6-22. Pour une race de vache et des conditions d'élevage données, les productions laitières au cours des lactations successives forment un vecteur aléatoire normal. Pour les deux premières lactations, les productions (en milliers de litres) sont données par :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 4.2 \\ 4.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.035 & 0.022 \\ 0.022 & 0.019 \end{pmatrix}\right)$$

Une vache est réformée (jugée inapte et écartée) après la première lactation si sa production laitière ne dépasse pas un seuil jugé rentable.

(d) Quelle est la probabilité qu'une vache donne une production inférieure à 4.2 en deuxième lactation si sa production en première lactation est de 4.1 ?

(e) Quelle est la probabilité que la production totale d'une vache dépasse 9 ?

(f) On achète 50 génisses ; quelle est la probabilité d'en réformer moins de 3 si le seuil de rentabilité est fixé à 3.9 ?

d) $P(X_2 < 4{,}2 \mid X_1 = 4{,}1) \Rightarrow Y \equiv X_2 \mid x_1 = 4{,}1$

$$E[Y] = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1) = 4{,}4 + 0{,}85 \cdot \frac{\sqrt{0{,}019}}{\sqrt{0{,}035}}(4{,}1 - 4{,}2) = 4{,}337$$

$$Var[Y] = (1-\rho^2)\sigma_2^2 = (1 - 0{,}85^2) \cdot 0{,}019 = 5{,}27 \cdot 10^{-3}$$

$$P(X_2 < 4{,}2 \mid x_1 = 4{,}1) = P\left(Z < \frac{4{,}2 - 4{,}337}{\sqrt{5{,}27 \cdot 10^{-3}}}\right) = P(Z \leq -1{,}89)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}89) = 1 - 0{,}9706 = 0{,}0294$$

e) $P(X_1 + X_2 > 9) \Rightarrow V \equiv X_1 + X_2$

$$E[V] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 4{,}2 + 4{,}4 = 8{,}6$$

$$Var[V] = Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2\,Cov[X_1; X_2]$$

$$= 0{,}035 + 0{,}019 + 2 \cdot 0{,}022 = 0{,}098$$

$$P(V > 9) = 1 - P(V < 9) = 1 - P\left(Z < \frac{9 - 8{,}6}{\sqrt{0{,}098}}\right) = 1 - P(Z \leq 1{,}28)$$

$$= 1 - 0{,}8997 = 0{,}1003$$

f) $W \sim Bi(50; p)$

↳ nombre de génisses réformées

$$p = P(X_1 < 3{,}9) = P\left(Z \leq \frac{3{,}9 - 4{,}2}{\sqrt{0{,}035}}\right) = P(Z \leq -1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6)$$

$$= 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

$$P(W < 3) = P(W \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0{,}4787$$

$$p(0) = (1 - 0{,}0548)^{50} = 0{,}0597$$

$$p(1) = 0{,}0597 \cdot \frac{0{,}0548}{1 - 0{,}0548} \cdot \frac{50-1+1}{1} = 0{,}1731$$

$$p(2) = 0{,}1731 \cdot \frac{0{,}0548}{1 - 0{,}0548} \cdot \frac{50-2+1}{2} = 0{,}2459$$

7-4. Soit $(X_1, X_2)'$ un couple normal tel que $E[X_1] = E[X_2] = 0$, $Var[X_1] = 2$, $Var[X_2] = 4$ et $Cov[X_1, X_2] = -1$. On considère la variable $Y = X_1 + X_2$.

(b) Si $X_2 < 0$, que devient la probabilité que $X_2 < -0.5$?

(c) Que vaut le coefficient de corrélation entre Y et X_2 ?

(d) Quelle est la valeur attendue de Y quand $X_2 = 1$?

b) $$P(X_2 < -0{,}5 \mid X_2 < 0) = \frac{P(X_2 < -0{,}5 \cap X_2 < 0)}{P(X_2 < 0)}$$

$$= \frac{P(X_2 < -0{,}5)}{P(X_2 < 0)} = \frac{P(Z < -0{,}25)}{P(Z < 0)}$$

$$= \frac{0{,}4013}{0{,}5} = 0{,}8026$$

c) $$\rho_{Y,X_2} = \frac{\sigma_{YX_2}}{\sigma_Y \sigma_{X_2}} = \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 4}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\begin{pmatrix} Y \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}^{X}$$

$$Cov\begin{pmatrix} Y \\ X_2 \end{pmatrix} = A \cdot Cov(X) \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Var(Y) = \sigma_Y^2$

$cov(Y; X_2) = \sigma_{Y,X_2}$

d) $$E[Y \mid x_2 = 1] = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X_2}} (x_2 - \mu_2) = 0 + 0{,}75 \frac{2}{2}(1 - 0) = 0{,}75$$

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 0$$

7-8. On s'intéresse aux teneurs(en meq/100 g de sol) des ions calcium (Ca^{++}) et des ions potassium (K^+) à deux profondeurs A et B pour un certain type de sol. Soit le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ où X_1, X_2 sont les teneurs en Ca^{++} et K^+ à la profondeur A tandis que X_3, X_4 sont ces teneurs à la profondeur B. On connaît $E[\mathbf{X}] = (10.6, 0.6, 5.5, 0.3)'$ et

$$Cov[\mathbf{X}] = 10^{-4} \begin{pmatrix} 144 & 54 & 125 & 30 \\ 54 & 81 & 24 & 50 \\ 125 & 24 & 169 & 42 \\ 30 & 50 & 42 & 64 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à la différence des teneurs entre ces profondeurs et l'on définit le nouveau vecteur $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} = (X_1 - X_3, X_2 - X_4)'$.

