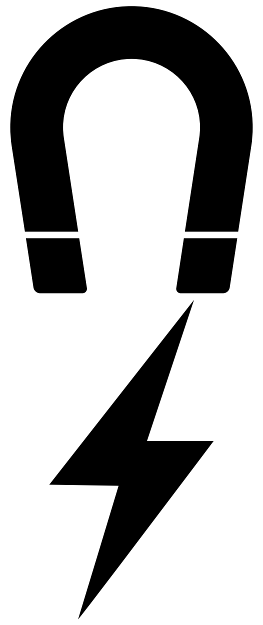
Ecuaciones de Maxwell



Un breve resumen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Física General IV

Maximiliano A. Rivera Urrejola

Departamento de Física UTFSM

Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell resumen las leyes de la naturaleza que gobiernan el comportamiento de los campos Eléctricos y Magnéticos, consecuencia de cargas eléctricas en reposo y en movimiento

Escritas en forma integral		Escritas en forma diferencial
$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$	Ley de Gauss	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	Ausencia de Monopolos Magnéticos	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\oint_{cS} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$	Ley de Faraday	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
$\oint_{cS} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$	Ley de Ampere-Maxwell	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Maximiliano A. Rivera Urrejola

Ley de Gauss

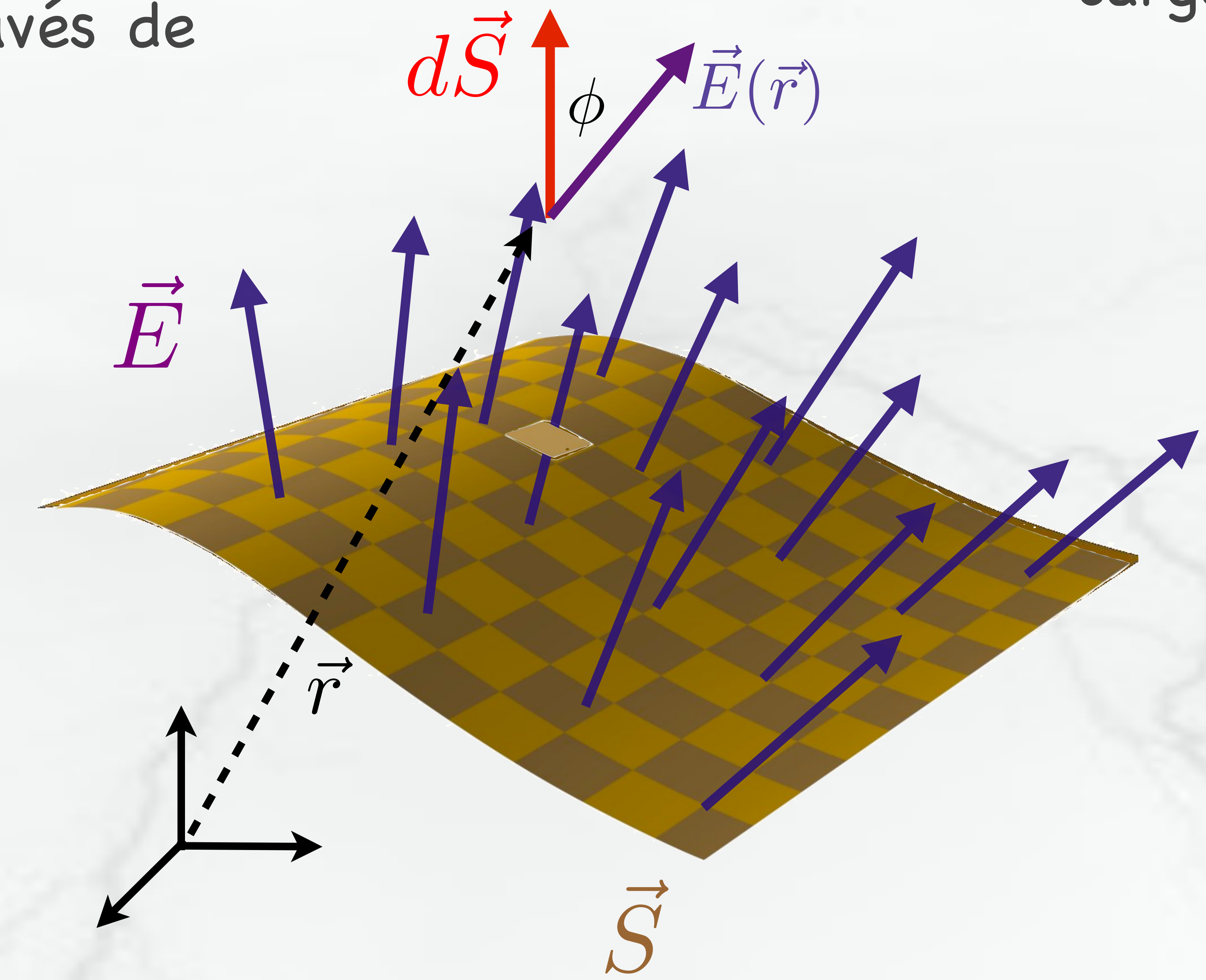
Para una superficie dada $\vec{S}$ se tiene un campo vectorial $\vec{E}$ definido en todo punto de la superficie. Entonces el flujo Φ_E de este campo a través de dicha superficie se define como:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

