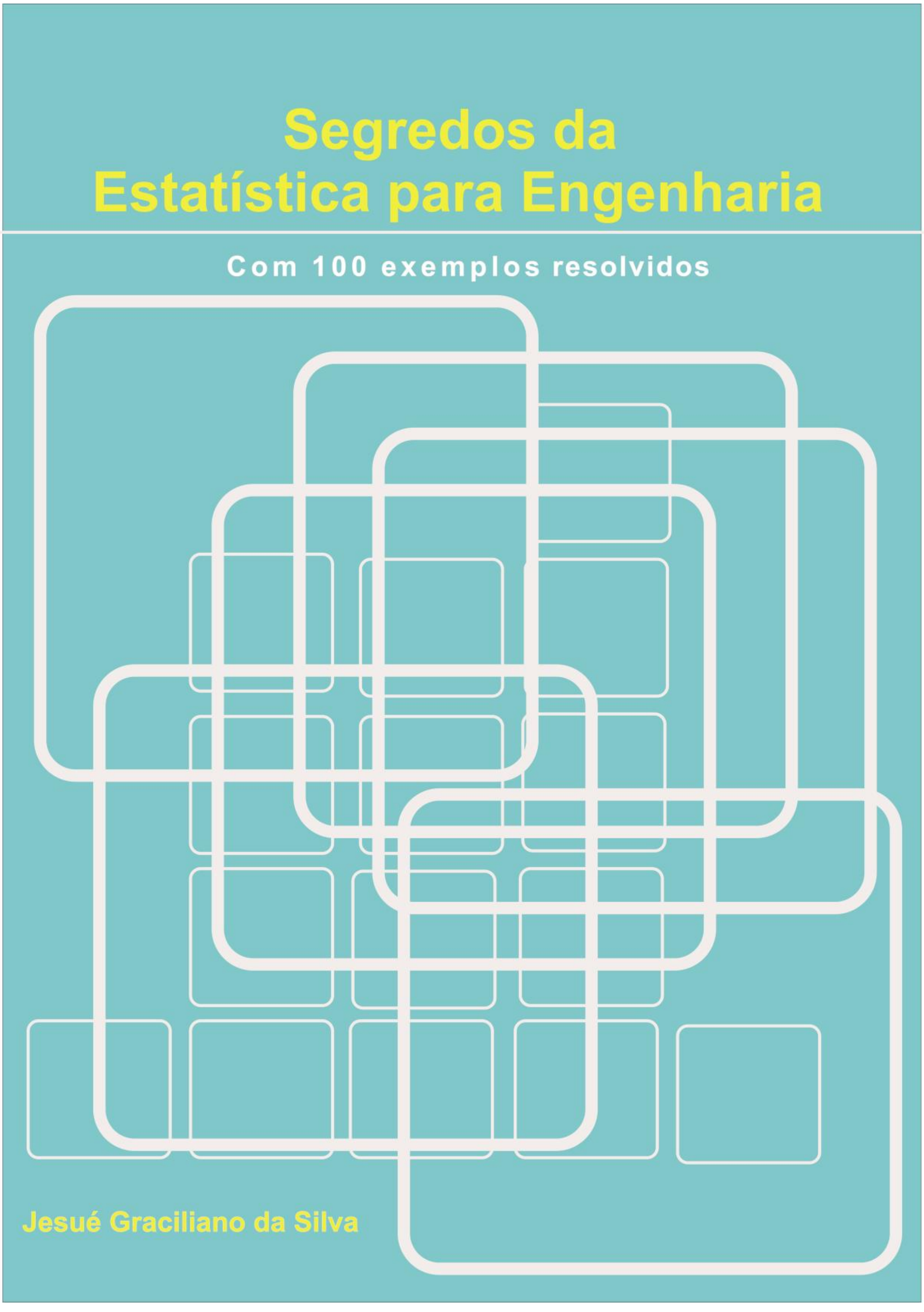

Segredos da
Estatística para Engenharia
Com 100 exemplos resolvidos
Jesué Graciliano da Silva

SEGREDOS DA
ESTATÍSTICA APLICADA À ENGENHARIA

Esse livro é dedicado aos meus pais, a minha esposa Sulayre e aos meus filhos Gabriela e Arthur. Ele não seria possível sem o incentivo dos colegas de trabalho e dos estudantes do Instituto Federal de Santa Catarina, a quem agradeço imensamente pelo privilégio da convivência ao longo dos anos.

No blog:
http://segredosdaestatística.wordpress.com são disponibilizados 100 exercícios resolvidos e 50 videoaulas de curta duração abordando todos os assuntos tratados no livro.

“Enquanto um homem individualmente é um quebra cabeças insolúvel,
no conjunto ele se torna uma certeza matemática.
Você nunca pode prever o que um homem fará,
mas pode dizer com precisão o que, em média, um número deles fará.
Individualmente eles variam, mas em média se mantem constante”

Sir Conan Doylee, criador do personagem Sherlock Holmes

Apresentação

A Estatística é ensinada na maioria das grandes universidades do mundo. Seus fundamentos contribuem para a compreensão mais precisa da realidade, bem como permitem avaliar a probabilidade de ocorrência de acontecimentos futuros a partir da observação dos padrões existentes no cotidiano. Na atualidade, o BIG DATA[1] ou "mineração de dados" já é aplicado a muitas áreas do conhecimento[2]. No Filme "Moneyball[3]", por exemplo, é possível conhecer uma aplicação desse conceito pela primeira vez ao mundo dos esportes.

O surgimento desse livro se deu a partir de um caderno de exercícios com 100 questões resolvidas, que foi elaborado para facilitar a compreensão da matéria pelos estudantes da disciplina de Estatística e Probabilidades do Curso de Engenharia de Telecomunicações no ano de 2014. A inspiração para esse trabalho foram as notas de aula do prof. Armando Albertazzi da UFSC. Surgiu também a partir da preocupação em tornar os conteúdos de Estatística aliados para a compreensão da realidade.

O profissional que domina os princípios estatísticos tem em suas mãos uma poderosa ferramenta que poderá ser uma aliada ao longo da carreira. As aplicações são diversas. Uma delas é o Controle Estatístico de Processos (CEP), que foi uma das principais técnicas utilizadas pelo Toyotismo, ou modo de produção flexível. O controle da qualidade a partir da inspeção de amostras aleatórias é fundamental na atualidade. Os dados do MEC mostram que de cada 100 graduandos brasileiros, apenas 6 cursam engenharia. Um número bem abaixo que a média dos países mais desenvolvidos. Compreender esse contexto é a primeira lição de estatística. Os estudantes da engenharia são escassos e precisam ser valorizados na sociedade da inovação.

O livro tem finalidade didática, sem a preocupação com o aprofundamento dos assuntos, o que provavelmente afastaria os estudantes iniciantes na área. Para facilitar a análise dos dados e a construção dos gráficos foram introduzidos vários exemplos elaborados com apoio do software livre de estatística R. Também foram organizados 100 exercícios resolvidos e mais de 50 vídeos de curta duração – disponibilizados no blog SEGREDOS DA ESTATÍSTICA – http://segredosdaestatística.wordpress.com

Bom estudo para todos !

Jesué Graciliano da Silva   jesue@ifsc.edu.br

[1]Planejamento de vendas – O que é BIG DATA https://www.youtube.com/watch?v=sZf8F0dziJA&sns=em

[2] http://exame.abril.com.br/pme/noticias/o-que-e-big-data-e-como-usar-na-sua-pequena-empresa

[3] http://www.sonypictures.com/movies/moneyball/

SUMÁRIO

1- Introdução

Segundo os historiadores, uma das primeiras aplicações da estatística, mesmo que ainda assim não se chamasse se deu a partir da necessidade de se quantificar os estoques de comida das primeiras civilizações e para aperfeiçoar a cobrança de impostos. Para Diamond (2012), era comum a realização de censos populacionais deste os babilônicos, chineses, egípcios, gregos e romanos. Em torno de 1066, após conquistar a Bretanha os invasores normandos liderados por Willian, "o conquistador", implantou o censo e a listagem de todos os itens de propriedade no território, registrado no livro que ficou conhecido como *Domesday Book*. A palavra "estatística", conforme utilizamos na atualidade, parece ter sido introduzida pelo economista alemão Gottfried Achenwall (1719-1772) em 1748. Achenwall estudou a regularidade de fenômenos de caráter econômico e social. Mas antes dele, no século XVII John Graunt (1620 – 1674) já havia introduzido relatórios sobre mortalidade e natalidade à procura de regularidades. A estatística confundia-se, praticamente, com a demografia à qual fornecia métodos sistemáticos de enumeração e organização. Somente após o desenvolvimento da teoria das probabilidades por Blaise Pascal[4] (1623-1662) e por Pierre S. Laplace (1749 – 1827), acabou se tornando uma disciplina. A curva chamada de normal, fundamental para a compreensão dos fenômenos estatísticos, foi observada pela primeira vez por Abraham de Moivre (1667-1754) no ano 1733. O sociólogo e matemático belga Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874) usou a curva normal para realização de estudos sociais, mas somente anos mais tarde o matemático alemão Carl F. Gauss[5] (1777-1855) determinou sua equação descritiva. O desenvolvimento da estatística moderna se deu a partir dos estudos de F. Galton (1822-1911), K. Pearson (1857-1936), R.A.Fischer (1890-1962) e W.S.Gosset (1876-1936). A história do desenvolvimento da Estatística como ciência é cheia de grandes personagens e passagens interessantes e permite compreender melhor o que levou à descoberta da curva normal e ao desenvolvimento dos Testes de Hipóteses[6].

Há diversas definições para Estatística. Podemos simplificar dizendo que "**estatística é o estudo da coleta, organização, análise, interpretação e apresentação de dados".** Dados

[4] Filme sobre Blaise Pascal: https://www.youtube.com/watch?v=C3fhX3q0-SQ

[5] Livro recomendado: As 17 equações que mudaram o mundo do autor Ian Stewart.

[6] Livro recomendado: Uma senhora toma chá do autor David Salsburg

são valores coletados da variável em estudo. Para facilitar o aprendizado, organizamos os capítulos em dois grandes grupos conforme ilustrado na Figura 1.

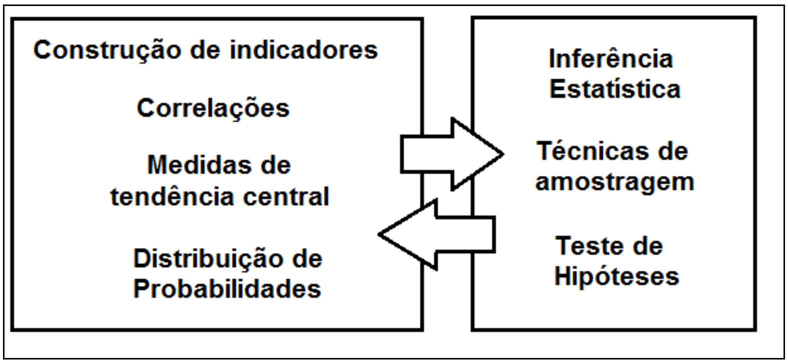


Figura 1 – Organização do estudo da estatística.

No primeiro grupo, tem-se a Estatística Descritiva e no segundo grupo a Estatística Inferencial. A Estatística Descritiva utiliza um conjunto de técnicas tais como: medidas de posição e dispersão, tabelas e gráficos para resumir as características dos dados coletados. Já a Estatística Inferencial possibilita que uma população inteira seja conhecida a partir do estudo das características de uma amostra aleatória representativa do todo.

Para iniciar nosso estudo vamos analisar a seguir alguns indicadores muito utilizados no nosso dia a dia. Nem sempre paramos para refletir sobre como eles foram construídos e como eles podem nos auxiliar na interpretação e compreensão da realidade. Neste capítulo, vamos destacar alguns deles como IDH, PIB, PISA, IPCA PIB per capita e IDEB.

a) **IDH – Índice de desenvolvimento humano**

O Índice de desenvolvimento humano é um índice que serve de comparação entre os países, com objetivo de medir o grau de desenvolvimento econômico e a qualidade de vida oferecida à população. O relatório anual de IDH é elaborado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), órgão da ONU. Quanto mais próximo de 1, mais desenvolvido é o país. Este índice também é usado para apurar o desenvolvimento de cidades, estados e regiões. Na Figura 2 tem-se o IDH médio dos estados brasileiros. Normalmente, os países com IDH menor que 0,5 são considerados com baixo desenvolvimento humano. Os países com IDH entre 0,5 e 0,8 são considerados de médio desenvolvimento humano e os que possuem IDH superior a 0,8 apresentam desenvolvimento humano alto.

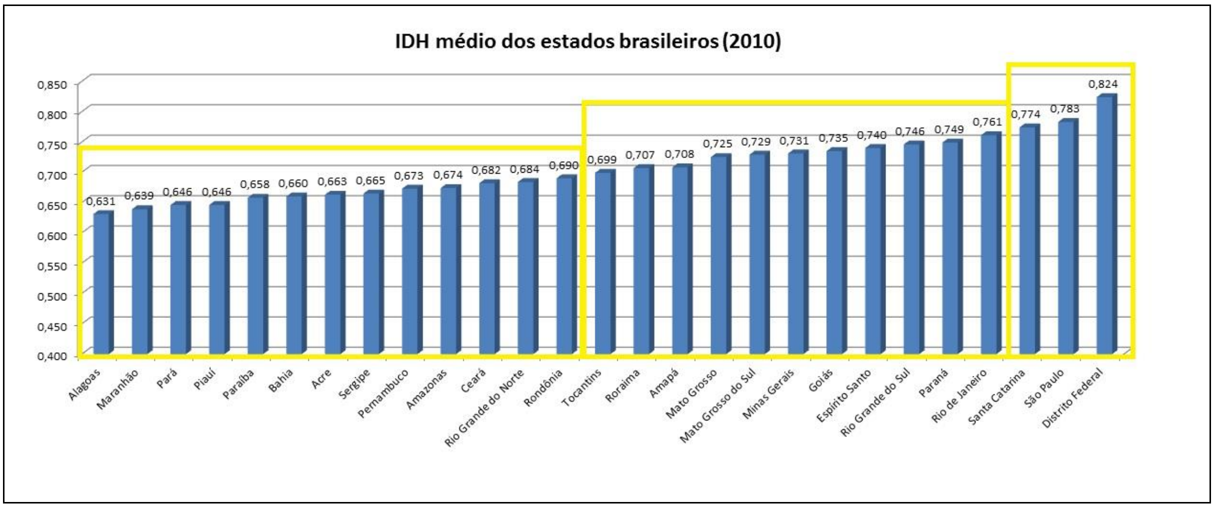


Figura 2 – IDH médio dos estados brasileiros.

O IDH é um índice que agrega três dimensões: educação, longevidade e renda, que são combinados. Seu valor médio não mostra as desigualdades existentes em um município, estado ou país. Mesmo estados como Santa Catarina, que apresenta um dos melhores IDHs do país tem grandes diferenças regionais, conforme Figura 3 (IBGE, 2010).

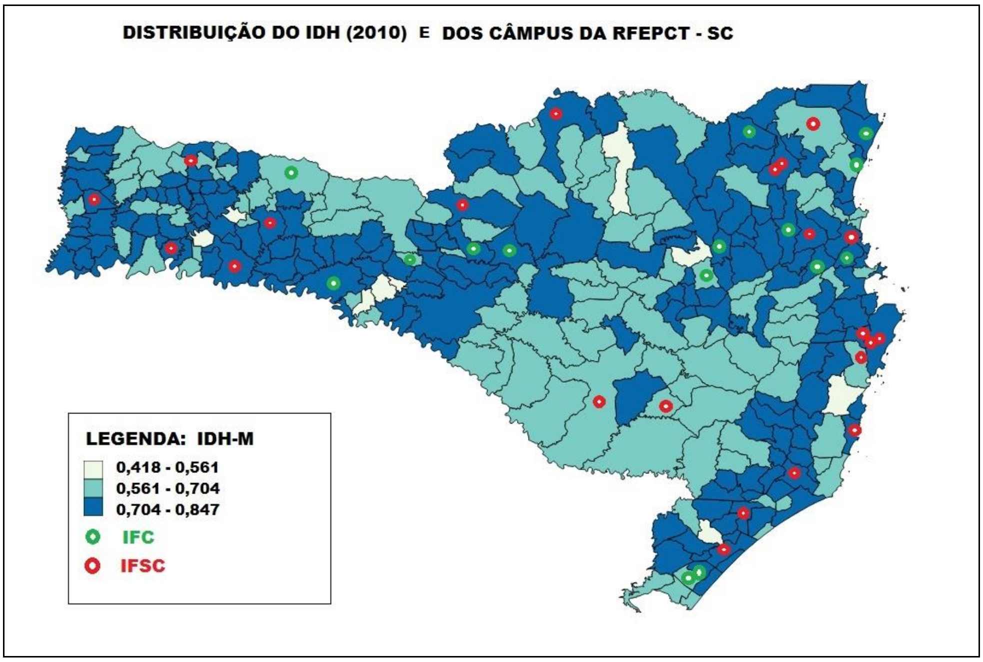


Figura 3- Distribuição do IDH-M – Santa Catarina

Assim como o Estado de Santa Catarina tem grandes desigualdades regionais, fruto das diferentes formações socioespaciais[7], dentro de uma cidade também há grandes diferenças na organização espacial. O município de Palhoça, por exemplo, apresenta diversos bairros

[7] Formação socioespacial em SC: https://periodicos.ufsc.br/index.php/geosul/article/viewFile/13604/12471

organizados convivendo lado a lado com comunidades segregadas e pobres. Por esse motivo o indicador IDH médio da Palhoça não é capaz de mostrar essas diferenças, que se escondem na média. Uma pessoa que esteja com a cabeça em uma temperatura de 40°C graus e os pés a uma temperatura de 10°C estará sujeita a uma temperatura média de 25 °C. Em média a pessoa estará confortável, mas isso não reflete a realidade.

Esse é um dos cuidados que temos ao analisar os indicadores sociais tais como IDH[8]. As avaliações têm possibilitado fazer comparações ao longo do tempo. Na Figura 4 é possível verificar que o IDH médio brasileiro vem evoluindo nos últimos 20 anos nas suas três dimensões.

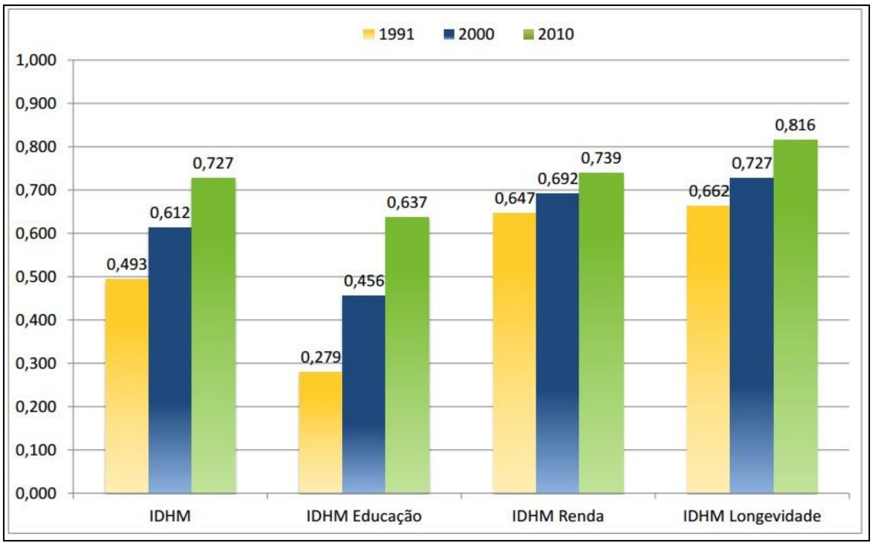


Figura 4- Evolução do IDH médio brasileiro.

Como é possível perceber a dimensão IDH-M Educação é a que tem apresentado a maior evolução ao longo dos últimos 20 anos. O IDH-M tem variado de maneira diferente ao longo do Brasil. As regiões Nordeste e Norte são as que apresentaram a maior evolução entre os anos de 2000 e 2010 com variação média de IDH-M 2,5% e 2,4%, acima da variação média brasileira que foi de 1,7%.

No site: http://www.atlasbrasil.org.br/2013/ é possível visualizar graficamente como o IDH-M vem evoluindo ao longo dos anos de todas as regiões brasileiras, bem como construir diversos tipos de gráficos sobre o assunto. Como exemplo, na Figura 5 tem-se a distribuição do IDH-M brasileiro para o ano de 2010. Há 1399 municípios com IDH-M inferior a 0,6. Há 2223 municípios com IDH-M entre 0,6 e 0,69. Há 1890 municípios com IDH-M entre 0,7 e 0,79. Finalmente, há apenas 44 municípios brasileiros com IDH-M superior a 0,8.

[8] Entrevista Canal Futura avaliando IDHM - https://www.youtube.com/watch?v=3QE4URPdoiA

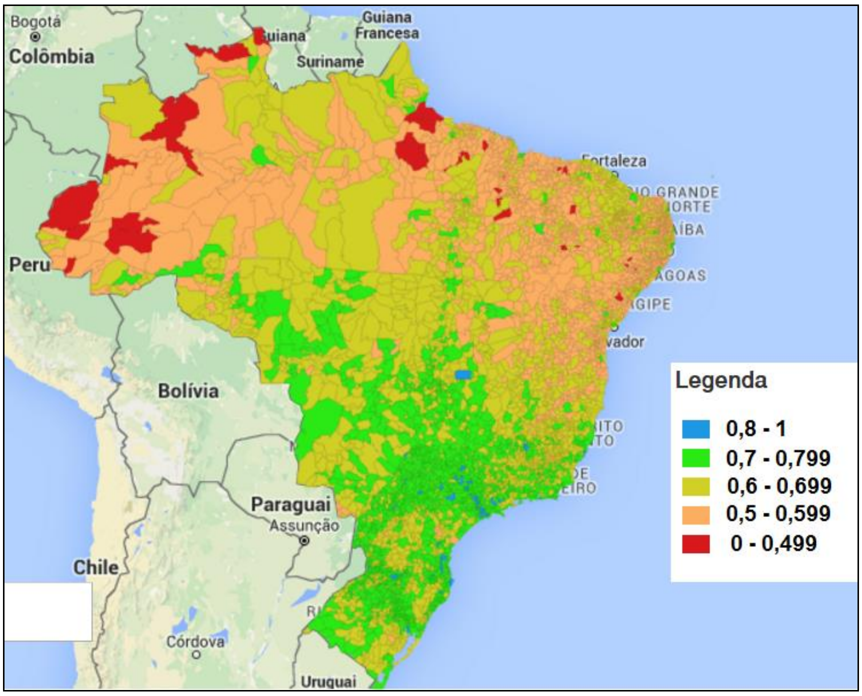


Figura 5- Distribuição do IDH-M do Brasil em 2010.

No histograma representado na Figura 6, tem-se a frequência de distribuição do IDH-M dos municípios brasileiros para o ano de 2010.

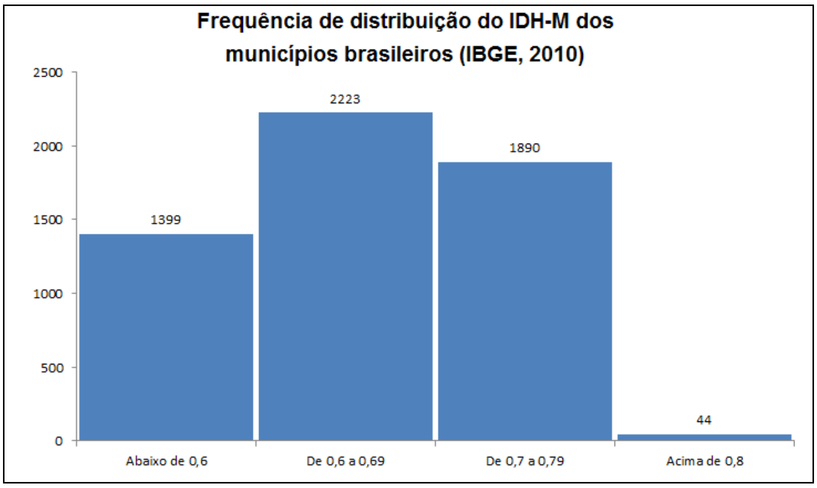


Figura 6- Frequência de distribuição
do IDH-M dos municípios brasileiros para o ano de 2010.

b) PIB – Produto Interno Bruto

O Produto Interno Bruto (PIB) é normalmente usado para medir o nível de atividade econômica de um país. É comum se dizer que o PIB é um bom indicador de crescimento, mas não de desenvolvimento, que envolve uma transformação qualitativa da estrutura econômica, social e cultural do país. Na Figura 7 é possível visualizar o comportamento percentual do PIB entre os anos de 1950 a 2010 representado em um gráfico de linha.

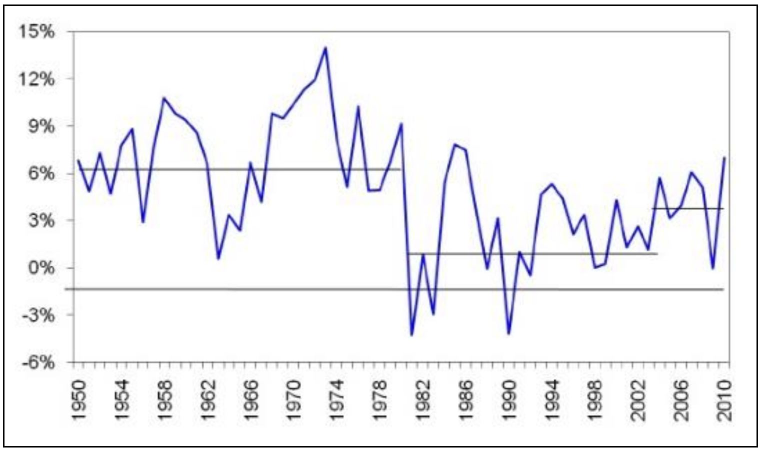


Figura 7- Evolução percentual do PIB entre os anos 1950 a 2010[9]

O PIB é calculado de diversas maneiras: uma delas é pela soma das riquezas produzidas dentro do país, incluindo nesse cálculo empresas nacionais e estrangeiras. Nesse cálculo entram os resultados da indústria, serviços e agropecuária. Entra no cálculo apenas o produto final vendido. Suponha que um marceneiro venda um armário de fabricação própria por R$500,00, e seu gasto com matéria-prima foi de R$200,00. Nesse caso a riqueza gerada por ele será de R$ 300,00.

Outra maneira de medir o PIB é por meio da avaliação da demanda. Nesse caso, são considerados o consumo das famílias, o consumo do governo, os investimentos do governo e de empresas privadas e a soma das exportações e das importações.

Na Figura 8, tem-se a evolução percentual do PIB das macrorregiões brasileiras entre os anos de 2002 e 2010.

[9] http://pt.slideshare.net/feers/apresentacao-seminario-9576319

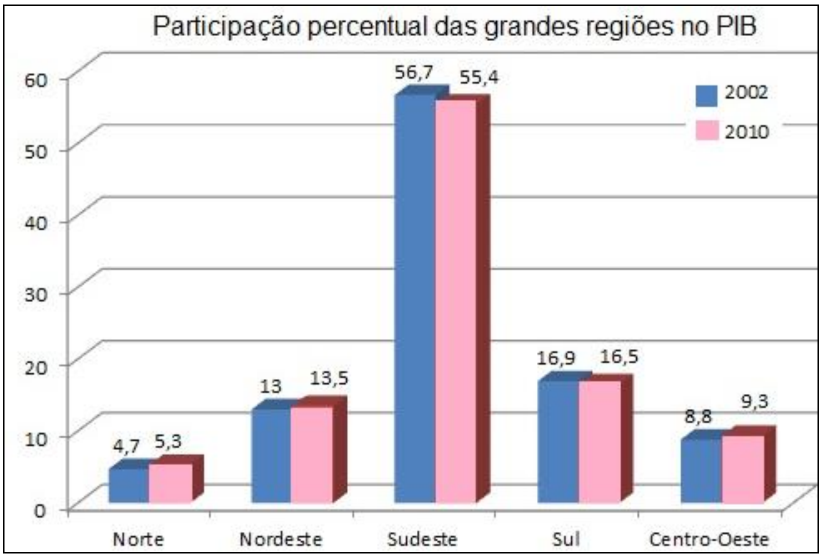


Figura 8- Evolução do PIB brasileiro por macrorregião.

Na Tabela 1, tem-se a projeção do PIB (trilhão de dólares) das maiores economias do mundo no ano de 2030. O maior avanço no período deverá ocorrer em países como a China e Índia, que terão seus PIB ampliados em quase 300% no período.

Tabela 1– Estimativa da distribuição do PIB
de alguns países selecionados em 2030 - Fonte: BLOOMBERG NEWS

País	PIB 2015 (trilhão de U$)	PIB estimado para 2030 (trilhão de U$)
Estados Unidos	16,8	24,8
China	8,5	22,1
Índia	2,2	6,5
Japão	5,6	6,4
Alemanha	3,5	4,5
Brasil	2,2	3,9
Reino Unido	2,5	3,6

c) PIB per capita

O PIB per capita, calculado a partir da divisão do PIB total pelo número de habitantes da região, indica quanto cada habitante produziu em determinado período. No entanto, o PIB per capita é um indicador que precisa ser avaliado com atenção. A presença de uma grande empresa, um porto ou uma refinaria em uma cidade com baixa densidade populacional é suficiente para produzir um PIB per capita elevado. Na Figura 9 tem-se a distribuição do PIB per capita das cidades catarinenses.

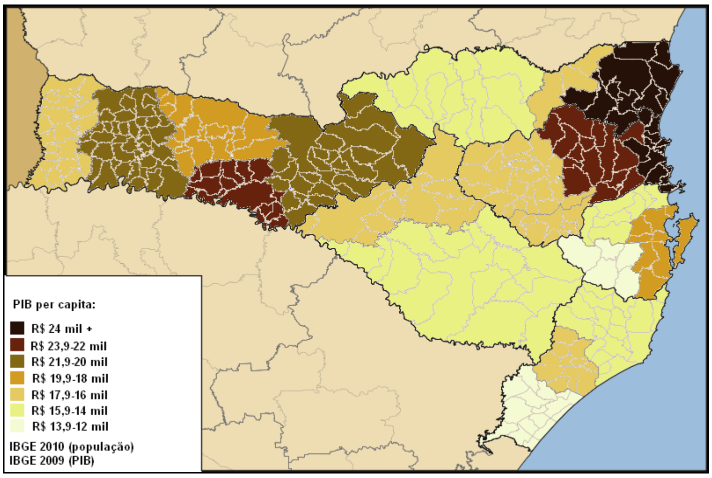


Figura 9- Distribuição do PIB per capita catarinense.

Já na Figura 10 tem-se a distribuição da frequência do PIB per capita das cidades catarinenses para o ano de 2010.

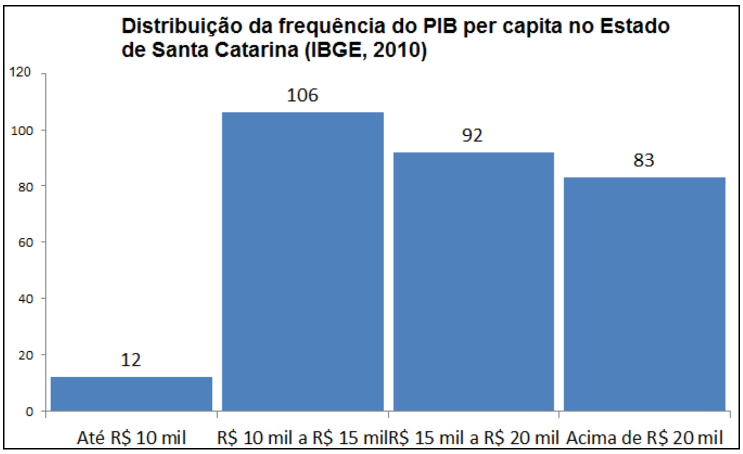


Figura 10- Distribuição do PIB per capita catarinense.

d) IPCA – Índice de preços ao consumidor amplo:

O IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), medido mensalmente pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), foi criado em 1980 com o objetivo de oferecer a variação dos preços para o público final. Na prática, acaba sendo considerado o índice de inflação brasileira. Na Figura 11 tem-se a evolução da Taxa SELIC[10] e do IPCA acumulado entre os anos 2000 e 2012.

