LELEC1930 - Introduction aux télécommunications
Séance 0 - Transformée de Fourier

Prof. : Jérôme Louveaux

Assist. : Jérome Eertmans

Rappel

Transformée de Fourier d'un signal $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

Transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \tag{2}$$

Propriété de la transformée de Fourier :

si $x(t)$ est réel, alors $X(-\omega) = X^*(\omega)$,

où * est l'opérateur conjugué, tel que $(a + b \cdot j)^* = a - b \cdot j$, avec a et b des nombres réels.

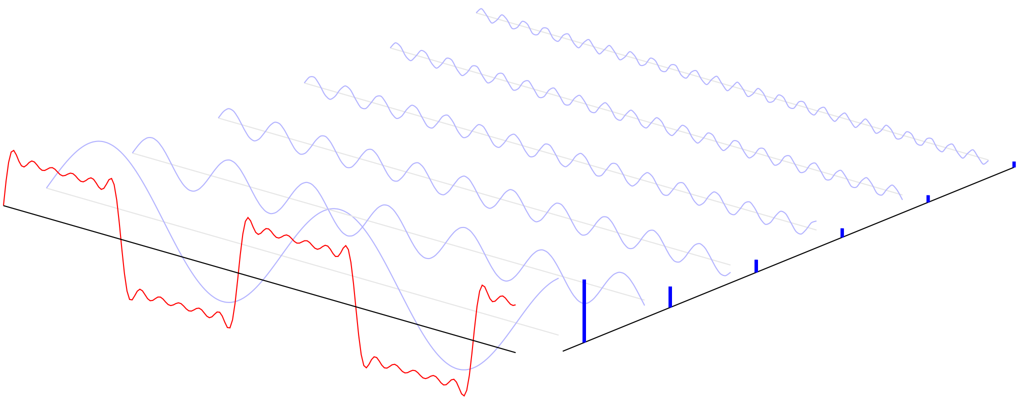


Figure 1 – Illustration de la transformée de Fourier, repris de pgfplots.net.

Pour illustrer un signal en fréquentielle, qui est souvent complexe, on représente souvent son module ($|a + b \cdot j| = \sqrt{a^2 + b^2}$), et parfois sa phase ($\angle a + b \cdot j = \arctan(b/a)$), en fonction de ω.

Exercices

Exercice 1 : Calculs

Calculez la transformée de Fourier des signaux suivants. Représentez à chaque fois le signal en temporel et sa transformée de Fourier en fréquentiel.

- $x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$
- $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

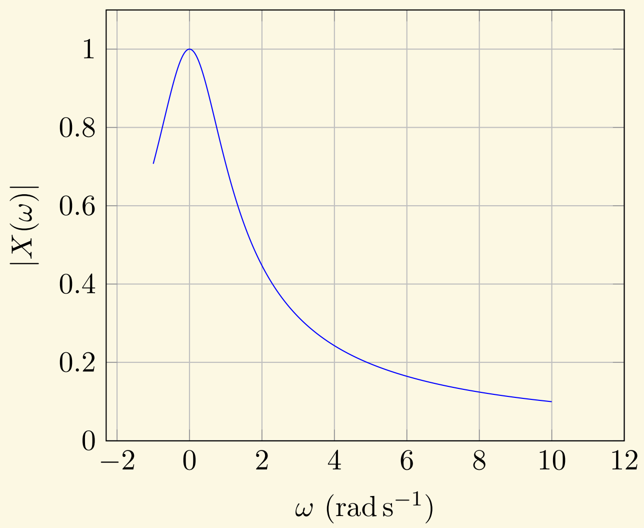
Ensuite, calculez la transformée de Fourier inverse de

$$X(\omega) = \begin{cases} e^{-2\omega} & \text{pour } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{pour } \omega < 0 \end{cases} \tag{3}$$

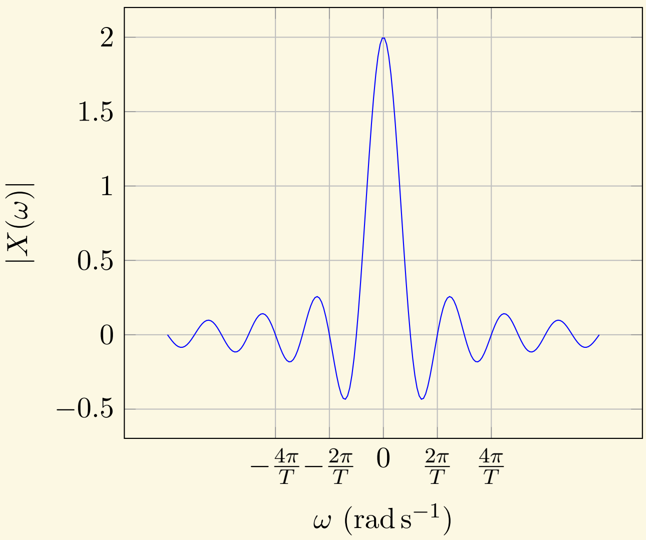
Réponse à l'exercice 1 :