donde $$d\vec{S} = dA\,\hat{n}$$

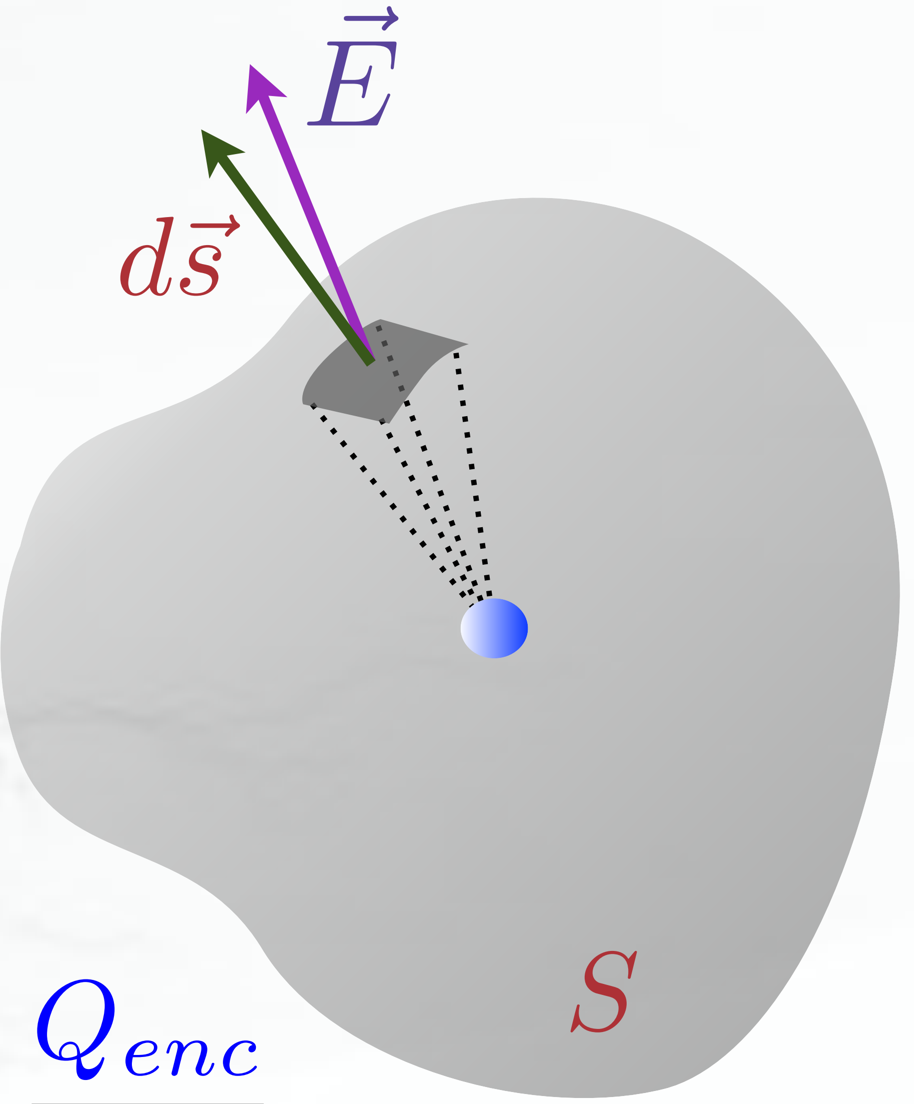
en términos de cantidades escalares

$$\Phi_E = \int_A E\cos\phi\, dA$$

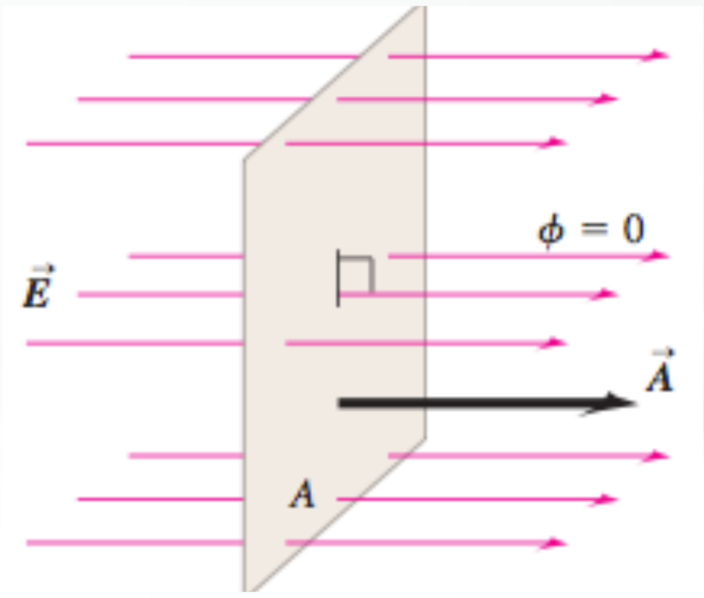


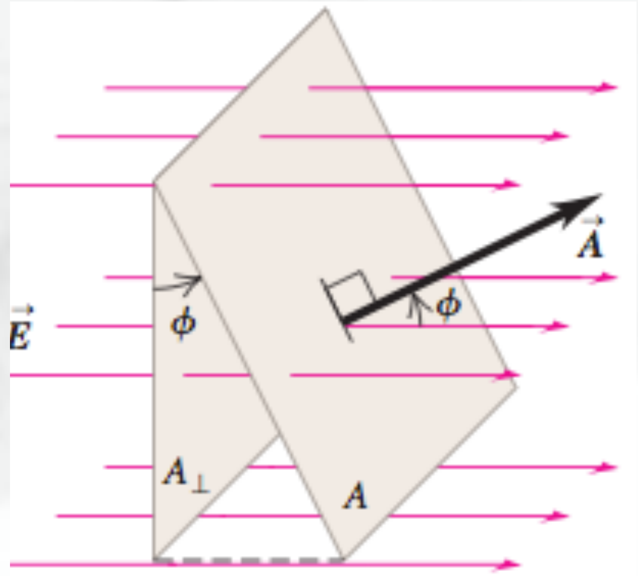
El flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada S . Es proporcional a la carga eléctrica encerrada por esta.

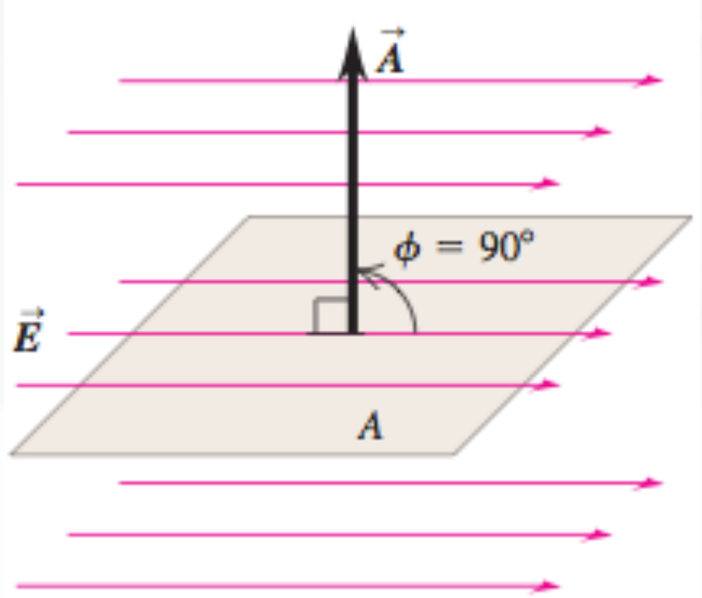
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