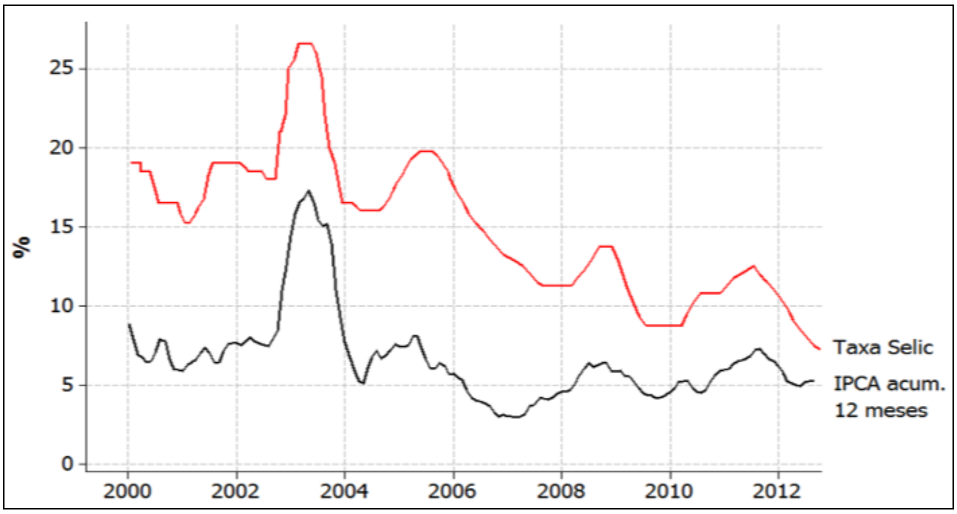


Figura 11- Evolução do IPCA acumulado entre os anos 2000 e 2012.

A pesquisa de preços é realizada em estabelecimentos comerciais, prestadores de serviços, domicílios (para verificar valores de aluguel) e concessionárias de serviços públicos. São considerados nove grupos de produtos e serviços: alimentação e bebidas; artigos de residência; comunicação; despesas pessoais; educação; habitação; saúde e cuidados pessoais; transportes e vestuário. Eles são subdivididos em outros itens. Ao todo, são consideradas as variações de preços de 465 subitens. O indicador reflete o custo de vida de famílias nas regiões metropolitanas de São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Porto Alegre, Curitiba, Salvador, Recife, Fortaleza e Belém, além do Distrito Federal e do município de Goiânia.

---

[10] Os bancos tomam dinheiro emprestado pela Taxa SELIC.

e) IDEB – Índice de desenvolvimento da educação básica

O IDEB é avaliado pelo MEC – Ministério da Educação a cada dois anos e apresentado numa escala que vai de zero a dez. No total, o IDEB estabelece notas para cerca de 50 mil escolas públicas do país. Na Figura 12, tem-se a distribuição dos IDEBs de todos os estados brasileiros para o ano de 2011.

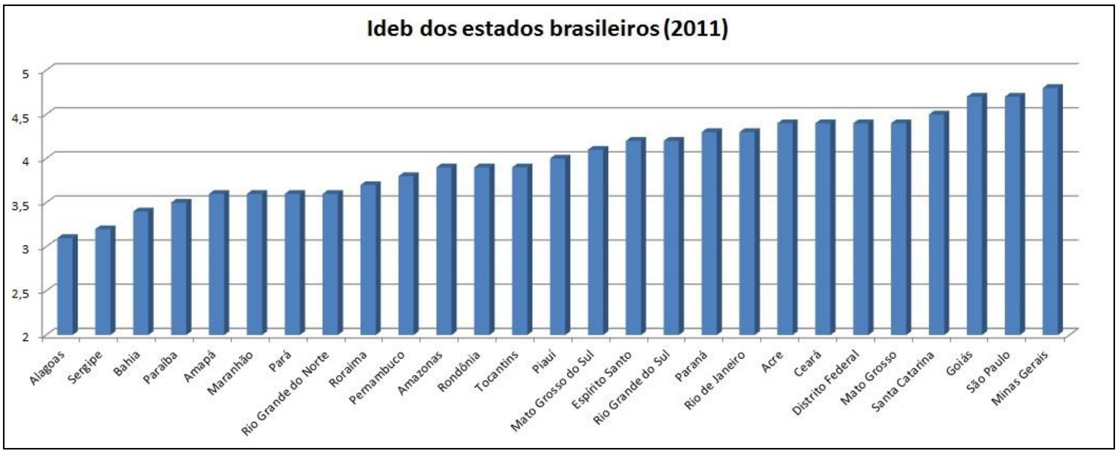


Figura 12 - Distribuição do IDEB entre os estados Brasileiros (MEC, 2011)

Mesmo que nos últimos 20 anos a dimensão educação tenha avançado mais que as outras duas dimensões do IDH-M, há ainda um longo caminho a ser percorrido. Na Figura 13, tem-se a evolução do IDEB do Ensino Fundamental e do Ensino Médio entre os anos 2005 e 2013.

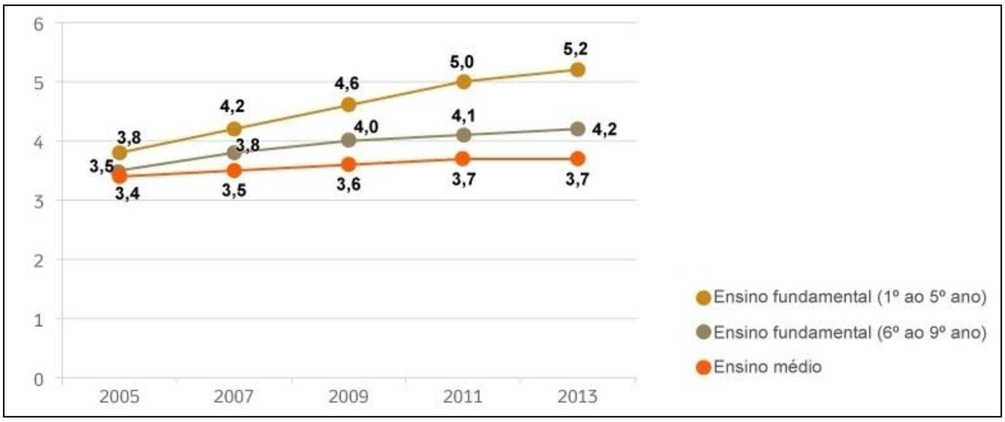


Figura 13 – Evolução do IDEB médio do Brasil entre os anos 2005 e 2013.

f) Indicador PISA

O *Programme for International Student Assessment* (Pisa) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O programa é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Em cada país participante há uma coordenação nacional. No Brasil, o PISA é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Apesar de todos os avanços na área educacional, o país ficou na 58º posição entre os 65 países avaliados no PISA 2012 (Figura 14).

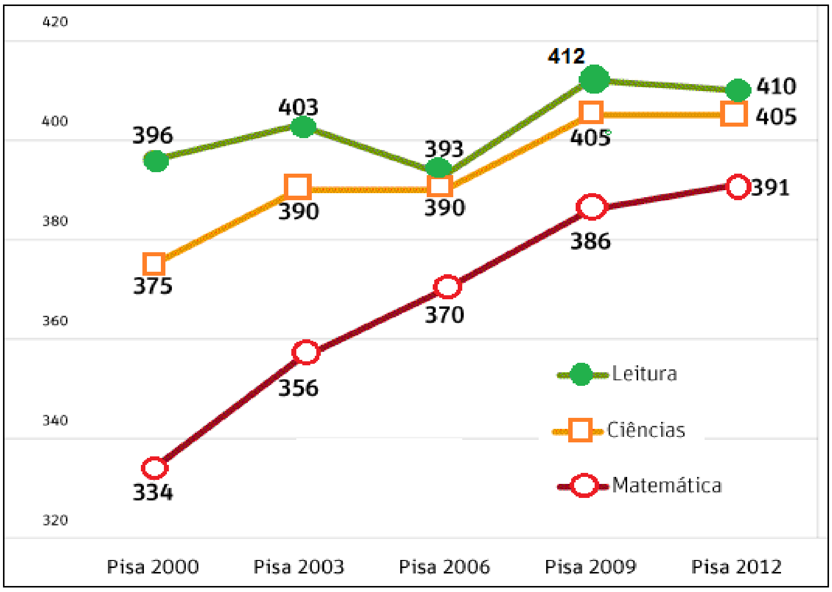


Figura 14– Evolução das notas dos estudantes no PISA entre os anos 2000 e 2012.

Além desses indicadores apresentados existem outros que podem ser utilizados. Entre eles temos: índice de densidade populacional, GINI, índice de analfabetismo, índice de inovação, índice de mortalidade infantil, índice de desemprego e índice de urbanização.

LISTA DE EXERCÍCIOS 1:

1- Faça uma comparação entre indicadores (renda, PISA, IDH, População, Área) entre Brasil, China, África do Sul, Rússia e Índia.

2- Organize a listagem dos 10 países que são maiores produtores do mundo de: carne bovina, carne suína, laranja, algodão, frangos, carros, bicicletas, soja, maçãs, açúcar, café, motocicletas, jatos comerciais, aço, petróleo.

3- Compare, construa gráficos e atualize os indicadores indicados a seguir para a América do Sul:

País	População 2008 (milhões)	PIB 2007 (milhões de U$)	PIB per capita U$ - 2007	Áreas (km^2)	IDH 2013 (0-100)
Argentina	41	260.122	13.300	2.766.890	81
Bolívia	10	13.292	4.000	1.098.580	66
Brasil	191	1.313.590	10.300	8.511.965	74
Chile	17	163.914	13.900	756.950	82
Colômbia	46	202.630	6.700	1.138.910	71
Equador	14	45.789	7.200	283.560	71
Guiana Francesa	0,21	-	6.000	91.000	86
Guiana	1,2	2.920	3.800	214.999	62
Paraguai	7	27.082	7.800	406.750	67
Peru	30	219.015	4.500	1.285.220	73
Suriname	0,48	4.073	7.800	163.270	64
Uruguai	3,4	37.188	11.600	176.220	79
Venezuela	27	334.575	12.200	912.050	76

4- Analise por meio do Atlas – PNUD a evolução do IDH das regiões brasileiras.
http://www.atlasbrasil.org.br/2013/

2- Gráficos e Indicadores

Neste capítulo vamos mostrar como são construídos histogramas, gráficos e indicadores com apoio de ferramentas estatísticas. Inicialmente vamos apresentar como são construídos os histogramas.

Como exemplo, suponha que um pesquisador esteja interessado em conhecer qual a distribuição da estatura dos estudantes de uma escola. Para tanto, ele mediu 40 alunos obtendo a seguinte Tabela 2.

Tabela 2- Representação de 40 estaturas de estudantes.

162	163	148	166	169	154	170	166
164	165	159	175	155	163	171	172
170	157	176	157	157	165	158	158
160	158	163	165	164	178	150	168
166	169	152	170	172	165	162	164

Os dados apresentados dessa forma não possibilitam que sejam percebidos os padrões e frequências. A elaboração de um histograma possibilita uma compreensão melhor das informações. Inicialmente deve-se calcular qual a diferença entre o maior e o menor valor de estatura. Chamamos essa grandeza de Amplitude. Para organizar os dados e verificar quais as estaturas que mais se repetem é importante escolher o número de classes de análise (k). Considerando que N = 40 dados e utilizando-se da equação proposta por Herbert STURGES é possível determinar o número ideal de classes:

$$k = 1 + 3{,}322.\log(N)$$

Substituindo-se os valores na equação tem-se após o arredondamento 6 classes.

$$k = 1 + 3{,}322.\log(40) = 6{,}3$$

A maior estatura é de 178 e a menor estatura é de 148. Isso significa uma amplitude de 30. Considerando-se as 6 classes tem-se o intervalo de 5 cm em cada classe pois (30 / 6 = 5). A Tabela 2 a seguir representa a frequência com que ocorre a distribuição das estaturas.

Intervalo	Frequência	Freq. Relativa	Valor médio
148 |... 153	3	0,075	150,5
153 |... 158	5	0,125	155,5
158 |... 163	8	0,2	160,5
163|... 168	12	0,3	165,5
168|... 173	9	0,225	170,5
173 |... 178	3	0,075	175,5

O histograma representado pela Figura 15 permite a visualização rápida de como os dados estão distribuídos e quais são as estaturas mais comuns.

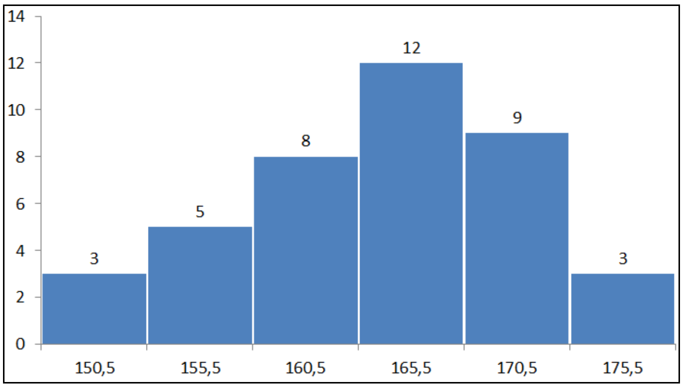


Figura 15- Histograma para distribuição das estaturas de uma turma de estudantes.

Para fins de simplificação, na Tabela 3 são apresentados alguns exemplos de números de classes obtidos a partir da equação de Sturges.

Tabela 3 – Número de classes obtidas por meio da equação de Sturges.

Número de dados	Número Aproximado de classes
20	5
40	6
60	7
80	7
100	8
1000	11

Outra maneira de se representar um conjunto de dados é por meio de DIAGRAMAS DE CAIXA, também conhecidos por BOX-PLOT. Os dados são divididos em duas partes (50% para cada lado), tendo o valor central chamado de MEDIANA. Cada parte também é dividida em 2 (25% = quartil). Na Figura 16 é possível visualizar como um diagrama de caixa é construído para um conjunto de 19 dados.

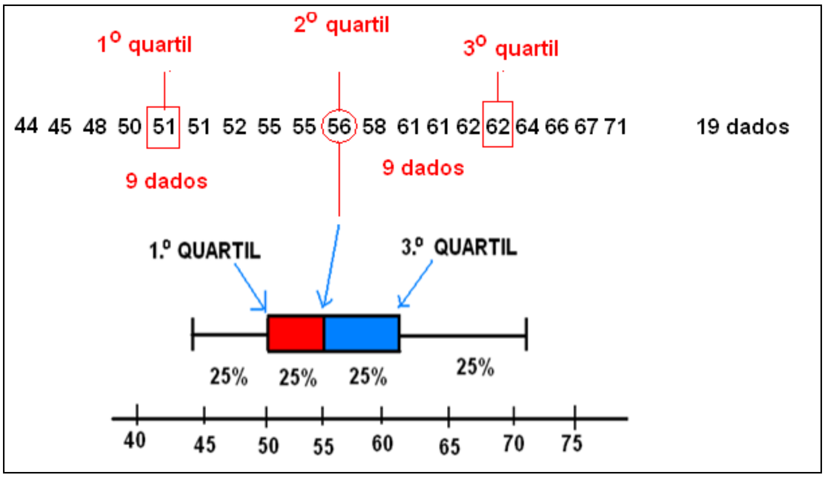


Figura 16- Representação da construção de um diagrama de caixa.

Para identificar possíveis pontos fora da curva, conhecidos como *outliers* adota-se o seguinte procedimento. Calcula-se qual é a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil, representado por "A" na Figura 4. Qualquer medida que estiver acima de uma vez e meia dessa distância em relação ao primeiro ou terceiro quartil constitui-se em um *outlier,* conforme descrito na Figura 17.

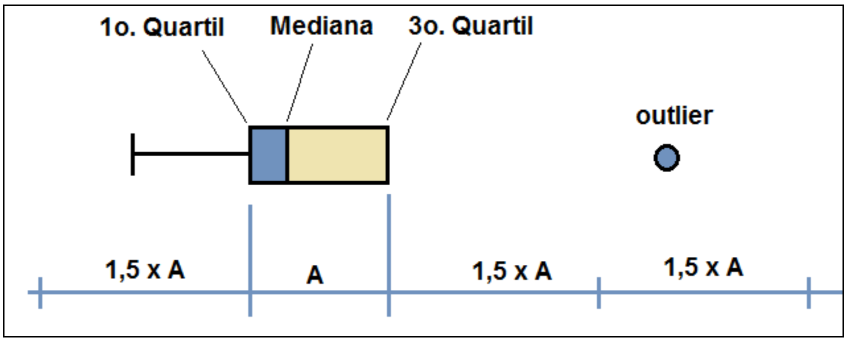


Figura 17 – Identificação de um ponto fora da curva (outlier)

Além do histograma e do diagrama de caixa, também é comum a representação dos dados em diagramas de ramos e folhas, conforme ilustrado na Figura 18.

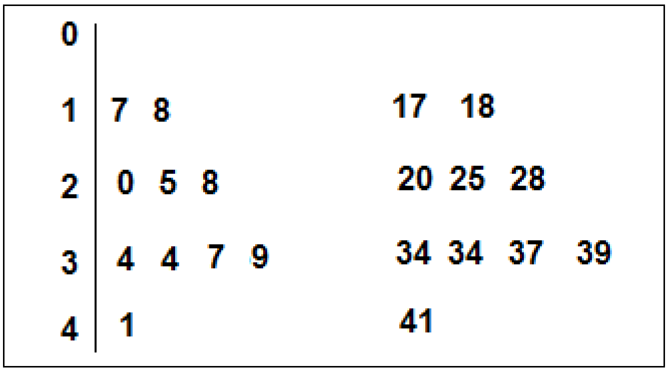


Figura 18– Exemplo de interpretação de um diagrama de ramos e folhas.

Como é possível perceber, a forma como representamos os fenômenos é importante porque permite facilitar a compreensão dos dados. A construção de gráficos e indicadores pode ser realizada por diversos aplicativos tais como: Excel, Planilhas ODS – BR-office, R, Matlab, Wolfram[11] entre outros.

As representações gráficas também podem ser utilizadas com o objetivo de influenciar a compreensão dos menos atentos. Um dos erros mais comuns é a alteração das escalas nos gráficos, conforme ilustrado na Figura 19.

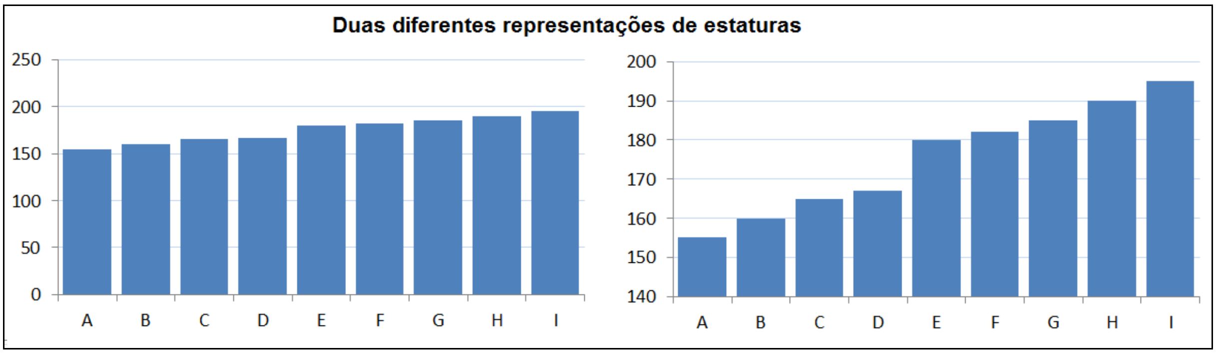


Figura 19- Gráficos resultantes de diferentes escalas.

No gráfico da esquerda parece que os estudantes têm estaturas muito mais próximas do que na realidade. Observamos que o gráfico da esquerda tem a sua escala (eixo y) iniciando no ponto zero, enquanto que o gráfico da esquerda tem a sua escala iniciando em 140 cm. O aluno mais baixo tem 155 cm de estatura enquanto que o mais alto 195 cm. Uma diferença de 40 cm – chamada de amplitude.

[11] https://www.wolframalpha.com/examples/Statistics.html

Na Figura 20, tem-se um erro de apresentação no gráfico veiculado em um telejornal, que representa a inflação entre os anos 2009 e 2013.

Figura 20- Gráfico com erro nas escalas[12].

Por esse motivo, a análise das escalas é fundamental para que as primeiras impressões não prejudiquem nossa interpretação.

Além dos histogramas, diagramas de caixa também são comuns a utilização de gráficos estilizados, no formato de pizza (setores), de radar e de linhas[13].

Na Figura 22 tem-se um gráfico tipo radar mostrando alguns comparativos entre o Brasil e o conjunto de países da OCDE.

[12] Fonte: http://gizmodo.uol.com.br/mentir-visualizacao-dados/

[13] Veja mais em: http://univesptv.cmais.com.br/estatistica-aula-04-apresentacao-de-dados-tabelas-e-graficos

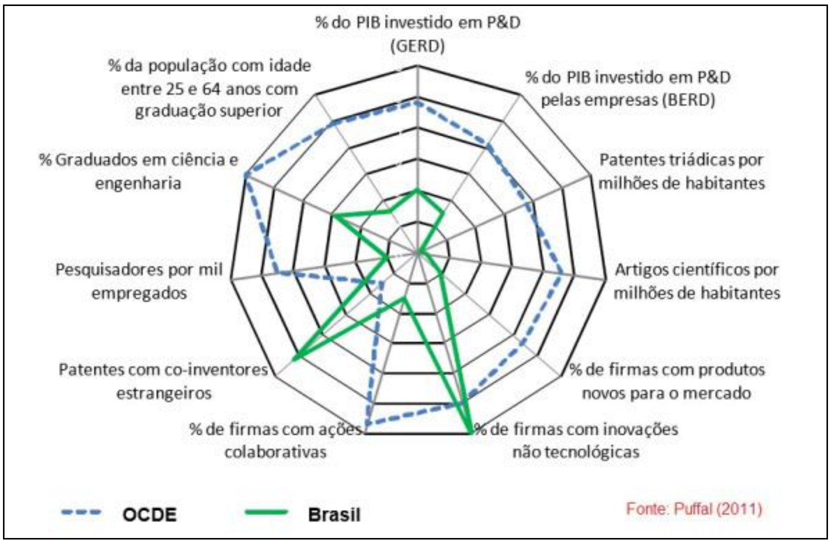


Figura 22- Gráfico do tipo radar representando dados do Brasil e dos países da OCDE (2011).

Na Figura 23, tem-se a ilustração de um gráfico de barras horizontais mostrando a distribuição de matrículas na Rede Federal EPT no ano de 2013.

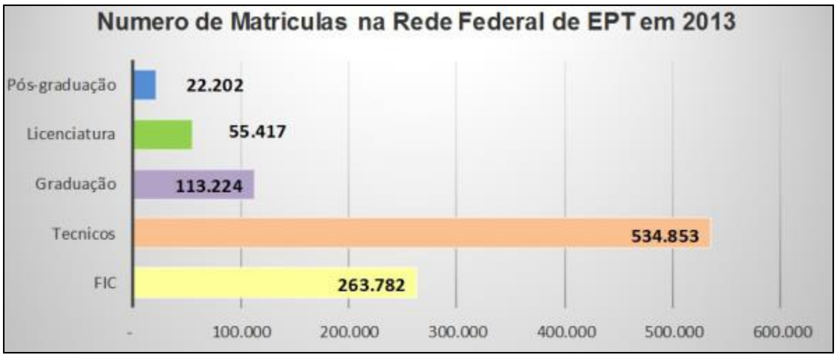


Figura 23- Gráficos de barras horizontais.

Na Figura 24, tem-se um gráfico de bolhas mostrando a relação entre o número de cientistas e engenheiros por milhão de pessoas e o percentual de PIB investido em Pesquisa e Desenvolvimento em alguns países selecionados.

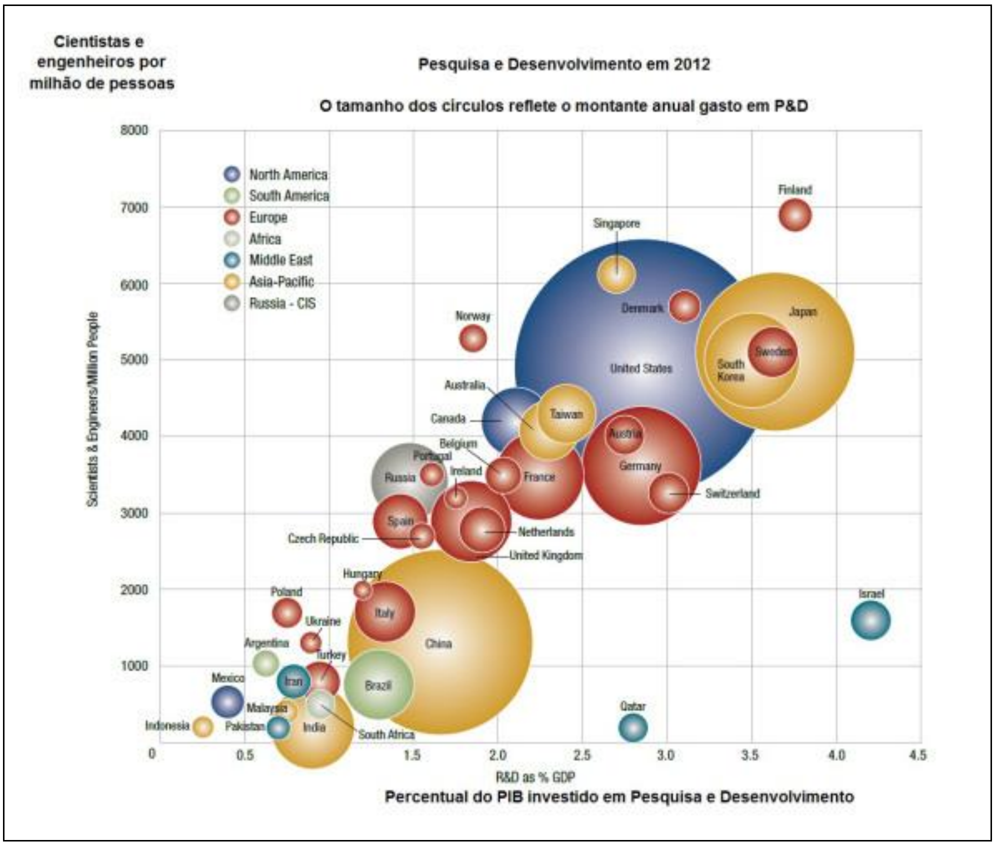


Figura 24- Gráfico do tipo bolha.
Fonte: http://battelle.org/docs/default-document-library/2012_global_forecast.pdf

Um tipo de gráfico também muito utilizado é o Diagrama de Pareto, que é conhecido como princípio 80-20. De acordo com Pareto, 80% das consequências decorrem de 20% das causas. Esta lei foi proposta por Joseph M. Juran, que deu esse nome como homenagem ao economista italiano Vilfredo Pareto. Algumas aplicações desse princípio: se uma empresa tem 100 clientes, em geral 20 deles são responsáveis por 80% dos lucros; mais de 80% das descobertas científicas são decorrentes do trabalho de 20% dos cientistas; 80% da riqueza do mundo está concentrada em 20% das pessoas; quando um avião cai é provável que 20% das causas sejam responsáveis por 80% dos defeitos e assim por diante. Na Figura 27 tem-se uma curva ABC representativa do Diagrama de Pareto. O conhecimento dos defeitos mais frequentes é importante para investimento de tempo e recursos na solução daquilo que é mais prioritário.

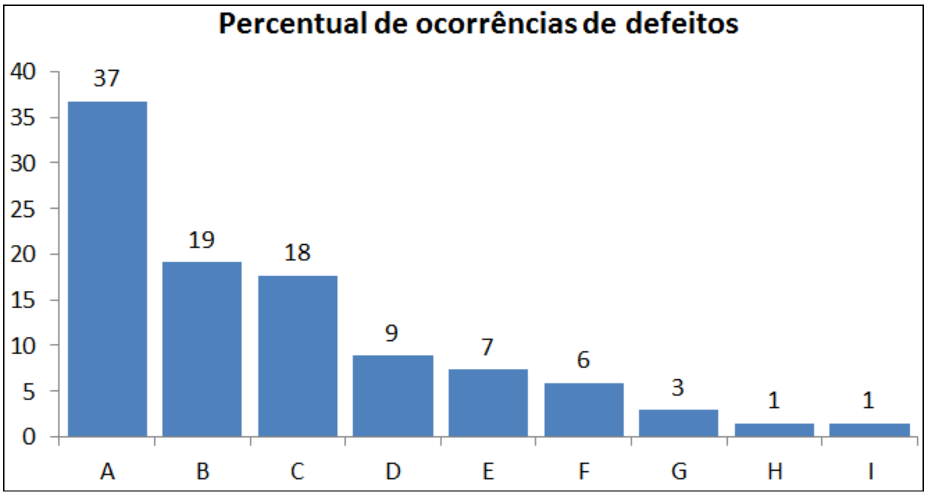


Figura 27- Ilustração do Gráfico de Pareto.

Os Histogramas e gráficos apresentados também podem ser construídos por meio do Software Estatístico R, que pode ser adquirido gratuitamente no link: http://www.vps.fmvz.usp.br/CRAN/ . Ele foi criado pelos professores Ross Ihaka e Robert Gentleman na Universidade de Auckland – na Nova Zelândia com a colaboração de pesquisadores de vários outros países. Trata-se de uma linguagem de programação especializada em computação de dados e que faz parte da filosofia de GNU – General Public License. Por ser gratuito e de fácil utilização vem se tornando um dos programas mais populares no mundo da estatística.

Após realizar download do programa, você verá uma tela de abertura conforme ilustrado na Figura 28– parte da direita. A tela de script (esquerda) auxilia a entrada das expressões necessárias. Basta acionar CONTROL R para que a expressão escrita na parte esquerda seja processada na tela da parte direita.

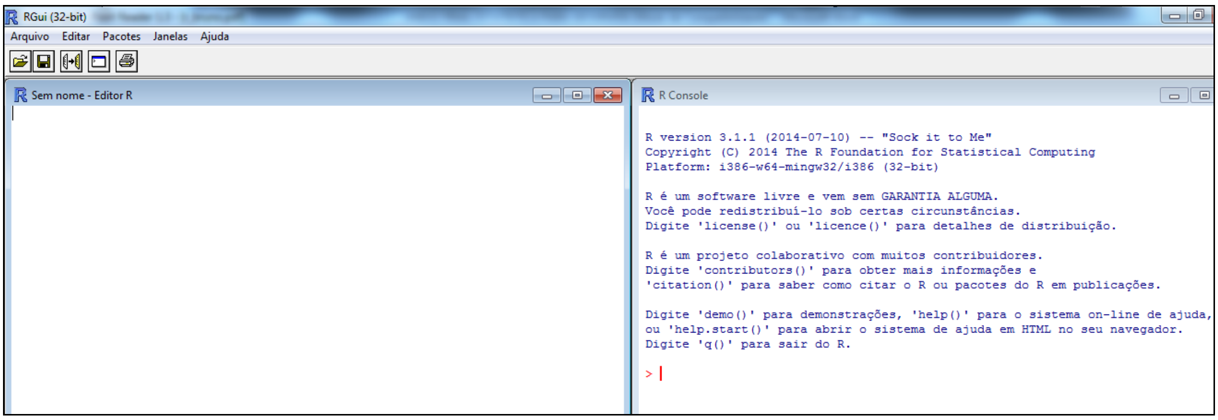


Figura 28– Tela de abertura do software R.

Durante a utilização do software é possível consultar a sintaxe de algum comando ou obter mais informações sobre determinada função. Para isso o R conta com o comando help. A sintaxe do comando é a seguinte:> help(comando) #sintaxe

A seguir, serão apresentadas algumas aplicações do R na construção de gráficos.

