

**Profesor:** Felipe Osorio    **Ayudante:** Nicolás Alfaro  
**Contacto:** nicolas.alfaro@sansano.usm.cl  
**Semestre:** 2021-2 (Primavera 2021)

## AYUDANTÍA 8

25 de Noviembre, 2021

### PROBLEMAS

**P1** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria IID proveniente de una distribución normal con media  $\theta$  y varianza 1 ( $N(\theta, 1)$ ), entonces un intervalo de confianza del 95% para  $\theta$  viene dado por

$$[\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$$

Sea  $p$  la probabilidad de que una observación adicional  $X_{n+1}$  pertenezca a este intervalo. Determine entonces si  $p$  es mayor, menor o igual a 0.95.

**P2** Suponga que  $T$  es un estadístico real y que  $Q(t, \theta)$  es una función monótona creciente en  $t$  para todo  $\theta \in \Theta$ . Demuestre que si la función de densidad conjunta de  $T, f(t|\theta)$  tiene la siguiente forma

$$f(t|\theta) = g(Q(t, \theta)) \left| \frac{\partial}{\partial t} Q(t, \theta) \right|$$

Donde  $g$  es alguna función arbitraria, entonces  $Q(t, \theta)$  es un pivote.

**P3** Sea  $X$  una observación proveniente de una distribución  $\text{Beta}(\theta, 1)$ .

- (a) Dado  $Y = -(\log(X))^{-1}$ . Evalúe el coeficiente de confianza asociado a  $[\frac{y}{2}, y]$ .
- (b) Encuentre un pivote y utilícelo para construir un intervalo de confianza con el mismo coeficiente de confianza del inciso anterior.
- (c) Compare los 2 intervalos de confianza.

**P4** Encuentre una transformación  $g$  (estabilizadora de varianza) tal que satisfaga que

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Donde  $\bar{X}_n$  es la media muestral de una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proveniente de una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  ( $\text{Poiss}(\lambda)$ ). Utilice este resultado para encontrar un intervalo de confianza asintótico en términos de  $\lambda$