Profesor: Felipe Osorio **Ayudante**: Nicolás Alfaro
Contacto: nicolas.alfaro@sansano.usm.cl
Semestre: 2021-2 (Primavera 2021)

Ayudantía 9

2 de Diciembre, 2021

Problemas

P1 Una práctica desmedida que sucede ocasionalmente en estadística es la de escoger el nivel de significancia α **después** de observar el resultado del test para así forzar el rechazo (o aceptación) de la hipótesis nula. En base a esto responda las siguientes preguntas

(a) Calcule la probabilidad de cometer un error tipo I y II si se escoge α para rechazar.

(b) Calcule la probabilidad de cometer un error tipo I y II si se escoge α para aceptar.

P2 Una desigualdad bastante popular es la llamada desigualdad **MA-MG-MH** la cual establece que si

$$MA = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, \quad ; \quad MG = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}} \quad ; \qquad MH = (\frac{\sum_i^n x_i^{-1}}{n})^{-1}$$

Entonces se tiene que $MA \geq MG \geq MH$. La idea de este ejercicio es poder dar una demostración a esta desigualdad utilizando herramientas de la inferencia estadística, particularmente las propiedades del test de razón de verosimilitudes. Para esto suponga que $\{Y_i\}_i^n$ son variables aleatorias independientes donde $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ y se quiere contrastar las hipótesis

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n \quad V.S \quad H_1 : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ para algún par de } i, j$$

(a) Muestre que el estadístico asociado al test LRT viene dado por $(\bar{Y})^{-n}/(\prod_i^n Y_i)^{-1}$ y deduzca la primera desigualdad.

(b) Sea la transformación $X_i = \frac{1}{Y_i}$, muestre que el estadístico asociado al test LRT. Considerando las observaciones $\{X_i\}$ viene dado por $[n/\sum_{i=1}^n (X_i)^{-1}]^n / \prod_i^n X_i$ y deduzca la desigualdad restante.

P3 Sea X_1, X_2 variables aleatorias IID, donde $X_i \sim \text{U}(\theta, \theta + 1)$. Considere que para contrastar las hipótesis

$$H_0 : \theta = 0 \quad V.S \quad H_1 : \theta > 0$$

se tienen los siguientes tests.

$$\delta_1(X_1): \text{ Rechazar } H_0 \text{ si } X_1 > 0.95$$
$$\delta_2(X_1, X_2): \text{ Rechazar } H_0 \text{ si } X_1 + X_2 > C$$

En base a lo anterior responda las siguientes preguntas:

(a) Encuentre C tal que el error de tipo I sea idéntico entre ambos tests.

(b) Calcule la función de potencia de cada test.

(c) Determine si δ_2 es más potente que δ_1

(d) Muestre una forma de encontrar un test de igual tamaño que δ_2 pero más potente que el.

P4 Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria IID proveniente de una distribución Beta$(\mu, 1)$ y de forma equivalente $Y_1, \ldots, Y_m$ es una muestra aleatoria IID proveniente de una distribución Beta$(\theta, 1)$ donde ambas muestras son independientes entre si.

(a) Encuentre el test LRT asociado al contraste $H_0 : \theta = \mu$ v.s $H_1 : \theta \neq \mu$.

(b) Demuestre que el test anterior se puede basar en el estadístico de contraste

$$T = \frac{\sum_i^n \log(X_i)}{\sum_i^n \log(X_i) + \sum_i^m \log(Y_i)}$$

(c) Encuentre la distribución de T cuando la hipótesis nula es cierta y concluya encontrando un test de tamaño $\alpha = 0.1$