(a) Déterminez la matrice $\mathbf{A}$ et donnez les valeurs de $E[\mathbf{Y}]$ et $Cov[\mathbf{Y}]$.

$$Y = \begin{pmatrix} X_1 - X_3 \\ X_2 - X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 - 1 X_3 + 0 \cdot X_4 \\ 0 X_2 + 1 X_2 + 0 X_3 - 1 X_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$$E[Y] = A \underbrace{E[X]}_{\equiv \mu_X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10,6 \\ 0,6 \\ 5,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$Cov[Y] = A \cdot \underbrace{Cov[X]}_{\equiv \Sigma_X} \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} Cov[X] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 63 & 42 \\ 42 & 45 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

La capacité d'échange cationique (CEC) est le nombre total d'ions positifs échangeables. La CEC de la profondeur A est de 16.1 meq/100g et celle de la profondeur B est de 8.2 meq/100g. Pour ces deux profondeurs, on s'intéresse au nombre de meq/100g d'ions positifs échangeables autres que Ca^{++} et K^+ (soit la différence entre la CEC et la somme des teneurs en Ca^{++} et K^+ à la même profondeur).

(b) Donnez l'espérance de ces deux variables.

$$Y = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_3 + X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A \\ Y_B \end{pmatrix}$$

$$E[Y] = A\,E[X] = \begin{pmatrix} 11,2 \\ 5,8 \end{pmatrix}$$

$$CEC_A = Autres_A + Y_A$$

$$CEC_B = Autres_B + Y_B$$

$$E[Autres_A] = E[CEC_A - Y_A] = E[CEC_A] - E[Y_A] = 16,1 - 11,2 = 4,9$$

$$E[Autres_B] = 8,2 - 5,8 = 2,4$$

7.8.c (bonus)

$$P(X_1 - X_3 < 5 \mid X_2 - X_4 = 0,32) = ?$$

7-10. Pour étudier la dynamique de l'azote minéral N dans un sol donné, des dosages (en mg de N par kg de sol) sont effectués dans l'horizon racinaire quatre fois par an, du printemps X_1 à l'hiver X_4. On pose que $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_4)'$ est un vecteur normal dont les moyennes et variances sont données par :

Saison	μ	σ^2
X_1	53	150
X_2	35	87
X_3	68	246
X_4	42	125

et dont les coefficients de corrélation sont donnés par :

$$\rho_{X_1X_2} = 0.8 \quad ; \quad \rho_{X_2X_3} = 0.5 \quad ; \quad \rho_{X_3X_4} = 0.9 \quad ;$$
$$\rho_{X_1X_3} = 0.4 \quad ; \quad \rho_{X_1X_4} = 0.2 \quad ; \quad \rho_{X_2X_4} = 0.4 \quad ;$$

(a) Donnez la matrice de covariance du vecteur aléatoire.
(b) Quelle est la probabilité que la teneur dépasse à 40 mg/kg en été si elle est de 55 mg/kg au printemps ?
(c) Soient Y_1 la teneur moyenne sur l'année et Y_2 la différence entre la teneur en hiver et au printemps. Quelle est la corrélation entre Y_1 et Y_2 ?

a) $\rho_{X_1X_2} = \dfrac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \Rightarrow \sigma_{X_1X_2} = \rho_{X_1X_2}\,\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} = 0{,}8 \cdot \sqrt{150 \cdot 87}$

$= 91{,}389$

→ même raisonnement pour le reste

b) $P(X_2 > 40 \mid X_1 = 55)$

$E[X_2 \mid X_1 = 55] = \mu_{X_2} + \rho_{X_1X_2} \dfrac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}} (x_1 - \mu_1) = 36{,}22$

$\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1 = 55] = (1 - \rho^2_{X_1X_2})\,\sigma^2_{X_2} = 31{,}32$

$P(X_2 > 40 \mid X_1 = 55) = P\left(Z > \dfrac{40 - 36{,}22}{\sqrt{31{,}32}}\right) = P(Z > 0{,}68)$

$= 1 - P(Z < 0{,}68) = 1 - 0{,}7517 = 0{,}2483$

c) $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\Sigma X_i \\ X_4 - X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

$E[Y] = A\,E[X] = \begin{pmatrix} 49{,}5 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\mathrm{cov}[Y] = A\,\mathrm{cov}(X)\,A' = \begin{pmatrix} 96{,}54 & 1{,}57 \\ 1{,}57 & 220{,}22 \end{pmatrix}$

$\rho_{Y_1Y_2} = \dfrac{\sigma_{Y_1Y_2}}{\sigma_{Y_1}\,\sigma_{Y_2}} = \dfrac{1{,}57}{\sqrt{96{,}54 \cdot 220{,}22}} = 0{,}01$