Calculabilité

TP1

Y. Deville
C-H. Bertrand Van Ouytsel - V. Coppé - A. Gerniers
N. Golenvaux - M. Parmentier

Février 2021

Questions du test

1. L'ensemble des nombres impairs positifs est-il énumérable ?

   Réponse : Oui
   La fonction $f : \mathbb{N} \to E$ qui envoie n sur $2n + 1$ est une bijection (car c'est une surjection : si y est un nombre impair, alors $\frac{y-1}{2} \in \mathbb{N}$ et $f(\frac{y-1}{2}) = y$ et c'est une injection : si $f(n) = f(m)$, alors $2n + 1 = 2m + 1$ et donc $n = m$).

2. L'ensemble des nombres premiers positifs est-il énumérable ?

   Réponse : Vrai
   La fonction $f : \mathbb{N} \to E$ qui envoie n sur le n-ième plus petit nombre premier est une bijection (car l'ensemble des nombres premiers est infini, inclus dans $\mathbb{N}$ et totalement ordonné).

Questions du test

3. L'ensemble des nombres entiers (positifs et négatifs) est-il énumérable ?

   Réponse : Oui
   La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ qui envoie n sur $-\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair est une bijection.

Questions du test

4. L'ensemble des nombres rationnels est-il énumérable ?

   Réponse : Oui
   La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ qui envoie n sur le n-ième nombre obtenu en parcourant le tableau ci-dessous (en suivant les diagonales descendantes de droite à gauche et en négligeant les répétitions) est une bijection.

	0	1	-1	2	-2	$\dots$
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-2}{2}$	
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	
4	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-2}{4}$	
$\vdots$						

Questions du test

5. L'ensemble des nombres irrationnels compris entre 0 et 1 est-il énumérable ?

   Réponse : Non
   L'ensemble des nombres réels entre 0 et 1 n'est pas énumérable (voir cours). Or, $[0;1] \cap \mathbb{Q}$ est énumérable car c'est un sous-ensemble infini de $\mathbb{Q}$ (qui est énumérable).
   Comme $[0;1] = ([0;1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([0;1] \backslash \mathbb{Q})$, l'ensemble $[0;1] \backslash \mathbb{Q}$ ne peut pas être énumérable.
   En effet, supposons par l'absurde que $([0;1] \backslash \mathbb{Q})$ est énumérable, on a alors deux bijections $f_1 : \mathbb{N} \to ([0;1] \cap \mathbb{Q})$ et $f_2 : \mathbb{N} \to ([0;1] \backslash \mathbb{Q})$. Alors la fonction $g : \mathbb{N} \to [0;1]$ qui envoie n sur $f_1(\frac{n}{2})$ si n est pair et n sur $f_2(\frac{n-1}{2})$ si n est impair est une bijection (et donc $[0;1]$ est énumérable), ce qui est absurde.

Questions du test

6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ est-il énumérable ?

   Réponse : Non
   La démonstration se fait avec l'aide de la méthode de la diagonalisation de Cantor vue en classe.
   On suppose $F = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$ énumérable. Il existe donc une énumération des éléments de F : $f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots$.
   On peut représenter une fonction $f_k \in F$ comme la suite $f_k(0), f_k(1), \ldots, f_k(k), \ldots$. On peut donc construire une table infinie : (slide suivant)

Questions du test

	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$\dots$	$f_0(k)$	
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$\dots$	$f_1(k)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$\dots$	$f_2(k)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
f_k	$f_k(0)$	$f_k(1)$	$f_k(2)$	$\dots$	$f_k(k)$	
$\vdots$						$\ddots$

