Calculabilité

TP5

Y. Deville
C-H. Bertrand Van Ouytsel - V. Coppé - A. Gerniers
N. Golenvaux - M. Parmentier

Mars 2021

Questions du test

1. Un transformateur de programmes est toujours une fonction calculable.

   Réponse : Faux
   Un transformateur de programme peut être vu comme une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Or, il existe certaines fonctions totales qui ne sont pas calculables.
   Remarque : même si on impose la condition qu'un transformateur de programme doit être injectif, la réponse ne change pas. Voici un exemple de fonction injective non calculable :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } \mathsf{halt}(x, x) = 1 \\ 2x + 1 \text{ si } \mathsf{halt}(x, x) = 0 \end{cases}$$

Questions du test

2. En vous aidant du théorème S-m-n, déterminer s'il existe une fonction totale calculable $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{dom}(\varphi_{f(x)}) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{N} : y = z^x\}$.

   Indice : considérez la fonction ci-dessous.

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{le plus petit } z \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = z^x & \text{si un tel } z \text{ existe} \\ \text{non défini} & \text{sinon} \end{cases}$$

   Réponse : Vrai

   Selon S-m-n, $\exists g$ tot. calc. tel que $\forall x, y$:

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_{g(k,x)}(y) = \begin{cases} z \mid y = z^x & \text{si } z \text{ existe} \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y \in \mathrm{dom}\big(\varphi_{g(k,x)}(y)\big) \iff \exists z \in \mathbb{N} : y = z^x$$

Questions du test

3. Quel est le sens intuitif de l'affirmation suivante ?

   Il existe une fonction calculable $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, si φ_x est la fonction caractéristique d'un ensemble $A_x \subseteq \mathbb{N}$, alors $\varphi_{f(x)}$ est la fonction caractéristique de $\overline{A_x}$.

   (a) Il existe une fonction calculable qui permet de décider si le complémentaire d'un ensemble récursif est aussi un ensemble récursif.

   (b) Si on désigne les ensembles récursifs par un indice de leur fonction caractéristique, alors l'opération de passage au complémentaire est calculable.

   (c) L'indice de n'importe quelle fonction calculable est soit l'indice d'une fonction caractéristique d'un ensemble A, soit l'indice d'une fonction caractéristique du complémentaire de A.

   Réponse : (b)

Questions du test

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   Il existe une fonction fonction calculable $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, si φ_x peut être vue comme la fonction caractéristique d'un ensemble $A_x \subseteq \mathbb{N}$ (autrement dit : si l'image de φ_x est $\{0, 1\}$), alors $\varphi_{f(x)}$ est la fonction caractéristique de $\overline{A_x}$.

   Indice : considérez la fonction ci-dessous.

   $$f(i, x) = \max\left\{0, 1 - \varphi_i(x)\right\}$$

   Réponse : Vrai

   $\varphi_k(i, x) = \max\left\{0, 1 - \varphi_i(x)\right\}$ permet de décider $x \in \overline{A_i}$.

   Par S-m-n, $\exists g$ tot. calc. tel que :

   $$\varphi_k(i, x) = \varphi_{g(k,i)}(x)$$

Questions du test

5. La réciproque du théorème du point fixe est-elle vraie ?

   Autrement dit : si on a $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction totale, le fait qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_k = \varphi_{f(k)}$ implique-t-il que f est calculable ?

   Réponse : Faux

   Soit la fonction totale $f(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \in K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Soit $P_k(x) \equiv [\texttt{return } x$

   Comme $\varphi_k(k)$ se termine, $k \in K$ et donc $\varphi_{f(k)} = \varphi_k$.
   Pourtant f n'est pas calculable sinon K serait récursif.

Question 1 du TP

Question : The S property is defined as follows :

$$\forall k \; \exists S \text{ total \& computable } : \; \varphi_k(x, y) = \varphi_{S(x)}(y)$$

Prove that the S property is a particular case of S-m-n (i.e. prove that S-m-n implies S for $m = n = 1$).

Question 1 du TP

Question : The S property is defined as follows :

$$\forall k \; \exists S \text{ total \& computable } : \; \varphi_k(x, y) = \varphi_{S(x)}(y)$$

Prove that the S property is a particular case of S-m-n (i.e. prove that S-m-n implies S for $m = n = 1$).

