Profesor: Felipe Osorio **Ayudante**: Nicolás Alfaro
Contacto: nicolas.alfaro@sansano.usm.cl
Semestre: 2021-2 (Primavera 2021)

Ayudantía 7.5

13 de Octubre, 2021

Problemas

P1 Sea $\{Y_i\}_{i=1}^n$ observaciones que siguen un modelo de regresión lineal simple respecto a variables regresoras $\{\mathbf{X_i}\}$, es decir

$$Y_i = X_i^\top \beta_0 + e_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

o equivalentemente en su forma matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta_{\mathbf{0}} + \mathbf{e}$$

Asuma los siguientes supuestos estándar de regresión lineal

- X es una matriz no aleatoria nxp con $n > p$
- X es matriz de rango completo ($\text{rg}(X) = p$)
- Cada Y_i es observable
- e_i son variables aleatorias IID, tal que $E[e_i] = 0$ y $Var[e_i] = \sigma^2$ para todo i

Suponga además que $\frac{\mathbf{X}^\top\mathbf{X}}{n} \to M > 0$ uniformemente, donde M es una matriz definida positiva. Concluya entonces que el estimador de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_n$ es consistente , es decir $\hat{\beta}_n \xrightarrow{\text{P}} \beta_0$

P2 Usando las mismas suposiciones del problema anterior. Concluya que el estimador de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_n$ es asintóticamente normal. Más específicamente que

$$\sqrt{n}(\beta_n - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 M^{-1})$$

Hint: Puede ser de utilidad el siguiente resultado consecuencia del TLC de Linderberg-Feller

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2X^\top e) \xrightarrow{d} N(0, 4\sigma^2 M)$$