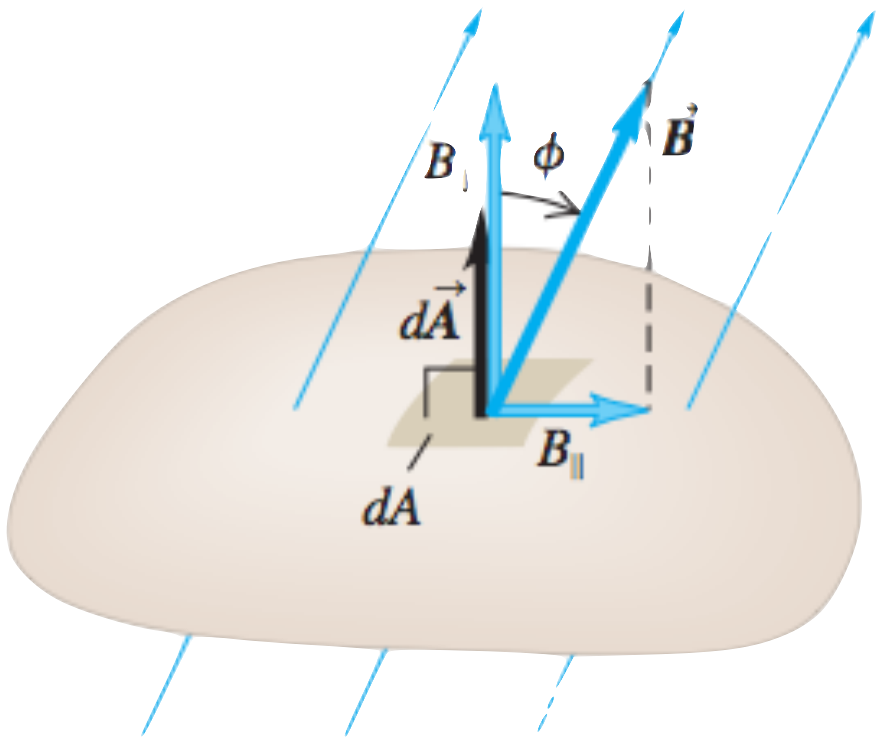






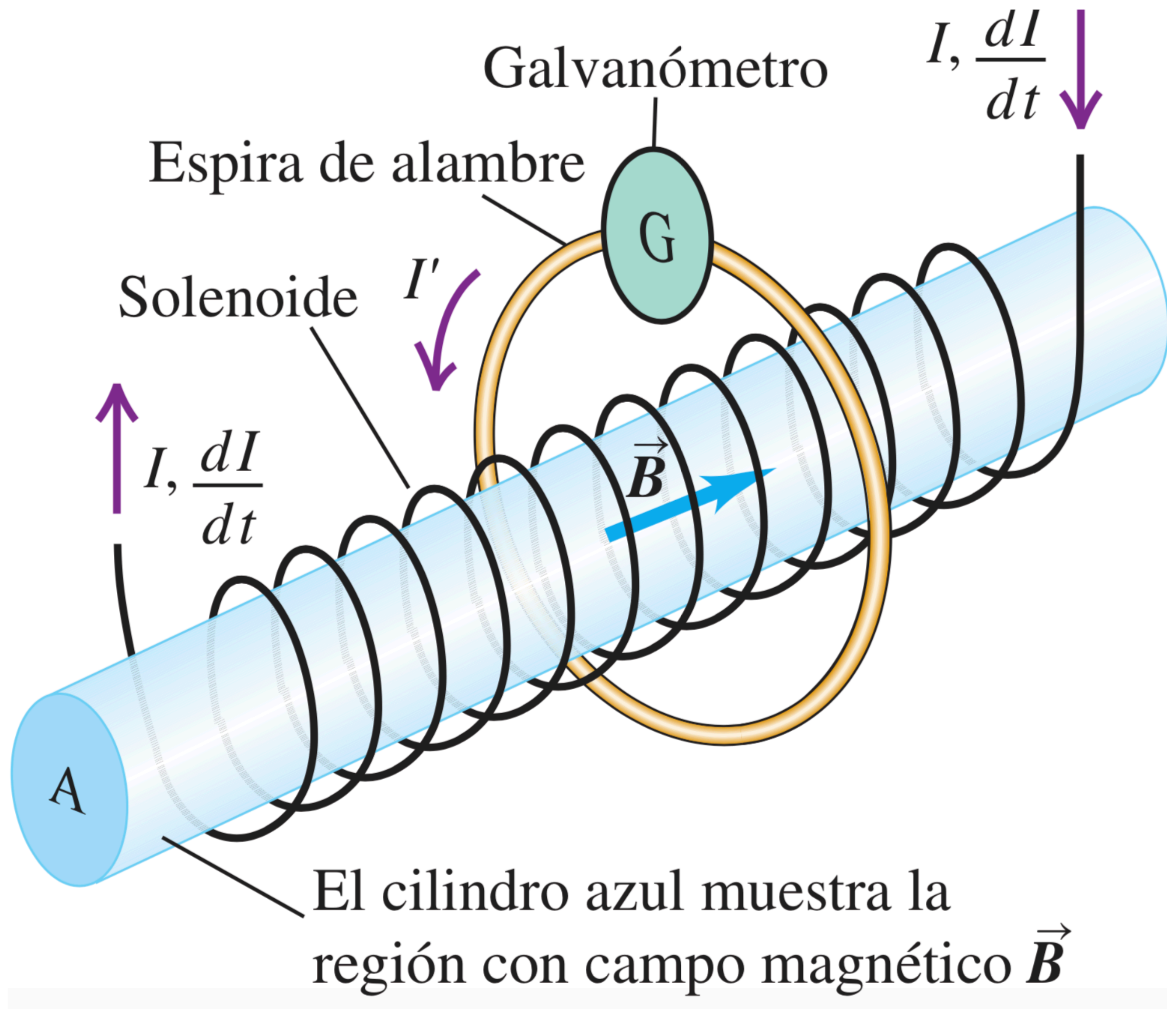
Ley de Faraday

Considere una superficie caracterizada por un vector normal A, la que se somete a un campo magnético B



El Flujo magnético a través de un elemento de superficie dA vine dado por

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



La ley de Faraday establece que:

La FEM inducida en una espira cerrada es igual a "menos" la variación temporal del flujo magnético

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Medimos una corriente I' en el amperímetro

