LELEC1930 - Introduction aux télécommunications
Séance 0 - Transformée de Fourier

Prof. : Jérôme Louveaux — Assist. : Jérome Eertmans

Rappel

Transformée de Fourier d'un signal $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

Transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \tag{2}$$

Propriété de la transformée de Fourier :

$$\text{si } x(t) \text{ est réel, alors } X(-\omega) = X^*(\omega),$$

où * est l'opérateur conjugué, tel que $(a + b \cdot j)^* = a - b \cdot j$, avec a et b des nombres réels.

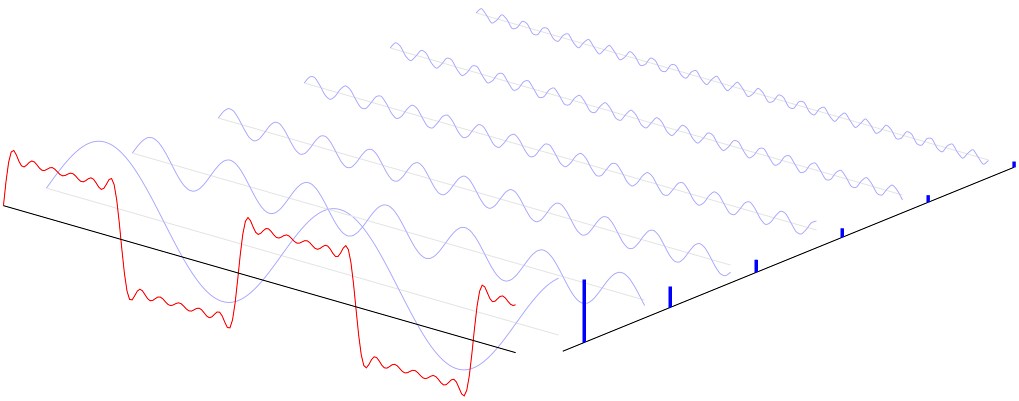

Figure 1 – Illustration de la transformée de Fourier, repris de pgfplots.net.

Pour illustrer un signal en fréquentielle, qui est souvent complexe, on représente souvent son module ($|a + b \cdot j| = \sqrt{a^2 + b^2}$), et parfois sa phase ($\angle a + b \cdot j = \arctan(b/a)$), en fonction de ω.

Exercices

Exercice 1 : Calculs

Calculez la transformée de Fourier des signaux suivants. Représentez à chaque fois le signal en temporel et sa transformée de Fourier en fréquentiel.

- $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$
- $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Ensuite, calculez la transformée de Fourier inverse de

$$X(\omega) = \begin{cases} e^{-2\omega} & \text{pour } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{pour } \omega < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 2 : Propriétés

Par calcul, à partir de la définition de la transformée, montrez les propriétés suivantes :

- Linéarité : si $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, alors $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
- Translation : la transformée de $x(t-a)$ est $e^{-j\omega a}X(\omega)$.
- Modulation : la transformée de $x(t)\cos(\omega_0 t)$ est $\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right)$.

Exercice 3 : Signaux réels

1. Si $x(t)$ est un signal réel, et $X(2) = 1 + j$, que vaut $X(-2)$? Que peut-on dire sur $X(0)$?
2. Pour chacune des transformées de Fourier ci-dessus, indiquez si elle correspond à un signal réel :
   - $X(\omega) = e^{-\omega}$
   - $X(\omega) = e^{-|\omega|}$
   - $X(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$
   - $X(\omega) = \begin{cases} (1+j) & \text{pour } -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$