## I. 13) Probar por inducción que $P\left(\bigcup_{t=1}^{y} B_t\right) = \sum_{t=1}^{y}(-1)^t a_t$ , $a_t = \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_t} P\left(\bigcap_{r=1}^{t} B_{jr}\right)$

Caso $n = 2$

Veamos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$ por que son eventos excluyentes

$P(B) = P((B \cap A) \cup (B - A)) = P(B \cap A) + P(B - A)$

la diferencia es:

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(B \cap A)$ y reordenando obtenemos lo que queríamos.

Asumamos que se cumple para $n$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j) - \sum_{j_1<j_2}^{n} P(B_{j_1} \cap B_{j_2}) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$$

Para el caso $n + 1$, separo el último termino de la unión, y aplico el caso $n = 2$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right)$$

Además la interesección es distributiva respecto a la unión:

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1}) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1}\right)$$

Aplico hipótesis inductiva en los dos términos con $n$-uniones:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j) - \sum_{j_1<j_2}^{n} P(B_{j_1} \cap B_{j_2}) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) + P(B_{n+1})$$

$$-\sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap B_{n+1}) + \sum_{j_1<j_2}^{n} P(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap B_{n+1}) - \ldots - (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right)$$

Recombinando las sumas con igual cantidad de intersecciones (ojo con los signos por que al segundo lo estoy restando):

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k\right) = \sum_{j=1}^{n+1} P(B_j) - \sum_{j_1<j_2}^{n+1} P(B_{j_1} \cap B_{j_2}) + \ldots + (-1)^{n+2} P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right)$$

lo que finaliza la prueba.

## II. 14)-

## III. 15)-

## IV. 16)-

## V. 17) Probar que $\log \Omega(V, D) \approx \frac{V}{U} S(D)$

$$S(D)=\log\left[\sum_{V=L(D)}^{U(D)}\Omega(V,D)\right]\leqslant\log[\Omega(V,D)\,(U-L+1)]$$
$$\leqslant\log\Omega(U,D)+\log(U)\leqslant\log\Omega(U,D)+N\log\lambda\approx\log\Omega(U,D)$$

Además:

$$\log\Omega(V,D)=\log\left[\prod_{k=1}^{m}f\left(2^N,V\,2^{-kD},2^D V\,2^{-kD}\right)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\log f\left(2^N,V\,2^{-kD},2^D V\,2^{-kD}\right)\approx\sum_{k=1}^{m}\log\binom{2^N V\,2^{-kD}}{2^D V\,2^{-kD}}$$

Aproximación Stirling $\log\binom{x}{y}\approx xH\left(\frac{y}{x}\right)$ con $H(t)=\;-t\log t-(1-t)\log(1-t)$

$$\sum_{k=1}^{m}\log\binom{2^N V\,2^{-kD}}{2^D V\,2^{-kD}}\approx 2^N\;V\,H\left(2^{D-N}\right)\sum_{k=1}^{m}2^{-kD}$$

Entonces tenemos que:

$$S(D)\approx\log\Omega(U,D)$$
$$\log\Omega(V,D)\approx 2^N\;V\,H\left(2^{D-N}\right)\sum_{k=1}^{m}2^{-kD}$$

Luego:

$$\log\Omega(V,D)\approx 2^N\;V\,H\left(2^{D-N}\right)\sum_{k=1}^{m}2^{-kD}=\frac{V}{U}\times\,2^N\;U\,H\left(2^{D-N}\right)\sum_{k=1}^{m}2^{-kD}\;\approx\frac{V}{U}S(D)$$

