LELEC1930 - Introduction aux télécommunications
Séance 2 - Modulation

Prof. : Jérôme Louveaux Assist. : Jérome Eertmans

Rappel

Le rôle d'un système de communications est de transmettre de l'information, aussi appelée signal en bande de base, au travers d'un canal. Le terme "bande de base" fait référence aux fréquences présentes dans le signal d'origine. Afin de transmettre le signal d'un endroit à un autre, il est commun de moduler ce dernier afin de décaler sa fréquence autour d'une porteuse f_c.

Modulation en amplitude Le cas le plus simple de modulation est la modulation en amplitude (AM). Le signal en bande de base $m(t)$ est multiplié par une porteuse $c(t)$: $s(t) = c(t) \cdot m(t)$. En prenant

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t), \tag{1}$$

où f_c est la fréquence porteuse, on déplace le contenu fréquentiel du signal $m(t)$ en le copiant autour des fréquences $-f_c$ et f_c (voir figure 1). Dans le cas d'un signal à bande limitée, on définit sa largeur de bande, B_T, comme étant la différence entre sa plus haute et sa plus basse fréquence. Ici, $B_T = 2W$.

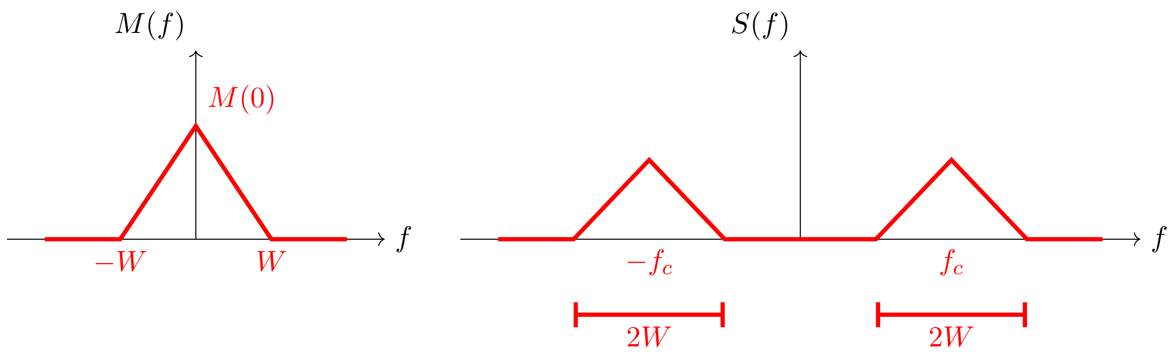

FIGURE 1 – Modulation en amplitude : contenu fréquentiel.

Modulation en fréquence La modulation en fréquence (FM) consiste à envoyer un signal $s(t)$ dont la fréquence instantanée varie linéairement avec le message $m(t)$:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t), \tag{2}$$

avec k_f la sensibilité en $\mathrm{Hz\,V^{-1}}$. Le produit $k_f m(t)$ indique la déviation instantanée de fréquence, et sa valeur maximale est $f_d = k_f A_m$, avec A_m l'amplitude du signal en bande de base.

En intégrant la fréquence pour obtenir la phase [1], on trouve l'expression du signal modulé :

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau\right]. \tag{3}$$

1. Pour rappel, la fréquence instantanée est donnée par la dérivée de la phase : $f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$.

On définit l'indice de modulation $\beta = \frac{f_d}{W}$. La bande passante du signal modulé est donné par la formule de Carson : $B_T \approx 2\,(f_d + W) = 2f_d\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2W(1+\beta)$.

Modulation digitale Jusqu'ici, les signaux considérés étaient continus. Dans le cas de signaux discrets (imaginez envoyer un signal en code Morse toutes les secondes), il est utile d'appliquer une modulation digitale. Le message est une séquence de symboles complexes, $I(n)$, appartenant à une constellation donnée. *Une constellation* est simplement une association entre un groupe de bits et un nombre dans le plan complexe. Un exemple de constellation très simple serait d'associer le bit 1 à la valeur $1 + 0j$ et le bit 0 à la valeur $-1 + 0j$ (voir figure 2). Ensuite, les symboles passent dans un filtre de mise en forme, $u(t)$, afin d'obtenir un signal continu :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I(n)u(t - nT), \tag{4}$$

où T est la durée d'un symbole (ou l'espace entre deux symboles).

