Práctico de Estructuras Jerárquicamente Organizadas

1. $B \subset A$ medibles $\implies \mu(A-B) = \mu(A) - \mu(B)$

$(A-B) \cup B = A$ dado que $B \subset A$, además es una unión disjunta. Entonces, aplicando medida:
$\mu((A-B) \cup B) = \mu(A) = \mu(A-B) + \mu(B)$
$\therefore \mu(A-B) = \mu(A) - \mu(B)$

2. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ medibles $\implies \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$

$\bigcup_{i=1}^{j} A_i = A_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} (A_i - A_{i-1})\right)$ básicamente estoy diciendo lo mismo, pero la segunda unión es disjunta lo cual es importante. Tomando límite:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i-1})\right)$$

Tomando medida

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(A_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i-1})\right)\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i - A_{i-1})$$

$$= \mu(A_1) + \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i - A_{i-1}) = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i) - \mu(A_{i-1}) = \lim_{j \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{j} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{j-1} \mu(A_i)\right]$$

$$= \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$$

$$\therefore \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) \implies \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \lim_{j \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{j} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

3. $\mu(A+x) = \mu(A)$ para A medible

Veamos que se cumple para cajas:

$$C_k = \left\{y \in \mathbb{R}^n / a_i \leqslant y_i \leqslant b_i\right\}$$

$$\mu(C_k) = \prod_i (b_i - a_i)$$

$$C_k + x = \left\{y + x \in \mathbb{R}^n / a_i \leqslant y_i + x_i \leqslant b_i\right\}$$

$$\mu(C_k + x) = \prod_i (b_i - a_i) = \mu(C_k)$$

Ahora, sea una unión de cajas arbitraria tal que: $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$

Es fácil ver que $A + x \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k + x)$

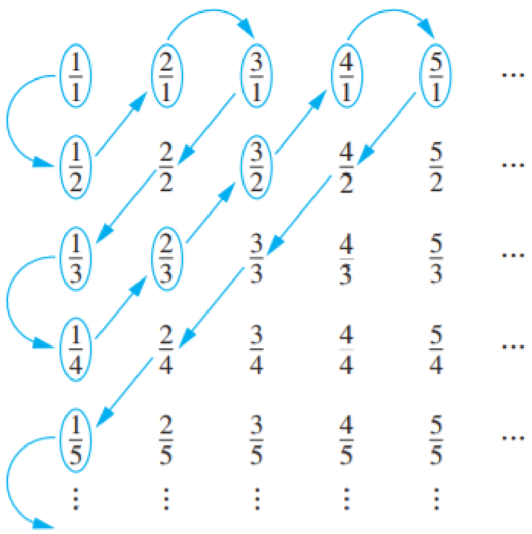
$$\implies \mu(A+x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k)$$

tomando ínfimo:
$\mu(A+x) \leqslant \mu(A)$
Esto vale para A, x arbitrarios, luego:
$\mu(A) = \mu(A+x-x) \leqslant \mu(A+x) \implies \mu(A) = \mu(A+x)$

4. $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

Usaremos 3 resultados:

1. $\mu(\{r\}) = 0$, lo cual es obvio por que a cualquier r real lo puedo meter en una caja de largo ε y el ínfimo de eso es cero.
2. Cualquier conjunto numerable tiene medida cero.
   Esto se debe a que si B es numerable, entonces lo puedo escribir como:
   $B = \{r_1, r_2, r_3, \dots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$ pero como esta unión es disjunta
   $$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{r_k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{r_k\}) = 0$$
3. $\mathbb{Q}$ es numerable.
   Basta con probar que $\mathbb{Q}_{>0}$ es numerable, porque si lo es, $\mathbb{Q}_{>0} = \{q_1, q_2, \dots\}$
   Entonces numero $\mathbb{Q} = \{0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \dots\}$
   Una numeración de $\mathbb{Q}_{>0}$ es:



5. Demostrar $H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i)$ si $d(A_i, A_j) \geqslant \varepsilon > 0\ \forall ij$

