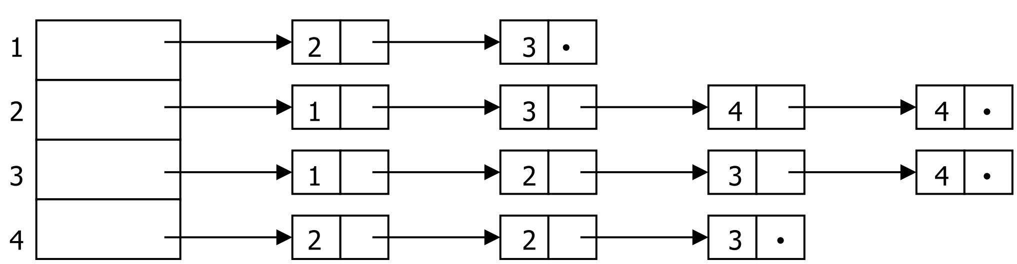
★37. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

★39. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

56. Dibuje un grafo no dirigido representado por la siguiente lista de adyacencia.



57. Dibuje un grafo dirigido representado por la siguiente lista de adyacencia.

Universidad AUTÓNOMA de Occidente