Comme $x(t)$ est complexe, il est commun de noter sa partie réelle I (pour "In phase")

$$x_I(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} I(n)u(t - nT)\right\}, \tag{5}$$

et sa partie imaginaire Q (pour "in Quadrature")

$$x_Q(t) = \mathrm{Im}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} I(n)u(t - nT)\right\}. \tag{6}$$

Enfin, ce signal est ensuite modulé pour obtenir

$$x_{RF} = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) + x_Q(t)\sin(2\pi f_c t). \tag{7}$$

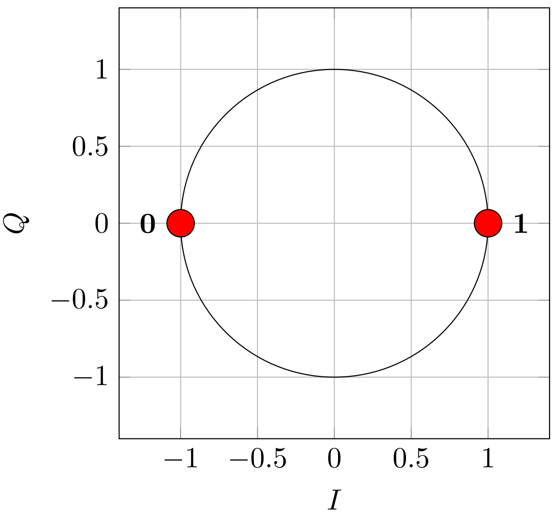

FIGURE 2 – Constellation (BPSK).

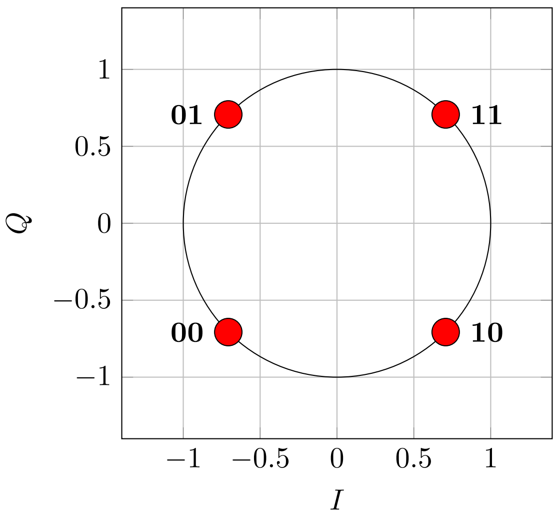

FIGURE 3 – Constellation (QPSK).

Exercices

Exercice 1 : Modulation AM

Un signal $m(t)$ est modulé en modulation d'amplitude autour d'une fréquence porteuse $f_c = 900\,\text{kHz}$.

1. Donnez l'expression du signal modulé $s(t)$ en fonction de $m(t)$.
2. Représentez le contenu fréquentiel de $s(t)$ étant donné le contenu fréquentiel de $m(t)$ (voir figure 4).

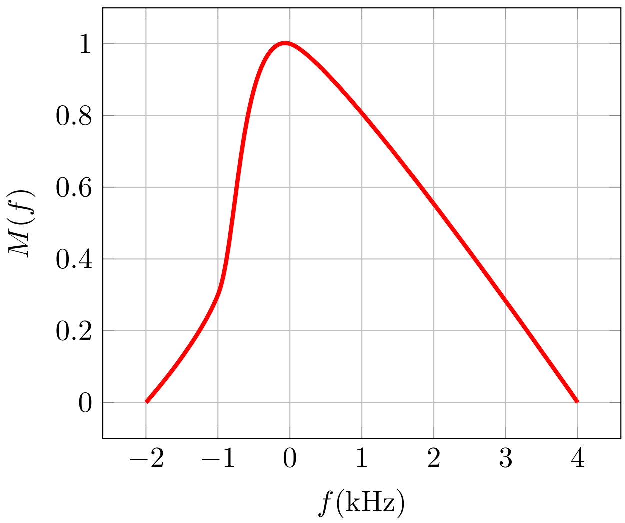

FIGURE 4 – Contenu fréquentiel de $m(t)$.

Réponse à l'exercice 1 :

1. On substitue pour obtenir $s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi \cdot 900 \times 10^3 t)$.
2. Le contenu fréquentiel de $s(t)$ est simplement celui de $m(t)$, recopié autour de $-f_c$ et f_c, et multiplié par $\frac{A_c}{2}$:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\left[M(f - f_c) + M(f + f_c)\right]. \tag{8}$$

Exercice 2 : Modulation FM

1. Un modulateur FM réalise une déviation maximale de $30\,\text{kHz}$ et présente une sensibilité de $4\,\text{kHz}\,\text{V}^{-1}$. Déterminez l'amplitude maximale du signal modulant en entrée.
2. Un signal modulant de $10\,\text{V}$ produit une déviation de fréquence de $75\,\text{kHz}$ à la sortie d'un modulateur FM. Déterminez la sensibilité de celui-ci et la déviation de fréquence qui serait provoquée par un signal modulant de $2\,\text{V}$. Toujours pour le même modulateur FM avec la même sensibilité, calculez la bande occupée par le signal modulé ainsi que l'indice de

modulation si le signal modulant a une amplitude maximale de 10 V et une fréquence maximale de 15 kHz, .

