Devoir 8_old

- On dispose du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, X_3)'$ avec

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.9 \\ 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_X = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0.5 \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance est donc :

$$\Sigma_X = S_X R_X S_X = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.64 \\ 0.7 & 1 & 0.64 \\ 0.64 & 0.64 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- On a $X_3 \sim N(10, 0.5)$ et donc :

$$P(X_3 < 10) = P\left(Z < \frac{10-10}{\sqrt{0.5}}\right) = P(Z < 0) = 1/2$$

- En partitionnant le vecteur :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_a \\ \\ x_b \end{array}; \quad \mu_X = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ \hline 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mu_a \\ \\ \mu_b \end{array}; \quad \Sigma_X = \begin{array}{c} \Sigma_{aa} \qquad\qquad \Sigma_{ab} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.7 & 0.64 \\ 0.7 & 1 & 0.64 \\ \hline 0.64 & 0.64 & 0.5 \end{array}\right) \\ \Sigma_{ba} \qquad\qquad \Sigma_{bb} \end{array}$$

$$\begin{cases} \mu_{b|a} = \mu_b + \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}(\mu_a - x_a) = 8.87 \\ \sigma^2_{b|a} = \Sigma_{bb} - \Sigma_{ba}\Sigma_{aa}^{-1}\Sigma_{ab} = 0.0181 \end{cases}$$

avec $X_b | x_a \sim N(\mu_{b|a}, \sigma^2_{b|a})$

On a donc $P(X_3 < 10 \mid x_1 = 14, x_2 = 3) = P\left(Z < \frac{10 - 8.87}{\sqrt{0.0181}}\right)$

$= P(Z < 8.40) \simeq 1$