Questions du test

Soit la fonction f constituée des éléments de la diagonale : $f = f_0(0), f_1(1), f_2(2), \ldots, f_k(k), \ldots$. On construit la fonction $f' = f'(0), f'(1), f'(2), \ldots, f'(k), \ldots$ où $f'(i) = 1 - f_i(i)$.
La fonction f' est également une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$. Elle est donc dans l'énumération puisque par hypothèse, F est énumérable. Dès lors, il existe p tel que $f_p = f'$:

$$\begin{aligned} & f_p = f_p(0), f_p(1), f_p(2), \ldots, f_p(p), \ldots \\ = \quad & f' = f'(0), f'(1), f'(2), \ldots, f'(p), \ldots \end{aligned}$$

Contradiction car $f'(p) \neq f_p(p)$ par définition de f'. Donc, $f' \neq f_p$ ce qui implique que f' n'est pas dans l'énumération.
Conclusion, F n'est pas énumérable.

Questions du test

7. Est-il vrai que l'ensemble des mots de longueur finie d'un alphabet énumérable est lui-même énumérable ?

   Réponse : Oui
   Justifions d'abord par récurrence que l'ensemble des mots M_n d'une longueur fixée n d'un alphabet énumérable est lui-même énumérable.
   Pour $n = 0$, M_n ne contient qu'un élément (le mot vide) et est donc évidemment énumérable.
   Supposons que M_n soit énumérable pour un certain n, montrons qu'il en est de même pour M_{n+1}. Puisque l'alphabet $\mathcal{A}$ est énumérable, il existe une bijection $g : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$. Puisque l'alphabet M_n est énumérable, il existe une bijection $f_n : \mathbb{N} \to M_n$.
   Alors, la fonction $f_{n+1} : \mathbb{N} \to M_{n+1}$ qui envoie n sur le n-ième élément obtenu en parcourant le tableau ci-dessous (en suivant les diagonales descendantes de droite à gauche) est une bijection.

Questions du test

	$f_n(0)$	$f_n(1)$	$f_n(2)$	$f_n(3)$	$\dots$
$g(0)$	$f_n(0)+g(0)$	$f_n(1)+g(0)$	$f_n(2)+g(0)$	$f_n(3)+g(0)$	
$g(1)$	$f_n(0)+g(1)$	$f_n(1)+g(1)$	$f_n(2)+g(1)$	$f_n(3)+g(1)$	
$g(2)$	$f_n(0)+g(2)$	$f_n(1)+g(2)$	$f_n(2)+g(2)$	$f_n(3)+g(2)$	
$g(3)$	$f_n(0)+g(3)$	$f_n(1)+g(3)$	$f_n(2)+g(3)$	$f_n(3)+g(3)$	
$\vdots$					

Remarque : dans ce contexte, le symbole « + » désigne la concaténation.

Questions du test

Justifions à présent que l'ensemble des mots $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ de longueur finie d'un alphabet énumérable est lui-même énumérable. Pour tout n, on a une bijection $f_n : \mathbb{N} \to M_n$.
Alors, la fonction $h : \mathbb{N} \to M$ qui envoie n sur le n-ième élément obtenu en parcourant le tableau ci-dessous (en suivant les diagonales descendantes de droite à gauche) est une bijection.

Questions du test

	0	1	2	3	$\dots$
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	
$\vdots$					

Questions du test

8. Est-il vrai que l'ensemble des mots de longueur infinie d'un alphabet énumérable est lui-même énumérable ?

   Réponse : Non
   Contre-exemple : l'ensemble des nombres réels entre 0 et 1 peuvent être vus comme l'ensemble des mots de longueur potentiellement infinie réalisés à partir de l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

Questions du test

9. Supposons avoir deux ensembles A et B avec la même cardinalité. Si A n'est pas énumérable, B peut-il être énumérable ?

   Réponse : Non
   Supposons par l'absurde que B est énumérable, alors il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to B$. Si A et B ont la même cardinalité, alors il existe une bijection $g : A \to B$. Soit h la fonction inverse de la fonction g (qui existe et est unique car g est une bijection). Alors la fonction $(f \circ h) : \mathbb{N} \to A$ est une bijection et donc A est énumérable. C'est absurde, donc B ne peut pas être énumérable.