3. Comparez la largeur de bande calculée ci-dessus à celle nécessaire si le même signal était modulé en AM.

Réponse à l'exercice 2 :

1. En prenant la définition de la déviation maximale f_d et en isolant A_m, on trouve :

$$A_m = \frac{f_d}{k_f} = \frac{30 \times 10^3}{4 \times 10^3} = 7.5\,\mathrm{V}. \tag{9}$$

2. (a) Si $A_m = 10\,\mathrm{V}$, alors

$$k_f = \frac{75 \times 10^3}{10} = 7.5\,\mathrm{kHz\,V^{-1}}. \tag{10}$$

(b) Si $A_m = 2\,\mathrm{V}$, alors

$$f_d = 2 \cdot 7.5 \times 10^3 = 15\,\mathrm{kHz}. \tag{11}$$

(c) Pour ce signal, la déviation de fréquence est de 75 kHz (voir 2a). De ce fait

$$\beta = \frac{75 \times 10^3}{15 \times 10^3} = 5. \tag{12}$$

et la bande occupée est donnée par $B_T = 2W(1+5) = 180$ kHz.

Exercice 3 : Modulation digitale

On considère une modulation digitale linéaire utilisant le filtre de mise en forme décrit sur la figure 5. On envoie la séquence de symboles suivante : $I(0) = 1 + j$, $I(1) = j$ et $I(2) = -1$.

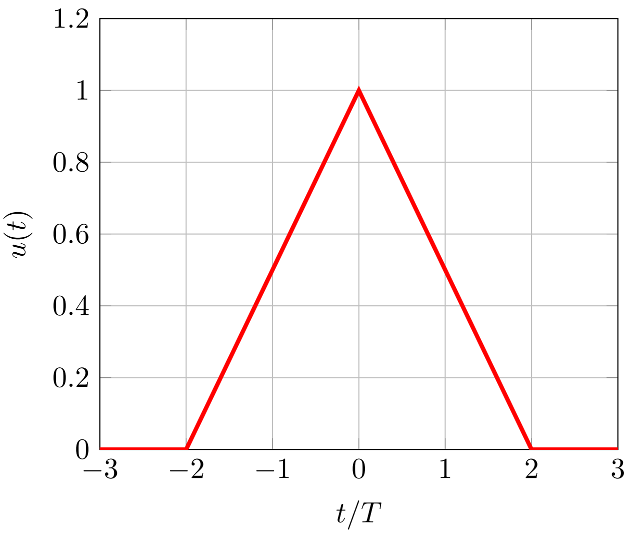

FIGURE 5 – Filtre de mise en forme triangulaire.

1. Représentez les signaux I et Q avant la modulation autour de la porteuse.
2. Ces signaux souffriront-ils d'interférence entre symboles ? Si oui, évaluez l'interférence dont souffre le symbole $I(0)$ pour la séquence envoyée.

Réponse à l'exercice 3 :

1. Les signaux I et Q s'obtiennent assez simplement en sommant plusieurs versions décalées de $u(t)$, chacune multipliée par son symbole correspondant.

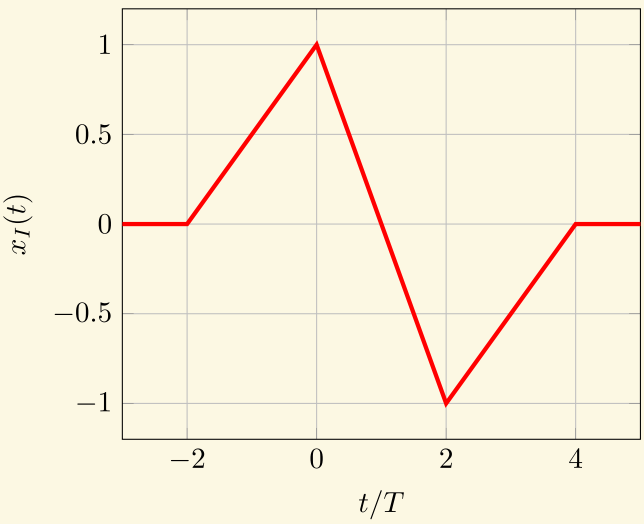

FIGURE 6 – Signal I.

