**Profesor**: Felipe Osorio **Ayudante**: Nicolás Alfaro
**Contacto**: nicolas.alfaro@sansano.usm.cl
**Semestre**: 2021-2 (Primavera 2021)

# Ayudantía 5

27 de Octubre, 2021

## Problemas

**P1** Suponga que $X_1, \dots, X_m$ es una muestra aleatoria IID, y $Y_1, \dots, Y_n$ otra muestra IID que a su vez es independiente con la primera, si es que se tiene que

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda)\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$$
$$Y_j \sim \text{Exp}(\lambda\theta)\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Encuentre entonces el estimador máximo verosímil de $\theta$ y $\lambda$

**P2** Suponga que un particular gen tiene como variantes 2 alelos A y a, donde el alelo A tiene una frecuencia $\theta$ en la población, o en otras palabras, que una muestra aleatoria de un gen presenta la variación A con probabilidad $\theta$ y a con probabilidad $1-\theta$. Suponga que observa de una muestra aleatoria la siguiente proporción de un genotipo (conjunto de genes) de 2 genes.

| Genotipo | AA | Aa | aa |
|---|---|---|---|
| Proporción | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |

Encuentre entonces el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$

**P3** Suponga que $\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_n}$ es una muestra aleatoria desde una población $\mathcal{N}_p(\mu, I_p)$. Si $\mu$ está definida sobre la esfera unitaria, demuestre que el estimador de máxima verosimilitud de $\mu$ viene dado por

$$\mu = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\bar{X}^T \bar{X}}}$$

**P4** Suponga que $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria proveniente de una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, suponga además que $X_i$ no es observable y en cambio, se observan otras variables aleatorias $Y_1, \dots, Y_n$ donde

$$Y_i = k\delta \quad \text{si} \quad k\delta \leq X_i < (k+1)\delta$$

Donde $\delta > 0$ es conocido. Encuentre entonces el estimador de máxima verosimilitud de $\lambda$ basado en $Y_1, \dots, Y_n$

$\boxed{\textbf{P5}}$ Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una muestra aleatoria IID con función de densidad asociada dada por

$$f(x) := \begin{cases} e^{\theta - x} & x \geq \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre entonces el estimador máximo verosímil de $\theta$.

**Demostración** Notemos que si se procede de manera descuidada, se podría llegar a la siguiente conclusión errónea.
Definiendo la "función de Log-verosimilitud"

$$\begin{aligned} L(\theta; X) &= \prod_{i=1}^{n} e^{\theta - x_i} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)\right\} = \exp\left\{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \\ \Longrightarrow l(\theta, X) &= n\theta - \sum_{i}^{n} x_i \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}l(\theta, X)}{\mathrm{d}\theta} &= n \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}l(\theta, X)}{\mathrm{d}\theta} = 0 \iff n = 0 \quad \boxed{?} \end{aligned}$$

Donde el problema radica en el hecho de que el soporte depende del parámetro de interés y por ende no es indiferente a la maximización mediante Teorema de Fermat (derivar e igualar a 0).
El procedimiento correcto por lo tanto sería definir correctamente la función de verosimilitud mediante una función $\mathbb{1}$ indicatriz, es decir:

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^{n} e^{\theta - x_i} \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_i)$$

que utilizando el hecho de que

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_i) = \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_{(i)})$$

donde $x_{(i)}$ es el menor valor de la muestra, entonces esta se simplifica a

$$L(\theta; X) = \exp\{n\theta\} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_{(i)})$$

Luego como el término $\exp\{n\theta\}$ es creciente en $\theta$, se sigue que la función alcanza su máximo en el mayor $\theta$ posible tal que

$$\mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_{(i)})$$

sea distinta de 0, o en otras palabras $\theta \leq x_{(i)}$ y por lo tanto el mayor $\theta$ posible que cumple con esta restricción es

$$\theta_{MV} = x_{(i)}$$

que es el estimador máximo verosímil buscado ■