

Profesor: Felipe Osorio **Ayudante:** Nicolás Alfaro
Contacto: nicolas.alfaro@sansano.usm.cl
Semestre: 2021-2 (Primavera 2021)

AYUDANTÍA 10

9 de Diciembre, 2021

PROBLEMAS

P1 Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria IID proveniente de una distribución con función de densidad dada como

$$f(x; \theta) = \theta x^{-\theta-1} c^\theta, \quad x > c$$

Donde θ es el parámetro y c es una constante conocida mayor que 0. Encuentre los estadísticos LRT, Wald y Score para contrastar las hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad v.s. \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

P2 Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria IID, tal que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. En base a esto

- (a) Si σ^2 es conocido y μ desconocido, muestre que el estadístico $Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ es un estadístico de Wald para el contraste de las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- (b) Si μ es conocido y σ^2 desconocido. Encuentre el estadístico de Wald para contrastar las hipótesis $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ y $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.
- (c) Realice el mismo proceso anterior para el test de Score.

P3 Demuestre que para un modelo lineal de regresión simple, es decir

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

con los supuestos

- \mathbf{X} es matriz $n \times p$ (con $n > p$) no aleatoria y es de rango completo.
- Los datos observables corresponden a observaciones de Y
- $E[\epsilon] = \mathbf{0}$ y $\text{Cov}[\epsilon] = \sigma^2 I$ donde $\sigma^2 > 0$

Suponga que se quiere contrastar la hipótesis lineal

$$H_0 : Q^\top \beta = 0 \quad \text{V.S.} \quad H_1 : Q^\top \beta \neq 0$$

Entonces demuestre que si W, S y LRT son los estadísticos de Wald, Score y del test de razón de verosimilitud, entonces se tiene que

$$W \geq LRT \geq S$$

¿Qué implica esto en términos de la región de rechazo?

P4 Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria IID provenientes de una distribución $\text{Ber}(p)$. Suponga que se quieren contrastar las hipótesis

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{V.S.} \quad H_1 : p \neq p_0$$

Compruebe que el test Score y el test de Wald son asintóticamente iguales.