Questions du test

10. Les ensembles $]0,1[$, $]-1,1[$, $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$ ont-ils tous la même cardinalité ?

    Réponse : Oui
    Les fonctions $f :]0,1[\to]-1,1[$, $g :]-1,1[\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $h :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ et qui envoient respectivement x sur $2x-1$, x sur $\frac{x\pi}{2}$ et x sur $\tan(x)$ sont toutes les trois des bijections.

Question 1 du TP

Answer the following questions in the given order.

1. True or false : a set X is countable iff $\mathcal{P}(X)$ (the set of all the subsets of X, the empty set and X itself included) is countable.
2. Show Cantor's Theorem : if X is a set, then $\mathcal{P}(X)$ has never the same cardinality as X.
3. If X is finite, what is the cardinality of $\mathcal{P}(X)$ with respect to the cardinality of X ?

Question 1 du TP

Réponse :

1. Faux. Un contre-exemple est donné par $\mathbb{N}$. En effet, il y a une bijection $g : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ entre l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$:

$$(f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}) \overset{g}{\mapsto} \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1\}$$

   Or, nous savons déjà que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ n'est pas énumérable, donc l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne peut pas l'être non plus.

Question 1 du TP

Réponse :

2. Supposons par l'absurde qu'il existe une bijection $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Posons l'ensemble :

$$E = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

Pour chaque $x \in X$, $f(x)$ est un sous-ensemble de X, la définition de E fait donc bien sens et E est un sous-ensemble de X.
Puisque f est une bijection, notons $g : \mathcal{P}(X) \to X$ son unique fonction inverse. Puisque $E \in \mathcal{P}(X)$, l'élément $e = g(E)$ est bien un élément de X. L'élément e doit donc soit se trouver dans E, soit ne pas se trouver dans E.
Or, supposons qu'il se trouve dans E, alors par définition de E on a que $e \notin f(e) = E$, ce qui est absurde.
De même, supposons qu'il ne se trouve pas dans E, alors par définition de E on a que $e \in f(e) = E$, ce qui est absurde.
En conclusion, e est un élément de X qui n'est ni dans E ni dans $X \backslash E$. C'est absurde. Donc notre supposition de départ, celle selon laquelle la bijection f peut exister, ne peut être vraie.

Question 1 du TP

Réponse :

3. Notons $|X|$ la cardinalité de l'ensemble fini X (c'est-à-dire son nombre d'éléments). Alors le nombre de sous-ensembles possibles de X est le nombre de sous-ensembles de X à 0 éléments (il n'y en a qu'un : l'ensemble vide), plus le nombre de sous-ensembles de X à un élément (il y en a exactement $|X|$), plus le nombre de sous-ensembles de X à 2 éléments (pour construire un tel sous-ensemble, il faut choisir 2 éléments distincts parmi $|X|$, il y en a donc $C^2_{|X|}$), plus le nombre de sous-ensembles de X à 3 éléments (pour construire un tel sous-ensemble, il faut choisir 3 éléments distincts parmi $|X|$, il y en a donc $C^3_{|X|}$), et ainsi de suite jusqu'à l'unique sous-ensemble de X qui contient $|X|$ éléments : l'ensemble X lui-même. En conclusion, il y a donc $C^0_{|X|} + C^1_{|X|} + C^2_{|X|} + C^3_{|X|} + ... + C^{|X|-1}_{|X|} + C^{|X|}_{|X|}$ sous-ensembles possibles de X, ce qui est égal à (formule de combinatoire bien connue) $2^{|X|}$. La cardinalité de $\mathcal{P}(X)$ est donc $2^{|X|}$ (raison pour laquelle l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble est parfois noté 2^X, même quand X n'est pas nécesssairement fini).

Question 2 du TP

Using a cardinality argument, show that there are functions that are not computable by a Python program.