Supongamos $x_0 \in (A_i \cap A_j)$
$d(A_i, A_j) = inf(\|x-y\| / x \in A_i, y \in A_j) \implies$ para x_0, $\|x_0 - x_0\| = 0$
Luego $d(A_i, A_j) = 0$ lo cual contradice la suposición.
Luego $A_i \cap A_j = \varnothing$
Luego $H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(A_i)$

6. Asumir $0 < H^s(F) < \infty$ y calcular las dimensiones de Haussdorf de:

- Conjunto de Cantor C

$$\mathrm{C} = \left(\frac{1}{3}\mathrm{C}\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathrm{C} + \frac{2}{3}\right)$$

$$H^s(\mathrm{C}) = H^s\left(\frac{1}{3}\mathrm{C}\right) + H^s\left(\frac{1}{3}\mathrm{C} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3^s}H^s(\mathrm{C}) \Longrightarrow s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

- Polvo de Cantor $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1}{3}\mathcal{P}\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathcal{P} + \left(\frac{2}{3}, 0\right)\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathcal{P} + \left(0, \frac{2}{3}\right)\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathcal{P} + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$$

$$H^s(\mathcal{P}) = \frac{4}{3^s}H^s(\mathcal{P}) \Longrightarrow s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

- Volumen de Cantor V

similarmente: $s = \dfrac{\ln 8}{\ln 3}$

- Curva de Kock $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \left(\frac{1}{3}\mathbf{K}\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathcal{R}_1(\mathbf{K}) + \vec{c}_1\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathcal{R}_2(\mathbf{K}) + \vec{c}_2\right) \cup \left(\frac{1}{3}\mathbf{K} + \frac{2}{3}\right)$$

$$H^s(\mathbf{K}) = H^s\left(\frac{1}{3}\mathbf{K}\right) + H^s\left(\frac{1}{3}\mathcal{R}_1(\mathbf{K}) + \vec{c}_1\right) + H^s\left(\frac{1}{3}\mathcal{R}_2(\mathbf{K}) + \vec{c}_2\right) + H^s\left(\frac{1}{3}\mathbf{K} + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3^s}H^s(\mathbf{K})$$

$$\Longrightarrow s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

7. $F = \bigcup_{j=1}^{P} (\lambda_j \mathcal{R}_j(F) + \vec{c}_j)$ con $F_j = \lambda_j \mathcal{R}_j(F) + \vec{c}_j$ disjuntos excepto tal vez por algunos puntos finitos. Encontrar una fórmula para la dimensión de F

$$H^s(F) = H^s\left(\bigcup_{j=1}^{P} (\lambda_j \mathcal{R}_j(F) + \vec{c}_j)\right) = \sum_{j=1}^{P} H^s(\lambda_j \mathcal{R}_j(F) + \vec{c}_j)$$ por que son disjuntos salvo en finitos puntos.

$$\sum_{j=1}^{P} H^s(\lambda_j \mathcal{R}_j(F) + \vec{c}_j) = \sum_{j=1}^{P} \lambda_j^s H^s(F)$$

Luego la fórmula que cumple la dimensión fractal es:

$$\sum_{j=1}^{P} \lambda_j^s = 1$$

8. -

9. Calcular $dim_I F$, $dim_C F$, $dim_{BC} F$ para

- $dim_I(\mathrm{C})$ del Conjunto de Cantor C

$$dim_I(\mathrm{C}) = \lim_{r \to 0} \frac{S(r)}{-\log_2 r}$$

$$S(r) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$$

p_i : probabilidad de que un punto de F caiga en la partición i-ésima

Sea $r_k = 3^{-k}$

$\vec{p}_{k=1} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{p}_{k=2} = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$

en general, hay 2^k términos que valen $p_i = 2^{-k}$

$$S_k = -\sum_{i=1}^{2^k} 2^{-k} \log_2\left(2^{-k}\right) = k$$

$$dim_I(\mathrm{C}) = \lim_{k\to\infty} \frac{S_k}{-\log_2\left(3^{-k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

muy similar, para el polvo de cantor y el volumen de cantor que dan $\frac{\ln 4}{\ln 3}, \frac{\ln 8}{\ln 3}$ respectivamente.