Réponse :

- Par S-m-n, $\exists S$ tot. calc. $\forall k \; : \; \varphi_k(x, y) = \varphi_{S(k,x)}(y)$
- Ce qui implique $\forall k \; \exists S$ tot. calc. $: \; \varphi_k(x, y) = \varphi_{S(k,x)}(y)$
- $S(k, x) = \varphi_S(k, x) = \varphi_{S'(S,k)}(x) = \varphi_{k'}(x) = S''(x)$
  (on renomme $S'(S, k)$ en k')
- En conclusion, $\forall k \; \exists S''$ tot. calc. $: \; \varphi_k(x, y) = \varphi_{S''(x)}(y)$
- S est donc bien un cas particulier de S-m-n.

Question 2 du TP

Question : Using the fixed point theorem, show that there exists a program P_n such that P_n terminates only for input n.
(Hint : use the function $g(n, x) = 1$ if $x = n$, $\perp$ otherwise together with the S property.)

Question 2 du TP

Question : Using the fixed point theorem, show that there exists a program P_n such that P_n terminates only for input n.
(Hint : use the function $g(n,x) = 1$ if $x = n$, $\perp$ otherwise together with the S property)

Réponse : Soit $g(n,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = x \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$ qui est calculable

- Par S, $\exists S$ tot. calc. : $\varphi_g(n,x) = \varphi_{S(n)}(x)$
- Par le point fixe, $\exists n : \varphi_n = \varphi_{S(n)}$
- $\Longrightarrow \exists n : \varphi_n(x) = \varphi_{S(n)}(x) = \varphi_g(n,x)$
- Vu que g est calculable, P_n existe

Question 3 du TP

Question : Using the fixed point theorem, show that there exists a program P_n that always outputs n (i.e. that prints its source code).

Question 3 du TP

Question : Using the fixed point theorem, show that there exists a program P_n that always outputs n (i.e. that prints its source code).

Réponse : Soit $g(n, x) = n$ qui est calculable

- Par S, $\exists S$ tot. calc. : $\varphi_g(n, x) = \varphi_{S(n)}(x)$
- Par le point fixe, $\exists n$: $\varphi_n = \varphi_{S(n)}$
- $\implies \exists n : \varphi_n(x) = \varphi_{S(n)}(x) = \varphi_g(n, x)$
- Vu que g est calculable, P_n existe

Question 4 du TP

Question : Prove Rice's theorem using the fixed point theorem. (Hint : define the function $f(x) = i$ if $x \in A$, j if $x \in \overline{A}$, with $i \in \overline{A}$ and $j \in A$)

Question 4 du TP

Question : Prove Rice's theorem using the fixed point theorem. (Hint : define the function $f(x) = i$ if $x \in A$, j if $x \in \overline{A}$, with $i \in \overline{A}$ and $j \in A$)

Réponse : Soient $i \in A$ et $j \in \overline{A}$, on définit $f(x) = \begin{cases} j & \text{si } x \in A \\ i & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases}$

En supposant que A est récursif, on a f qui est totale et calculable. De plus, on sait que $A \neq \emptyset \neq \overline{A}$.

Par le point fixe, $\exists k : \varphi_k = \varphi_{f(k)}$. On a 2 cas :

- Si $k \in A$, alors $\varphi_k = \varphi_j$
- Si $k \in \overline{A}$, alors $\varphi_k = \varphi_i$

On a donc bien $\exists i \in A, \exists j \in \overline{A}$ tel que $\varphi_i = \varphi_j$

Question 5 du TP

Question : Prove that $K = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(n) \neq \perp\}$ is not recursive using the fixed point theorem.

Question 5 du TP

Question : Prove that $K = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(n) \neq \perp\}$ is not recursive using the fixed point theorem.

Réponse : Supposons K récursif.

Soient les fonctions calculables $\varphi_i(x) = x$ et $\varphi_j(x) = \perp$.

On définit $f(x) = \begin{cases} j & \text{si } x \in K \\ i & \text{si } x \in \overline{K} \end{cases}$ qui est totale et calculable

Par le point fixe, $\exists k$: $\varphi_k = \varphi_{f(k)}$:

- si $k \in K \implies \varphi_k(k) \neq \perp$ et $f(k) = j$
  $\implies \varphi_k(k) = \varphi_{f(k)}(k) = \varphi_j(k) = \perp$
- si $k \notin K \implies \varphi_k(k) = \perp$ et $f(k) = i$
  $\implies \varphi_k(k) = \varphi_{f(k)}(k) = \varphi_i(k) = k$

Contradiction dans les 2 cas ! K n'est pas récursif !

Challenge

Question : Show that, for any computable total function f, there exist an infinity of k's such that $\varphi_k = \varphi_{f(k)}$.

(Hint : Show that if it was not the case, we could find a computable total function that would not satisfy the fixed point theorem.)