Exemplo 1- Ao se digitar os comandos abaixo tem-se o histograma (Figura 29).

tempo<-c(50,40,41,17,11,7,22,44,28,21,19,23,37,51,54,42)

hist(tempo)

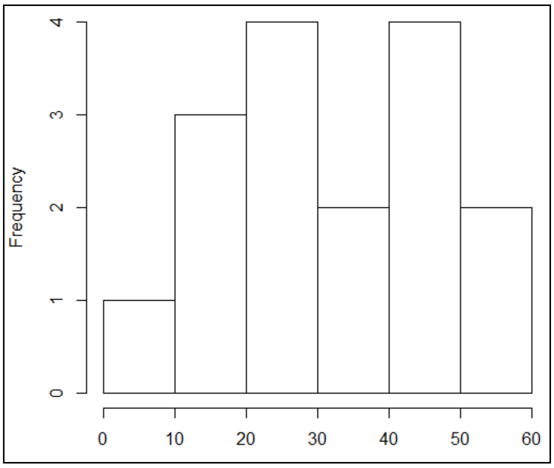


Figura 29- Histograma construído com uso do software R

Exemplo 2- Ao se digitar os comandos abaixo tem-se o diagrama de caixa (Figura 30)

tempo<-c(50,40,41,17,11,7,22,44,28,21,19,23,37,51,54,42)

boxplot(tempo)

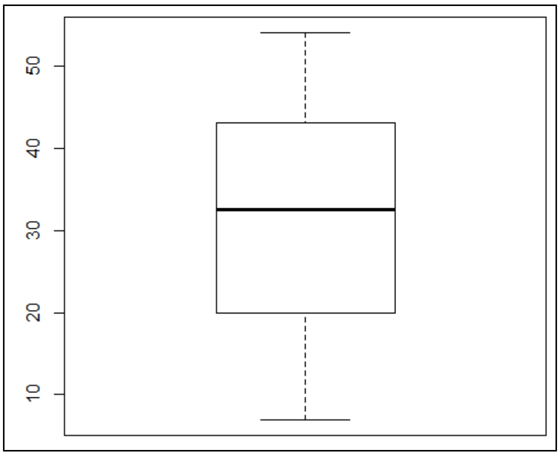


Figura 30- Diagrama de Caixa construído com uso do software R

Exemplo 3- Ao se digitar os comandos abaixo tem-se gráfico de pizza (Figura 31):

frota<-c(80000, 60000, 20000,4000,2000)

names(frota)<-c("carros","motos","caminhões","ônibus","outros")

pie(frota)

porc<-round(frota*100/sum(frota),2) #arredonda a porcentagem)

rotulos<-paste("(",porc,"%)",sep="")

pie(frota, main="Frota de carros na cidade de Marília (2010)",labels=rotulos, col=rainbow(7))

legend(1,1,names(frota),col = rainbow(7),pch=rep(20,6))

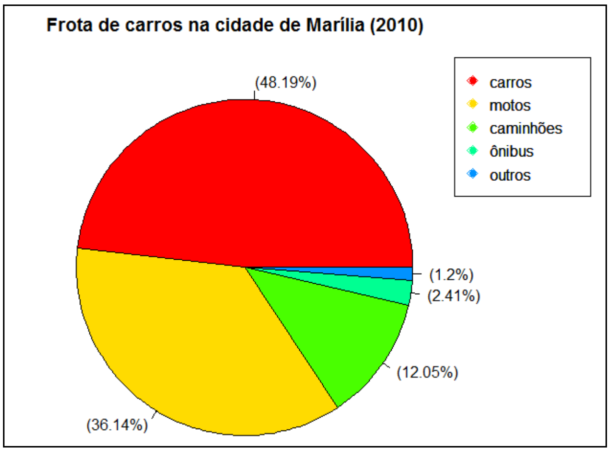


Figura 31- Gráfico de pizza (setores) construído com uso do software R.

Exemplo 4- Ao se digitar os comandos abaixo tem-se gráfico de linha (Figura 32):

ano<-2001:2009

cidadea<-c(76,65,69,60,62,69,60,69,70)

cidadeb<-c(56,52,55,54,56,58,57,60,62)

plot(ano, cidadea,type="l",main="Distribuição de chuvas",xlab="ano",ylab="Volume em mm",col="blue",ylim=c(50,80))

lines(ano, cidadeb,col="red")

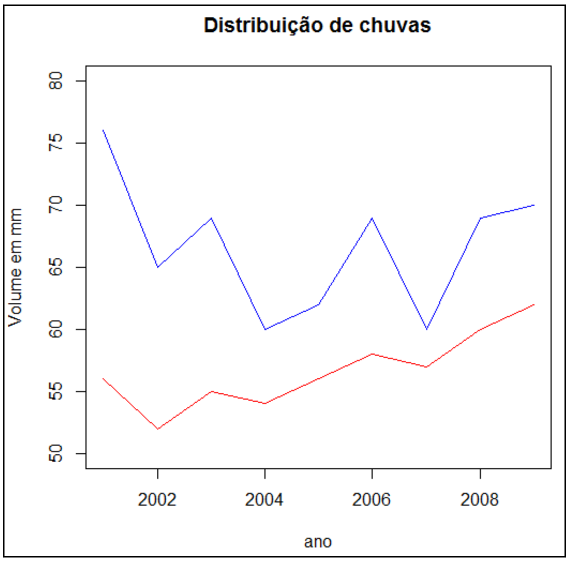


Figura 32- Gráfico de linhas construído com uso do software R

Exemplo 4- Ao se digitar os comandos abaixo tem-se gráfico de colunas (Figura 33):

alunos<-c(1200,3000,2000,1500)

escola<-c("privada","estadual","municipal","federal")

barplot(alunos, names.arg=escola, type="l",main="Tipo de Escola")

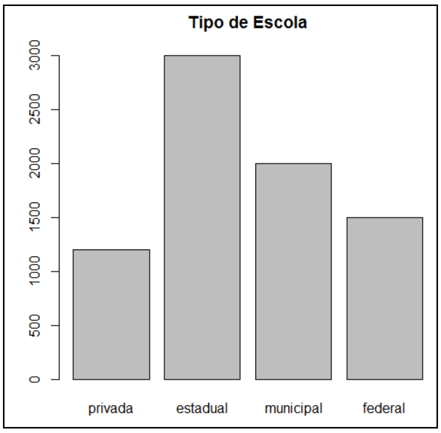


Figura 33- Gráfico de barra construído com uso do software R

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

1- Ordene os dados. Indique o 1º, 2º e 3º quartil. Desenhe o diagrama de caixa.

11, 12, 4, 2, 3, 4, 11, 8, 5, 15, 20, 21

2- O quadro seguinte representa as estaturas (em cm) de 25 alunos de uma classe. Construa o histograma representativo.

155	163	148	166	169
164	165	159	175	155
170	165	176	157	157
150	150	160	165	164
166	169	152	170	190

3- Represente a distribuição do tamanho dos municípios catarinenses por meio de gráficos de barras e de setores.

Número de habitantes	Quantidade de municípios em SC	% de municípios
Até 5 mil	108	37
De 5 mil a 10 mil	64	22
De 10 mil a 20 mil	60	20
De 20 mil a 50 mil	34	12
Maior que 50 mil	27	9
Total	293	100

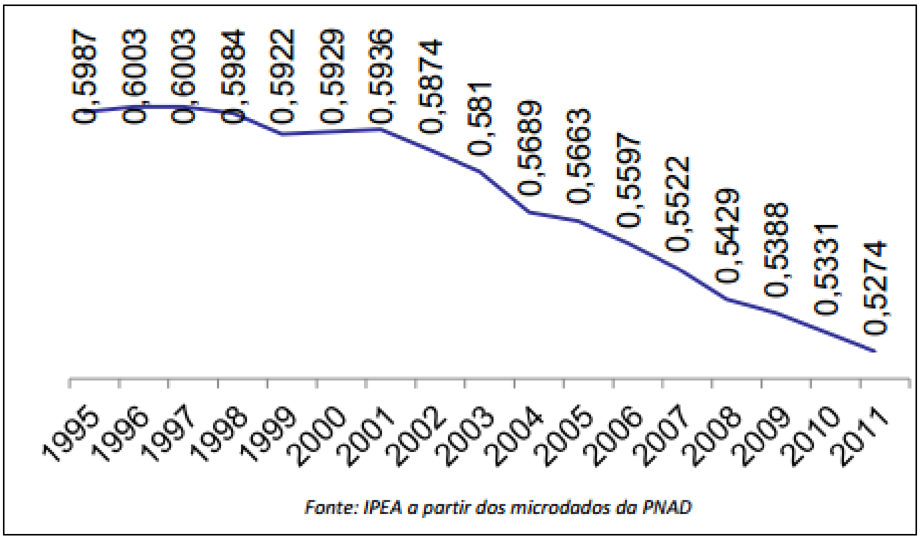
4- Analise a distribuição de municípios e a população do Estado de Santa Catarina por meio de um gráfico de setores e de barras.

Mesorregião	Número de cidades	População
Norte Catarinense	26	1.212.843
Vale do Itajaí	54	1.508.980
Grande Florianópolis	21	994.095
Serrana	30	406.741
Oeste Catarinense	118	1.200.712
Sul Catarinense	44	925.065

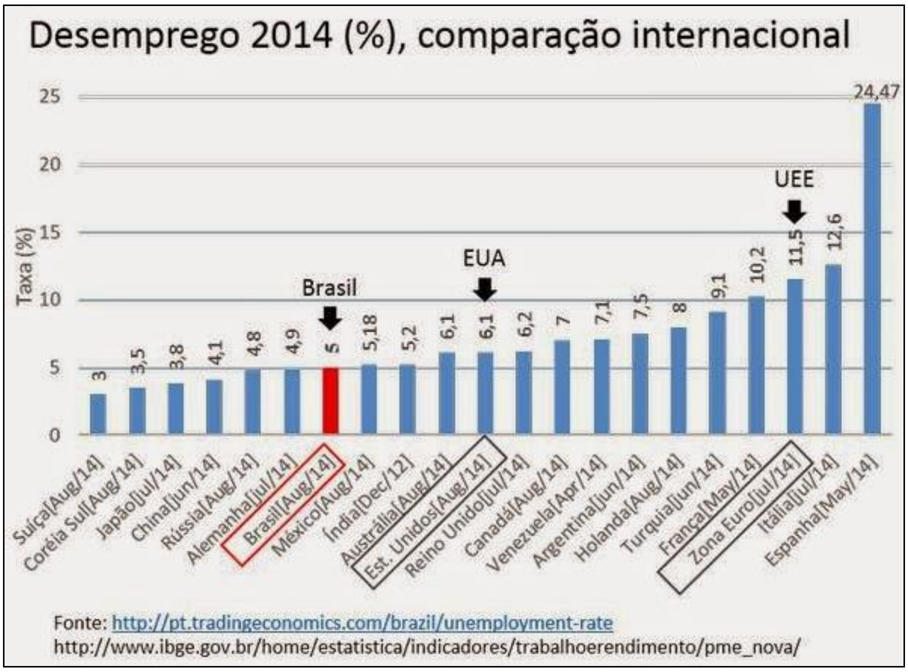
5- Represente o número de empresas instaladas nas cidades catarinenses por meio de um gráfico de setores.

Cidade	Número de empresas
Palhoça	4852
Jaraguá do Sul	7105
Lages	5634
Itajaí	9380
Chapecó	8544
Criciúma	8660
São José	9632
Blumenau	18305
Florianópolis	24746
Joinville	19571

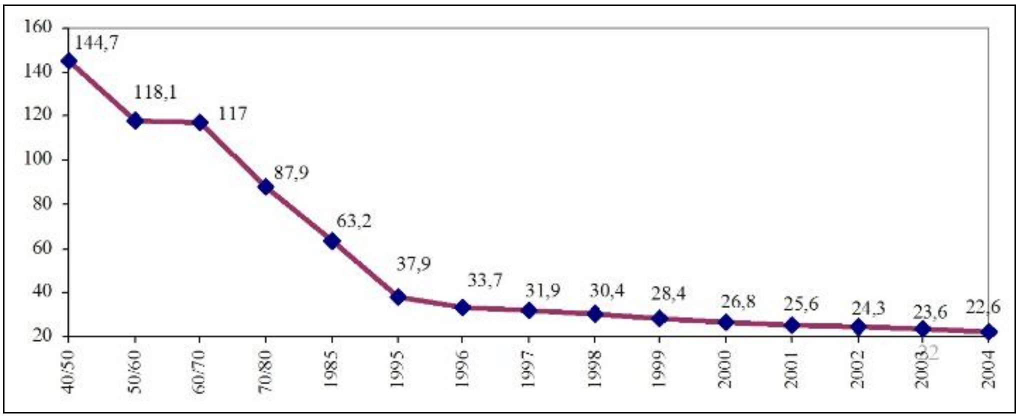
6- Interprete e reconstrua com outra escala o gráfico da evolução do Índice Gini médio do Brasil.



7- Analise os dados comparativos para o desemprego para o ano de 2014. Construa um diagrama de caixa a partir das informações do gráfico.



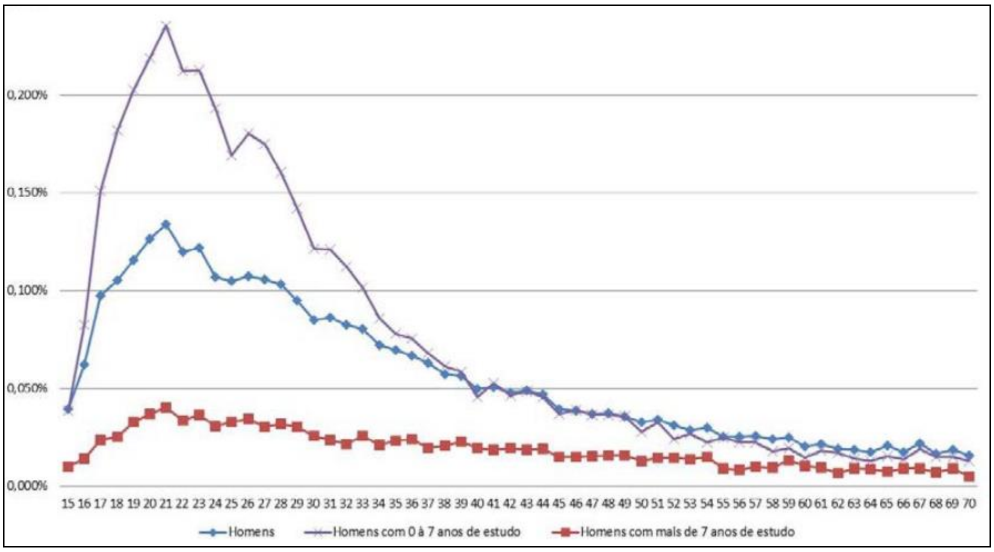
8- Analise a conveniência da escala utilizada no gráfico que mostra a redução da mortalidade infantil no Brasil (mortos por mil nascidos vivos).



9- Avalie o gráfico que representa o número de mortes em acidades de trânsito no Brasil. Represente os dados em um gráfico de barras.

Fonte: http://www.vias-seguras.com/os_acidentes/estatisticas/estatisticas_nacionais

10- Avalie criticamente o gráfico que representa a probabilidade de mortes violentas de acordo com a faixa etária e nível de escolaridade.



http://infogbucket.s3.amazonaws.com/arquivos/2016/03/22/atlas_da_violencia_2016.pdf

3- Correlações

Você já parou para pensar se existe uma correlação entre o peso (massa corporal) e a estatura dos estudantes de uma determinada turma? E entre horas de estudo e resultados nas provas? Ou entre a temperatura no verão e a venda de cervejas? Ou entre tempo de exposição na televisão de uma marca e resultado nas vendas?

Existe uma correlação entre duas variáveis quando uma delas está de alguma forma relacionada com a outra. Quando a alteração no valor de uma variável (chamada independente) provoca alterações no valor da outra variável (chamada dependente).

Nos exemplos acima é possível identificar com facilidade a relação de causa e efeito entre as variáveis. A variável venda de cerveja é uma variável dependente da variável independente temperatura. Essa relação de causa e efeito nem sempre existe. Por isso é importante sempre identificar se determinado fato realmente tem relação direta com outro. Quando isso não ocorre temos uma correlação chamada de “espúria”.

Quando analisamos uma correlação simples entre duas grandezas temos quatro possibilidades. Pode existir correlação positiva, forte correlação negativa, forte correlação positiva ou ausência de correlação. Na Figura 34 são ilustradas duas dessas situações.

Para avaliar a força de uma correlação o cientista K. Pearson definiu o valor chamado “R”, que pode ser calculado matematicamente. Quanto mais próximo de 1 (unidade) mais forte é a correlação. As correlações fracas têm valores de “R” menores que 0,5.

$$R = \frac{\sum (x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 . \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

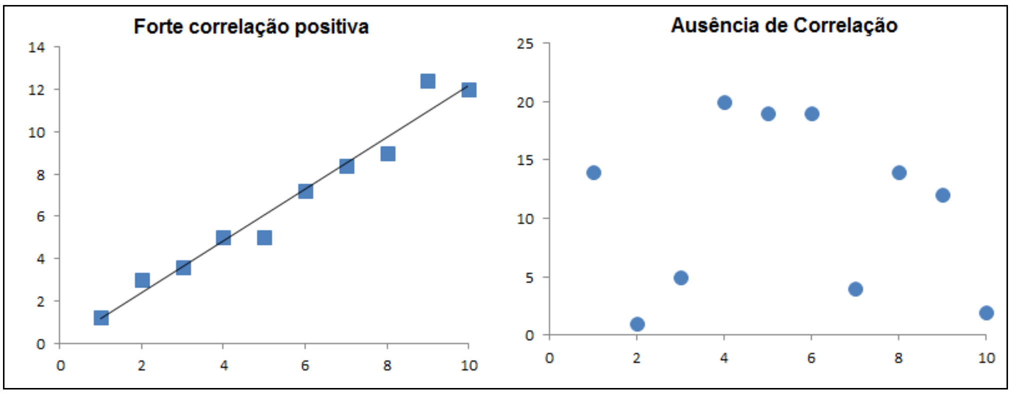


Figura 34- Diferentes correlações possíveis.

Muitas vezes os dados experimentais apontam para a existência de uma relação entre as variáveis dependente e independente. Mas para se estabelecer uma curva de ajuste que mais representa o fenômeno em estudo é importante utilizar técnicas matemáticas chamadas de regressão. Quando a relação é linear é possível, com pouco esforço, descobrir a correlação existente entre as variáveis dependente (Y) e independente (X). Na Figura 35, tem-se representados um conjunto de pontos experimentais e uma reta de ajuste dada pela equação Y = B.X + A. Essa é uma função do primeiro grau com coeficiente angular B e coeficiente linear A.

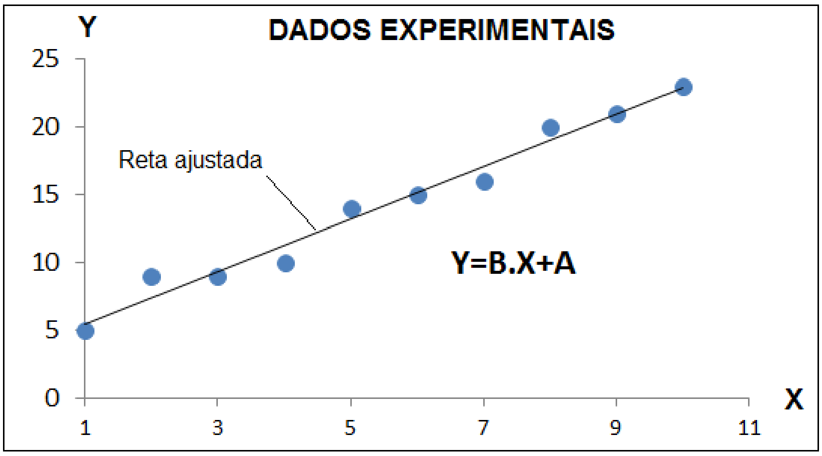


Figura 35- Reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais.

$$B = \frac{N.\sum X.Y - \left[\left(\sum X\right)\sum Y\right]}{N.\left(\sum X^2\right) - \left(\sum X\right)^2} \qquad A = \frac{\sum Y}{N} - B.\frac{\sum X}{N}$$

Imagine como exemplo, que um médico tenha anotado ao longo dos anos as idades e as estaturas de uma criança, obtendo as seguintes informações:

X - Idade (anos)	Y - Estatura (cm)
6	70
8	110
10	130
12	150

Para esse caso é possível perceber que conforme a criança vai ficando mais velha, sua estatura aumenta, ou seja, existe uma relação direta de causalidade.

X	Y	X.Y	X^2
6	70	420	36
8	110	880	64
10	130	1300	100
12	150	1800	144
Soma =36	Soma =460	Soma = 4400	Soma =344

$$B = \frac{N.\sum X.Y - \left[\left(\sum X\right).\sum Y\right]}{N.\left(\sum X^2\right) - \left(\sum X\right)^2} = \frac{(4.4400) - (36.460)}{(4.344) - (36^2)} = 13$$

$$A = \frac{\sum Y}{N} - B.\frac{\sum X}{N} \Rightarrow A = \left(\frac{460}{4}\right) - 13.\left(\frac{36}{4}\right) = -2$$

A equação que correlaciona a estatura e a idade da criança é: Estatura = 13 x Idade – 2. O cálculo de R^2 fornece 0,96, o que possibilita afirmar que existe uma forte correlação[14]. Com o auxílio do software R é possível encontrar as correlações mais diversas.

Como exemplo digite os comandos e observe o valor dos coeficientes da reta ajustada (Figura 36). A equação que se ajusta exatamente ao conjunto de pontos experimentais é Y = 2,18.X - 0,6.

```
x<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
y<-c(2,4,5,10,12,9,13,17,19,23)
lm(y~x)
plot(x,y)
equacao<-lm(y~x)
abline(equacao)
```

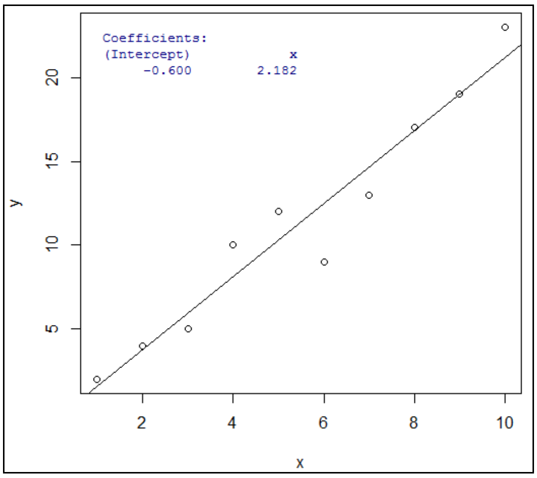


Figura 36– Correlação linear elaborada no software R.

[14] Recomendamos o vídeo com exemplo resolvido:
https://www.educreations.com/lesson/view/estatistica-aula-31-correlacao-entre-idade-e-altur/19584560/

Quando determinamos uma correlação matemática entre uma variável dependente e outra independente é possível fazer a extrapolação de dados. Ou seja, podemos prever determinado fenômeno a partir de uma série histórica. Na realidade, com a existência de grande volume de dados disponíveis na internet é possível aplicar a técnica chamada de “BIG DATA” ou “mineração de dados” para avaliar padrões de comportamento das pessoas.

Se uma determinada loja sabe exatamente do que gostamos então ela pode customizar o atendimento. Diariamente deixamos dezenas de pistas sobre o que gostamos quando fazemos pesquisas na internet, quando curtimos publicações no Facebook. Esse banco de dados tem sido disputado por grandes empresas. A criação de modelos matemáticos cada vez mais sofisticados permite que se façam inferências futuras a partir de dados do passado.

Mas nem toda correlação é simples como as apresentadas anteriormente. Há casos em que as correlações somente podem ser calculadas por meio de ferramentas computacionais. Um exemplo é o valor de venda de uma casa, onde o preço final depende de uma série de fatores como área construída, tempo de uso, localização, número de banheiros. Apenas a área construída não permite explicar o preço final. Nesse caso há programas como R – um software livre fácil de usar que possibilita que se encontrem as equações mais adequadas para cada caso.

Há também um tipo de correlação que não representa uma relação direta de causa e efeito. No entanto, a primeira vista é possível que pareça que sim. Nesse caso tem-se uma “correlação espúria”. Dois eventos distintos podem não ter relação alguma entre si. No entanto, por uma questão do acaso, mostram intima relação estatística. O fato de dois fenômenos ocorrerem ao mesmo tempo não permite a inferência de que um seja causado pelo outro. Um exemplo real é sobre os estudos sobre a paralisia infantil. Inicialmente os cientistas verificaram a existência de uma forte associação positiva entre o número de casos da doença por semana e o número de vendas de refrigerante na mesma semana. Nesse caso algumas pessoas começaram a estabelecer uma relação direta de causalidade. Mas isso é um absurdo que pode ser percebido por meio de perguntas simples: “o refrigerante causa pólio?” ou “a pólio aumenta a vontade de beber refrigerante?” À luz do nosso conhecimento atual, estas perguntas são claramente sem sentido. No entanto, para estudos recentes, com doenças ainda pouco estudadas, por exemplo, perguntas similares podem não parecer tão absurdas. Um exemplo atual é a relação entre a microcefalia em recém-nascidos e os casos de Zica vírus. No final de 2015, quando a relação foi estabelecida, não havia ainda estudos científicos e número de casos suficientes para sustentar a afirmação. Ainda hoje há contestações das conclusões apresentadas pela Organização Mundial da Saúde.

O estatístico e geneticista inglês Ronald Fisher (1890-1962) provou na década de 30 que existia uma correlação positiva entre a população da cidade de Oldenburg e o número de cegonhas. Ele mostrou que a população e o número de cegonhas aumentaram ao longo do período de estudo. O resultado não significa que o crescente número de cegonhas causou o aumento observado na população. Na verdade, uma coisa não provoca a outra, mas as duas são causadas por uma terceira: o aumento da população.

Na Figura 37 tem-se uma possível correlação não linear entre o número de pesquisadores por mil habitantes em relação ao PIB per capita de países com mais de 30 milhões de habitantes. É preciso ficar atento para a relação de causa e efeito. Na promoção do desenvolvimento há um conjunto de fatores e causas econômicas, políticas e sociais que não podem ser relegadas a um segundo plano. Os países mais ricos investem mais em P&D porque são mais ricos ou se tornaram mais ricos porque investiram mais em P&D?

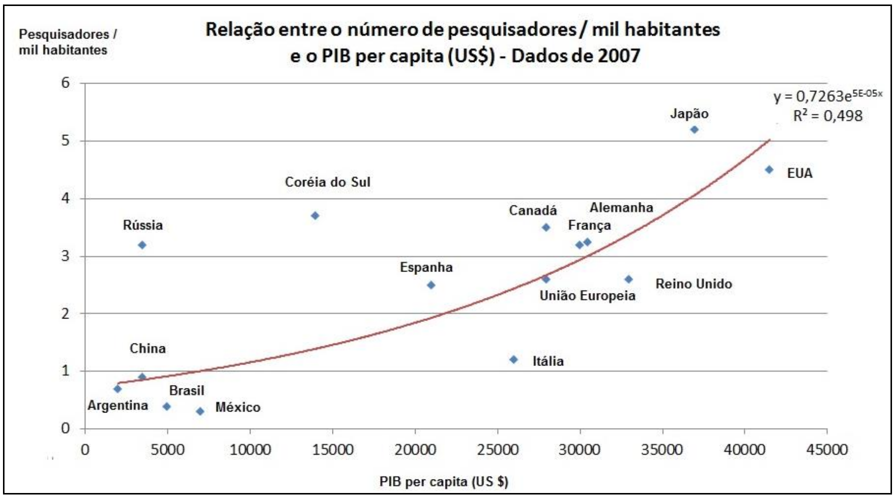


Figura 37 Relação entre o número de pesquisadores / mil habitantes e o PIB per capita de países com mais de 30 milhões de habitantes (Fonte: MCT, 2010[15])

Para determinação da existência ou não de correlações, normalmente são utilizados softwares especializados. Existem regressões lineares simples e regressões múltiplas, quando há uma variável independente e diversas outras dependentes. Essas são as mais comuns na realidade. Como exemplo, tem-se o custo de um imóvel como decorrente de sua área construída e de seu tempo de vida. O custo é a variável dependente da área e do tempo de vida. Trata-se de um evento onde Y = variável dependente e X1 e X2 = variáveis independentes.

15 http://www.mct.gov.br/upd_blob/0203/203406.pdf

Preço (R$) Y	Área (m^2) X1	Idade (anos) X2
400000	60	9
832000	86	10
1100000	105	8
727000	100	11
784000	88	8
1158400	100	9
1080000	136	9
840000	86	10
920000	84	11
713000	94	6
620000	100	14
600000	86	13
733000	78	10
915000	84	8
980000	78	6
1060000	94	4

Nas Figuras 38 e 39, tem-se a representação das correlações entre preço e área e entre o preço e o tempo de uso da amostra de imóveis. Observe a partir do valor de R^2 que as correlações isoladas são fracas.

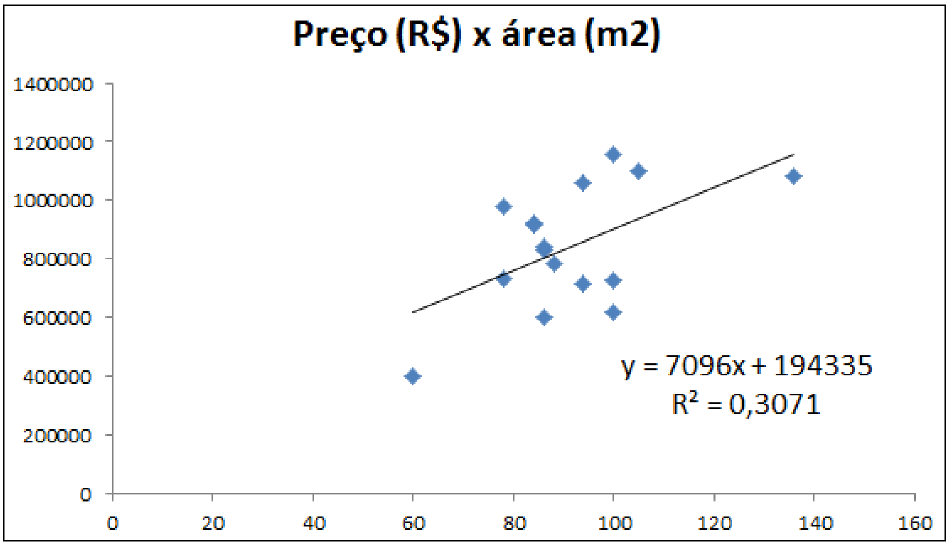


Figura 38– Correlação linear entre preço e área dos imóveis.

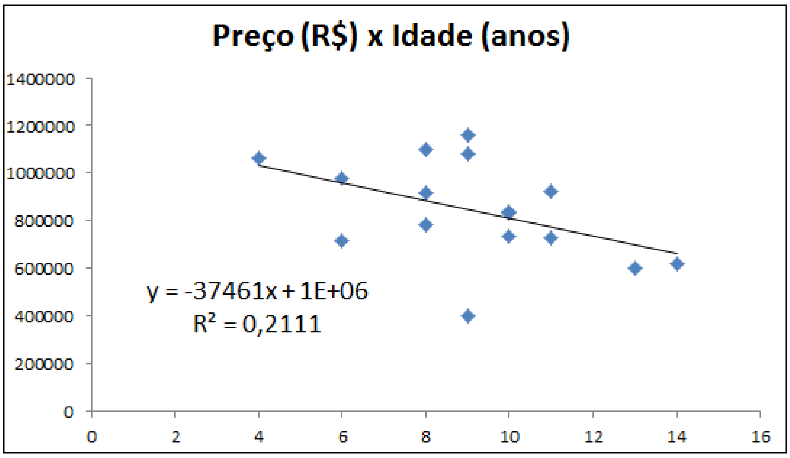


Figura 39– Correlação linear entre preço e idade dos imóveis.