Question 2 du TP

Réponse : L'ensemble des programmes peut être vu comme l'ensemble des mots finis réalisés à partir d'un alphabet fini, ce que nous savons déjà être énumérable. Or, nous savons également que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ n'est pas énumérable. Il est donc impossible qu'il existe au moins un programme pour chaque fonction de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$, et il existe donc certainement au moins une infinité de fonctions non calculables (à l'aide d'un programme python).

Question 3 du TP

If A_i $(i \in \mathbb{N})$ are countable sets,

1. prove that $A_1 \times A_2$ is a countable set.
2. prove that $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ is a countable set.

Question 3 du TP

Réponse :

1. Soit $f : \mathbb{N} \to A_1$ une bijection. Soit $g : \mathbb{N} \to A_2$ une bijection. Pour construire une bijection $h : \mathbb{N} \to A_1 \times A_2$, il suffit de considérer la fonction qui envoie n sur le n-ième élément obtenu en parcourant le tableau ci-dessous (en suivant les diagonales descendantes de droite à gauche).

	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$\ldots$
$g(0)$	$(f(0), g(0))$	$(f(1), g(0))$	$(f(2), g(0))$	$(f(3), g(0))$	
$g(1)$	$(f(0), g(1))$	$(f(1), g(1))$	$(f(2), g(1))$	$(f(3), g(1))$	
$g(2)$	$(f(0), g(2))$	$(f(1), g(2))$	$(f(2), g(2))$	$(f(3), g(2))$	
$g(3)$	$(f(0), g(3))$	$(f(1), g(3))$	$(f(2), g(3))$	$(f(3), g(3))$	
$\vdots$					

Question 3 du TP

Réponse :

2. Soit $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ des bijections. Pour constuire une bjection $h : \mathbb{N} \to \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, il suffit de considérer la fonction qui envoie n sur le n-ième élément obtenu en parcourant le tableau ci-dessous (en suivant les diagonales descendantes de droite à gauche et en négligeant les répétitions).

	0	1	2	3	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	
$\vdots$					

Question 4 du TP

Write a program that lists these sets :

1. $\mathbb{Z}$
2. $\{a, b, c\}^*$ (all words formed with the alphabet $\{a, b, c\}$)
3. The set of all Python programs

Question 4 du TP

1.

```
print(0)
n = 0
while True do
    n = n + 1
    print(n)
    print(-n)
```

Question 4 du TP

2.

$alphabet = \{$'a','b','c'$\}$ # the alphabet we are using

print('') # the empty word

$list = \{$''$\}$ # a list that contains all the words of length 0

while True **do**

  $new\_list = \{\ \}$

  for $word \in list$ **do**

    for $symbol \in alphabet$ **do**

      print($word + symbol$) # every word of length n can be obtained as a word of length $n-1$ + one symbol of the alphabet

      add ($word + symbol$) to new_list # we update our new list of words of length n

  $list = new\_list$ # we replace our list of words of length $n-1$ with our new list of words of length n

Question 4 du TP

3. **On dénote par C un compilateur de Python. Il renvoie 1 si un mot donné est un programme Python valide, 0 sinon.**

   $alphabet = \{$'a','b','c','d',...,'.',' ',... $\}$ # a list of all the symbols which are allowed in a Python program

   $list = \{''\}$ # a list that contains all the words of length 0

   while True **do**

   $\quad new\_list = \{\ \}$

   $\quad$ **for** $word \in list$ **do**

   $\quad\quad$ **for** $symbol \in alphabet$ **do**

   $\quad\quad\quad$ **if** $C(word + symbol) == 1$ **then**

   $\quad\quad\quad\quad$ print$(word + symbol)$ # again, every word of length n can be obtained as a word of length $n - 1$ + one symbol of the alphabet, but this time we have to check if the word is a valid Python program before printing it

   $\quad\quad\quad$ add $(word + symbol)$ to new_list # we update our new list of words of length n

   $\quad list = new\_list$ # we replace our list of words of length $n - 1$ with our new list of words of length n