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon$$

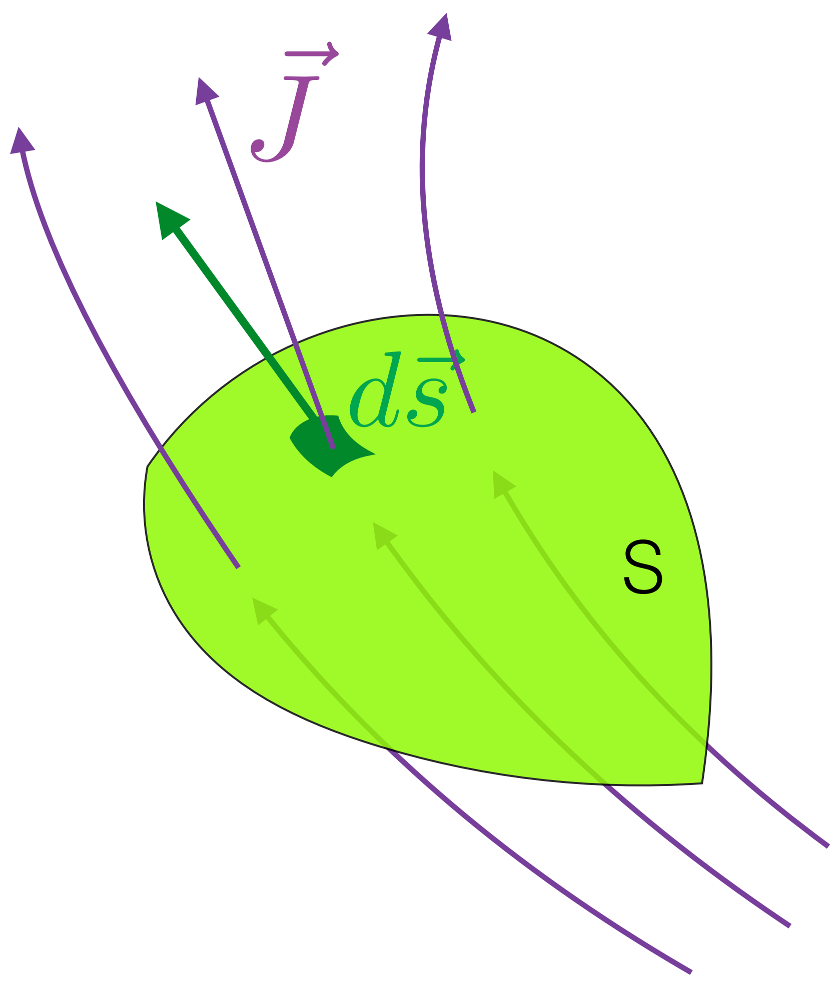
Finalmente

$$\boxed{\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

Ley de Ampère Maxwell

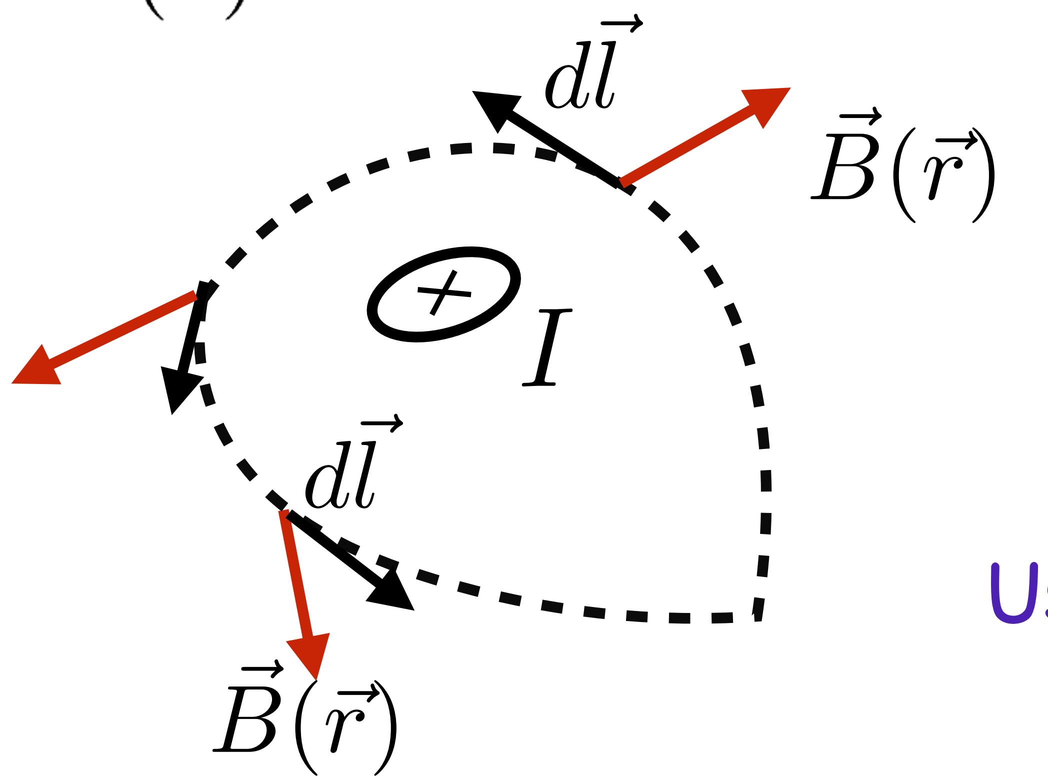
La ley de Ampère establece que: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Integrando en una superficie $\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$