A partir do Software Estatístico R é possível avaliar a correlação entre essas variáveis. Basta escrever as expressões a seguir:

y<-c(400000,
832000,1100000,727000,784000,1158400,1080000,840000,920000,713000,620000,600000,733000,915000,980000,1060000)
x1<-c(60, 86,105,100,88,100,136,86,84,94,100,86,78,84,78,94)
x2<-c(9,10,8,11,8,9,9,10,11,6,14,13,10,8,6,4)
model<-lm(y~x1+x2)
anova (model)
lm(formula=y~x1+x2)

```
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df     Sum Sq    Mean Sq F value   Pr(>F)
x1         1 1.9952e+11 1.9952e+11  8.5338 0.01191 *
x2         1 1.4626e+11 1.4626e+11  6.2558 0.02653 *
Residuals 13 3.0394e+11 2.3380e+10
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> lm(formula=y~x1+x2)

Call:
lm(formula = y ~ x1 + x2)

Coefficients:
(Intercept)           x1           x2
     532625         7258       -38695
```

Preço do imóvel = R$ 53.2625 + (7.258 x Área) – (38.695 x Idade)

Se quisermos saber aproximadamente o custo de um apartamento de 100 metros quadrados e com 5 anos de idade basta substituir esses valores na equação obtida da regressão múltipla. Nesse caso o valor do imóvel custaria aproximadamente R$ 1.064.950,00.

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

1- Calcule a correlação que relaciona a idade e a altura de uma criança.

Idade (anos)	Altura (cm)
6	70
8	110
10	130
12	150
14	155
15	180

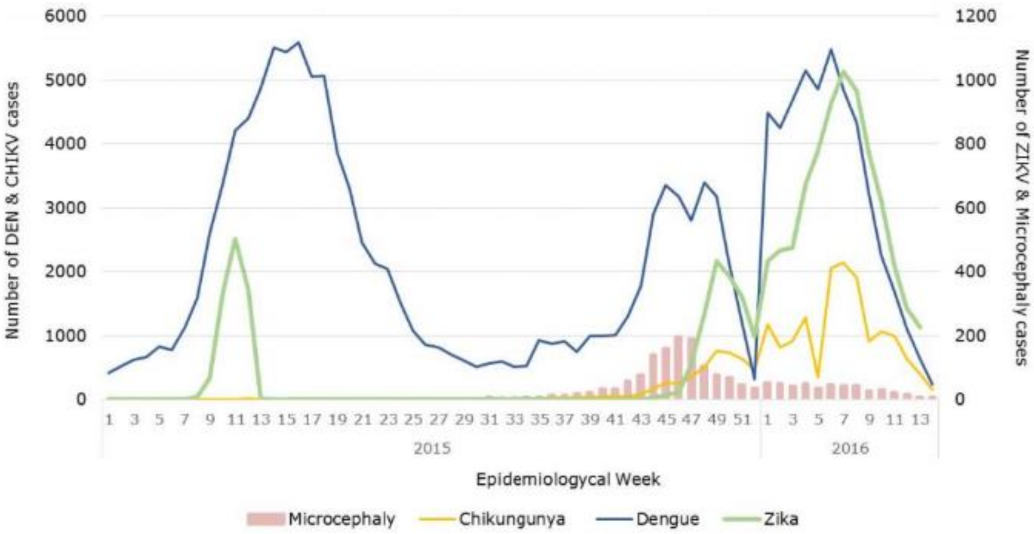
2- O dono de uma lanchonete anotou quanto de refrigerantes (em litros) ele vende ao longo dos dias de acordo com a temperatura. Qual a relação entre estas duas informações?

Temperatura (ºC)	Refrigerantes vendidos (litros)
15	22
20	25
25	28
27	30
30	32
31	31
32	33
35	50

3- Um pesquisador está estudando a relação entre os preços de uma casa, o tamanho dos terrenos e o número de quartos. Analisando uma amostra de propostas de vendas em sites específicos ele anotou os valores médios das casas e as respectivas áreas dos terrenos e número de quartos. Qual a correlação entre essas 3 variáveis?

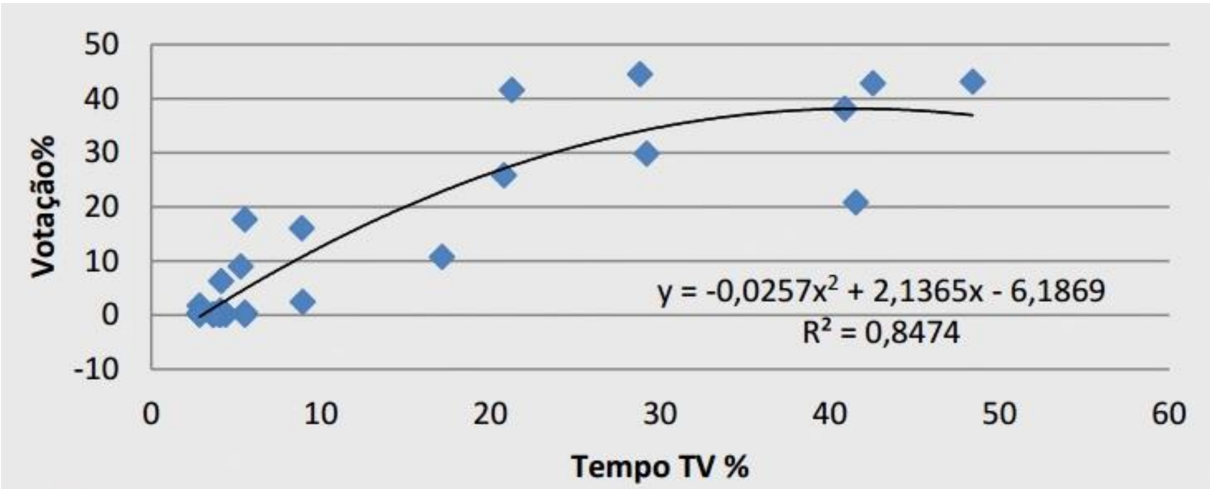
Preço da casa	Área do Lote (m^2)	Número de quartos
130.000	5000	3
134.000	5500	2
159.000	6000	4
164.000	6500	3
132.000	5200	2
125.000	5400	1
146.000	5700	3
168.000	6100	4
171.000	6300	4
187.000	6400	5

4- Analise criticamente as curvas que representam o número de casos de microcefalia, Chikungunya, dengue e Zica vírus.



http://www.pbs.org/newshour/updates/how-many-zika-infected-infants-will-develop-microcephaly-and-other-faqs/

5- Avalie criticamente a correlação polinomial que associa percentual de tempo de televisão e percentual de votação nas eleições.



4- Medidas de Tendência Central

Um conjunto de dados pode ser descrito por meio de alguns números representativos chamados de "**Medidas de Tendência Central ou Medidas de Centralidade**". Entre elas temos a Média Aritmética, a Moda e a Mediana.

a) Média Aritmética é a mais usada dentre todas as médias, face à sua aplicabilidade a situações práticas. Podemos calcular a média aritmética de várias maneiras, dependendo apenas da forma em que os dados se encontram. Podemos utilizar a média simples ou a média ponderada.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Onde n = total de dados e x_i representam todos os elementos do conjunto de dados.

Quando os dados estão agrupados em intervalos de classe, convenciona-se que todos os valores incluídos em um determinado intervalo de classe coincidem com o seu ponto médio, e determina-se a média aritmética ponderada pela fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

onde: x_i é o ponto médio de cada classe i.

Além do cálculo da média simples também é comum o uso da média ponderada. Uma aplicação simples é quando se tem pesos diferentes nas notas das provas. Se um aluno tirou 10,0 na prova de peso 1 e 4,0 na prova de peso 2 então sua nota final será:

$$\bar{x} = \frac{10.1 + 4.2}{3} = 6$$

b) moda – é o valor da amostra que mais aparece (de maior frequência). Uma amostra pode ser: amodal, unimodal, bimodal, trimodal ou multimodal.

c) mediana – A mediana de uma amostra é aquele valor que ocupa a posição central do rol, isto é, a mediana é o valor que divide a amostra em duas partes iguais. A mediana pode não pertencer a amostra. Isso acontece no caso representado na Figura 40. A mediana divide os dados em 2 partes iguais. Mesmo não existindo o número 20 na sequência, esse é o valor da mediana, obtida por meio da média entre os números 18 e 22.

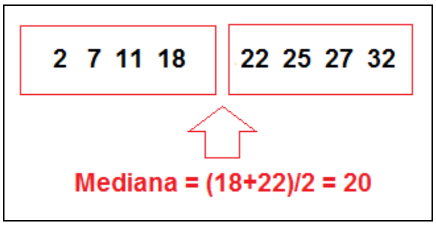


Figura 40 – Ilustração da forma de obtenção do valor da mediana.

A mediana tem uma vasta aplicação estatística porque é menos sensível aos valores extremos do conjunto de dados. Como exemplo: Uma turma tem as seguintes massas: 70, 80, 60, 90, 50, 55, 85. A média é calculada em 70kg. Mas se, ao invés de 90 a última massa fosse de 200kg a média da turma passaria a ser 86kg. Mas a mediana nos dois casos não se altera.

50 55 60 70 80 85 90	mediana = 70 kg e média = 70kg
50 55 60 70 80 85 200	mediana = 70kg e média = 86kg

Essa característica torna a mediana uma medida de tendência central importante para análises estatísticas. Muitas vezes a renda média dos moradores de uma cidade é de R$ 3.000,00, mas a mediana dos rendimentos é de R$ 600,00. Ou seja, metade dos moradores da cidade recebe menos que R$ 600,00.

Para avaliar o quanto os dados se dispersam em relação às medidas de tendência central tem-se a **variância**, calculada a partir da somatória de todos os desvios em torno da média aritmética ao quadrado. Por definição, o desvio padrão é calculado pela raiz quadrada da variância. Para uma população de tamanho “N” a variância é calculada pela equação:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Quando o interesse for o cálculo da variância de uma amostra de dados convencionou-se por utilizar a expressão:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{(N-1)}$$

Um conceito muito utilizado na Geografia é o de centroide ou centro de massa de diversas populações distribuídas no espaço. As coordenadas x e y do centroide são calculadas pela equação:

$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i . P_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \quad \text{e ainda} \quad y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i . P_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Exemplo 1:

Suponha que um novo centro de eventos está sendo planejado para uma determinada região. Nela há 3 comunidades residenciais e o centróide é um dos critérios para localização porque garante a equidistância (Figura 41). Suponha que a comunidade 1 tenha coordenada central (x=30, y=36)km e população de 20 mil pessoas. A comunidade 2 tem coordenada central de (x=55,y=18)km e população de 12 mil pessoas. Já a comunidade 3 tem coordenada central de (x=10,y=18)km e população de 5 mil pessoas. Qual é o centroide da população?

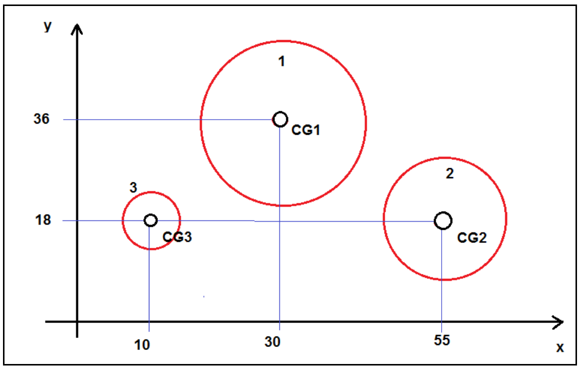


Figura 41– Cálculo do centróide da população de 3 comunidades.

$$x_{CG}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i.P_i)}{\sum_{i=1}^{n}P_i}=\frac{(10.5000)+(30.20000)+(55.12000)}{37000}=35{,}4km$$

$$y_{CG}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i.P_i)}{\sum_{i=1}^{n}P_i}=\frac{(18.5000)+(36.20000)+(18.12000)}{37000}=27{,}73km$$

Como é possível observar os valores de 35,4km e 27,73km representam o ponto médio entre as comunidades. Esse valor também é conhecido como centro de massa.

Exemplo 2:

Um pesquisador anotou a frequência do volume de chuvas de uma cidade (em mm). Calcule a média e o desvio padrão.

Classes	Frequência Fi
39,5 a 44,5	3
44,5 a 49,5	8
49,5 a 54,5	16
54,5 a 59,5	12
59,5 a 64,5	7
64,5 a 69,5	3
69,5 a 74,5	1

Para resolver o problema é necessário preencher a tabela:

Classes	Frequência (F_i)	x_i (valor médio)	$x_i . F_i$	$x_i^2.F_i$
39,5 a 44,5	3	42	126	5292
44,5 a 49,5	8	47	376	17672
49,5 a 54,5	16	52	832	43264
54,5 a 59,5	12	57	684	38988
59,5 a 64,5	7	62	434	26908
64,5 a 69,5	3	67	201	13467
69,5 a 74,5	1	72	72	5184
Soma	50		2725	150775

Nesse caso, a variância pode ser calculada por meio da expressão:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} \times f_i - \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \times f_i \right)^2}{N} \right)}{N-1} = \frac{150755 - \left(\frac{2725^2}{50} \right)}{49} = 46{,}17$$

O desvio padrão é calculado pela raiz quadrada de 46,17 resultando em 6,79. A média dos dados é calculada por 2725 / 50 = 54,5mm. Nesse caso, o coeficiente de variação das medidas (CV) é calculado por 6,79/54,5 = 0,125 ou 12,5%. O coeficiente de variação é usado para analisar a dispersão em termos relativos a seu valor médio. Dessa forma, podemos dizer que o coeficiente de variação é uma forma de expressar a variabilidade dos dados excluindo a influência da ordem de grandeza da variável.

Exemplo 3

Dado um conjunto de massas de uma turma de estudantes, calcule qual é a média, o desvio padrão e o Coeficiente de Variação (CV): 63, 55, 78, 82, 95, 60, 82, 75,74, 76, 80, 90

Peso (x_i)	Média $\bar{x}$	($\bar{x}$ - x_i)	($\bar{x}$ - x_i)^2
63	75,8	-12,8	163,84
55	75,8	-20,8	432,64
78	75,8	2,2	4,84
82	75,8	6,2	38,44
95	75,8	19,2	368,64
60	75,8	-15,8	249,64
82	75,8	6,2	38,44
75	75,8	-0,8	0,64
74	75,8	-1,8	3,24
76	75,8	0,2	0,04
80	75,8	4,2	17,64
90	75,8	14,2	201,64
Soma			1519,68

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(63+55+78+82+95+60+82+75+74+76+80+90)}{12} = 75{,}8$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{1519{,}68}{12} = 126{,}64$$

O desvio padrão é calculado em 11,25. Já o coeficiente de variação (CV) = 11,25/75,8 = 0,148 ou em termos percentuais: 14,8%.

Exemplo 4

Considere o conjunto de dados do exemplo 3. Identifique qual é a mediana, o primeiro quartil e o terceiro quartil: 63, 55, 78, 82, 95, 60, 82, 75,74, 76, 80, 90

Os dados devem inicialmente ser ordenados:

55, 60, 63, 74, 75, 76, 78, 80, 82, 82, 90, 95

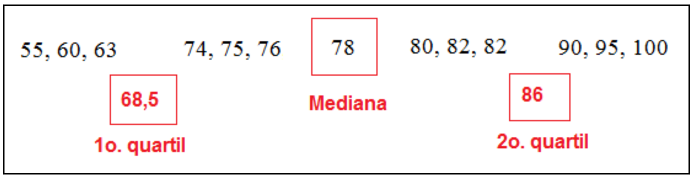
A mediana divide o conjunto de dados em 2 partes iguais. Considerando que na sequência há 12 números os dados podem ser separados da seguinte forma:

55, 60, 63, 74, 75, 76	78, 80, 82, 82, 90, 95

Nesse caso a mediana é a média entre o número 76 e 78, ou seja: 77. Esse também é o segundo quartil. O primeiro quartil divide a primeira metade dos números em 2 partes iguais. Como não há esse número, utiliza-se o valor médio entre 63 e 74 que é igual a 68,5. O terceiro quartil também é calculado da mesma forma, sendo o valor médio entre 82 e 82 que é o próprio número 82.

Exemplo 5[16]

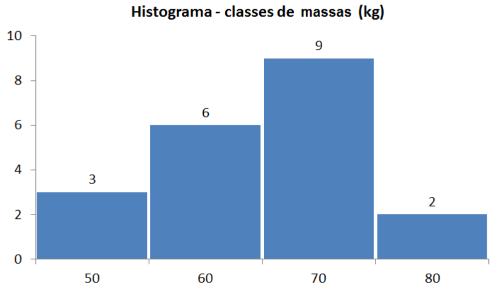
No exemplo anterior, suponha que o número 100 tenha sido acrescentado à série. Nesse caso o primeiro quartil, a mediana e o terceiro quartil seriam determinados da seguinte forma: 55, 60, 63, 74, 75, 76, 78, 80, 82, 82, 90, 95, 100



[16] Recomendamos o exercício resolvido em vídeo:
https://www.educreations.com/lesson/view/estatistica-aula-26-construcao-de-diagrama-de-caix/19492821/

LISTA DE EXERCÍCIOS 4

1- Dado um histograma das massas de uma turma de estudantes, qual a moda e o terceiro quartil?



2- As notas de uma turma de alunos são mostradas na tabela. Qual a média e a mediana?

Nota	Quantidade
2	2
4	4
6	12
8	6
10	2

3- Os gastos mensais de uma amostra de famílias são descritos por meio de uma tabela, onde também estão descritas suas rendas. Qual a correlação existente entre a renda e o gasto mensal dessas famílias?

Quantia Gasta por semana (R$) Y	Renda da família (R$) X	X.Y	
120	6500		
68	3500		
35	3000		
60	4400		
100	8000		
91	7700		
44	3200		
71	3900		
89	4400		
113	7700		

4- Calcule a média, a amplitude, a mediana e o desvio padrão do conjunto de dados:

29, 35, 17, 30, 231, 6, 27, 35, 23, 29, 13

https://www.youtube.com/watch?v=2oGiQ3VySzU UNIVESP TV – CURSO DE ESTATÍSTICA

5- PROBABILIDADES

Em Estatística Descritiva mostramos como são construídos os histogramas, que representam a distribuição da frequência de determinado evento. Quando realizamos um número grande de observações de um fenômeno podemos estimar a probabilidade dele se repetir no futuro, observando um histórico da distribuição de frequências.

Na natureza há fenômenos determinísticos e probabilísticos. Quando os resultados são sempre os mesmos, independente do número de testes realizados, dizemos que um evento é determinístico. Se soltarmos uma pedra ela cairá em 100% das vezes. Não há chances de a pedra subir. Outro exemplo é quando aquecemos uma dada quantidade de água no estado sólido. Sabemos que haverá a passagem para o estado líquido. Um evento aleatório tem como característica o fato de não conseguirmos prever seus resultados, mesmo realizando um número grande de experimentos. Podemos jogar uma moeda 500 vezes e vamos perceber que as chances de sair CARA ou COROA são praticamente iguais. Mas se jogarmos a moeda pela 501ª vez, não conseguiremos prever o resultado. Trata-se de um fenômeno **probabilístico**.

Há alguns conceitos fundamentais na Teoria das Probabilidades que são: Espaço amostral e Evento. Ao conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório chamamos de Espaço Amostral, que indicaremos como “S”.

O espaço amostral dos naipes de um baralho pode ser escrito como: S1 = {ouro, copas, paus, espadas}.

O espaço amostral das possíveis faces de um dado pode ser escrito como: S2 = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Podemos ainda ter também espaços amostrais infinitos tais como a contagem de carros que passam em determinada rodovia: S3 = { 0, 1, 2, 3, 4, …, n }.

Um evento é qualquer conjunto de resultados de um experimento, que pertence ao espaço amostral “S”. Seja um evento A pertencente ao espaço amostral S. O complemento do Evento A é o subconjunto de todos os elementos de S que não estão em A. Denotamos o complemento de A por meio dos símbolos “A traço” ou A’.

Como vimos, ao lançarmos um dado honesto temos o espaço amostral S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se nosso interesse é calcular a probabilidade de sair uma face “par” podemos dizer que o evento A = { 2, 4, 6 }.

O matemático Pierre Laplace definiu a Probabilidade de ocorrência de um evento “A” como sendo:

$$P\ (A) = \frac{\textbf{Número de vezes que o evento A pode ocorrer}}{\textbf{Número total de casos possíveis}}$$

No exemplo anterior, a probabilidade de sair um número par em um dado honesto (equilibrado) é de 3/6, pois há três possibilidades de ocorrência de uma face par em um total de 6.

Exemplo: No lançamento de 2 dados honestos na sequência, qual é o Espaço Amostral? E qual a probabilidade da diferença entre os dois dados ser nula? Seja evento A = {diferença zero}.

Observe que o espaço amostral pode ser escrito da seguinte forma: {(1 – 6 = -5), (2 – 6 =-4), (1-5=-4), (1-4=-3), (2-5=-3), (3-6=-3), ...(6-1=5)}. Há 36 resultados possíveis.

Em apenas seis deles a diferença entre os dados é zero. Nesse caso a p(A)=1/6.

Podemos definir **PROBABILIDADE CONDICIONAL** como sendo: a probabilidade de ocorrer um determinado evento, dado que se sabe que ocorreu outro evento anteriormente. Nesse caso podemos ler: probabilidade de sair o evento A, dado que aconteceu B, que é calculado por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Para análise de eventos probabilísticos é muito comum o uso dos Diagramas de Venn.

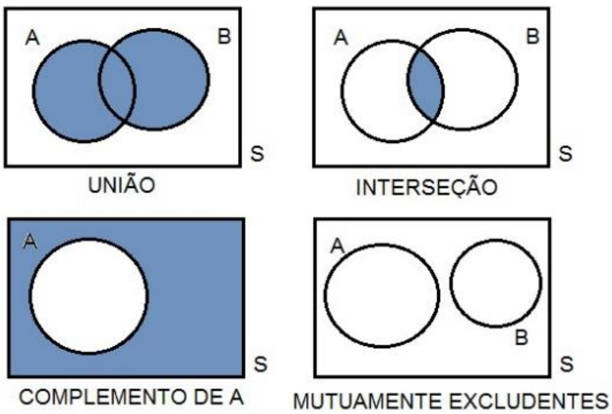


Figura 42- Diagramas de Venn.

Há uma regra muito importante na Teoria de Probabilidades: Chama-se **Regra Geral da Multiplicação:**

$$p(A \cap B) = p(A).p(B|A) \quad \text{se } p(A) \neq 0$$
$$p(A \cap B) = p(B).p(A|B) \quad \text{se } p(B) \neq 0$$

Se A e B são independentes então: $p(A|B)=p(A)$ e $p(B|A)=p(B)$ e por consequência se A for independente de B, B será independente de A. Nesse caso temos que:

$$\mathbf{p(A \cap B) = p(A).p(B)}$$

Exemplo: Se jogarmos dois dados ao mesmo tempo, a probabilidade de sair um número par no primeiro dado seguido de um número menor que 3 no segundo dado é calculado como sendo: $p(A) . p(B) = (3/6) . (2/6) = (6/36) = (1/6)$. Um resultado não influencia no outro. Nesse caso, podemos dizer que os **eventos A e B são independentes.**

Se A e B são dois eventos quaisquer, que podem ser mutuamente excludentes ou não, podemos escrever:

$$\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

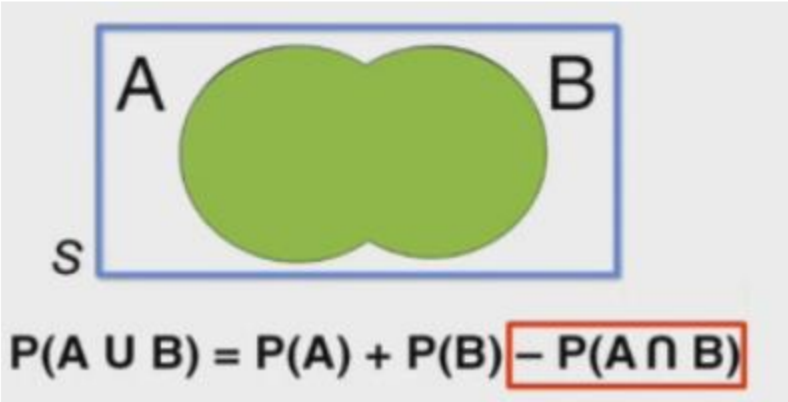


Figura 43- Ilustração da união de dois eventos.

No caso de A e B serem eventos mutuamente exclusivos (também chamados de excludentes ou disjuntos) então escrevemos:

$$\mathbf{p(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Nesse caso não se trata de um evento ocorrer e depois ocorrer outro (quando se faz a multiplicação). Trata-se de ocorrer um ou outro. Essa regra é chamada Regra da Adição.

O Teorema da Probabilidade Total é muito útil quando o espaço amostral é particionado em k subconjuntos. Seja, por exemplo, os eventos A1, A2,….Ak, partições do espaço amostral s, de modo que P(A1) diferente de zero para i = 1 até k.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

Observamos que o evento B é uma fração dos eventos A1 até An.

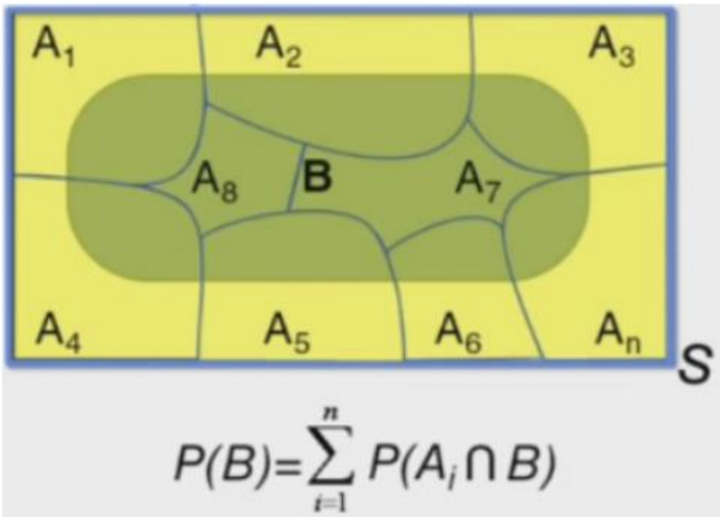


Figura 44- Ilustração do Teorema da Probabilidade Total.

Exemplo: Uma empresa é composta de 3 unidades que produzem o mesmo produto. A fábrica I produz 30% dos produtos, a fábrica II 45% e a fábrica III 25%. Cada fábrica tem um percentual de defeitos: 1%, 2% e 1,5%. Qual é a probabilidade de encontrarmos um produto defeituoso durante uma inspeção de qualidade?

Solução: Seja A o evento produto defeituoso. No problema em questão temos que: p(FI) = 0,3. p(FII) = 0,45 e p(FIII) = 0,25. Sabemos ainda que: p(A|FI)=0,01; p(A|FII)=0,02 e p(A|FIII)=0,015. Pelo Teorema da Probabilidade Total temos:

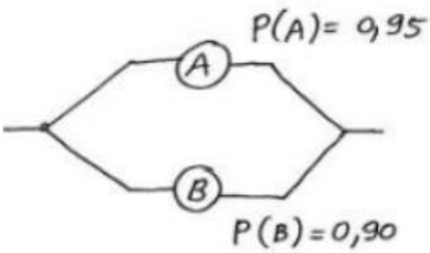
$$p(A)=p(FI).p(A|FI)+p(FII).p(A|FII)+p(FIII).p(A|FIII)$$
$$p(A) =(0{,}3.0{,}01)+(0{,}45.0{,}02)+(0{,}25.0{,}015)=0{,}0157$$

Ou seja, a probabilidade de encontrarmos um produto defeituoso é de 1,57%. Mas observe que, se encontrarmos um produto defeituoso em um lote onde estão misturados produtos das Fábricas I, II e III, qual é a probabilidade de que ele tenha sido produzido na Fábrica II?

Seja: p(FII|A) a probabilidade de ter sido produzido na fábrica II, dado que sabemos que é defeituoso. Nesse caso podemos afirmar que:

$$p(FII|A)=[p(FII).p(A|FII)]/p(A)=(0{,}45.0{,}02)/0{,}0157 = 0{,}57$$

Exemplo: Uma empresa tem 2 alarmes que funcionam de forma independente. Qual a probabilidade de que um problema seja detectado por apenas um deles? A probabilidade do alarme funcionar quando o sensor detecta uma invasão é de 95% no alarme A e 90% no alarme B.



$$\begin{cases} P(A) = \text{PROB. FUNCIONAR A} \\ P(\bar{A}) = \text{PROB. NÃO FUNCIONAR A} \\ P(B) = \text{PROB. FUNCIONAR B} \\ P(\bar{B}) = \text{PROB. NÃO FUNCIONAR B} \end{cases}$$

P(FUNCIONAR 1 ALARME E OUTRO NÃO) = ?

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = [P(A).P(\bar{B})] + [P(\bar{A}).P(B)]$$

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = [P(A).(1-P(B)) + (1-P(A)).P(B)] =$$

$$= 0{,}95 . 0{,}1 + 0{,}05 . 0{,}9 = 0{,}14$$

PROB. SER DETECTADO POR APENAS 1 ALARME = 14%

No próximo capítulo serão mostradas algumas das mais importantes distribuições de probabilidades utilizadas na área de engenharia: binomial, normal, Poisson, exponencial.

LISTA DE EXERCÍCIOS 5:

1- No lançamento de dois dados simultaneamente, se as faces mostrarem números diferentes, qual é a probabilidade de que uma face seja o número 2?

2- Em dias muito frios a chance de os funcionários de uma indústria faltarem ao trabalho é de 0,06. Já em dias normais, ela é igual a 0,01. Em 1/5 dos dias faz muito frio. Qual é a probabilidade de 1 funcionário não ter faltado em um dia qualquer?

3- É preciso formar uma comissão. Para a sua constituição, estão disponíveis 2 professores e 4 assistentes. São escolhidas ao acaso 3 pessoas. Qual é a probabilidade de que sejam escolhidos para esta comissão 1 professor e 2 assistentes?

4- Em uma empresa há 10 homens e 25 mulheres. Entre os homens, 5 são formados em Direito e, entre as mulheres, 7 são formadas também em Direito. Os demais são formados em Administração. Ao sortear uma pessoa desse grupo, sabendo-se que a pessoa sorteada é formada em Direito, qual é a probabilidade de ser uma mulher?

5- Em uma caixa existem 3 envelopes brancos e 2 envelopes pardos. Eles são extraídos da caixa sem reposição. Calcule a chance de que saiam ou 2 pardos sucessivos ou 3 brancos sucessivos.

6- Em uma prova de múltipla escolha, cada questão tem 5 alternativas, sendo apenas uma delas correta. Ao não saber a resposta, o aluno "chuta" aleatoriamente uma resposta qualquer entre as possíveis escolhas. Levando-se em conta um aluno mediano, que saiba 60% do conteúdo, qual será a chance de ele acertar uma das 5 questões escolhida aleatoriamente? E qual a chance de ele acertar exatamente 3 questões?

7- Um estudante joga uma moeda 4 vezes seguidas. Qual a probabilidade de sair 3 caras nos 4 lançamentos?

8- Um estudante joga uma moeda 3 vezes seguidas. Qual a probabilidade de sair 3 coroas nos 3 lançamentos seguidos?

9- Um estudante apostou com o professor que tiraria 3 faces 6 no lançamento de três dados jogados simultaneamente. Qual a chance dele ganhar a aposta?

10- Uma caixa tem 5 bolas, sendo 2 pretas e 3 brancas. Qual a probabilidade de se sortear 2 bolas pretas na sequência (com e sem reposição) ?

6- Distribuição de probabilidades

Uma variável aleatória tem um valor único (determinado aleatoriamente) para cada resultado de um experimento. A palavra aleatória indica que em geral só conhecemos aquele valor depois do experimento ser realizado. Como exemplo, quando lançamos uma moeda honesta sabemos a priori que a probabilidade de sair cara é 0,5 e a probabilidade de sair coroa é também 0,5. Mas não sabemos de antemão o resultado que sairá. Podemos chamar X = Variável Aleatória número de CARAS no lançamento de uma moeda. Nesse caso se sair coroa (K) o valor de X = 0 e se sair cara (C) o valor de X =1, conforme ilustrado na Figura 45.