- $dim_C(\mathrm{C})$ del Conjunto de Cantor C

$$dim_C(\mathrm{C}) = \lim_{r\to 0} \frac{\log_2 C(r)}{\log_2 r}$$

$$C(r) = \frac{cant.\ pares\ de\ puntos\ a\ distancia\ menor\ a\ r}{cant.\ de\ pares\ de\ puntos\ del\ conjunto\ total}$$

Sea $r_k = 3^{-k}$ y sea un *sampleo* de $N \gg 1$ aleatorio del conjunto.

La cantidad de pares de puntos en total es $N(N-1) \approx N^2$

La cantidad de pares de puntos para a una distancia menor que $\frac{1}{3}$ es $\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right) * 2 \approx 2\left(\frac{N}{2}\right)^2$

por que básicamente lo que hice fue desconectar los dos subconjuntos entre $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y éstos son 2 conjuntos idénticos pero con $\frac{N}{2}$ puntos.

En general en el paso k tendré

$$C_k \approx 2^k \frac{N^2}{N^2\left(2^k\right)^2} = 2^{-k}$$

$$dim_C(\mathrm{C}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log_2 C_k}{\log_2\left(3^{-k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{-k\log_2 2}{-k\log_2 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

- $dim_{BC}(\mathrm{C})$ del Conjunto de Cantor C

$$dim_{BC}(\mathrm{C}) = \lim_{r\to 0} \frac{\log_2 N_r(\mathrm{C})}{-\log_2 r}$$

$N_r(\mathrm{C})$: número de cajas que cubren el conjunto

Tomo cajas de longitud 3^{-k}

Entonces para el tamaño $\frac{1}{3}$, 2 cajas cubren el conjunto.

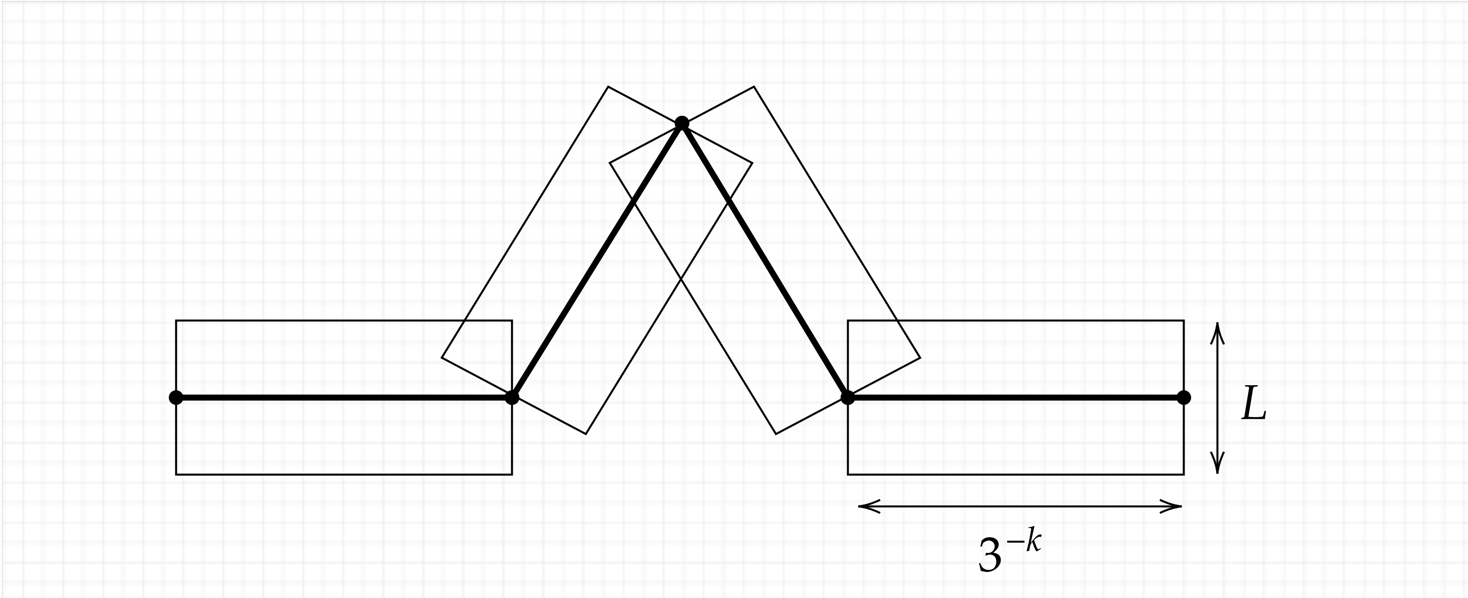
para el tamaño $\frac{1}{3^2}$, 4 cajas cubren el conjunto.