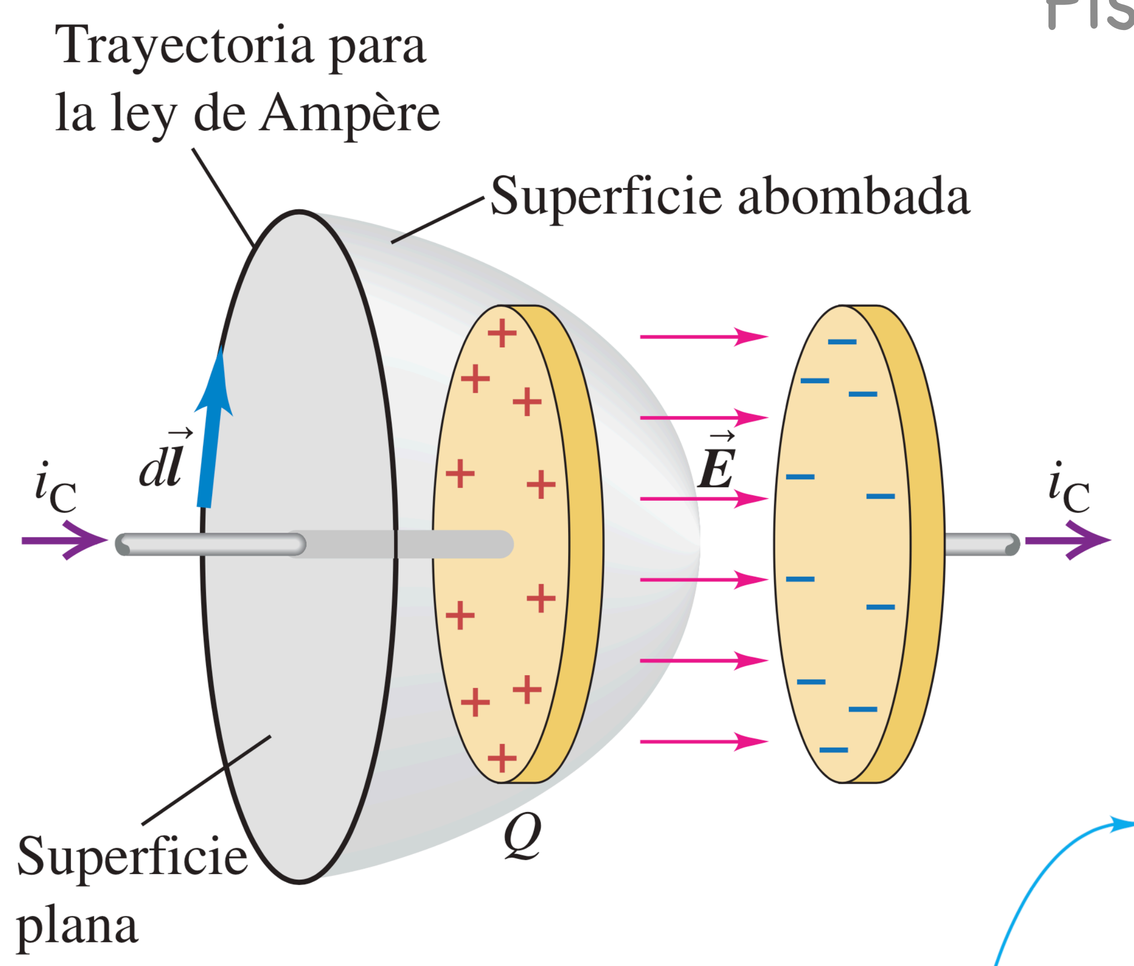


Por el Teorema de Stoke

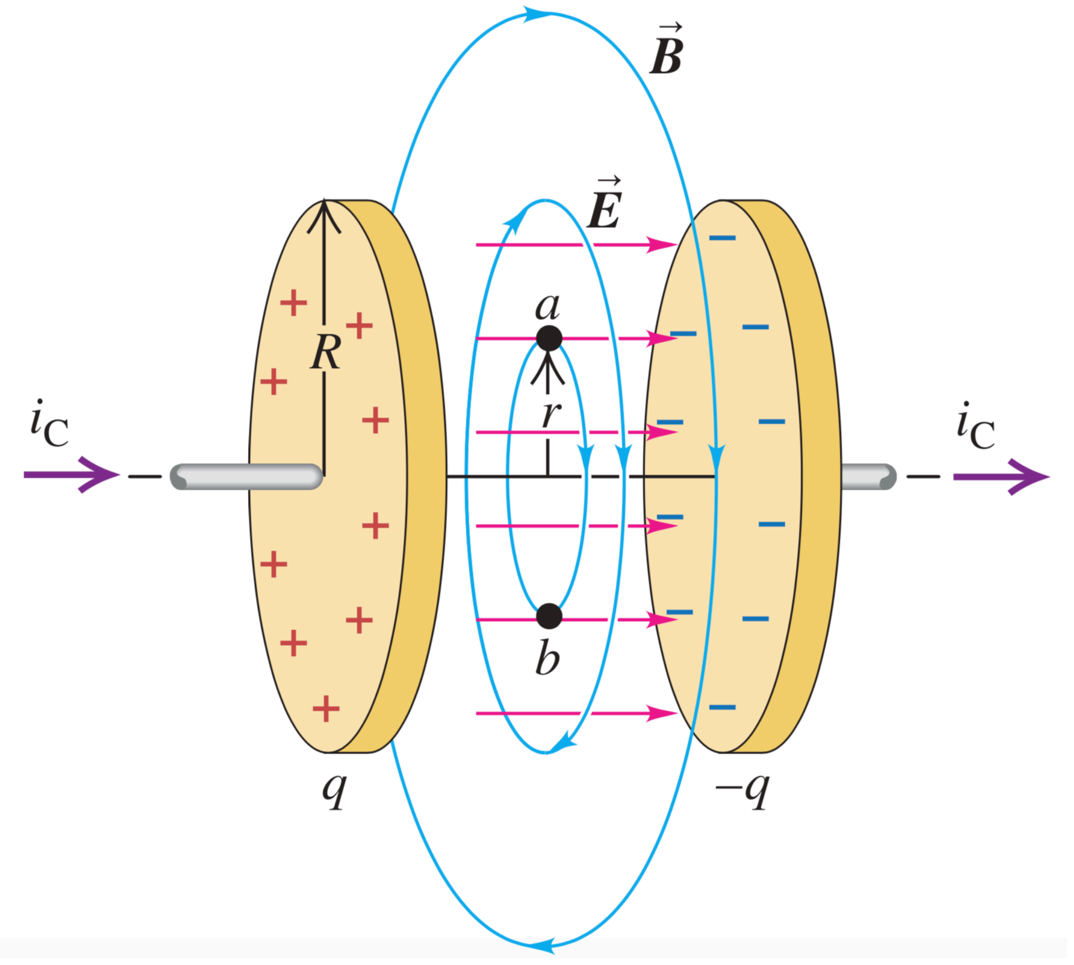
$$\oint_{c(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



Representación en el contorno



¿Qué relación tiene esta corriente con el campo magnético?



$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\oint_{c_S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Usando Stoke a la inversa $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maximiliano A. Rivera Urrejola

Ondas EM en el vacío

$$(\rho = 0, \vec{J} = 0)$$

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Usando la identidad: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$

De esta forma, igualando

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Las ecuaciones de Onda

Ondas EM en el vacío