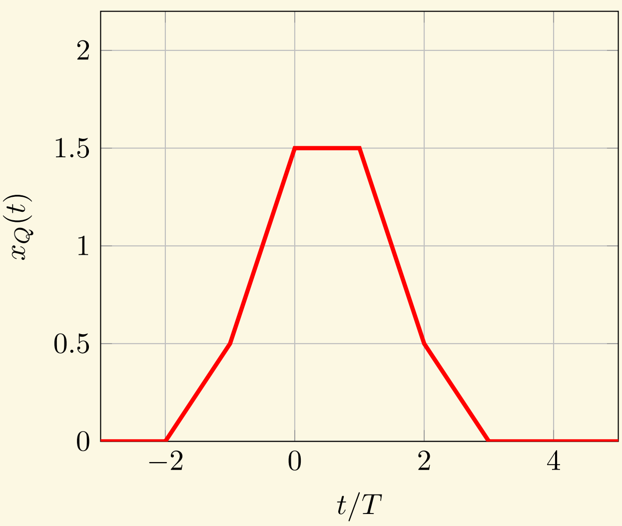

FIGURE 7 – Signal Q.

2. Comme $x_Q(t)$ n'est pas égal à 1, il y a bien interférence en $t = 0$. Pour quantifier l'interférence, on va comparer le signal reçu en $t = 0$ avec $I(0)$. La valeur reçue vaut $1 + 1.5j$ alors que $I(0) = 1 + j$. On a donc une erreur de $0.5j$. On peut identifier que cette interférence provient du symbole $I(1)$ multiplié par la valeur du filtre de

mise en forme prise en $t = 1$.

Exercice 4 : Modulation digitale

Un filtre de mise en forme beaucoup plus utilisé est celui dont le contenu fréquentiel est présenté à la figure 8. Pour ce type de filtre, l'excès de bande passante, c.-à-d. le surplus de bande passante utilisé à cause du filtre, Δf, est donné, en bande de base, par :

$$\Delta f = \frac{\alpha}{2T}, \tag{13}$$

avec $\alpha = 0.2$ le facteur de roll-off et T l'inverse de la fréquence de symboles. Notez que, après modulation AM, la bande occupée sera donnée par $B_T = \frac{1+\alpha}{T}$.

On souhaite transmettre un signal vidéo en format 320×180, où chaque pixel possède trois couleurs et chaque couleur occupe 8 bits. La transmission doit se faire à un rythme de 30 images par secondes. La bande passante disponible est de 10 MHz

1. Calculez le débit en termes de bits par seconde qu'il faudrait avoir pour transmettre une telle vidéo.
2. Déterminez le nombre de symboles par secondes qui peut passer dans la bande passante.
3. Déterminer la taille de constellation requise pour que le signal puisse transmettre la vidéo.
4. Refaites les calculs pour une vidéo en noir et blanc.

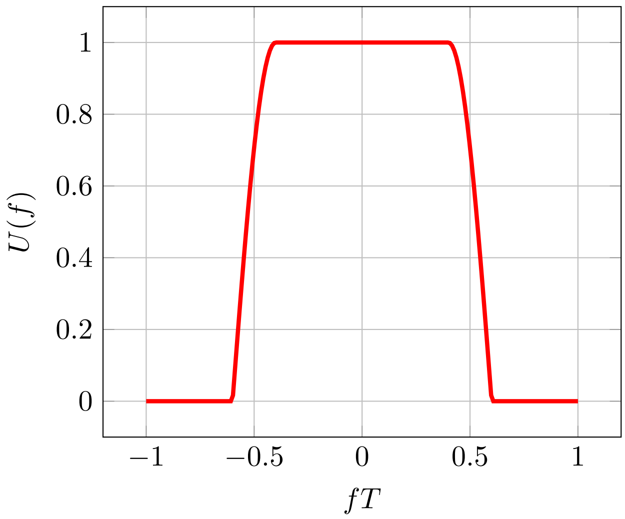

FIGURE 8 – Contenu fréquentiel du filtre de mise en forme SRRC de roll-off $\alpha = 0.2$.

Réponse à l'exercice 4 :

1. Le débit en bits s'obtient aisément : $320 \cdot 180 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 30 = 41.472 \times 10^6$ bits par seconde.

2. Pour calculer le débit en symboles, il faut résoudre pour $\frac{1}{T}$

$$\frac{1+\alpha}{T} = 10\,\mathrm{MHz}, \tag{14}$$

et l'on trouve alors $\frac{1}{T} = \frac{10\times10^6}{1+\alpha} = 8.3\,\mathrm{MHz}$.

3. La taille de la constellation est 2^N avec N le nombre de bits par symbole. Afin d'avoir le débit nécessaire, on doit prendre le plus petit entier N tel que

$$N \geq \frac{41.472\times10^6}{8.3\times10^6} = 4.98 \tag{15}$$

On choisit donc 5 bits par symboles. La constellation a donc une taille de 32 éléments.

4. Le débit requis est réduit d'un facteur 3, il faut donc 2 bits par symbole (on arrondit au-dessus).