## VI. 18)-

## VII. 19)-

## VIII. 20)-

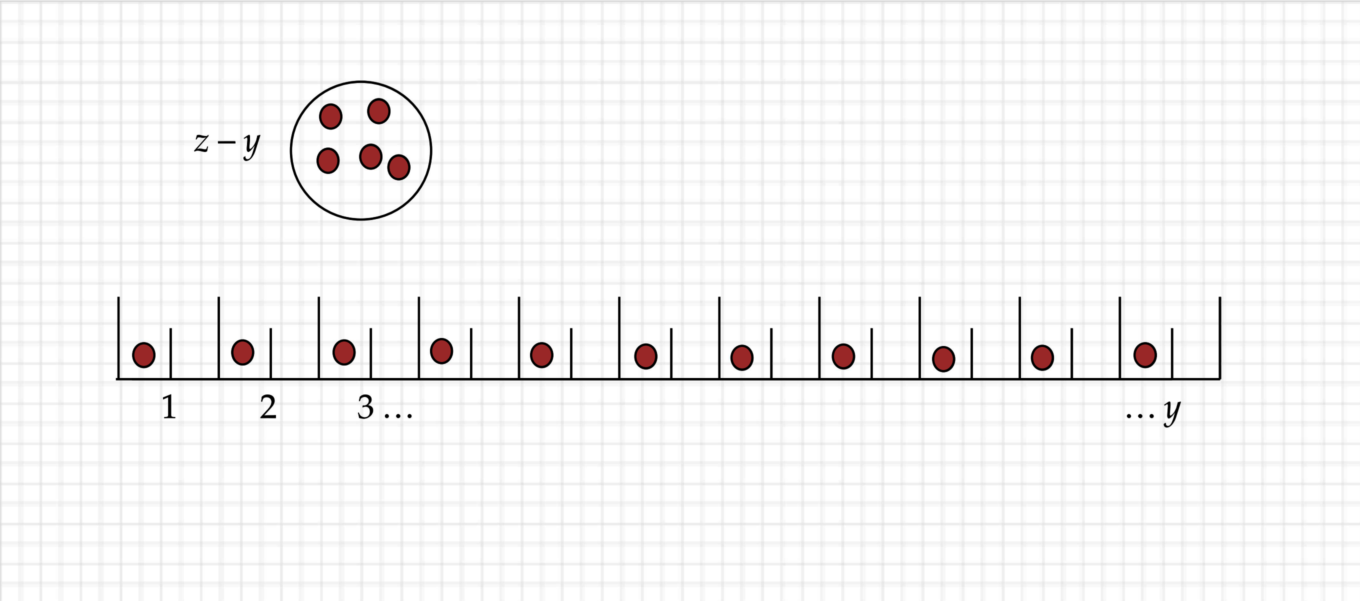
## IX. 21) Demostrar que $\log\Omega(L,D)=L\frac{\left(2-2^D\right)\left(1-2^{-mD}\right)}{2^D-1}+\sum_{k=1}^{m}\log\binom{L\,2^{-kD}}{\left(2^D-1\right)L\,2^{-kD}}$

$$\log\Omega(L,D)=\log\left[\prod_{k=1}^{m}f\left(2,L\,2^{-kD},2^D L\,2^{-kD}\right)\right]$$

Donde $f(x,y,z)$ es el número de formas de colocar $z$ bolas en $y$ cajas con $x$ compartimientos, dejando al menos una bola en cada caja.

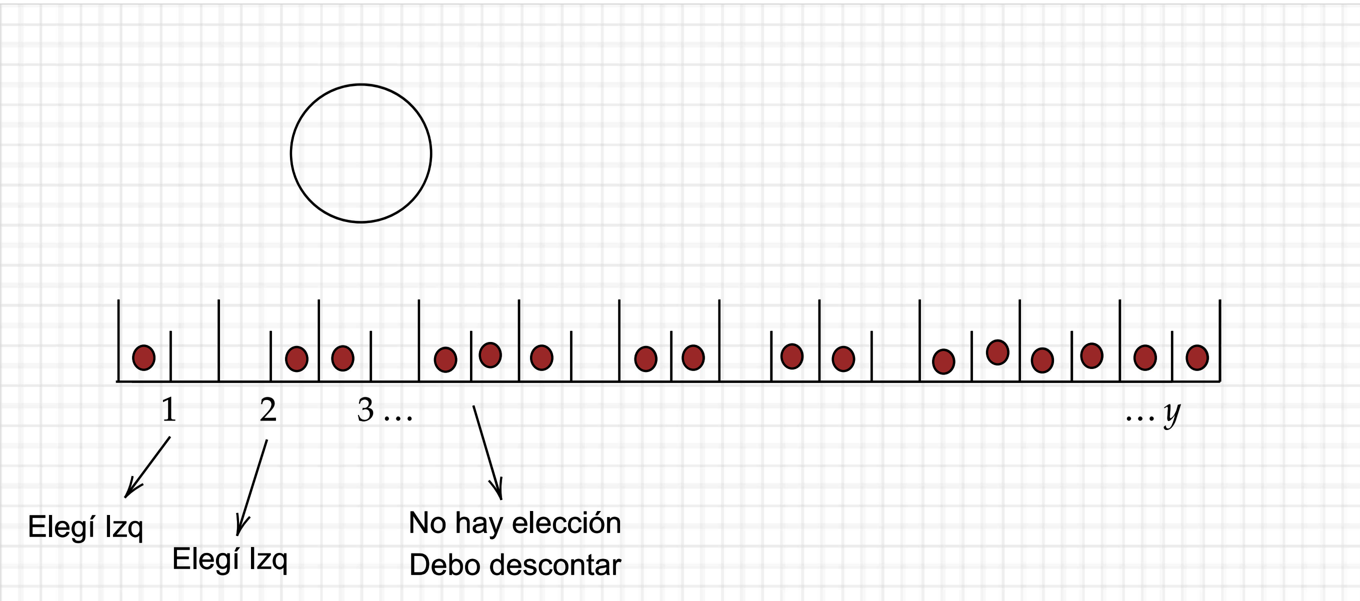
Si $x=2$, tengo 2 compartimientos en cada caja, izquierda y derecha.