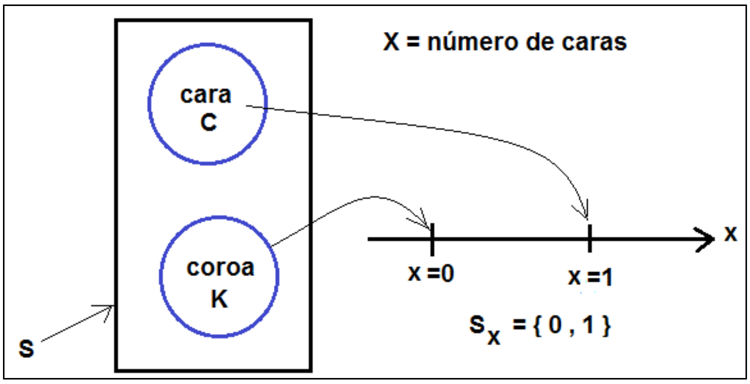


Figura 45- Ilustração da variável aleatória X = número de caras.

Na Figura 46 tem-se também o exemplo do espaço amostral decorrente da soma das faces de 2 dados jogados simultaneamente. Seja a variável aleatória X = soma das faces dos 2 dados. O valor de X varia de 2 até 12.

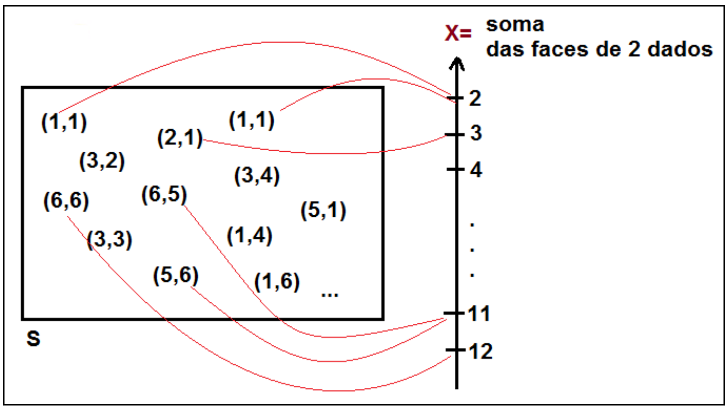


Figura 46- Ilustração da variável aleatória X = soma das faces de 2 dados.

As variáveis aleatórias podem ser **discretas**, que assumem valores inteiros ou podem ser **contínuas**, que podem assumir infinitos valores dentro de um intervalo de números reais. Como exemplo de variável aleatória discreta tem-se o número de caras que pode ser obtido em 20 lançamentos de uma moeda, ou o número de faces pares no lançamento de 10 dados honestos. São exemplos de variáveis aleatórias contínuas as estaturas dos estudantes de uma determinada escola ou a massa corporal dos moradores de uma cidade.

Uma vez definida uma variável aleatória é importante definir Função de Probabilidade da variável aleatória discreta X, que a cada valor de X associa sua probabilidade de ocorrência. A soma de todos os valores de uma distribuição de probabilidades deve ser igual a 1, ou seja, $\sum P(x) = 1$, onde "X" toma todos os valores possíveis. Outra propriedade importante é que a probabilidade de ocorrência de um evento deve ser $0 \leq P(x) \leq 1$ para todo "X". No exemplo do lançamento de um dado honesto, todas as faces têm a mesma probabilidade de ocorrência (1/6). Logo:

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=1$$

Quando lançamos duas vezes uma moeda honesta podemos ter nenhuma coroa, uma coroa ou duas coroas. Nesse caso trata-se de uma variável aleatória discreta (que assumem valores 0,1,2,3...n).

Se chamarmos de X = número de coroas temos então a seguinte distribuição de probabilidades: X = 0 quando não sair nenhuma coroa, X = 1 quando sair apenas 1 coroa e X=2 quando sair duas coroas. Na Figura 47 tem-se a representação da distribuição de probabilidades decorrentes dos dois lançamentos.

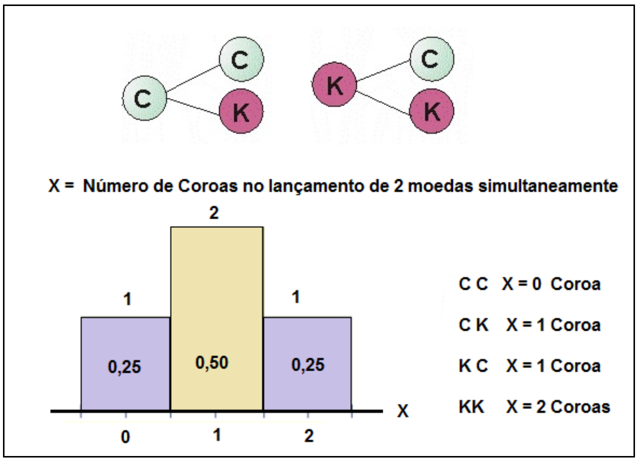


Figura 47- Distribuição de probabilidade decorrente de 2 lançamentos de uma moeda.

Se a moeda fosse lançada 4 vezes em sequência, a árvore de possibilidades poderia ser representada na Figura 48. Note que X = número de caras. Para o evento CCCC tem-se X=4, ou seja, o evento sair 4 caras em quatro lançamentos. Sua probabilidade de ocorrência é de 1/16 ou 0,0625 (6,25%). O evento X =1 aparece 4 vezes entre as 16 possibilidades. Logo sua probabilidade de ocorrência é 4/16 ou 0,25 (25%).

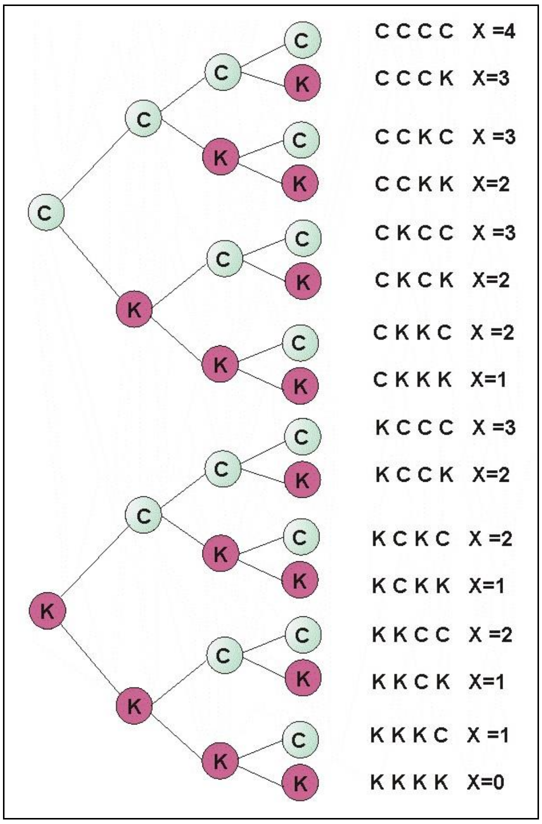


Figura 48- Distribuição de probabilidade decorrente do 4 lançamentos de uma moeda.

A distribuição de probabilidades desse exemplo pode ser visualizada na Figura 49.

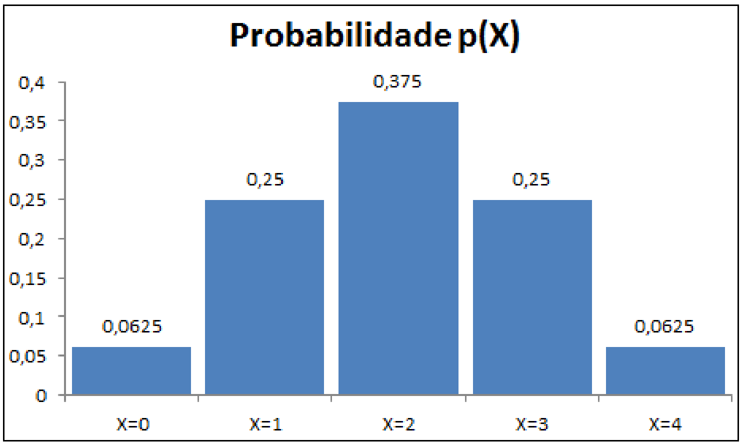


Figura 49- Distribuição de probabilidades p(x).

Quando um evento é dado em termos de suas probabilidades de ocorrência é possível se calcular uma média, também conhecida como Valor Esperado E(X) e a Variância VAR(X).

Como exemplo, seja uma variável aleatória X que representa em média o número total de dias de sol por semana na cidade de Florianópolis ao longo do ano. A distribuição de probabilidades de ocorrência de X é dada por p(X):

Xi	p(Xi)
0	0,30
1	0,20
2	0,15
3	0,10
4	0,05
5	0,05
6	0,10
7	0,05

Nesse caso, o Valor Esperado e a Variância são calculados da seguinte forma:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} (X_i . p(X_i)) \quad \text{e} \quad VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Xi	p (Xi)	Xi . p(Xi)	X^2	Xi^2.p(Xi)
0	0,30	0	0	0
1	0,20	0,20	1	0,20
2	0,15	0,30	4	0,60
3	0,10	0,30	9	0,90
4	0,05	0,20	16	0,80
5	0,05	0,25	25	1,25
6	0,10	0,60	36	3,60
7	0,05	0,35	49	2,45
Somatório		2,20	Somatório	9,80

Logo, o valor esperado E(X) = 2,20 e a Variância VAR(X) = 9,80 – $(2,20)^2$ = 4,96.

Em Estatística há diversos tipos de funções de distribuição de probabilidades. São exemplos de funções de distribuições de probabilidades discretas a Binomial e Poisson. São exemplos de funções de distribuição de probabilidades contínuas a Exponencial, T de Student, Normal e Qui-Quadrado.

a) Distribuição Binomial

No caso do lançamento da moeda um número elevado de vezes fica difícil calcular as probabilidades por meio do diagrama de árvore. Nesse caso usamos a função distribuição de probabilidades Binomial.

Considerando a variável aleatória X que representa o número de sucessos em N testes independentes, a distribuição denominada **Binomial** será dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x.(1-p)^{n-x}$$

Onde "p" é probabilidade de sucesso do evento em estudo e "q" = (1-p) é a probabilidade de fracasso do evento. Para as distribuições binomiais é possível calcular a média e o desvio padrão como sendo: µ (média) = n.p e desvio padrão σ = $\sqrt{n.p.q}$

Exemplo 1:

Suponha que um pesquisador esteja interessado em avaliar as chances de ocorrência de nenhuma inundação na cidade nos próximos 5 anos. Sabe-se que a probabilidade anual de ocorrência de inundações é de 20% ou 0,2. Seja X = número de inundações nos 5 anos. Esse valor pode ser de 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Ou seja, durante os cinco anos observados pode não acontecer nenhuma inundação, mas também podem acontecer 1, 2, 3, 4 ou 5. Para fins de estatística diz-se que a probabilidade de sucesso, ou de ocorrência do evento observado é:

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0{,}2^0.(1-0{,}2)^5$$

$$P(X = 2) = \frac{5.4.3.2.1!}{(0!).(5.4.3.2.1!)} \times 0{,}2^0.(0{,}8)^5 = 1 \times 1 \times 0{,}32 = 0{,}32$$

Ou seja, há 32% de chances de não ocorrer enchente nos 5 anos observados.

No software R, o cálculo da probabilidade em questão seria obtido apenas com a expressão: dbinom(0,5,0.2)=0,32768. Para a construção do gráfico de distribuição de frequência de probabilidades basta digitar os seguintes comandos no R (Figura 50):

```
x<-0:5
fx<-dbinom(x,5,0.2)
plot(x,fx,type="h")
barplot(fx)
```

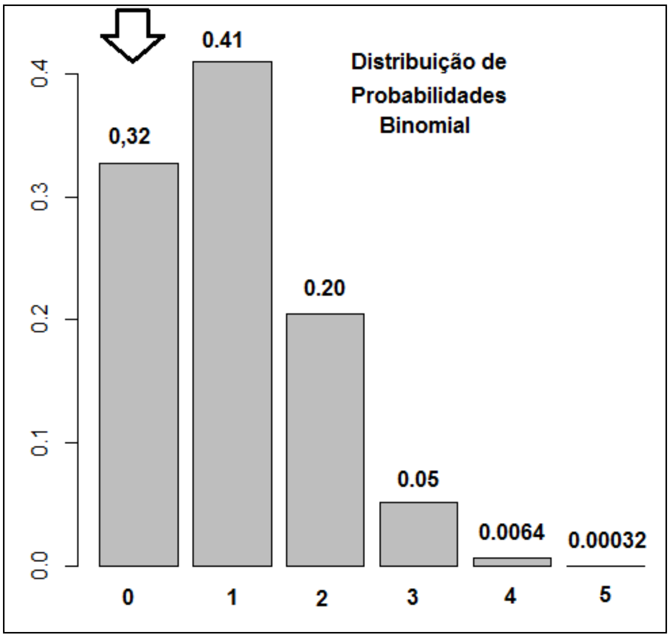


Figura 50– Distribuição de frequências de probabilidades binomiais.

Ao analisar a distribuição de frequências de probabilidades ilustrada na Figura 47, percebemos que há 41% de probabilidade de ocorrer 1 enchente nos 5 anos de análise. A probabilidade de ocorrência de 3 enchentes nesse período é de apenas 5%.

Exemplo 2:

Suponha que um determinado gene ocorra em 20% de uma população. Se uma amostra aleatória de 7 pessoas é selecionada ao acaso, qual é a probabilidade de encontrarmos nesse conjunto exatamente 3 pessoas com o gene? Sabemos que a probabilidade de sucesso (presença do gene) = 0,2. Logo p=0,2 e q=0,8. Na equação binomial tem-se:

$$P(X=3)=\binom{7}{3}.0,2^3.0,8^4=\frac{7.6.5.4!}{(3!)(4!)}\times 0,2^3.(0,8)^4=0,11 \quad \Rightarrow 11\%$$

Exemplo 3:

Considere que o Departamento de Estatística do Trabalho de um município estimou que 20 % da força de trabalho está desempregada. Uma amostra de 14 trabalhadores é obtida deste município. Calcule a probabilidade de 3 pessoas da amostra estarem desempregadas.

Considere a probabilidade de encontrar uma pessoa desempregada como sendo p = 0,2. Considere N=14 e q = 0,8. Substituindo esses valores na equação Binomial temos:

$$P(X = 3) = \binom{14}{3}.0{,}2^3.0{,}8^{11} = \frac{14!}{3! \times 11!} \times 0{,}2^3.(0{,}8)^{11} = 0{,}25 \quad \Rightarrow 25\%$$

Observamos que na equação para avaliar a probabilidade binomial é utilizada uma expressão comum na análise combinatória. Como exemplo, podemos combinar 4 objetos (C,B,S,T) em grupos de 2 objetos cada de 6 formas distintas: CB, CS,CT,BS,BT e ST.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = \frac{24}{4} = 6$$

A distribuição binomial tem sua média deslocada para a direita quando a probabilidade de sucesso é mais próxima de 1, conforme demonstrado no Exemplo 4, resolvido com apoio do software R.

Exemplo 4:

Suponha que a chance de se encontrar uma peça sem defeito em uma linha de produção de uma indústria é de 80% (p=0,8 é a probabilidade de sucesso). Um estagiário selecionou aleatoriamente 20 peças para análise. Qual a probabilidade de se encontrar exatamente 16 peças boas nas 20 peças da amostra?

Ao digitar os comandos a seguir no software R tem-se a Figura 51:

```
x<-0:20
fx<-dbinom(x,20,0.8)
plot(x,fx,type="h")
dbinom(16,20,0.8)
barplot(fx)
```

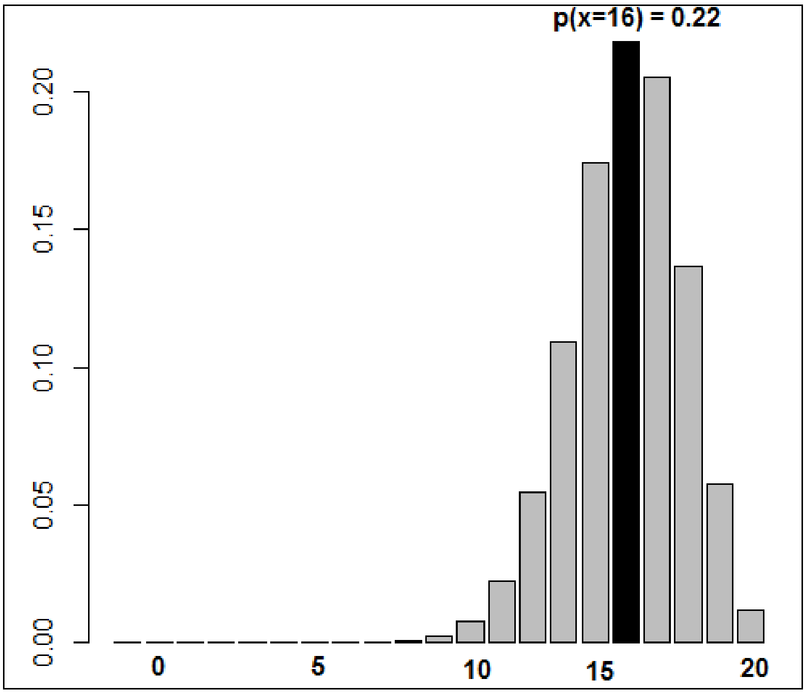


Figura 51- Distribuição de probabilidades binomial.

Caso o interesse fosse saber qual a probabilidade de encontrarmos mais que 16 peças boas, bastaria somar a probabilidade p(X=17) + p(X=18) + p(X=19) + p(X=20) = 0,205+0,137+ 0,0576 + 0,0115 = 0,41 ou 41%.

Se o interesse fosse conhecer qual a probabilidade de encontrarmos menos que 17 peças boas nas 20 amostras: p(X < 17)=1- [p(X=17)+p(X=18)+p(X=19)+P(X=20)] =0,59 ou 59%.

b) Distribuição de Poisson

Em diversas situações nas quais estamos interessados no número de ocorrências de uma determinada variável em um dado intervalo contínuo (tempo ou espaço) utilizamos a distribuição de probabilidades de Poisson. Como exemplos de aplicação de Poisson temos as seguintes estimativas: número de chamadas telefônicas recebidas por minuto, número de mensagens que chegam a um servidor por segundo, número de acidentes por dia, número de defeitos por m^2 entre tantos outros exemplos.

$$P(x) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!}$$

Onde λ é o número médio de ocorrências no intervalo e X é o número de ocorrências que desejamos calcular.

Exemplo 1:

Suponha que em um cruzamento acontecem em média 3 acidentes por mês. Qual é a probabilidade de ocorrência de 5 acidentes em um mês qualquer?

Nesse caso tem-se que a probabilidade é calculada como sendo 10%:

$$P(x) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^5 * e^{-3}}{5!} = \frac{3^5 * 2{,}718^{-3}}{5.4.3.2.1} = 0{,}10$$

Exemplo 2:

Uma delegacia de polícia recebe uma média de 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de que ela receba 2 solicitações em uma determinada hora selecionada aleatoriamente?

A solução é obtida a partir da consideração de que a média de chamadas λ =5 e o número de sucessos desejados X =2. A equação de Poisson fica:

$$P(X = 2) = \frac{5^2 * 2{,}718^{-5}}{2!} = 0{,}084 \Rightarrow 8{,}4\%$$

A distribuição de Poisson também pode ser modelada no software R. Se nosso interesse for calcular a probabilidade de ocorrer de 0 (zero) até 10 acidentes no mês em um cruzamento que tem média de 3 acidades digitamos no R:

```
dpois(0:10,3)
 barplot(dpois(0:10,3)).
```

Como resultado temos a distribuição de frequências de Poisson indicada na Figura 52:

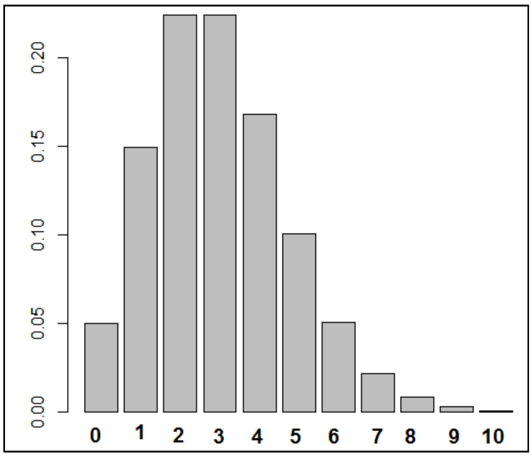


Figura 52- Distribuição das frequências de probabilidades discretas de Poisson.

Observamos que o formato da distribuição de Poisson varia muito de acordo com o valor de λ. Na Figura 53 tem-se uma distribuição com λ=20. Digite no software R: dpois(0:30,20) e barplot(dpois(0:30,20)).

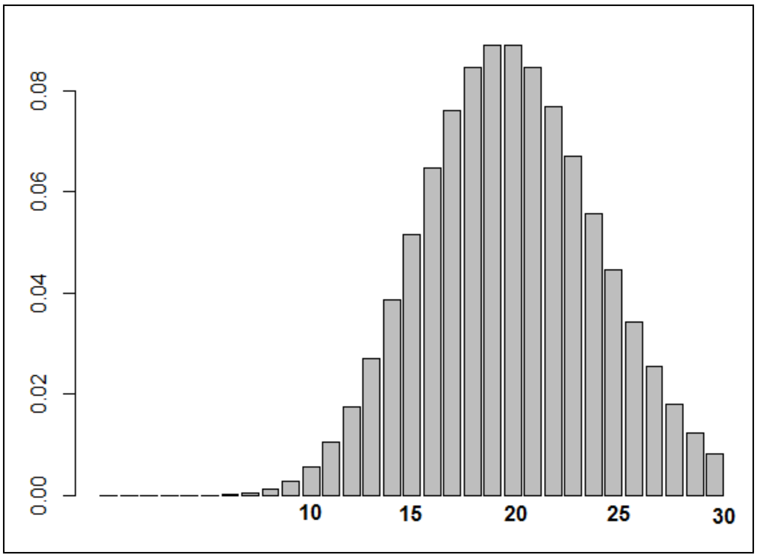


Figura 53- Distribuição das frequências de probabilidades discretas de Poisson.

Ao contrário de uma variável aleatória discreta, uma *variável aleatória contínua* pode assumir qualquer valor fracionário dentro de um intervalo definido de valores. Por isso não podemos enumerar todos os possíveis valores da variável com os valores de probabilidade correspondentes. O tempo de vida de um rolamento, as massas das pessoas, a vida útil dos pneus e a estatura das pessoas são exemplos de variáveis aleatórias contínuas.

d) Distribuição Normal

A mais importante distribuição de probabilidade contínua é a NORMAL (também conhecida como curva de Gauss-Laplace). A curva que representa a distribuição normal de probabilidade tem uma forma de sino e é considerado um modelo matemático representativo de inúmeros fenômenos encontrados na natureza (Figura 54).

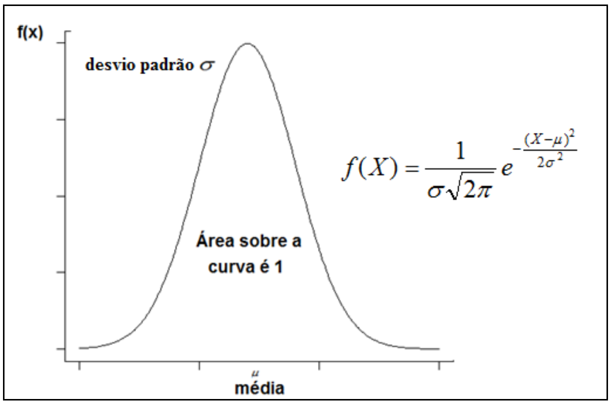


Figura 54- Ilustração de uma curva NORMAL.

Observamos que os valores da variável aleatória X mais próximos da média ocorrem com maior frequência. Os valores simétricos da variável X em relação à média ocorrem com mesma frequência e a área sobre a curva tem valor unitário 1. Existe simetria entre os dois lados da curva.

Para facilitar os cálculos há tabelas para distribuição normal padrão, que tem média “ZERO”. Para se transformar uma curva normal real em uma curva normal padrão faz-se o procedimento indicado no exemplo 1 (Figura 55).

Exemplo 1:

Suponha que em um dado município a população tenha estatura com média 170cm e desvio padrão de 20cm. A Curva Normal real que representa essa distribuição de estaturas deve ser transformada em uma Curva Normal Padrão Z, com média igual a 0 (zero). As áreas sobre a curva de distribuição normal padrão Z são tabeladas e por isso são utilizadas para a realização dos cálculos da distribuição normal real X.

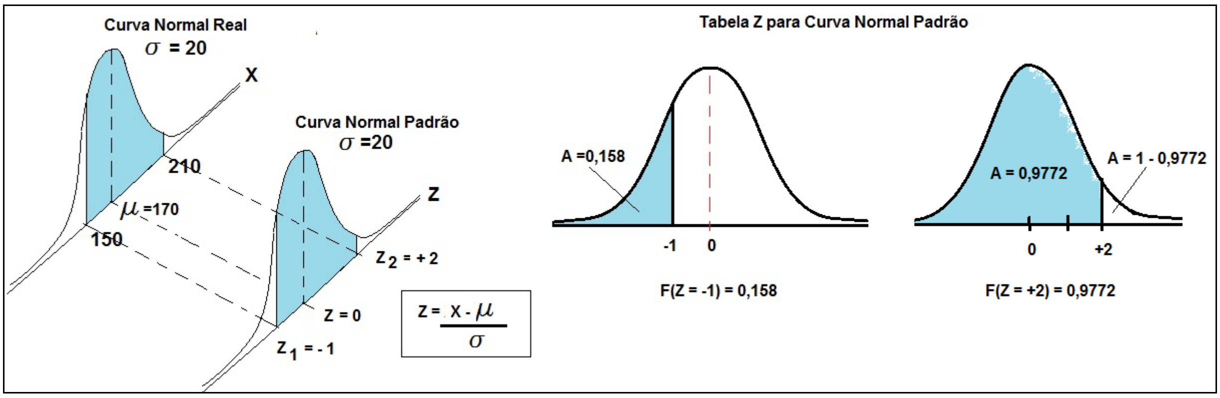


Figura 55- Transformação da Curva Normal Real na Curva Normal padronizada (tabelada).

Para saber a probabilidade de encontrar uma pessoa com estatura menor que 150 nessa população tem-se F(Z=-1)=0,158 ou 15,8% (Tabela Z disponível no Anexo). A probabilidade de encontrar uma pessoa com estatura menor que 210 é calculada a partir de F(Z=2)= 0,9772 ou 97,72%. Se desejarmos saber a probabilidade de se encontrar uma pessoa com estatura entre 150 e 210 basta calcular a diferença entre essas 2 áreas: 0,9772 – 0,158 = 0,819 ou aproximadamente 82%.

Conforme ilustrado na Figura 53, na Tabela Z padrão tem-se sempre a área sombreada sobre a curva que fica à esquerda do valor de Z.

Se, por exemplo, Z = 0,32 então na tabela da curva normal padrão é possível encontrar o valor da probabilidade como sendo 0,6255, que significa que 62,55% dos fenômenos em estudo ocorrem até esse valor de Z = 0,32 (Figura 56).

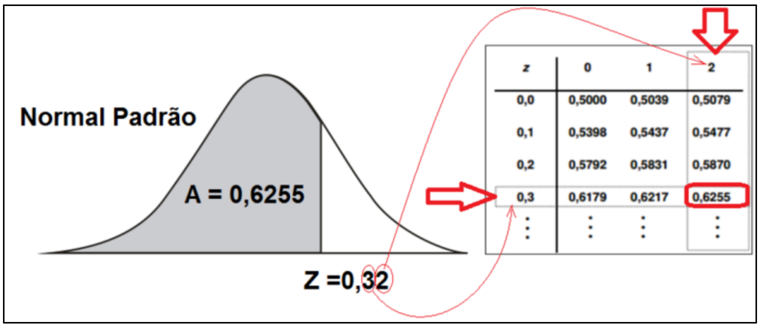


Figura 56– Ilustração do uso da Tabela Normal Padronizada.

Existe uma probabilidade de 95,46% de que uma determinada característica esteja presente entre -2 e +2 desvios-padrão ao redor da média. Ou seja, a maioria das frequências se situa ao redor da média entre de -2 desvios-padrões e +2 desvios-padrão. Na Figura 57 tem-se a representação de como as frequências se distribuem em uma curva normal.

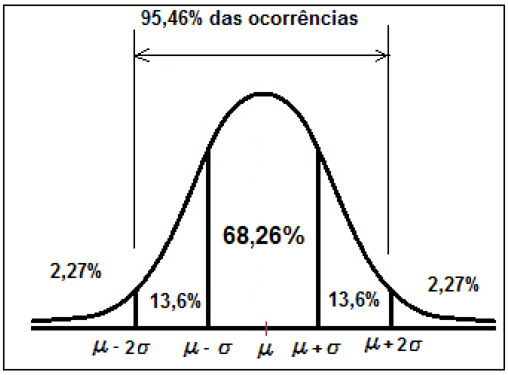


Figura 57- Características da curva normal.

Exemplo 2:

Suponha que a vida útil dos pneus de uma determinada marca se distribua normalmente com média μ= 100 meses e desvio padrão σ= 20 meses. Nesse caso, 68,26% dos pneus terão vida útil estimada entre 80 e 120 meses. Apenas 15,87 % deles terão vida útil maior que 120 meses. Por simetria, apenas 15,87% deles terão vida útil inferior a 80 meses.

Exemplo 3:

Suponha que a estatura média de uma população é de 1,70m com desvio padrão de 0,10m, pode-se afirmar que aproximadamente 95,44% das pessoas terão estatura entre 1,50m e 1,90m (1,50 +/- 2 desvios-padrão).

A distribuição da estatura da população do exemplo acima poderia ser plotada no software R utilizando-se os comandos: x<-seq(80,250,len=170); fx<-dnorm(x, 170,10) e plot(x,fx,type="l"). Se quisermos conhecer a probabilidade de encontrarmos na população uma pessoa com estatura menor que 1,50m digitamos: pnorm(150, mean = 170, sd = 10). A resposta é 0.02275013 ou 2,27% (Figura 58).

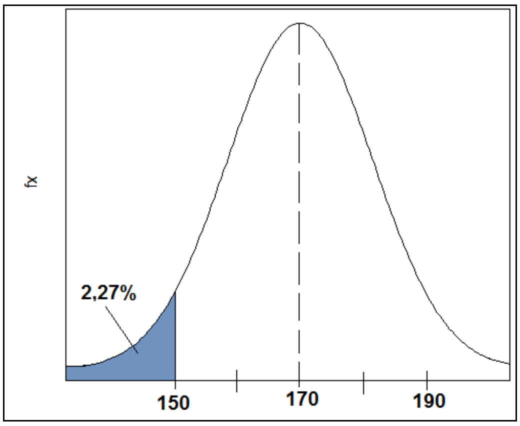


Figura 58– Distribuição normal para estaturas de uma população.

Uma característica importante das curvas normais é que elas são mais ou menos achatadas em relação à média dependendo do desvio padrão. Quanto maior o desvio padrão, mais dispersos os resultados e isso tem influência no formato da curva normal conforme ilustrado na Figura 59. A curva B tem desvio padrão menor que a curva C, mas ambas têm a mesma média.

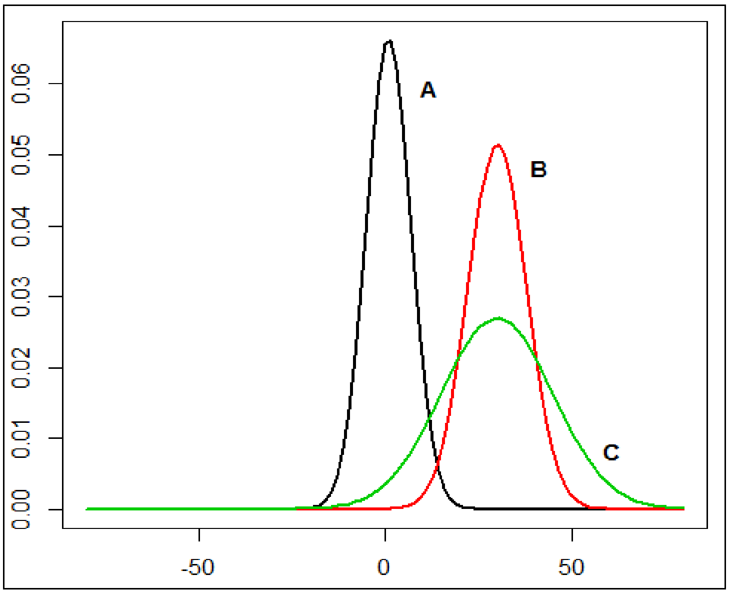


Figura 59– Características de diversas curvas normais.

