

**Profesor:** Felipe Osorio    **Ayudante:** Nicolás Alfaro  
**Contacto:** nicolas.alfaro@sansano.usm.cl  
**Semestre:** 2021-2 (Primavera 2021)

## AYUDANTÍA 3

30 de Septiembre, 2021

### PROBLEMAS

**P1 (C1 2017):** Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  desde la variable aleatoria  $X$  con función de densidad

$$f(x, \theta) = \frac{(x+1)}{\theta(\theta+1)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \quad x > 0, \theta > 0$$

Defina el modelo estadístico y obtenga la función score así como la información de Fisher para  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$

*Hint:* Tenemos que

$$\int_0^\infty z^{a-1} e^{-z/b} dz = b^a \Gamma(a)$$

y  $\Gamma(k+1) = k!$  para  $k$  un entero positivo.

**P2** Sean  $\{X_i\}_{i=1}^n$  variables aleatorias IID con distribución de probabilidad Cauchy, más aún que sus funciones de densidad vienen dada por

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}$$

Encuentre entonces la función score como la información de Fisher para  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$

**P3** Sean  $\{X_i\}_{i=1}^n$  variables aleatorias IID con distribución de probabilidad Gamma, es decir que sus funciones de densidad vienen dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Encuentre entonces la información de Fisher para  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$  en términos de la función digamma

$$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Finalmente utilice el **Resultado 4** de la Clase 7 **Propiedades de la verosimilitud** para encontrar la información de Fisher para la parametrización alterna de la distribución Gamma.

**P4** Sean  $\{X_i\}_{i=1}^n$  variables aleatorias IID, cuyas funciones de densidad vienen dada por

$$\frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/(2\theta^2)}, x \geq 0, \theta > 0$$

Encuentre la matriz de información de Fisher para  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$ .