en general $N_{3^{-k}} = 2^k$

$$dim_{BC}(\mathrm{C}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log_2 2^k}{-\log_2 3^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\log_2 2}{k\log_2 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

- $dim_{BC}(\mathbf{K})$ de la curva de Koch $\mathbf{K}$

  Tomo cajas de área $L*3^{-k}$ de la manera:



Entonces $N_k(\mathbf{K}) = 4^k$

$$dim_{BC}(\mathbf{K}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log_2 4^k}{-\log_2\left(3^{-k}L\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\log_2 4}{k\log_2 3 - \log_2(L)} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

10. -

11. Demostrar que dado $\{p_i\}$ tal que $\sum_i p_i = 1$, D_q es no decreciente con q.

$$D_q = \lim_{r\to 0} \frac{S_q(r)}{-\ln r} \ , \ S_q(r) = \frac{1}{1-q}\ln\left(\sum_i p_i^x\right)$$

basta con demostrar que S_q es no decreciente con q.

$$S(q) = \frac{1}{1-q}\ln\left(\sum_i p_i^x\right)$$

$$S'(q) = \frac{1}{(1-q)^2}\ln\left(\sum_i p_i^x\right) + \frac{1}{1-q}\frac{1}{\sum_i p_i^x}\sum_i p_i^x \ln p_i$$

$$-(1-q)^2 S'(q) = -\ln\left(\sum_i p_i^x\right) - (1-q)\sum_i \frac{p_i^x}{\sum_i p_i^x}\ln p_i$$

Sea $z_i = \dfrac{p_i^x}{\sum_i p_i^x}$, notar que $\sum_i z_i = 1$

$$-(1-q)^2 S'(q) = -\ln\left(\sum_i p_i^x\right) - (1-q)\sum_i z_i \ln p_i$$

$$= -\left(\sum_i z_i\right)\ln\left(\sum_i p_i^x\right) - \sum_i z_i \ln p_i + x\sum_i z_i \ln p_i$$

$$= -\sum_i z_i \ln\left(\sum_i p_i^x\right) - \sum_i z_i \ln p_i + \sum_i z_i \ln p_i^x$$

$$= \sum_i z_i \ln\left(\frac{p_i^x}{\sum_i p_i^x}\right) - \sum_i z_i \ln p_i$$

$$= \sum_i z_i \ln z_i - \sum_i z_i \ln p_i$$

Este último término es siempre positivo, a esto se le llama la desigualdad de Gibbs, y se prueba así:

$$\sum_i z_i \ln z_i - \sum_i z_i \ln p_i = -\sum_i z_i \ln \frac{p_i}{z_i}$$

$\ln x \leqslant x - 1 \ \forall x$

$$\Longrightarrow -\sum_i z_i \ln \frac{p_i}{z_i} \geqslant -\sum_i z_i \left(\frac{p_i}{z_i} - 1\right) = -\sum_i p_i + \sum_i z_i = 0$$

Luego $-(1-q)^2 S'(q) \geqslant 0 \ \therefore S'(q) \leqslant 0$

Luego D_q es no creciente.

12. -