Essas 3 curvas normais foram construídas no R a partir dos comandos:

```
curve(dnorm(x,mean=1,sd=sqrt(36)),lwd=2,from=-80,to=80)
curve(dnorm(x,mean=30,sd=sqrt(60)),col=2,lwd=2,add=T)
curve(dnorm(x,mean=30,sd=sqrt(220)),col=3,lwd=2,add=T)
```

Exemplo 4:

Um determinado índice analisado no exame de sangue de uma população é distribuído normalmente com média 200 e desvio padrão 50. Qual é a probabilidade de encontrar na população uma pessoa com índice entre 120 e 230?

Calcula-se:

$Z_1 = \dfrac{X_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{120-200}{50} = \dfrac{-80}{50} = -1{,}60$ logo, A área correspondente a Z_1=-1,60 é 0,0548

a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{230 - 200}{50} = \frac{30}{50} = 0{,}60$$ logo, A área correspondente a $Z_2 = 1$ é 0,7257

a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

Graficamente podemos visualizar a área de interesse, que representa a probabilidade do evento de interesse ocorrer. O valor de 0,6709 é resultado da área 0,7257 menos a área 0,0548, obtidas da Tabela Normal Padrão. Observamos que quando a segunda área (centro) é subtraída da primeira (esquerda) a resultante é o intervalo mostrado no gráfico da direita (Figura 60).

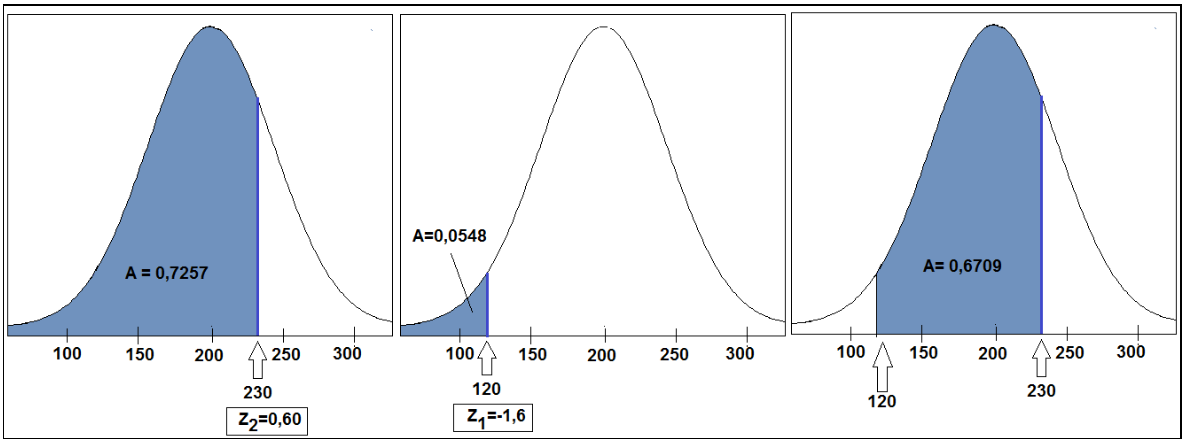


Figura 60 – Representação da probabilidade de ocorrência de evento.

Quando o número de observações ou tentativas for relativamente grande, a distribuição de probabilidade normal pode ser utilizada para aproximações das probabilidades binomiais, conforme ilustrado na Figura 61.

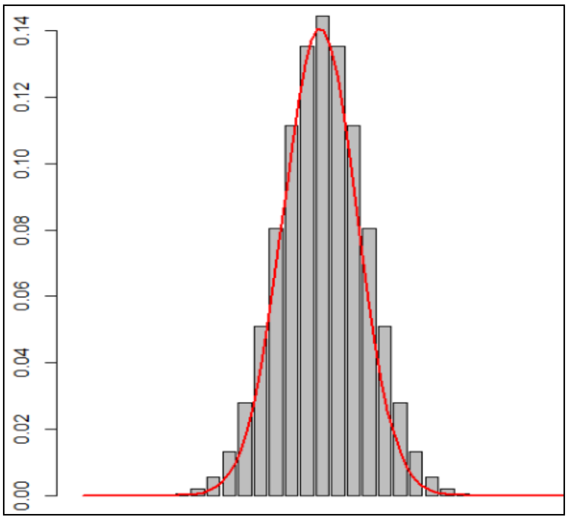


Figura 61- Aproximação da distribuição binomial pela curva normal.

Como é possível observar, quando o número de lançamentos cresce, a curva de distribuição de frequências se aproxima da curva normal, possibilitando que ela seja utilizada nos cálculos como forma de simplificação. Nesse caso utiliza-se a média e o desvio padrão da distribuição binomial para cálculo dos parâmetros já conhecidos da distribuição normal padronizada. A média da distribuição normal é n.p e a variância é n.p.q.

Como exemplo, vamos supor que sejam lançadas 12 moedas simultaneamente. Qual seria a probabilidade de sair mais que 4 caras. Nesse caso, poderia se calcular p(X=5) + p(X=6)+..p(X=12) ou ainda calcular 1 – [p(X=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)]. Um modo mais fácil é fazer a aproximação com a curva normal.

Na Figura 62, adota-se o valor de X como sendo 4,5 (correção de 0,5). A distribuição binomial tem média igual a n.p = 12.0,5=6 e variância = n.p.q = 12.0,5.0,5 =3. Logo o desvio padrão é aproximadamente 1,73.

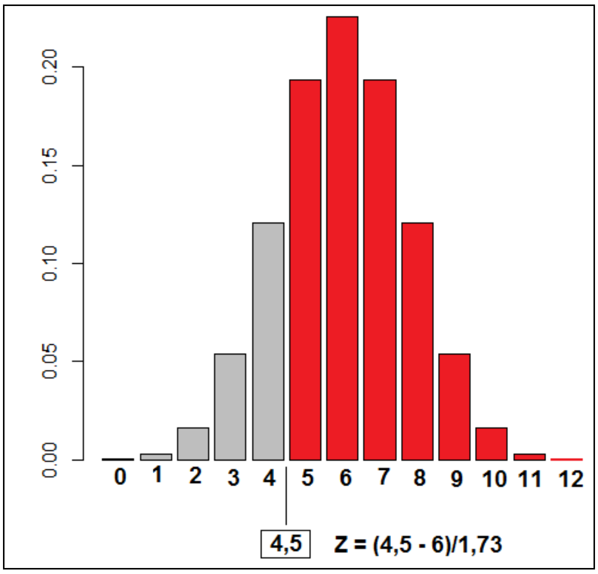


Figura 62- Aproximação da distribuição binomial pela curva normal.

Com esses valores é possível calcular um valor de Z correspondente e utilizar a curva normal para encontrar a probabilidade desejada. Com Z = -0,86 tem-se na Tabela Normal Padrão uma probabilidade de 0,194.

$$Z_2 = \frac{4{,}5 - 6}{1{,}73} = -0{,}86$$

Esse valor é a área da curva normal padrão acumulada de - ∞ até 1,73. Mas nosso interesse é exatamente a área do lado direito desse valor. Logo a distribuição para P(X>4 CARAS) é calculada como sendo 1 – 0,194 ~ 0,80 ou aproximadamente 80%.

a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121

e) Distribuição de probabilidades exponencial

A distribuição exponencial é muito utilizada para descrever fenômenos como tempo de queima de componentes eletrônicos. Também é um bom modelo matemático para se explicar o motivo da probabilidade de uma pessoa frequentar um parque reduz conforme aumenta a distância dele até sua residência.

Como exemplo prático, vamos supor que um pesquisador tenha coletado as distâncias percorridas todos os dias pelos estudantes para chegarem a uma escola e obtido uma média de 7km. Ao construir o histograma da frequência – Figura 63 - de distribuição das distâncias ele percebeu que uma função de distribuição exponencial seria um modelo matemático adequado para esse caso.

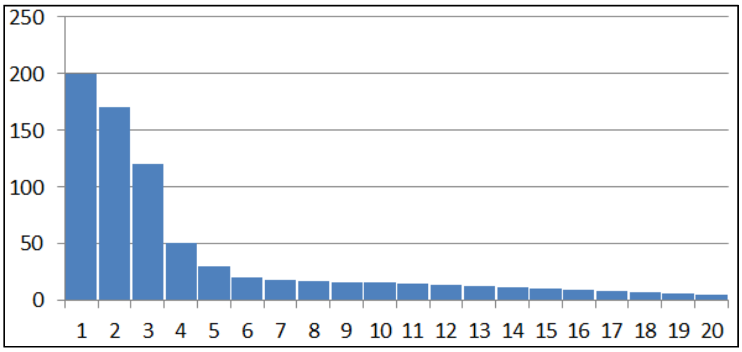


Figura 63 – Histograma de frequência das distâncias percorridas pelos estudantes.

Sabendo-se que a probabilidade de um aluno frequentar a escola cai com a distância e obedece a equação abaixo, calcule qual é a probabilidade de um estudante que resida a mais de 15km frequentar a escola em estudo.

$$P(X > Xo) = e^{-\lambda.x}$$

Onde λ=1/distância média. No exemplo λ= 0,1428

A partir da equação é possível afirmar que a probabilidade de um estudante que reside a mais de 15km frequentar a escola do exemplo é de apenas 11%.

$$P(X > 15) = 2{,}71828^{-0{,}1428*15} = 0{,}11$$

Se no exemplo o objetivo fosse calcular a probabilidade de um estudante que reside a mais de 5 km frequentar a escola, teríamos então como resultado 48%. Isso acontece porque a probabilidade é equivalente à área sobre a curva da função exponencial, conforme mostrado na Figura 64.

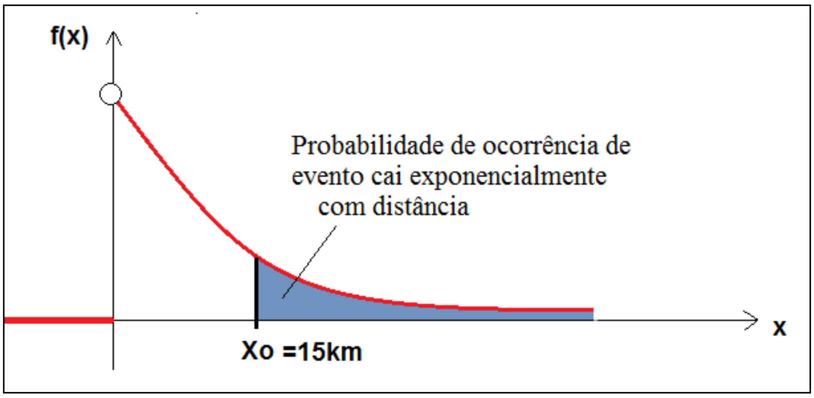


Figura 64 – Curva de distribuição de probabilidade exponencial.

Esse tipo de informação é importante para se planejar a localização mais adequada para escolas, hospitais, postos de saúde, supermercados etc.

Como outro exemplo, suponha que um componente eletrônico tenha vida útil média estimada em 1200 horas. Nesse caso, qual seria a probabilidade dele queimar antes de 1000 horas?

Esse é um caso típico de distribuição de probabilidades exponencial, onde λ=1/1200.

$$P(X > 1000) = 2{,}71828^{-0{,}00083 * 1000} = 2{,}71828^{-0{,}8333} = 0{,}43$$

Logo, a probabilidade do componente queimar antes de 1000 horas é calculada por 1 – 0,43 = 0,57 ou aproximadamente 57%. Esse cálculo é necessário porque desejamos calcular a probabilidade (área) de ocorrer o evento da esquerda e não a da direita.

Essa distribuição de probabilidades pode ser modelada pelo software R. Como exemplo vamos supor um que um equipamento tenha vida média de 2500 horas. Digite os comandos a seguir no R e obtenha a distribuição correspondente na Figura 65.

```
x=rexp(100,1/2500)
hist(x,probability=TRUE,
col="lightgreen",main="Exponencial com média=2500",ylab="Densidade")
curve(dexp(x,1/2500),add=T)
```

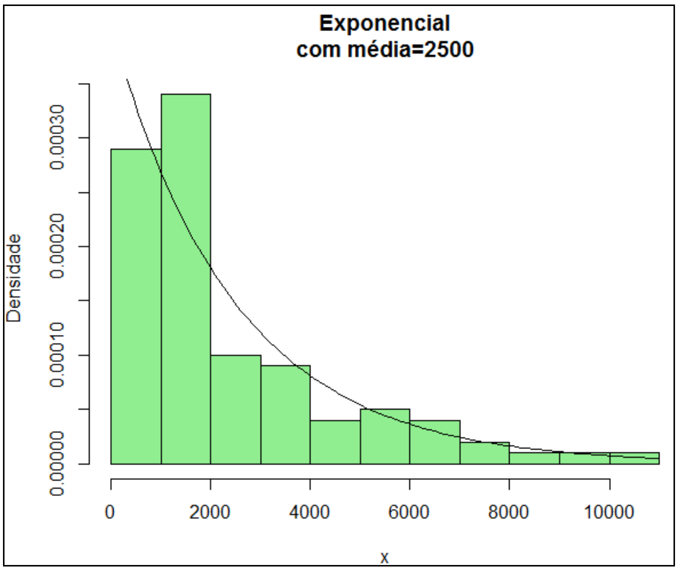


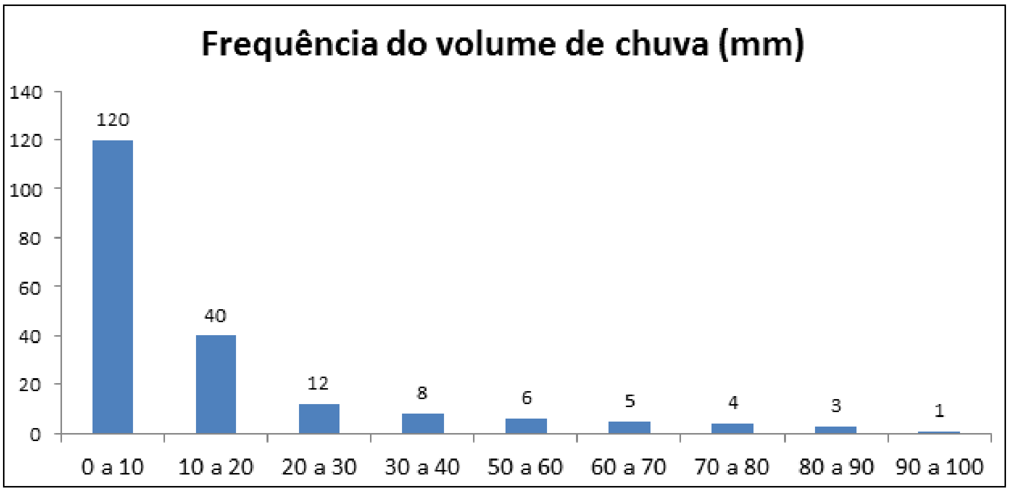
Figura 65- Ilustração de uma distribuição de probabilidades exponencial.

Essa distribuição pode ser relacionada com o modelo proposto por Von Thünen (1783 - 1850) na obra “O Estado Isolado”, onde a dimensão espacial foi aplicada para a solução de problemas de natureza econômica. Von Thünen[17] propôs um modelo no qual as atividades agrícolas dispersas ao redor de um centro urbano, são agrupadas formando cinturões ou anéis, que têm sua localização determinada, principalmente, pela distância da cidade central. As atividades agrícolas que ocupam áreas próximas ao centro urbano possuem altos custos de transporte ou um alto valor de retorno por unidade de área. Já as atividades localizadas em áreas distantes possuem um custo baixo de transporte ou necessitam de uma maior extensão de terra para produzir.

[17] http://www.feweb.vu.nl/gis/ModellingLand-UseChange/ExerciseVonThunen.pdf

LISTA DE EXERCÍCIOS 6

1- Um pesquisador anotou a frequência e a quantidade de chuva diária em milímetros em determinada localidade. Para essa situação, que tipo de modelo de distribuição de probabilidades poderia ser utilizado? Como seria possível estimar a quantidade de chuva média?



2- Suponha que a temperatura para o mês de janeiro de uma determinada cidade possa ser modelada por uma distribuição Gaussiana caracterizada por μ=22,2ºC e desvio padrão σ= 4,4ºC. Nesse caso, qual seria a probabilidade de que em um determinado mês de janeiro a temperatura seja menor que 21,4ºC?

3- A probabilidade anual de inundações em uma comunidade é de 0,20. Qual a probabilidade de acontecerem 3 inundações nos próximos 10 anos?

4- Considere que em um cruzamento ocorre um assalto a cada dez dias. Qual é a probabilidade de ocorrência de três assaltos durante o período de 30 dias?

5- Construa uma curva normal com a ajuda do Software Estatístico R para o tempo demandado pelos ônibus para percorrer um determinado trecho. O tempo foi modelado por uma gaussiana de média de 12 minutos e desvio padrão de 3 minutos. Qual a probabilidade de um ônibus demorar mais de 15 minutos? Qual a probabilidade de um ônibus demorar entre 5 e 10 minutos?

RECOMENDAÇÃO:

https://www.youtube.com/watch?v=j3Zbup0KMxY

Distribuição de Probabilidades UNIVESP TV

7- Técnicas de Amostragem

É comum se dizer que não precisa provar um bolo inteiro para se conhecer seu sabor. Basta provar uma amostra. Essa é a ideia por trás das amostras aleatórias utilizadas em análises estatísticas. Uma amostra é uma parte representativa da população, isto é, a amostra deve possuir as mesmas características básicas da população. Se um pesquisador desejar saber qual é a estatura média dos alunos de uma determinada escola de Ensino Médio, basta escolher uma amostra aleatória e representativa desses alunos. Segundo Barbeta (2011), para se calcular o tamanho mínimo de componentes de uma amostra pode ser utilizada a equação:

$$n = \frac{N * n_o}{N + n_o}$$

Onde “N” é tamanho da população; “n” o tamanho da amostra e “no” é uma primeira aproximação para o tamanho da amostra calculado por 1/Erro amostral ao quadrado.

Exemplo: Em uma empresa com 10.000 funcionários, desejamos estimar o percentual de pessoas que são favoráveis a um determinado treinamento. Qual deve ser o tamanho da amostra para que o erro da pesquisa seja menor que 4%?

$$no = \frac{1}{0{,}04^2} = 625 \quad \text{logo, calculamos} \quad n = \frac{10000 * 625}{10000 + 625} = 599$$

Quando o número total da população é desconhecido pode-se calcular o tamanho mínimo da amostra para ser representativa a partir da seguinte equação simplificada:

$$n = \frac{1{,}96^2 . 0{,}5^2}{Erro^2}$$

Como exemplo, suponha que seja necessário calcular a quantidade de eleitores que devem ser consultados em uma pesquisa. Considerando uma margem de erro de 5% temos: 384 pessoas. Para uma margem de erro de 2% tem-se necessidade de se consultar 2401 eleitores. Por isso, nas pesquisas eleitorais para presidente são entrevistadas, em geral, 2500 eleitores para se obter resultados com margem de erro de 2% e Nível de Confiança de 95%.

As amostras podem ser dos seguintes tipos: aleatória simples (sistemática, estratificada, estratificada proporcional, agrupamento) e não aleatórias.

a) Amostragem Casual ou Aleatória Simples – é equivalente a um sorteio aleatório. Nesse tipo de amostragem é necessário que os elementos da população sejam numerados e sorteados a partir de um programa ou de uma tabela de números aleatórios.

b) Amostragem Sistemática – em uma linha de produção podemos, a cada dez itens produzidos, retirar um para pertencer a uma amostra da produção diária. Neste caso, estaríamos fixando o tamanho da amostra em 10% da população. Como exemplo, suponha que uma fábrica possui em estoque 450 computadores ordenados. O setor de controle de qualidade da fábrica deseja obter uma amostra formada por 25 unidades. Pode-se, neste caso, usar o seguinte procedimento: como 450/25 = 18, escolhe-se por sorteio casual um número de 1 a 18 (inclusive), o qual indica o primeiro elemento sorteado para a amostra; os demais serão periodicamente considerados de 18 em 18. Assim, se o número sorteado for o 4, toma-se, o 40 computador, o 220, o 400 etc., até completar a amostra. A amostragem sistemática necessita que os elementos da população a ser estudada já se encontrem ordenados. São exemplos prédios de uma rua, produtos dentro de uma linha de produção, prontuários médicos, os alunos inscritos em uma faculdade, etc. Para a seleção dos elementos que farão parte da amostra, será elaborado um sistema pelo pesquisador. Exemplo: Em uma rua há 900 casas. Desejamos escolher uma amostra de 50 delas para entrevistar os moradores. Divide-se 900 por 50 e obtém-se 18. Sorteamos a primeira casa e depois contamos 18 casas para obtermos a próxima até que todas as 50 sejam selecionadas. A escolha da primeira casa pode ser realizada a partir de uma tabela de números aleatórios.

c) Amostragem por Agrupamento – Quando a população apresenta ocorrência natural de subgrupos, cada um deles com características similares. Dividida a população em grupos, chamados de agrupamentos e selecione todos os membros de um ou mais agrupamentos (mas não todos). Exemplo – População de domicílios de uma cidade, os quarteirões formam os agrupamentos de domicílios.

d) Amostragem Estratificada Proporcional – na maioria das vezes a população se divide em estratos. Exemplo: uma turma de engenharia tem 66 alunos, onde 57 são meninos e 9 são meninas. Tem-se dois estratos nesta população (sexo masculino e feminino), logo para uma amostra de 10% da população tem-se 1 menina e 6 meninos. Para determinação da intenção de votos dos eleitores brasileiros é comum os institutos de pesquisas utilizarem a amostragem estratificada com sorteio aleatório dos entrevistados. Para chegar a eles, o conjunto da população adulta do país é dividida em cinco sub-universos, que representam as regiões Sul, Sudeste, Nordeste, Norte e Centro-Oeste. Em cada sub-universo os municípios são agrupados segundo a localização geográfica e nível socioeconômico. Em cada grupo são sorteados os municípios. Por sorteios sucessivos, chega-se ao bairro, à rua e ao indivíduo.

A pesquisa por amostragem para avaliar as intenções de voto para presidente foi utilizada pela primeira vez em 1932. A revista *Literary Digest* fez uma pesquisa sobre as intenções de voto dos seus leitores. Das 20 milhões de cédulas enviadas junto com a revista, 3 milhões foram devolvidas para a redação, apontando como virtual vencedor o candidato Franklin Roosevelt. Na eleição seguinte os resultados dessa pesquisa falharam enquanto o prof. George Gallup previu o resultado correto da eleição utilizando uma amostra de apenas 3 mil eleitores. Daí a preocupação com os estratos que compõem a população. Apesar de a amostra ter sido pequena, foi mais adequada que a amostra de 10 milhões de leitores da revista.

Para conhecer os estratos que existem na população brasileira os Institutos de pesquisa utilizam dados disponíveis no Tribunal Regional Eleitoral e no IBGE.

Na Tabela 5 tem-se a distribuição dos eleitores de acordo com o nível de instrução. Do total de 143,7 milhões de eleitores em maio de 2016, apenas 8,2 milhões possuem Ensino Superior completo. Um contingente de 67 milhões de eleitores não tem o Ensino Fundamental completo.

Tabela 5- Distribuição de eleitores brasileiros de acordo com a escolaridade.

Grau de Instrução	Masculino(M)	%M/T	Feminino(F)	%F/T	Não Informado(N)	%N/T	Total(T)	%T/TT
ANALFABETO	3.460.724	47,168	3.867.797	52,716	8.468	0,115	7.336.989	5,104
ENSINO FUNDAMENTAL COMPLETO	5.095.771	49,338	5.226.204	50,601	6.347	0,061	10.328.322	7,185
ENSINO FUNDAMENTAL INCOMPLETO	21.978.092	50,953	21.138.672	49,007	17.564	0,041	43.134.328	30,008
ENSINO MÉDIO COMPLETO	10.357.869	42,411	14.058.660	57,565	5.915	0,024	24.422.444	16,990
ENSINO MÉDIO INCOMPLETO	13.401.454	48,247	14.372.159	51,742	2.930	0,011	27.776.543	19,324
LÊ E ESCREVE	8.619.481	50,472	8.393.460	49,148	64.859	0,380	17.077.800	11,881
NÃO INFORMADO	51.727	45,910	57.271	50,831	3.672	3,259	112.670	0,078
SUPERIOR COMPLETO	3.321.153	40,469	4.883.908	59,511	1.688	0,021	8.206.749	5,709
SUPERIOR INCOMPLETO	2.403.401	44,937	2.944.088	55,046	949	0,018	5.348.438	3,721
TOTAL(TT)	68.689.672	47,786	74.942.219	52,136	112.392	0,078	143.744.283	100,000

Quanto à faixa etária temos que 24 milhões de eleitores têm mais de 60 anos de idade. Esses dados podem ser representados por meio de um histograma, conforme já vimos anteriormente.

Tabela 6- Distribuição dos eleitores brasileiros de acordo com a faixa etária.

Faixa Etária	Masculino(M)	%M/T	Feminino(F)	%F/T	Não Informado(N)	%N/T	Total(T)	%/TT
Inválida	65.776	50,660	64.069	49,340	1	0,000	129.846	0,090
16 anos	449.223	49,900	450.975	50,100	0	0,000	900.198	0,620
17 anos	762.066	50,050	760.692	49,950	0	0,000	1.522.758	1,050
18 a 20 anos	4.214.246	49,170	4.355.966	50,830	0	0,000	8.570.212	5,910
21 a 24 anos	6.201.930	49,230	6.396.680	50,770	0	0,000	12.598.610	8,680
25 a 34 anos	15.676.600	48,440	16.684.165	51,560	0	0,000	32.360.765	22,300
35 a 44 anos	13.886.062	47,870	15.119.668	52,120	1.076	0,000	29.006.806	19,990
45 a 59 anos	16.316.862	47,240	18.182.095	52,640	39.636	0,110	34.538.593	23,810
60 a 69 anos	6.608.198	46,180	7.676.655	53,650	24.703	0,170	14.309.556	9,860
70 a 79 anos	3.219.048	44,620	3.979.114	55,150	16.554	0,230	7.214.716	4,970
Superior a 79 anos	1.727.349	43,870	2.194.940	55,750	14.756	0,370	3.937.045	2,710
TOTAL(TT)	69.127.360	47,640	75.865.019	52,290	96.726	0,070	145.089.105	100,000

A maior parte dos eleitores brasileiros vive na região Sudeste, que reúne 85 milhões dos habitantes do país. A região Sul tem população de 29 milhões. A região Nordeste 56 milhões, a Norte 17 milhões e a Centro-Oeste 15 milhões. Por esse motivo, a proporção de brasileiros entrevistados em cada região deve ser proporcional ao todo.

Os dados estatísticos mostram que a maior parte do eleitorado brasileiro é formada por mulheres (52 % do total). Um total aproximado de 300 mil eleitores votam no exterior.

Exemplo 1:

Em uma localidade com 150 mil habitantes (Figura 66), 45 mil têm menos de 20 anos de idade, 75 mil têm idades entre 30 e 50 anos e 30 mil têm mais de 50 anos de idade. Uma amostra de 30 habitantes desta população deve ser estabelecida com que proporções de idades?

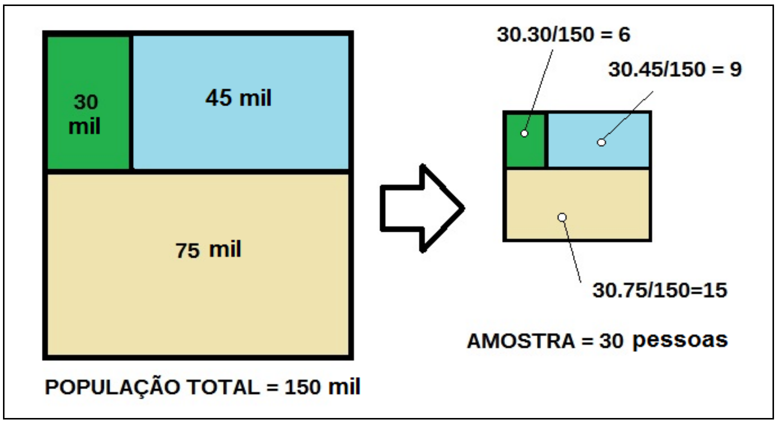


Figura 66- Ilustração dos estratos de faixa etária (em milhares).

Logo as amostras são calculadas como: Amostra A = 30. 30/150 = 6 com mais de 50 anos de idade; Amostra B = 30. 45/150 = 9 com menos de 20 anos de idade e Amostra C = 30. 75/150 = 15 entre 30 e 50 anos de idade.

Exemplo 2:

Uma das classificações úteis para questões de Marketing é em classes sociais. Analisando os diferentes critérios propostos para classificação empregados atualmente no Brasil, podemos generalizar as seguintes categorias[18]: Classe A: inclui as famílias com renda mensal igual ou maior que R$ 14.400,00. Classe B: inclui as famílias com renda mensal entre R$ 7.100,00 e R$ 14.399,00. Classe C: inclui as famílias com renda mensal entre R$ 2.600,00 e R$ 7.099,00. Classe D: inclui as famílias com renda mensal igual ou menor que R$ 2.599,00. Suponha que uma determinada população em estudo distribui-se nesses estratos, de acordo com as quantidades a seguir: Classe A: 60, Classe B: 90, Classe C: 120, Classe D: 480. Se nossa amostra é de 100 unidades adotamos o seguinte procedimento: a) soma dos estratos da população: 60 + 90 + 120 + 480 = 750 indivíduos. Como nossa amostra terá 100 indivíduos, 100/750 = 0,13. O fator 0,13 será multiplicado pelas quantidades de elementos de cada classe. Classe A: 60 x 0,13 = 8 unidades amostrais; Classe B: 90 x 0,13 = 12 unidades amostrais; Classe C: 120 x 0,13 = 16 unidades amostrais; Classe D: 480 x 0,13 = 64 unidades amostrais.

LISTA DE EXERCÍCIOS 7

1- Considerando-se que a população brasileira pode ser estratificada por região, nível de escolaridade e por idade, quais seriam os estratos que você adotaria para uma pesquisa para presidente se a amostra para a pesquisa fosse de 2.400 pessoas?

2- Em uma empresa com 10.000 funcionários, desejamos estimar o percentual de pessoas que são favoráveis a um determinado treinamento. Qual deve ser o tamanho da amostra para que o erro da pesquisa seja menor que 4%?

3- Quantas pessoas devem ser entrevistadas para conhecermos a opinião dos 2.000 alunos de uma escola sobre a qualidade dos serviços da lanchonete?

[18] Valores sujeitos à alteração anual.

6- Inferência Estatística

Uma das definições mais importantes na área de estatística é o Teorema Central do Limite[19]. Ele permite que se faça inferência a uma população a partir de amostras selecionadas aleatoriamente. Pelo Teorema, não importa qual é o formato da distribuição original de X, a distribuição de sua média se aproxima da distribuição normal a medida que o número de elementos da amostras cresce. Se $\overline{X}$ é a média de uma amostra aleatória de tamanho n, obtida de uma população com média μ e desvio padrão σ então:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

É uma Variável Aleatória cuja distribuição mais se aproxima da distribuição normal padronizada à medida que “n” tende ao infinito.

Dada uma população com desvio padrão “σ”, a forma geral do INTERVALO DE CONFIANÇA para o valor médio da população “μ” (com nível de confiança estipulado) será:

$$\left[\overline{X} - \left(Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] < \mu < \left[\overline{X} + \left(Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

O valor de Z depende do nível de confiança (NC) desejado. Para NC = 95% tem-se Z = 1,96 e para NC = 90% tem-se Z = 1,64.