En appliquant la définition de la transformée de Fourier, on trouve :

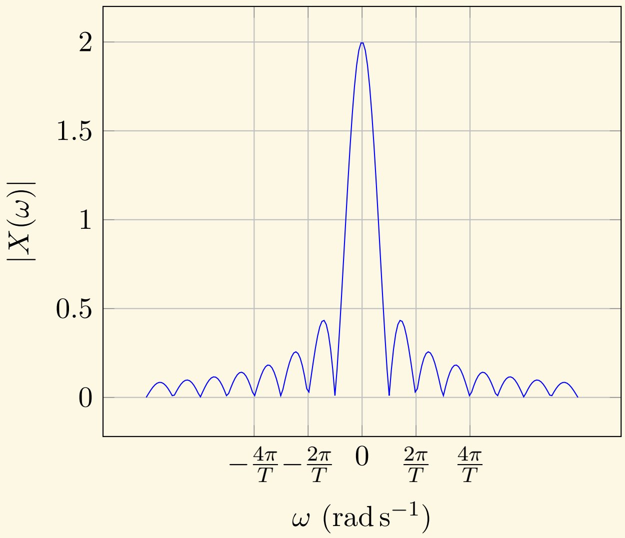
- $X(\omega) = \left[\frac{e^{-t(1+j\omega)}}{1+j\omega}\right]_0^\infty = \frac{1}{1+j\omega}$ si $\mathrm{Re}(j\omega) > -1$



- $X(\omega) = -\left[\frac{e^{-jt\omega}}{j\omega}\right]_{-T}^{T} = \frac{2\sin(T\omega)}{\omega}$



- $X(\omega) = -\left[\frac{e^{-jt\omega}}{j\omega}\right]_0^{2T} = \frac{1-e^{-2jT\omega}}{j\omega}$



De même pour la transformée inverse :

$$x(t) = -\left[\frac{e^{-\omega(jt+2)}}{2\pi(jt+2)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi(jt+2)} \tag{4}$$

Exercice 2 : Propriétés

Par calcul, à partir de la définition de la transformée, montrez les propriétés suivantes :

- Linéarité : si $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, alors $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
- Translation : la transformée de $x(t-a)$ est $e^{-j\omega a}X(\omega)$.
- Modulation : la transformée de $x(t)\cos(\omega_0 t)$ est $\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right)$.

Réponse à l'exercice 2 :

- Linéarité : en injectant $x(t)$ dans la définition de la transformée, on trouve

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t) + x_2(t))e^{-j\omega t}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt}_{X_1(\omega)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt}_{X_2(\omega)} \tag{5}$$

- Translation : en substituant $t - a$ par s (donc $t = a + s$), on retrouve $X(\omega)$ à une constante près

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-a)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-j\omega(a+s)}ds = e^{-j\omega a}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-j\omega s}ds}_{X(\omega)} \tag{6}$$

- Modulation : en réécrivant le $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$, on trouve

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-j\omega t}dt \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt}_{X(\omega-\omega_0)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt}_{X(\omega+\omega_0)}\right) \tag{8}$$

Exercice 3 : Signaux réels

1. Si $x(t)$ est un signal réel, et $X(2) = 1 + j$, que vaut $X(-2)$? Que peut-on dire sur $X(0)$?
2. Pour chacune des transformées de Fourier ci-dessus, indiquez si elle correspond à un signal réel :
   - $X(\omega) = e^{-\omega}$
   - $X(\omega) = e^{-|\omega|}$
   - $X(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$
   - $X(\omega) = \begin{cases} (1+j) & \text{pour } -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Réponse à l'exercice 3 :

1. Comme le signal est réel, $X(-2) = X^*(2) = 1 - j$. Pour ce qui est de $X(0)$, sa partie imaginaire doit obligatoirement être nulle.

2. Pour vérifier si le signal de base est réel, il suffit de vérifier que $X(-\omega) = X^*(\omega)$:
   - Non $\Rightarrow X(-\omega) = e^{\omega} \neq X^*(\omega) = e^{-\omega}$
   - Oui $\Rightarrow X(-\omega) = e^{-|\omega|} = X^*(\omega) = e^{-|\omega|}$
   - Oui $\Rightarrow X(-\omega) = \frac{-\sin(\omega)}{-\omega} = X^*(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$
   - Non $\Rightarrow -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0,\ X(-\omega) = 1 + j \neq X^*(\omega) = 1 - j$