Matrizes

Uma matriz é uma sequência de números dispostos em linhas e colunas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0.7 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

nº de linhas

↳ nº de colunas

1 linha

3 colunas

De uma forma geral, uma matriz A com m linhas e n colunas pode ser representada por

$$A = \underbrace{(a_{ij})_{m \times n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i → posição da linha.

j → posição da coluna.

Alguns tipos de matrizes:

- unitária $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}_{1 \times 1}$
- linha $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}$
- coluna $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$

· quadrada $\longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$.

Matriz determinada via termo geral

① Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ dada por $a_{ij} = 2i + j$.

Então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & 2 \cdot 1 + 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 & 2 \cdot 2 + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

② $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ $\quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + j, & \text{se } i \leq j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 & 1^2 + 2 & 1^2 + 3 \\ 0 & 2^2 + 2 & 2^2 + 3 \\ 0 & 0 & 3^2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Duas matrizes são iguais se, e somente se, elas possuem a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais; isto é;

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = B = (b_{ij})_{p \times q} \iff$$

$$m = p, \quad n = q \quad \text{e} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j.$$

Operações com Matrizes

→ Adição e Multiplicação por um número real.

Dadas $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $K \in \mathbb{R}$ definimos:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$K \cdot A = (K a_{ij})_{m \times n}.$$

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

1) $$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-3) & -1 + (-2) \\ 3 + 0 & 0 + 4 \\ 4 + 1 & 7 + (-5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} //$$

2) $$-3A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 0 \\ -12 & -21 \end{bmatrix}.$$

O elemento neutro da adição de matrizes é a matriz nula.

③ $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 8 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1/3 & 8 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Dessa forma, dada uma matriz $B_{m \times n}$, temos que $-B$ é uma matriz que satisfaz

$$-B + B = B + (-B) = [0]_{m \times n}$$

E provamos que $-B = -1 \cdot B$.

Com isso podemos efetuar a subtração de matrizes:

④ $A - B = A + (-B) = A + (-1 \cdot B) =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

<u>Propriedades</u>: Dadas $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$, $k \in \mathbb{R}$; são válidas:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

3. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

4. $A + [0]_{m \times n} = [0]_{m \times n} + A = A.$

Exercícios:

193. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$,

calcule $A + B + C$, $A - B + C$, $A - B - C$ e $-A + B - C$.

194. Calcule a soma $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ das matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ tais que $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$.

197. Determine x e y de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} y^3 & 3x \\ y^2 & 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y & x^2 \\ 2y & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

198. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

determine a matriz X tal que $X + A = B - C$.