Profesor: Felipe Osorio **Ayudante**: Nicolás Alfaro
Contacto: nicolas.alfaro@sansano.usm.cl
Semestre: 2021-2 (Primavera 2021)

Ayudantía 2

23 de Septiembre, 2021

Problemas

P1 Demuestre que si $\mathbb{P}[X \geq 0, Y \geq 0] = \alpha$ para $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, donde $\mu = (0,0)^T$ y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $\rho = \cos\left[(1-2\alpha)\pi\right]$.

P2 Una aproximación utilizada en estadística es la llamada **Aproximación de Stirling-Laplace**, que afirma que

$$\Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

cuando n es suficientemente grande. Más precisamente se tiene el siguiente resultado asintótico

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$$

Demuestre utilizando la aproximación de Stirling-Laplace, que si $U_n = (U_n^1, U_n^2, \ldots, U_n^n)$ es un vector aleatorio tal que $U_n/\sqrt{n} \sim \mathrm{U}(S_n)$, entonces $U_n^1 \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Hint: Utilize el ***Teorema de Slutsky*** *y el* ***Resultado 2*** *de la clase de Distribuciones de contornos elípticos.*

P3 (a) Sea un conjunto de variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ IID, provenientes de una distribución Poiss(λ), encuentre un estadístico suficiente para λ.

(b) Sea un conjunto de vectores aleatorios $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ IID, con función de densidad

$$f(x, y, \theta) = \exp\Big(-(\theta x + \frac{y}{\theta})\Big) \quad x \geq 0, y \geq 0, \theta > 0$$

Encuentre un estadístico suficiente para θ.

(c) Sea un conjunto de variables aleatorias $\{X_i\}_{i=1}^n$ IID, provenientes de una distribución Gamma($\theta, 1$), encuentre un estadístico suficiente para θ.

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sea el conjunto de vectores aleatorios $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ IID con distribución normal bivariada, dada por la siguiente función de densidad

$$f(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2))\right\}$$

(a) Pruebe que marginalmente tanto X_i como Y_i son normales estándar. ¿Qué sucede cuando $\rho = 0$

(b) Hallé $E[X_i^2]$,$E[Y_i^2]$ Y $E[X_iY_i]$

(c) Encuentre un estadístico suficiente para ρ