Na Figura 67 é possível visualizar que 95% das ocorrências estão localizadas dentro do intervalo de confiança. Observe que o nível de confiança NC = 1- α (alfa). ALFA é o nível de significância. O valor de 1,96 é obtido na Tabela Normal Padronizada para área acumulada do lado esquerdo da curva normal igual a 0,975. Do lado direito tem-se uma área residual de 0,025. A soma total é igual a 1. Para encontrar o valor de -1,96 basta procurar na Tabela Normal Padronizada o valor de Z para a área de 0,025 acumulada do lado esquerdo.

[19] http://www.portalaction.com.br/probabilidades/732-teorema-central-do-limite

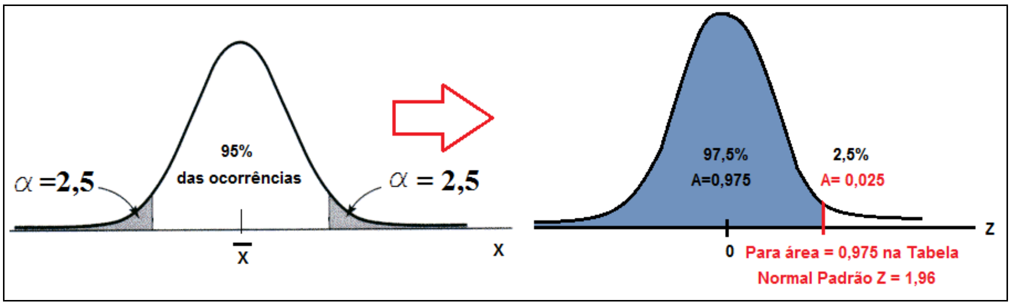


Figura 67- Intervalo de confiança para médias amostrais.

Como exemplo, suponha que uma população tenha estatura média desconhecida, mas desvio padrão conhecido e igual a 20 cm. Uma amostra de 25 pessoas tem suas estaturas medidas. A estatura média da amostra de 25 pessoas é calculada como sendo 170cm. Considerando-se que a estatura pode ser modelada pela distribuição normal e aplicando a expressão apresentada anteriormente tem-se que o intervalo de confiança da estatura média da população é

$$\left[170-\left(1{,}96\frac{20}{\sqrt{25}}\right)\right] < \mu < \left[170+\left(1{,}96\frac{20}{\sqrt{25}}\right)\right]$$

$$170-(7{,}84) < \mu < 170+(7{,}84), \quad \text{ou seja:} \quad 162{,}16 < \mu < 177{,}84$$

Esse intervalo de confiança tem um nível de confiança de 95% Ou seja, a partir de uma amostra de tamanho 25 é possível estimar o valor da média da estatura de toda a população com uma margem de erro de 7,84cm. Para reduzir essa margem de erro é preciso ampliar a amostra. Com uma amostra de tamanho 100, tem-se a margem de erro reduzida para 3,92cm. Isso acontece porque o tamanho da amostra aparece no denominador da expressão para cálculo do Intervalo de Confiança. O nível de confiança de 95% quer dizer que o resultado tem confiabilidade de 95%, ou seja, se 100 amostras fossem selecionadas, em 95 delas o resultado estaria dentro do intervalo de confiança calculado.

Vejam o exemplo: O tempo de deslocamento de todos os estudantes até uma determinada universidade pode ser modelado por uma gaussiana (distribuição normal) com desvio padrão de 8 minutos. Uma amostra de 20 estudantes foi entrevistada. O tempo médio para deslocamento desse grupo foi estimado em 80 minutos. Calcule o intervalo de confiança para a média de tempo de toda população de estudantes da universidade. Use o nível de confiança de 95% (Z = 1,96). Nesse caso basta substituir os dados na equação:

$$\left[\bar{X}-\left(Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right]<\mu<\left[\bar{X}+\left(Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right]\Rightarrow\left[80-\left(1{,}96\frac{8}{\sqrt{20}}\right)\right]<\mu<\left[80+\left(1{,}96\frac{8}{\sqrt{20}}\right)\right]$$

Obtemos que o intervalo de confiança para o tempo médio μ de deslocamento dos estudantes é de 76,5 minutos a 83,5 minutos com NC = 95%.

$$76{,}5<\mu<83{,}5$$

Quando não conhecemos o desvio padrão da população devemos calcular o desvio padrão da amostra e utilizar a Tabela T de Student[20] para obter o valor de "T" no lugar da variável "Z". Para obtenção de "T" tabelado usamos o nível de confiança desejado e o grau de liberdade GL = (n – 1). A distribuição T de Student tende para a curva normal quando o tamanho da amostra cresce conforme ilustrado na Figura 68.

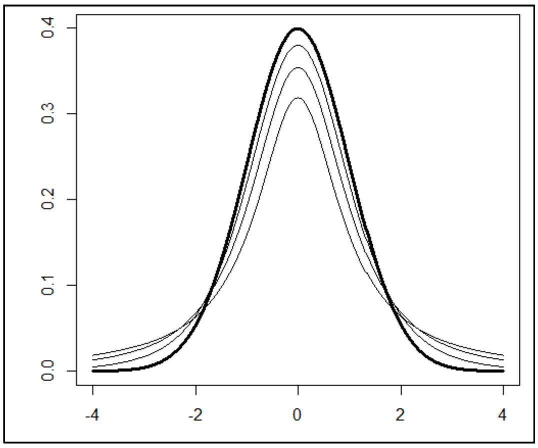


Figura 68- Ilustração da relação entre a distribuição Normal e T de Student.

Vejam o exemplo: Um professor escolheu uma amostra de 12 alunos e perguntou qual era a distância percorrida para chegar até a escola (em quilômetros). Considere que as distâncias percorridas se apresentam distribuídas normalmente. Os valores foram listados abaixo. Calcule o intervalo de confiança para a média da distância percorrida pelos estudantes da turma com nível de confiança de 95%. As distâncias percorridas em km foram: 8,2   8,3   8,4   8,2   8,2 8,4   8,3   8,2   8,4   8,4   8,2   8,4.

Nesse caso, a distância média é calculada como sendo $\bar{X}$ =8,3km. Já o desvio padrão foi calculado como sendo s = 0,095. Para NC = 95% e GL = (n-1) = 11 tem-se T tabelado = 2,201 (T Student).

[20] Student foi um pseudônimo utilizado por Willian Gosset para publicação de seus trabalhos

Logo o intervalo de confiança da média de distâncias percorridas pela população de estudantes da escola é calculado como segue:

$$\left[\overline{X} - \left(T\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right] < \mu < \left[\overline{X} + \left(T\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$\left[8{,}3 - \left(2{,}201\frac{0{,}095}{\sqrt{12}}\right)\right] < \mu < \left[8{,}3 + \left(2{,}201\frac{0{,}095}{\sqrt{12}}\right)\right]$$

O intervalo de confiança para a média das distâncias percorridas é de $8{,}24\,km < \mu < 8{,}36\,km$ com nível de confiança de 95%. Na Tabela T de Student é preciso identificar o G.L = grau de liberdade e o nível de confiança. À medida que o grau de liberdade aumenta o valor de T tende ao mesmo valor de Z (distribuição normal).

Tabela 5 – Distribuição de Probabilidades T de Student – VER TABELA ANEXA.

	Nível de confiança, c	0,50	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
	Unicaudal, α	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
g.l.	Bicaudal, α	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1		1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2		0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3		0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4		0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5		0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6		0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7		0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8		0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9		0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10		0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11		0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12		0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13		0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012

LISTA DE EXERCÍCIOS 6

1- Um pesquisador observou que o tempo médio de deslocamento dos trabalhadores de uma determinada empresa pode ser modelado por uma distribuição normal. Para realização de uma estimativa do tempo médio de deslocamento da população ele selecionou aleatoriamente 10 profissionais para entrevista. Os tempos gastos foram anotados em minutos. Nesse caso, qual seria o intervalo de confiança para o tempo médio de deslocamento da população de trabalhadores? Utilize nível de confiança de 95%.

Tempos anotados em minutos: 16 23 17 19 14 17 18 16 17 18

2- A estatura de uma amostra de estudantes foi anotada. Com nível de confiança de 95%, qual é o intervalo de confiança para a média da estatura de todos os estudantes da escola?

137	154	159	155	167	159	158	159	152	169
154	158	140	149	145	157	160	155	155	143
157	139	159	139	129	162	151	150	134	151

3- Um pesquisador observou que o tempo médio de admissão dos trabalhadores de uma determinada empresa pode ser modelado por uma distribuição normal. Para realização de uma estimativa do tempo médio de admissão de todos os trabalhadores da empresa ele selecionou aleatoriamente 12 profissionais para entrevista. Os tempos foram anotados em anos. Nesse caso, qual seria o intervalo de confiança para o tempo de admissão de todos os trabalhadores da empresa? Utilize nível de confiança de 90%.

Tempos anotados em anos: 16 23 17 19 14 17 18 16 17 18 12 19

4- Uma empresa empacotadora de café precisa garantir que seus pacotes de café estejam dentro dos limites fixados pela inspeção federal. Uma amostra de 9 pacotes foram avaliados. Sabe-se que desvio padrão da máquina é de 12g. As massas são indicadas abaixo:

983 992 1011 976 997 1000 1004 983 998

a) Nesse caso, qual será o intervalo de confiança das massas da máquina para níveis de confiança de 90, 95 e 99%?

b) Qual o tamanho da amostra para que a amplitude do intervalo de confiança seja de 2g com nível de confiança de 95%?

c) Se o desvio padrão da máquina fosse desconhecido, qual seria o Intervalo de confiança considerado?

8- Testes de Hipóteses

Os testes de hipóteses foram criados no início do século XX pelo geneticista e estatístico Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962) e se tornaram a referência quando o objetivo é avaliar, por exemplo, se um determinado procedimento médico alternativo produz realmente resultados melhores.

Como exemplo prático, vamos supor que uma determinada região do país é conhecida por ter uma população obesa. A distribuição de probabilidade do peso dos homens dessa região entre 20 e 30 anos é normal com média de 90 kg e desvio padrão de 10 kg. Um endocrinologista propõe um tratamento para combater a obesidade que consiste de exercícios físicos, dietas e ingestão de um medicamento. Ele afirma que com seu tratamento o peso médio da população da faixa em estudo diminuirá em um período de três meses. Para avaliar se o tratamento deu certo é possível formular duas hipóteses: Ho, chamada de **Hipótese Nula** e que diz que a média dos pesos dos homens em estudo após o tratamento não mudou nada e ficou em 90kg e H1, chamada de **Hipótese Alternativa**, que diz que a média dos pesos é diferente que 90kg. Também é possível a análise da Hipótese Alternativa como menor que 90kg. O objetivo do Teste de Hipóteses é mostrar se a Hipótese Alternativa H1 é aceitável ou não. Mas esse tipo de análise também é suscetível a dois tipos de erros: Erro tipo 1, quando rejeitamos Ho quando de fato Ho é verdadeira e Erro tipo II quando não rejeitamos Ho, quando de fato Ho é falsa (Figura 69).

Decisão tomada	Situação real	
	Ho é verdadeira	Ho é falsa
Não rejeitar Ho	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar Ho	Erro tipo I	Decisão correta

Figura 69- Tipos de erros no Teste de Hipóteses.

Isso ocorre porque toda análise envolve um nível de confiança e uma região crítica onde os resultados não podem ser avaliados com precisão. A Hipótese nula não pode ser rejeitada se o valor do Z ou T calculado estiver fora da região crítica. Na Figura 67 tem-se a zona de aceitação de Ho para testes bilaterais e testes unilaterais.

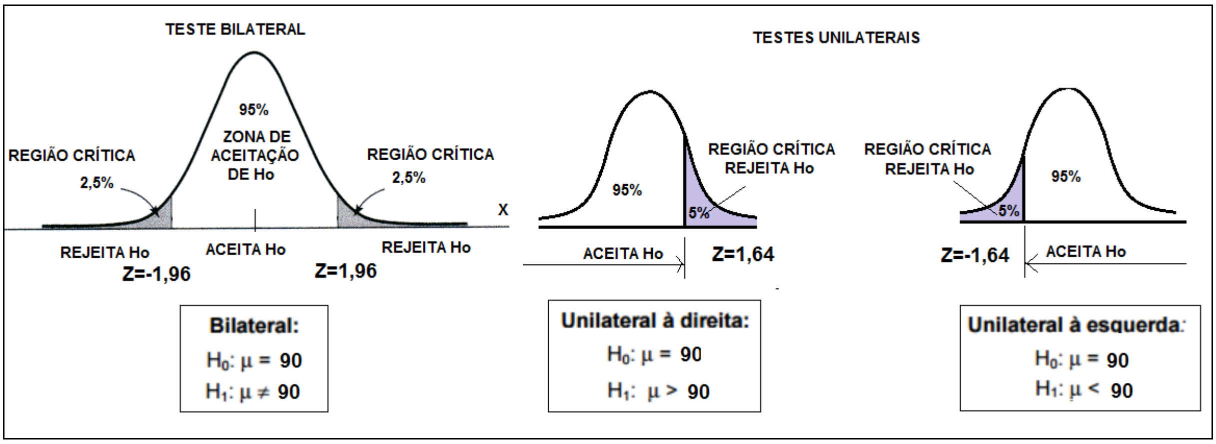


Figura 70 – Tipos de testes de Hipóteses.

Devemos calcular o Z de teste (ou Z calculado) ou T de teste (quando o desvio padrão não é conhecido) e comparar esse valor com os resultados obtidos a partir da Tabela Z ou T de Student para determinado nível de confiança (Figura 71).

Quando H1 for:	Rejeitar Ho se:
$\mu < \mu_0$	$Z_{calc} < -Z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z_{calc} > Z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z_{calc} < -Z_{\alpha/2}$ $Z_{calc} > Z_{\alpha/2}$

Desvio padrão conhecido

$$Z_{calc} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Desvio padrão desconhecido

$$T_{calc} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$$

Figura 71– Procedimento para realização de Testes de Hipóteses

Se nível de confiança for de 95% e o teste for bilateral, então Z tabelado é de 1,96. Se o nível de confiança for de 90% e o teste for bilateral, então Z tabelado para comparar com Z calculado será de 1,64. O cálculo da estatística de teste T de Student é utilizado quando não se conhece o desvio padrão de uma determinada população.

Exemplo 1:

Uma pesquisa divulgou que o volume de chuvas em uma região para o mês de junho é de 330mm com um desvio padrão típico de 10mm. Uma amostra com 35 dias da série histórica foi analisada. O valor médio do volume de chuvas foi de 333mm. Com estes dados é possível afirmar que a média do volume de chuvas para o período é mesmo 330mm? Use o nível de significância de α=0,05 (que é correspondente ao Nível de Confiança a 95%).

Solução: Considere Ho (Hipótese Nula) como sendo μ = 330mm e H1 (Hipótese Alternativa) como sendo μ ≠ 330mm. Como temos o desvio padrão σ= 10mm usamos a estatística de teste Z. Nesse caso é um teste bilateral e deve-se rejeitar a Hipótese nula se Z calculado for maior ou menor que Z tabelado para nível de confiança de 95% para as duas extremidades da curva normal (Figura 72). Nesse caso tem-se Z = -1,96 e Z = 1,96.

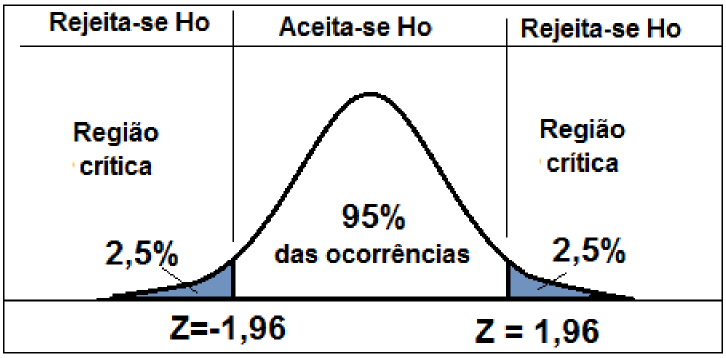


Figura 72 – Ilustração das regiões críticas em testes bilaterais.

Logo, a Hipótese nula será rejeitada se o valor de Z, calculado a partir da média das 35 medições, obedecer uma das seguintes condições: Z < -1,96 ou Z > 1,96 que são consideradas regiões críticas para o teste bilateral.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{333 - 330}{\frac{10}{\sqrt{35}}} = 1{,}77$$

Como o valor de Z calculado não está na região crítica de rejeição de Ho, não é possível rejeitar a Hipótese Nula com nível de confiança de 95%. A média do volume de chuvas pode ser sim de 333mm. Há 5% de chance de que essa decisão seja errada.

O Teste de Hipóteses também pode ser realizado quando se tem 2 amostras de duas populações diferentes. Nesse caso é necessário avaliar os parâmetros X1 (média da amostra 1), s1 (desvio padrão da amostra 1) e X2 (média da amostra 2) e s2 (desvio padrão da média 2)

A Hipótese Nula é a diferença das duas médias populacionais. A estatística de teste para avaliação da rejeição ou não da Hipótese Nula é calculada conforme as equações demonstradas na Figura 73. Mais uma vez usa-se a estatística de teste T quando não se conhece o desvio padrão da população, mas apenas da amostra.

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta$

Hipóteses alternativas	Se σ for conhecido, rejeite H_0 se	Se σ não for conhecido, rejeite H_0 se
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z < -z_\alpha$	$T < -t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$Z > z_\alpha$	$T > t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$Z < -z_{\alpha/2}$ ou $Z > z_{\alpha/2}$	$T < -t_{\alpha/2}$ ou $T > t_{\alpha/2}$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2_{X_1}}{n_1} + \dfrac{\sigma^2_{X_2}}{n_2}}} \qquad T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}} . \sqrt{\frac{n_1.n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

$$\nu = n_1 + n_2 - 2$$

Figura 73- Equações para Testes de Hipóteses de duas médias

(Fonte: Albertazzi, 2012)

Quando não se tem o desvio padrão da população então deve-se calcular os desvios-padrão das amostras e usar a estatística de teste T de Student.

Exemplo 2:

Os moradores de duas cidades vizinhas conhecidas pelas suas baixas temperaturas disputam o título de cidade mais fria no inverno. A cidade A diz que sua temperatura média é de 2 graus Celsius inferior que a da cidade B. Uma amostra de 15 temperaturas de cada cidade são tomadas em uma determinada semana. As temperaturas obtidas foram de 13,34 graus com desvio padrão de 0,297 e 15,22 graus e 0,208. Com nível de confiança de 95% o que é possível afirmar?

Considerando-se a Hipótese Nula formulada como sendo Ho: µA - µA = 2ºC e a Hipótese Alternativa como sendo µA- µB < 2ºC. Nesse caso a Hipótese Nula será rejeitada se o valor da Estatística de Teste T calculada for menor que -1,701 (obtida da Tabela T de Student para nível de confiança de 95% e 28 graus de liberdade). Observe que 28 = (15+15-2).

$$T = \frac{15{,}22 - 13{,}34 - 2{,}00}{\sqrt{(15-1).0{,}208^2 + (15-1).0{,}297^2}} . \sqrt{\frac{15.15.(15+15-2)}{15+15}} = -1{,}28$$

Como o valor de T calculado é maior que T tabelado não é possível rejeitar a hipótese nula Ho. Pode se afirmar com 95% de nível de confiança que a temperatura média de inverno da cidade A é menor que a temperatura média de inverno da cidade B em 2 graus Celsius.

Exemplo 3:

Um estudante fez um ensaio para determinar a influência da corrente de alimentação na qualidade da imagem. Para tal, realizou seis ensaios com a corrente de 1A (ampere) e seis outros ensaios com a corrente de 2A. Para cada ensaio, calculou um coeficiente de qualidade, encontrando os resultados da tabela abaixo. Quanto maior o valor do coeficiente, melhor é qualidade da imagem. Com 95% de probabilidade é possível afirmar que a corrente de alimentação do laser diodo tem influência na qualidade da imagem?

Corrente	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 4	Ensaio 5	Ensaio 6
1A	208,6	209,0	208,1	208,3	209,2	208,3
2A	202,1	197,9	200,4	200,7	203,0	203,1

Solução: É necessário se calcular a média de coeficientes obtidos com a corrente de 1A e a média dos coeficientes obtidos com corrente de 2A. Com esses valores é necessário se formular a hipótese nula. Nesse caso adota-se que $\mu1 - \mu2=0$. A Hipótese alternativa é que a diferença $\mu1 - \mu2 > 0$. Nesse caso, a Hipótese Nula só poderá ser rejeitada se a Estatística de Teste T calculada for superior ao valor de T tabelado para nível de confiança de 95% e grau de liberdade = 10 (6 ensaios + 6 ensaios – 2).

Nesse caso T calculado é de 9,39 que é superior ao T tabelado (1,812), o que permite afirmar com nível de confiança de 95% que a corrente elétrica interfere na qualidade da imagem.

Outro tipo de Teste de Hipóteses muito importante é o do “Qui-quadrado” ou “ξ^2”. O procedimento utilizado anteriormente é muito parecido. Primeiro calcula-se um determinado ξ^2 de Teste Estatístico e compara-se com um valor de ξ^2 crítico obtido da tabela da Distribuição Qui-Quadrado. Faz-se a comparação para rejeitar ou aceitar a Hipótese nula.

Exemplo 4:

Vamos supor que uma indústria produza refrigerantes do tipo A, tipo B e do tipo C. O objetivo do departamento de marketing é avaliar se a venda destes produtos está relacionada ao gênero do consumidor. Foram selecionados aleatoriamente 150 consumidores para responder um questionário sobre a preferência pelos refrigerantes do tipo A, B ou C. Os resultados das frequências observadas são tabelados a seguir:

Gênero	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Total
Mulheres	20	40	20	80
Homens	30	30	10	70
Total	50	70	30	150

Considere Ho = hipótese nula o caso em que a preferência não tenha relação com o gênero do consumidor e H1 = hipótese alternativa o caso em que a preferência dependa do gênero. Calcule as frequências esperadas para cada uma das células da tabela acima.

$$Freq\,esperada = \frac{soma\,da\,linha \times soma\,da\,coluna}{soma\,geral} = \frac{80 \times 50}{150} = 26{,}67$$

Gênero	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Total
Mulheres	26,67	37,33	16	80
Homens	23,33	32,67	14	70
Total	50	70	30	150

O cálculo de X^2 é realizado pela equação:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(freq\,observada - freq\,esperada)^2}{freq\,esperada} \right) = \left[\left(\frac{(20 - 26{,}67)^2}{26{,}67} \right) + \ldots \left(\frac{(10-14)^2}{14} \right) \right] = 6{,}13$$

O grau de liberdade é calculado pela equação: (nº de linhas -1).(nº de colunas -1) = 2. Na tabela para QUI quadrado (Figura 74), com GL = 2 e nível de confiança de 95% tem-se: X^2crítico = 5,99.

G.L.	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,93E-05	0,000157	0,000982	0,003932	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278

Figura 74 – Obtenção da estatística de teste Qui-quadrado tabelado.

Como o valor de X^2 crítico tabelado é menor que X^2 calculado (5,99 < 6,13) a hipótese nula deve ser rejeitada. Logo, com 95% de nível de confiança a hipótese alternativa é aceita e a preferência pelos refrigerantes do tipo A, B e C depende sim do gênero do consumidor.

A seguir, apresentamos mais um exemplo.

Vamos verificar se há dependência entre a renda e o número de filhos em famílias de uma cidade. Suponha que, a partir de 250 famílias escolhidas ao acaso, tenhamos a tabela:

Renda R$	Número de filhos				Total
	0	1	2	Mais de 2	
Menos de 2000	15	27	50	43	135
De 2000 a 5000	25	30	12	8	75
Mais de 5000	8	13	9	10	40
Total	48	70	71	61	250

A Hipótese Nula é que o número de filhos e a renda são independentes. Já a Hipótese Alternativa é que existe dependência entre essas duas grandezas. Para cada célula da tabela deve ser calculado o valor esperado conforme o modelo:

$$E_{11} = \frac{48 \times 135}{250} = 25{,}92$$

Renda R$	Número de filhos				Total
	0	1	2	Mais de 2	
Menos de 2000	25,92	37,80	38,34	32,94	135
De 2000 a 5000	14,40	21,00	21,30	18,30	75
Mais de 5000	7,68	11,20	11,36	9,76	40
Total	48	70	71	61	250

A estatística Qui-Quadrado é calculada pela expressão:

$$\chi^2 = \frac{(15-25{,}92)^2}{25{,}92} + \frac{(25-14{,}4)^2}{14{,}4} + \frac{(8-7{,}68)^2}{7{,}68} + \ldots\ldots + \frac{(10-9{,}76)^2}{9{,}76} = 36{,}62$$

A partir da determinação do grau de liberdade = 2 x 3 = 6 . Na tabela X^2 , com nível de confiança de 95% temos X^2 tabelado = 12,6 (Figura 75).

G.L.	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,93E-05	0,000157	0,000982	0,003932	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278

Figura 75- Obtenção do valor de X^2 tabelado. VER TABELA ANEXA.

Como X^2 calculado é maior que X^2 tabelado rejeitamos a Hipótese nula. Com 95% de nível de confiança podemos afirmar que não existe independência entre a renda e o número de filhos.

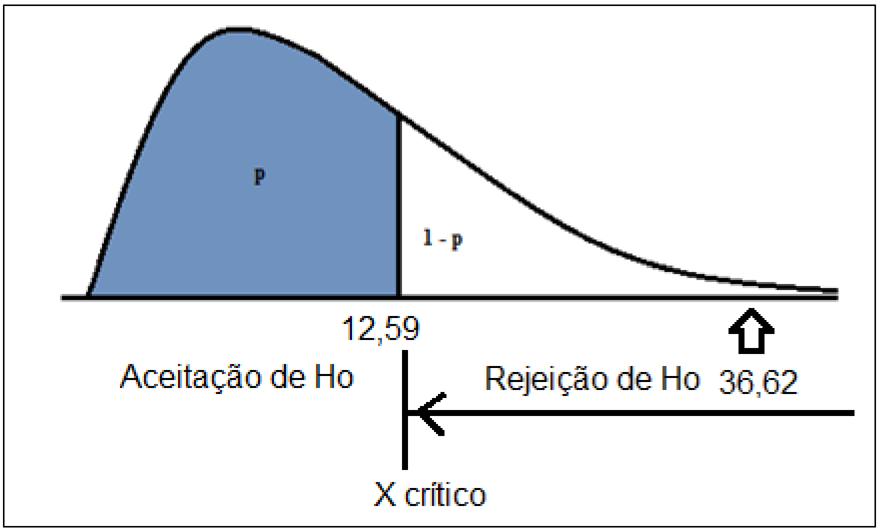


Figura 76 – Ilustração da região de rejeição de Ho na curva Qui-quadrado.

LISTA DE EXERCÍCIOS 8:

1- Um pesquisador tem interesse de saber se a preferência de uso do transporte público está relacionada com o gênero. Ele entrevista 400 pessoas e obteve as informações tabeladas. Existe influência do gênero na escolha do transporte público?

Usa transporte público	Homens	Mulheres
Usuários	92	88
Não usuários	108	112

2- Uma pesquisa divulgou que o volume de chuvas em uma região para o mês de junho é de 320mm com um desvio padrão típico de 20mm. Uma amostra com 25 dias da série histórica foi analisada. O valor médio do volume de chuvas foi de 340mm. Com estes dados é possível afirmar que a média do volume de chuvas para o período é mesmo 320mm? Use o nível de significância de 0,05.

3- Os moradores de duas cidades vizinhas conhecidas pelas suas baixas temperaturas disputam o título de cidade mais fria no inverno. A cidade A diz que sua temperatura média é de 5ºC inferior que a da cidade B. Uma amostra de 16 temperaturas de cada cidade são tomadas em uma determinada semana. As temperaturas obtidas foram de 16ºC com desvio padrão de 2ºC e 14ºC e desvio padrão de 4ºC. Com nível de confiança de 95% o que é possível afirmar?

4- Avalie se os níveis de renda de duas cidades estão associados com NC = 99%. Foram pesquisados 400 moradores ao todo.

	A	B	C	D	Total
X	28	42	30	24	124
Y	44	78	78	76	276
Total	72	120	108	100	400

Seja Ho = as variáveis são independentes e H1 = as variáveis são dependentes.

VÍDEO RECOMENDADO: TESTE DE HIPÓTESE – UNIVESP TV

https://www.youtube.com/watch?v=9zMREPL93WA

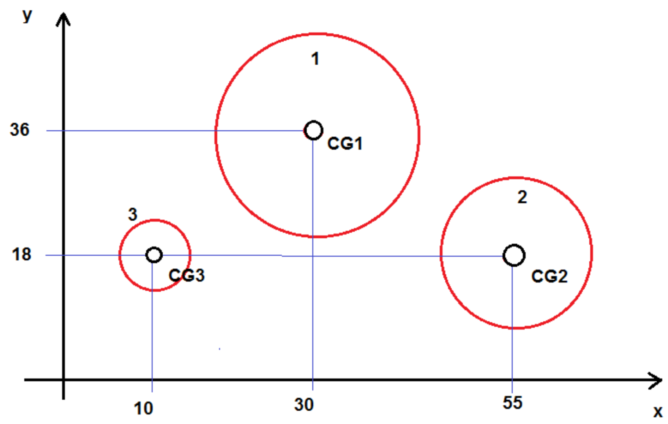
ANEXO A - EXERCÍCIOS[1]

1- Em 16 de junho de 2016 ocorreu o Feirão de Empregos de Florianópolis. Como seria possível quantificar o total de pessoas na fila? Se você tivesse que descrever o perfil dessas pessoas qual estratégia você utilizaria? Qual o contexto socioeconômico desse evento ?

2- Um novo centro de eventos está sendo planejado para uma determinada região. Nela há 3 comunidades residenciais e o centro médio é um dos critérios para localização. Suponha que a comunidade 1 tenha coordenada central (30, 36)km e população de 20 mil pessoas. A comunidade 2 tem coordenada central de (55,18)km e população de 12 mil pessoas. Já a comunidade 3 tem coordenada central de (10,18)km e população de 5 mil pessoas. Qual é o centro médio ponderado? Se o critério fosse a renda e não o tamanho da população, qual seria o novo centro médio. Suponha que a comunidade 1 tenha renda total de 2 milhões de reais, a comunidade 2 tenha renda total de 12 milhões de reais e a comunidade 3 de 20 milhões de reais. Considere a equação abaixo, onde Pi pode ser tanto população quanto renda.

$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i . P_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \quad \text{e ainda} \quad y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i . P_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

[1] Parte das soluções desses exercícios encontra-se no blog: SEGREDOS DA ESTATÍSTICA.WORDPRESS.COM



3- Uma nova escola está sendo construída pela prefeitura para atender as crianças de uma região. Considerando que a probabilidade de uma criança da região se matricular nessa nova escola segue uma distribuição de probabilidade exponencial, calcule quais as chances de uma criança que mora a 10km de distância estudar na nova escola. É conhecido que o valor esperado de distância dessa distribuição é de 4km.

4- Os gastos mensais de uma amostra de famílias são descritos por meio de uma tabela, onde também estão descritas suas rendas. Qual a correlação existente entre a renda e o gasto mensal dessas famílias?

Quantia Gasta por semana (R$) Y	Renda da família (R$) X	X.Y	
120	6500		
68	3500		
35	3000		
60	4400		
100	8000		
91	7700		
44	3200		
71	3900		
89	4400		
113	7700		

5- Um pesquisador está estudando a relação entre os preços de uma casa, o tamanho dos terrenos e o número de quartos. Analisando uma amostra de propostas de vendas em sites específicos ele anotou os valores médios das casas e as respectivas áreas dos terrenos e número de quartos.

Preço da casa	Área do Lote (m2)	Número de quartos
130.000	5000	3
134.000	5500	2
159.000	6000	4
164.000	6500	3
132.000	5200	2
125.000	5400	1
146.000	5700	3
168.000	6100	4
171.000	6300	4
187.000	6400	5

6- A partir da população das cidades catarinenses (PNAD, 2014) elabore um histograma da quantidade de habitantes. Os dados estão disponíveis no IBGE.

7- Se uma multinacional quisesse instalar uma fábrica em cada uma das 5 cidades que mais cresceram em Santa Catarina em termos populacionais nos últimos 14 anos, quais seriam essas cidades? Dados PNAD 2014 e IBGE 2000.