$$(\rho = 0, \vec{J} = 0)$$

Ecuación de Onda para el Campo Eléctrico

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Se puede realizar igual proceso para B

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

La permeabilidad y permisividad se relacionan con la velocidad de la luz

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Se puede demostrar que si el la Onda Electromagnética se propaga en dirección $\vec{k}$

Los Campos E y B apuntan en direcciones tales que:

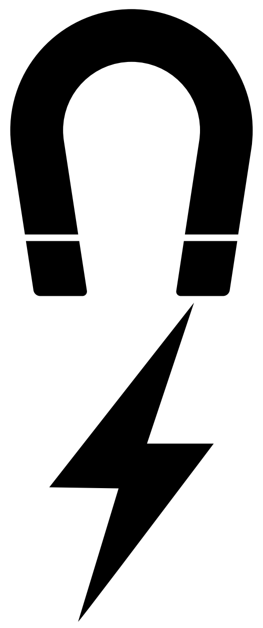
$$\vec{k} \perp \vec{E}$$
$$\vec{k} \perp \vec{B}$$

Con $\vec{E} \perp \vec{B}$

Maximiliano A. Rivera Urrejola

Fin

Ecuaciones de Maxwell



Un breve resumen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Física General IV

Maximiliano A. Rivera Urrejola

Departamento de Física UTFSM