Entonces empecemos colocando $y$ bolas, una en cada caja, supongamos todos en el compartimiento izquierdo. Luego me quedan $z-y$ bolas por colocar. Ver figura:




Ahora bien, pude haber colocado cualquiera de las primeras $y$ bolas en el compartimiento derecho, entonces tengo que tomar (en principio) $2^y$ *elecciones*.

Luego de haber hecho este primer paso, lo que resta es colocar $z-y$ bolas en $y$ compartimientos (ya no importa si es izquierdo o derecho, hay una única elección para cada caso), y hay $\binom{y}{z-y}$ formas de hacerlo. Sin embargo, si en una caja decidí colocar 2 bolas, entonces no puedo diferenciar si la bola del compartimiento izquierdo es por el paso 1 o por el paso 2. En otras palabras, la cantidad de *elecciones* que tuve que hacer son menos! Debemos descontar estas elecciones, multiplicando por $2^{-(z-y)}$




Entonces obtengo que $f(2,y,z) = \binom{y}{z-y} 2^y\, 2^{(y-z)}$

$$\log \Omega(L,D) = \log\left[\prod_{k=1}^{m} f\left(2, L\,2^{-kD}, 2^D L\,2^{-kD}\right)\right]$$

$$= \log\left[\prod_{k=1}^{m} \binom{L\,2^{-kD}}{\left(2^D-1\right)L\,2^{-kD}} 2^{\left(L\,2^{-kD}+L\,2^{-kD}-2^D L\,2^{-kD}\right)}\right]$$

$$= \log\left[\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right)2^{\left(L2^{-kD+1}-2^{D}L\,2^{-kD}\right)}\right]$$

$$= \log\left[\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right)\right] + \log\left[\prod_{k=1}^{m} 2^{2^{-kD}L\left(2-2^{D}\right)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right) + \log\left[2^{\Sigma_{k=1}^{m}2^{-kD}L\left(2-2^{D}\right)}\right]^{*} \qquad * \prod_{k=1}^{m} b^{a_k} = b^{\Sigma_{k=1}^{m}a_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right) + \log\left[2^{L\left(2-2^{D}\right)\Sigma_{k=1}^{m}2^{-kD}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right) + \log\left[2^{L\left(2-2^{D}\right)\frac{1-2^{-(m+1)D}}{1-2^{-D}}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right) + L\left(2-2^{D}\right)\left(\frac{1-2^{-(m+1)D}}{1-2^{-D}}-1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right) + L\left(2-2^{D}\right)\left(\frac{2^{D}-2^{-mD}}{2^{D}-1}-1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{L\,2^{-kD}}{\left(2^{D}-1\right)L\,2^{-kD}}\right) + L\left(2-2^{D}\right)\frac{1-2^{-mD}}{2^{D}-1}$$

## X. 22)-

## XI. 23)-

## XII. 24)-

## XIII. 25) Demostrar que $D_\partial \lessapprox D_1 = \max_D S(D)$ y $D_N \lessapprox D_2$

Consideremos la familia de todos los patrones de dimensión $D$ y área $A = \alpha U(D) \leqslant U(D)$

$$\left(\frac{2^{m}}{\lambda}\right)^{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Del problema 17, tenemos $S(\alpha U(D), U(D)) \approx \alpha S(D)$

Ahora bien, es razonable pensar que mientras más alta es la dimensión del borde del patrón $D_\partial$, el patrón está mas disperso (o es menos compacto), entonces tiene mayor entropía, por que hay más cantidad de patrones dispersos que de patrones compactos.
Como consecuencia, un pequeño cambio en la dimensión del borde $dD_\partial$ provocada por un cambio en la dimensión del patrón $dD$, tiene asociado pequeño cambio de entropía con el mismo signo $dS$, i. e.

$$signo\left(\frac{dD_\partial}{dD}\right) \approx signo\left(\frac{dS}{dD}\right)$$

Esto vale para cualquier $\alpha$, ya que siempre es positivo.

Luego, la dimensión que maximiza $S$: $D_1$, también maximiza $D_\partial$.
$\therefore D_\partial \lessapprox D_1 = \max_D S(D)$

Ahora bien, el borde también es un patrón de una cierta área y entropía $0 \leqslant S_\partial \leqslant D_1$.
Similarmente es razonable pensar que, como los insatisfechos están contenidos en el borde, su dimensión es creciente con la dimensión del borde, y por lo tanto con la entropía del borde:
$$signo\left(\frac{dD_N}{dD_\partial}\right) \approx signo\left(\frac{dS_\partial}{dD_\partial}\right)$$
Luego, la dimensión que maximiza $S_\partial$: $D_2$, también maximiza $D_N$.
$\therefore D_N \lessapprox D_2 = \max_{D_\partial} S_\partial(D_\partial)$