8- Se uma grande multinacional quisesse instalar uma fábrica em cada uma das 5 cidades que mais cresceram em Santa Catarina em termos econômicos nos últimos anos, quais seriam essas cidades?

9- O que é COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DOS DADOS e qual sua importância?

10- Calcule a média, a amplitude, a mediana e o desvio padrão do conjunto de dados:

29, 35, 17, 30, 231, 6, 27, 35, 23, 29, 13

11- A probabilidade anual de inundações em uma comunidade é de 0,10. Qual a probabilidade de acontecerem 3 inundações nos próximos 10 anos?

12- Considere que em um cruzamento ocorrem um assalto a cada dez dias. Qual a probabilidade de ocorrência de três assaltos durante o período de 25 dias?

13- Uma doença acontece aleatoriamente no espaço com um caso incidente a cada 10 quilômetros quadrados. Qual a probabilidade de se encontrarem quatro casos em uma área de 30 quilômetros quadrados?

14- O tempo de deslocamento ao trabalho é normalmente distribuída com média de 30 minutos e desvio padrão de 10 minutos. Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso na população tenha tempo de deslocamento maior que 40 minutos?

15- Qual a probabilidade do tempo de deslocamento se situar entre 20 e 30 minutos?

16- Ordene os dados. Indique o 1º, 2º e 3º quartil. Desenhe o diagrama de caixa. Calcule a média e a mediana dos dados. Determine qual o desvio padrão.

11, 12, 4, 2, 3, 4, 11, 8, 5, 15, 20, 21

17- Calcule a correlação que relaciona a idade e a altura de uma criança.

Idade (anos)	Altura (cm)
6	70
8	110
10	130
12	150
14	155
15	160

18- O dono de uma lanchonete anotou quanto de refrigerantes (em litros) ele vende ao longo dos dias de acordo com a temperatura. Qual a relação entre estas duas informações?

Temperatura	litros
15	22
20	25
25	28
27	30
30	32
31	31
32	33
35	35

19- Os dados a seguir representam as alturas (em cm) de 25 alunos de uma classe. Construa o histograma e calcule a média e o desvio padrão.

155	163	148	166	169
164	165	159	175	155
170	165	176	157	157
150	150	160	165	164
166	169	152	170	190

20- Qual a reta ajustada que melhor representa a correlação entre as grandezas X e Y representadas abaixo?

X	5	7	7	10	6	7	9
Y	7	9	8	10	5	7	8

21- Calcule a média, a mediana e a moda dos dados apresentados a seguir:

80, 94, 86, 88, 84, 85, 85, 91, 93

22- Calcular a média e o desvio padrão dos dados apresentados por meio da tabela de classes / frequência:

Classe x	Frequência
150 a 155	2
156 a 160	4
161 a 165	6
166 a 170	15
171 a 175	6
176 a 180	4
181 a 185	3

23- Construir o diagrama de caixa (Box-plot) dos dados:

12, 16, 13, 9, 18, 15, 14, 21, 7, 10, 11, 20, 5, 18, 37, 16, 17

24- As notas de turma de alunos são mostradas na tabela. Qual a média e a mediana?

Nota	Quantidade
2	2
4	4
6	12
8	6
10	2

25- Uma caixa possui 10 peças, mas 4 delas são defeituosas. Selecionando-se aleatoriamente 2 bolas sem reposição, qual a probabilidade de obtermos 2 peças boas ?

26- Um dado equilibrado é lançado. Qual a probabilidade de sair a face o número 4, se já temos a informação de que a face que saiu é par ?

27- Considere 3 lançamentos seguidos de uma moeda honesta. Qual a probabilidade de sair exatamente 2 cara nesses 3 lançamentos?

28- Uma caixa tem 5 bolas brancas e 2 bolas pretas. Selecionando-se aleatoriamente (por sorteio) 2 bolas sem reposição, qual a probabilidade de sair 2 bolas pretas?

29- Considere que dois dados honestos sejam lançados juntos. Em cada jogada, calcula-se a soma dos resultados. Qual a probabilidade de que a soma seja 5 ou 7 ?

30- Um piloto tem probabilidade de vencer uma corrida calculada em 1/10. Qual a probabilidade do piloto vencer duas corridas em 5 ?

31- Uma urna tem bolas numeradas de 1 a 20. Sorteamos uma bola aleatoriamente. Qual a probabilidade de sair um número múltiplo de 2 ou de 3 ?

32- Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saia com o triplo de frequência da face 1 e que as outras faces saiam com a frequência esperada de um dado não viciado. Qual a frequência da face 1?

33- Uma pesquisa é realizada com 10.000 consumidores sobre a preferência por tipo de sabão em pó. Verificou-se que 7.500 usam a marca X. 4.500 usam a marca Y. 2.000 utilizam as duas marcas. Foi sorteada uma pessoa entre as 10.000 e verificou-se que ela usa a marca X. Qual a probabilidade dessa pessoa também ser usuária da marca Y?

34- Em um colégio 10% dos homens e 8% das mulheres têm mais que 1,80m de altura. O total de homens é de 60% dos estudantes. Se um estudante é escolhido aleatoriamente e tem mais que 1,80m de altura, qual é a probabilidade de que seja mulher?

35- Uma cidade tem 50.000 pessoas e 3 jornais em circulação: A, B e C. Sabe-se que 15000 pessoas lêem o jornal A, 10000 pessoas lêem o jornal B, 8000 lêem o jornal C, 6000 lêem os jornais A e B, 4000 lêem os jornais A e C, 3000 lêem os jornais B e C, 2.000 lêem os jornais A, B e C. Uma pessoa é escolhida aleatoriamente. Qual é probabilidade de que ela leia pelo menos um jornal? Qual a probabilidade de que ela leia apenas 1 jornal?

36- Um casal pretende ter 4 filhos. Qual a probabilidade de nascerem EXATAMENTE dois meninos?

37- Uma empresa de aluguel de carros anota o número de carros alugados. Em um determinado período, a probabilidade de alugar 10 carros é de 30%, a de alugar 11 carros é e 30%, de alugar 12 carros é de 35% e de alugar 13 carros é de 15%. Calcule o número médio de carros alugados por semana.

38- Uma pesquisa realizada com 1.000 estudantes, sendo 500 mulheres e 500 homens, mediu o tempo de reação para frear um carro em milisegundos. O valor médio obtido tanto para homens quanto para mulheres foi de 150ms com um desvio padrão de 25ms. Considerando que o tempo de reação obedece a uma distribuição normal, qual é a probabilidade de encontrar uma pessoa com tempo de maior que 200ms?

39- Em uma rede de computadores, em 20% dos dias ocorre alguma falha. Considere a variável aleatória X = número de dias com falha na rede. Considere o período de observação de 10 dias e suponha que os eventos são independentes. Qual a probabilidade de ocorrer mais que 6 dias e falhas na rede, considerando os 10 dias de observação?

40- Uma fábrica de cimentos necessita encher sacos com peso médio de 50kg. No entanto, a massa é normalmente distribuída com desvio padrão de 1kg. Selecionando-se um saco de cimento aleatoriamente, qual a probabilidade de que ele tenha massa menor que 49kg?

41- Uma máquina produz discos de diâmetro médio de 3cm com desvio padrão de 0,08cm. As peças que se afastam por mais de 0,16cm do diâmetro médio são consideradas com defeito. Qual o percentual de peças consideradas defeituosas?

42- A vida média de uma marca de televisão é de 10 anos com desvio padrão de 1,5 anos. A campanha de lançamento diz que todos os produtos que tiverem defeito dentro do prazo de garantia serão trocados por novos. Se você fosse o gerente de produção, qual seria o tempo de garantia que você especificaria para ter no máximo 5% de trocas?

43- Uma empresa produz resistores com resistência média de 60 ohms e desvio padrão de 4 ohms. A resistência é normalmente distribuída. Qual a probabilidade de encontrarmos resistores com resistência inferior a 50 ohms?

44- A vida útil de um tipo de lâmpada é normalmente distribuída com valor médio de 1.000h e desvio padrão de 50h. Ao selecionarmos uma lâmpada aleatoriamente, qual a probabilidade de que ela queime entre 500 e 600 horas?

45- Um cruzamento tem uma média de 5 acidentes por mês. Qual a probabilidade de ocorrer 4 acidentes em um mês qualquer?

46- Um taxista recebe em média 5 chamadas a cada hora. Qual a probabilidade de não receber nenhuma chamada em uma determinada hora?

47- Um time de futebol joga 8 partidas. Assumindo que a probabilidade de vitória em cada jogo é de 40%, qual é a probabilidade de que o time vença exatamente 4 jogos?

48- Um posto de gasolina atende em média 8 clientes por hora. Qual a probabilidade de que apenas 4 clientes sejam atendidos em uma hora?

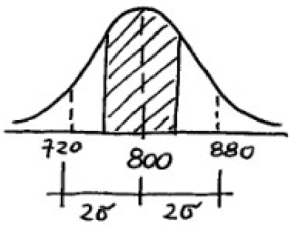
49- Suponha que em uma linha de produção a probabilidade de se obter uma peça defeituosa seja de 5%. Toma-se uma amostra de 30 peças para serem inspecionadas. Qual a probabilidade de se obter na amostra mais que 2 peças defeituosas?

50- Suponha que numa linha de produção a probabilidade de se obter uma peça defeituosa é de 10%. Toma-se uma amostra de 10 peças para serem inspecionadas. Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?

ANEXO B - RESOLVIDOS

1- A vida útil de um tipo de lâmpada é normalmente distribuída com valor médio de 800h e desvio padrão de 40h. Ao selecionarmos uma lâmpada aleatoriamente, qual a probabilidade de que ela queime entre 778 e 834 horas?

$\begin{cases} \mu = 800\,h \\ \sigma = 40\,h \end{cases}$ P(QUEIMAR ENTRE 778 E 834h)?



$z_1 \rightarrow 778h$ $\quad z_1 = \dfrac{778-800}{40} = -0{,}55$

$z_2 \rightarrow 834h$ $\quad z_2 = \dfrac{834-800}{40} = 0{,}85$

$F(z_1) = 0{,}2912$

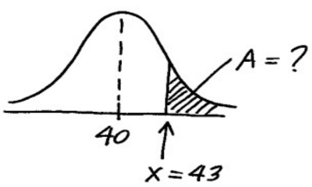
$F(z_2) = 0{,}8023$

$P(778 < x < 834) = 0{,}8023 - 0{,}2912 = 0{,}51 \rightarrow 51\%$

2- Em uma fábrica, um grande lote de resistores possui resistência elétrica normalmente distribuída com valor médio de 40 ohms e desvio padrão de 2 ohm. Qual a probabilidade de encontrarmos um resistor com resistência maior que 43 ohms?

RESISTORES

$\begin{cases} \mu = 40\,\Omega \\ \sigma = 2\,\Omega \\ P(x > 43\,\Omega) \end{cases}$



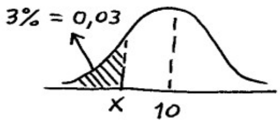
$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{43-40}{2}$

$z = 1{,}5 \rightarrow F(z = 1{,}5) = 0{,}933$

$P(x > 43) = 1 - 0{,}933 = 0{,}066$

$P(x > 43) \cong 6{,}6\%$

3- O engenheiro de uma fábrica de motores elétricos sabe que a vida média dos equipamentos produzidos é de 10 anos com desvio padrão de 2 anos. Os motores com defeito são trocados se estiverem na garantia. Se a fabrica quiser trocar somente 3% dos motores que apresentarem defeito, qual deve ser o tempo de garantia?



NA TABELA NORMAL → A = 0,03 → $\boxed{Z = -1,88}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow \boxed{X = Z.\sigma + \mu}$$

$$X = (-1,88 . 2) + 10 = 6,24 \text{ ANOS}$$

SE A GARANTIA FOR DE 6,2 ANOS APENAS 3% DOS PRODUTOS DEVERÃO SER TROCADOS NA GARANTIA.

4- Em um tipo de fabricação de uma fita especial para computação, ocorrem defeitos a uma taxa de 1 a cada 2000 metros. Qual a probabilidade de que em um rolo de 2000 metros de fita não tenha nenhum defeito? Ou que tenha pelo menos dois defeitos?

$$P(X=0) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-1} . 1^{0}}{0!} = e^{-1} = 36,8\% \qquad \mu = 1/2000m$$

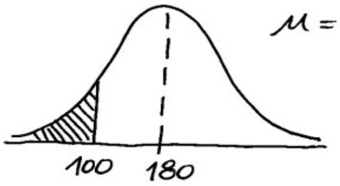
$$P(X \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$

$$P(x \leq 2) = \frac{e^{-1} . 1^{0}}{0!} + \frac{e^{-1} . 1^{1}}{1!} + \frac{e^{-1} . 1^{2}}{2!} = \frac{3.e^{-1}}{2} = 91,97\%$$

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - \left[\frac{e^{-1} . 1}{0!} + \frac{e^{-1} . 1^{1}}{1!}\right]$$

$$P(x \geq 2) = 1 - 2.e^{-1} = 26,42\%$$

5- Uma pesquisa com 100 pessoas mediu o tempo de reação para frear um carro em milisegundos. O valor médio obtido foi de 180ms com desvio padrão de 50ms. Considerando que o tempo de reação é normalmente distribuído, qual é a probabilidade de encontrar entre as 100 pessoas, uma que tenha tempo de reação menor que 100ms?



$\mu = 180\,ms \quad \sigma = 50\,ms$

$$Z = \frac{100 - 180}{50} = -1{,}60$$

$F(Z = -1{,}60) = 0{,}0548$ TABELA NORMAL

$P(t < 100\,ms) = 5{,}5\%$

6- Dado um conjunto de massas de uma turma de estudantes, calcule qual é a média, o desvio padrão e o Coeficiente de Variação (CV): 63, 55, 78, 82, 95, 60, 82, 75,74, 76, 80, 90

Peso (x_i)	Média $\bar{x}$	($\bar{x}$ - x_i)	($\bar{x}$ - x_i)^2
63	75,8	-12,8	163,84
55	75,8	-20,8	432,64
78	75,8	2,2	4,84
82	75,8	6,2	38,44
95	75,8	19,2	368,64
60	75,8	-15,8	249,64
82	75,8	6,2	38,44
75	75,8	-0,8	0,64
74	75,8	-1,8	3,24
76	75,8	0,2	0,04
80	75,8	4,2	17,64
90	75,8	14,2	201,64
Soma			1519,68

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(63+55+78+82+95+60+82+75+74+76+80+90)}{12} = 75{,}8$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{1519{,}68}{12} = 126{,}64$$

O desvio padrão é calculado em 11,25. Já o coeficiente de variação (CV) = 11,25/75,8 = 0,148 ou em termos percentuais: 14,8%.

7- Por norma uma fábrica de leite em pó deve produzir latas com massa líquida de 400g (desconsiderando a massa da lata). No entanto, a massa segue uma distribuição normal com desvio padrão de 5g. Funcionários do INMETRO retiraram uma amostra aleatória de 25 latas para avaliação. A média das massas encontradas (descontadas as massas das latas) foi de 402g. A partir dessa média amostral, qual é a probabilidade de encontrarmos na população uma lata de leite com massa menor que 400g?

AMOSTRA LATAS LEITE $N = 25$

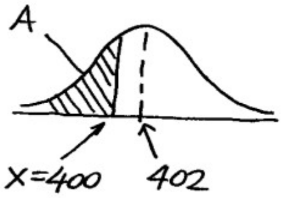
$\bar{x} = 402g$

$\sigma = 5g$ $\quad P(x < 400g) = ?$

$$Z = \frac{400 - 402}{5/\sqrt{25}} = -2$$

$F(z = -2) = 0{,}0228 \rightarrow 2{,}28\%$

$P(m < 400g) = 2{,}28\%$



8- Um fabricante produz resistores com desvio padrão de 8Ω. O valor da resistência dos resistores produzidos segue uma distribuição normal. A resistência média de uma amostra aleatória de 20 resistores foi medida como sendo de 80 Ω. Calcule o intervalo de confiança para a média da população de resistores produzidos. Use o nível de confiança de 95,0%.

RESISTORES : $\sigma = 8g$ AMOSTRA $N = 20$ $\bar{x} = 80\Omega$ $NC = 95\% \downarrow Z = 1{,}96$

$$\bar{x} - \frac{z.\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{z.\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$80 - \frac{1{,}96.8}{\sqrt{20}} \leq \mu \leq 80 + \frac{1{,}96.8}{\sqrt{20}} \rightarrow \boxed{76{,}5 \leq \mu \leq 83{,}5}$$

9- Uma fábrica de Jaraguá do Sul produz rolamentos para a Fórmula 1. Os rolamentos são feitos de esferas de aço polido. Para avaliar a qualidade dos rolamentos produzidos, um engenheiro coletou uma amostra aleatória de 12 esferas da produção diária. Usando um paquímetro ele obteve as seguintes medições para as esferas. Calcule o intervalo de confiança para a média das esferas produzidas pela máquina com nível de confiança de 95%.
8,2 8,3 8,4 8,2 8,2 8,4 8,3 8,2 8,4 8,4 8,2 8,4

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(x_i)}{N} = \frac{99{,}6}{12} = 8{,}3 \qquad S = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}095 \qquad N = 12$$

NC = 95% GL = N − 1 = 11 → TABELA T STUDENT → $\boxed{t = 2{,}201}$

INTERVALO DE CONFIANÇA:

$$\bar{x} - \frac{t.s}{\sqrt{N}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + \frac{t.s}{\sqrt{N}} \qquad \frac{t.s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}201 . 0{,}095}{\sqrt{12}} = 0{,}06$$

$$8{,}3 - 0{,}06 \leqslant \mu \leqslant 8{,}3 + 0{,}06$$

$$(8{,}24 \leqslant \mu \leqslant 8{,}36)\,mm \quad \text{COM } NC = 95\%$$

10- Um engenheiro de telecomunicações está desconfiado de que a resistência de ruptura de um perfil metálico usado para construção de torres para antenas de celular está fora das especificações definidas no contrato com o fornecedor. Ele selecionou aleatoriamente no pátio da fornecedora uma amostra de 10 perfis e levou para avaliação no laboratório de metrologia do IFSC. Sabe-se que a resistência de ruptura segue uma distribuição normal. Os valores a seguir foram obtidos em MPa (megapascals). A partir desses valores, calcule qual o intervalo de confiança para a tensão de ruptura média dos perfis metálicos que estão sendo utilizados. Utilize nível de confiança de 95%.

8,3 8,4 8,2 8,2 8,4 8,3 8,2 8,4 8,4 8,2

$$\begin{cases} \bar{X} = 8{,}3 & NC = 95\% \\ S = 0{,}094 & N = 10 \end{cases} \rightarrow t = 2{,}262 \quad \text{TABELA T STUDENT}$$

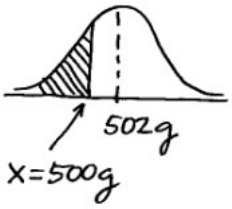
$$8{,}3 - \frac{2{,}262 . 0{,}094}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 8{,}3 + \frac{2{,}262 . 0{,}094}{\sqrt{10}}$$

$$(8{,}233 \leq \mu \leq 8{,}367)\ \text{MPa} \quad \text{COM } NC = 95\%$$

11- Por norma, uma fábrica de café em pó deve produzir sacos com massa de 500 g de café (desconsiderando a massa do saco). Todos os dias são produzidos 10.000 sacos de café. A massa de café nos sacos apresenta uma distribuição normal com desvio padrão de 10g. Funcionários do INMETRO retiraram uma amostra aleatória de 30 sacos para avaliação. As massas foram pesadas uma a uma, obtendo-se uma massa média das amostras de 502 gramas. Baseado nessas informações, qual a probabilidade de encontrarmos pacotes com menos que 500g entre os 10.000 sacos de café (população).

MASSA DE CAFÉ ESPERADA $= 500g$ $\quad \sigma = 10g$

AMOSTRA $N = 30$ SACOS $\quad \bar{X} = 502g$



$$Z = \frac{500 - 502}{(10/\sqrt{30})} = -1{,}09 \qquad F(z=-1{,}09) = 0{,}1379$$

$$\downarrow$$

$$13{,}8\%$$

$$\boxed{P(m < 500g) = 13{,}8\%}$$

12- Um fabricante produz resistores com desvio padrão desconhecido e distribuição normal. A resistência média obtida em uma amostra aleatória de n = 25 resistores foi 98,0Ω. O desvio padrão da amostra foi 16Ω. Calcule o intervalo de confiança para a média da população de resistores produzidos. Use o nível de confiança 95,0%.

AMOSTRA $N = 25 \quad \bar{X} = 98\,\Omega \quad S = 16\,\Omega \quad NC = 95\%$

USAMOS t STUDENT POIS NÃO TEM DESVIO DA POPULAÇÃO:

$$\bar{X} - \frac{t.s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{t.s}{\sqrt{N}} \rightarrow \begin{cases} \text{TABELA } t \\ GL = 24 \\ NC = 95\% \end{cases} \rightarrow \boxed{t = 2{,}064}$$

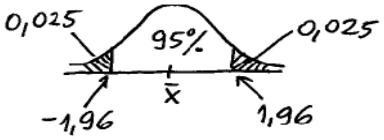
$$\frac{t.s}{\sqrt{N}} = \frac{2{,}064 . 16}{\sqrt{25}} = 6{,}6$$

$$98 - 6{,}6 \leq \mu \leq 98 + 6{,}6 \rightarrow \boxed{\mu = 98 \pm 6{,}6}$$

$$\boxed{91{,}4 \leq \mu \leq 104{,}6}$$

13- Um fabricante produz resistores com desvio padrão 12Ω e distribuição normal. A resistência média de uma amostra aleatória de n=25 foi 98,0Ω. Calcule o intervalo de confiança para a média da população de resistores produzidos. Use o nível de confiança 95,0%.

$\sigma = 12\,\Omega$ AMOSTRA $N = 25$ $\bar{X} = 98\,\Omega$ $NC = 95\%$



$$98 - \frac{1{,}96 \cdot 12}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 98 + \frac{1{,}96 \cdot 12}{\sqrt{25}}$$

$$\boxed{93{,}3 \leq \mu \leq 102{,}7}\ \Omega$$

14- Os dados a seguir correspondem ao diâmetro em mm de UMA AMOSTRA DE 20 esferas de rolamentos produzidos por uma máquina. Construa um intervalo de confiança, a 95%, para a média da população de todas as possíveis esferas produzidas por essa máquina.

15,7 15,4 15,9 15,5 15,7 15,9 15,8 15,9 15,2 15,4

15,7 15,9 16,2 15,1 14,9 15,4 15,2 15,1 15,3 15,5

$$\begin{cases} N = 20 \text{ ESFERAS} \\ \bar{X} = 15{,}535 \text{ mm} \\ S = 0{,}343 \text{ mm} \end{cases}$$

COM $NC = 95\%$

$GL = 19 \rightarrow \boxed{t_{STUDENT} = 2{,}093}$

$$15{,}535 - \frac{2{,}093 \cdot 0{,}343}{\sqrt{20}} \leq \mu \leq 15{,}535 + \frac{2{,}093 \cdot 0{,}343}{\sqrt{20}}$$

$$\boxed{15{,}375 \leq \mu \leq 15{,}69}$$

15- Um pesquisador está estudando a resistência à tração de uma certa liga de aço sob determinadas condições. Ele já obteve previamente a informação de que essa variável é normalmente distribuída. Uma amostra aleatória de tamanho 11 é escolhida, obtendo-se os seguintes valores para a tensão de ruptura (em MPa): 7,9 6,8 5,4 7,5 7,9 6,4 8,0 6,3 5,9 7,2 6,8. A partir desses valores, calcule qual o intervalo de confiança para a resistência à ruptura média dessa liga de aço, com 90% de nível de confiança.

AMOSTRA ENSAIOS DE TRAÇÃO $N = 11$ $\bar{x} = 6{,}92$ MPa

$S = 0{,}87$ MPa

COM NC = 90% G.L. = 10 → $\boxed{t_{STUDENT} = 1{,}812}$

$$6{,}92 - \frac{1{,}812 \cdot 0{,}87}{\sqrt{11}} \leq \mu \leq 6{,}92 + \frac{1{,}812 \cdot 0{,}87}{\sqrt{11}}$$

$\boxed{6{,}45 \leq \mu \leq 7{,}39}$ MPa COM NC = 90%

16- Os rolamentos produzidos por uma empresa precisam ter diâmetro entre 140 e 160mm. Uma amostra de 30 rolamentos é selecionada aleatoriamente, obtendo-se as medidas relacionadas a seguir:

137 154 159 155 167 159 158 159 152 169
154 158 140 149 145 157 160 155 155 143
157 139 159 139 129 162 151 150 134 151

a) Qual o intervalo de confiança da média de diâmetros das peças produzidas?
b) Determine a proporção de peças fabricadas pela máquina que satisfazem as especificações, com nível de confiança de 98%.

ESFERAS COM DIÂMETRO ENTRE 140 E 160mm

HA' 22 ESFERAS NA AMOSTRA QUE ATENDEM INTERVALO

$\hat{p} = \frac{22}{30} = 0{,}73$ → NC = 98% $Z = 2{,}33$

$d = Z_{0,98} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{N}}$ → $d = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}73 \cdot 0{,}27}{30}}$

$d = 0{,}08$ → LIMITE INFERIOR → $\hat{p} - d = 0{,}65$

LIMITE SUPERIOR → $\hat{p} + d = 0{,}81$

LOGO, ESPERA-SE QUE COM NC = 98% A PROPORÇÃO DE ESFERAS DENTRO DA ESPECIFICAÇÃO (140 A 160mm) DA POPULAÇÃO ESTEJA ENTRE 65% E 81%.

17- Foi realizada uma pesquisa envolvendo uma amostra de 600 pacientes de um hospital. Cada um desses pacientes foi submetido a um conjunto de exames. Entre eles mediu-se a taxa de índice cardiáco. Os 600 pacientes foram divididos em 40 grupos de 15 pacientes cadas. Em um desses grupos tem-se os seguintes valores para a taxa de índice cardíaco: 405, 348, 365, 291, 135, 260, 300, 155, 34, 294, 758, 472, 559, 143, 172. A partir desses valores construa o intervalo de confiança para o valor médio de índice cardíaco com nível de confiança de 95%.

600 PACIENTES 40 GRUPOS DE 15 → $\bar{x} = 312,73$; $S = 185,80$; $\begin{cases} N = 15 \\ NC = 95\% \\ GL = 14 \end{cases}$

$\boxed{t_{STUDENT} = 2,145}$ $\quad \bar{x} - \frac{ts}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{ts}{\sqrt{N}}$

$$312,73 - \frac{2,145 \cdot 185,80}{\sqrt{15}} \leq \mu \leq 312,73 + \frac{2,145 \cdot 185,80}{\sqrt{15}} \rightarrow \boxed{209,84 \leq \mu \leq 415,63}$$

18- Um pesquisador está estudando a resistência mecânica de um material. Essa é uma grandeza normalmente distribuída com variância igual a 4 MPa^2. Uma amostra aleatória de 10 corpos de prova é testada em laboratório, obtendo-se os seguintes valores para a ruptura em MPa: 7,9 / 6,8 / 5,4 / 7,5 / 7,9 / 6,4 / 8,0 / 6,3 / 4,4 / 5,9. Calcule qual o intervalo de confiança para a resistência média do material com nível de confiança de 90%. Se o desvio padrão não fosse dado, como você resolveria a questão?

10 TESTES $N = 10$ $\begin{cases} GL = 9 \\ NC = 90\% \end{cases} \rightarrow \boxed{t_{STUDENT} = 1,833}$

$\bar{x} = 6,65$ MPa

$\sigma^2 = 4\,MPa^2 \rightarrow \sigma = 2\,MPa$

$\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{N}}$ LOGO:

$$6,65 - \frac{1,833 \cdot 2}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 6,65 + \frac{1,833 \cdot 2}{\sqrt{10}}$$

$\boxed{5,49 \leq \mu \leq 7,81}$ MPa

SE NÃO FOSSE DADO σ DA POPULAÇÃO USARIAMOS $S = 1,209$ MPa

$\frac{t \cdot S}{\sqrt{10}} = 0,69 \rightarrow \boxed{(5,96 \leq \mu \leq 7,34)\,MPa}$

19- São realizados teste de tensão de ruptura em 22 corpos de prova. A carga no ponto de falha foi calculada em um valor médio de 13,71MPa e desvio padrão de 3,55. Os dados obtidos nos permite afirmar com nível de confiança de 95% que a tensão de ruptura da população dos corpos de prova é superior a 10 MPa?

$$\begin{cases} N = 22 \\ \bar{X} = 13{,}71 \text{ MPa} \quad \text{CARGA DE FALHA MÉDIA} \\ S = 3{,}55 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{PODEMOS DIZER QUE} \\ \sigma_{RUPTURA} > 10 \text{ MPa} \\ \text{COM } NC = 95\% \text{ ?} \end{cases}$$

SEJA $\begin{cases} H_o = \text{HIPÓTESE NULA} \quad \mu_o = 10 \text{ MPa} \\ H_a = \text{HIPÓTESE ALTERNATIVA} \quad \mu_o > 10 \text{ MPa} \end{cases}$

$$t_o = \frac{\bar{X} - \mu_o}{S/\sqrt{N}} = \frac{13{,}71 - 10}{3{,}55/\sqrt{22}} = 4{,}9 \quad \text{ESTATÍSTICA DE TESTE}$$

REJEITAMOS H_o SE $t_{o\,CALCULADO} > t_{TABELADO}$

$t_{tabelado} = 1{,}721$ PARA $NC = 95\%$ E $G.L. = 21$

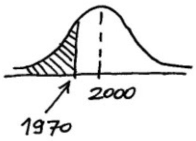
COMO: $t_o = 4{,}90 > 1{,}721$ REJEITAMOS H_o.

PODEMOS DIZER COM 95% DE NÍVEL CONFIANÇA QUE FALHA OCORRERÁ COM $\sigma_{RUPTURA} > 10$ MPa

20- Um fabricante afirma em seu catálogo que suas lâmpadas apresentam vida útil de 2000 horas e desvio padrão de 50 horas. Um comprador desconfiado fez um teste com 16 lâmpadas e obteve que o tempo de vida útil é de 1970 horas. Com um nível de confiança de 95% é possível afirmar que o fabricante está mentindo?

$\begin{cases} N = 16 \\ \bar{x} = 1970\,h \end{cases}$

95% NC.



$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \rightarrow Z = \frac{1970 - 2000}{50/\sqrt{16}} = -2{,}4$$ ESTATÍSTICA DE TESTE

$\begin{cases} \text{HIPÓTESE NULA: } H_o \quad \mu_o = 2000\,h \\ \text{HIPÓTESE ALTERNATIVA: } H_a: \quad \mu_o < 2000\,h \end{cases}$

$Z_{TABELA} = -1{,}645$ PARA $NC = 95\%$

REJEITAMOS H_o SE $Z_{CALCULADO} \leqslant -1{,}645$

COMO $Z < -1{,}645$ REJEITAMOS H_o. PODEMOS AFIRMAR QUE VIDA ÚTIL DAS LÂMPADAS É MENOR QUE 2000h COM NC = 95%

21- Pretende-se comparar as tensões de ruptura de três materiais distintos: A, B e C. Cento e vinte corpos de prova similares foram avaliados em uma mesma bateria de testes, sendo 40 de cada material. Os valores médios e desvios padrões das respectivas amostras estão na tabela abaixo. Com base nestes dados, e com nível de confiança de 95%, é possível afirmar que as resistências destes materiais são significativamente diferentes? Use testes de hipóteses para justificar sua resposta.

Material	Valor médio	Desvio padrão
A	230,2 MPa	12,5 MPa
B	227,4 MPa	11,9 MPa
C	223,4 MPa	12,9 MPa

a) $\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B \\ H_1: \mu_A > \mu_B \end{cases}$ → REJEITAR H_0 SE $Z_{calc.} > Z_{TABELADO}$

$$Z_{AB} = \frac{230,2 - 227,4}{\sqrt{\frac{12,5^2}{40} + \frac{11,9^2}{40}}} = \frac{2,8}{2,728} = 1,026$$

$\boxed{Z_{TABELADO} = 1,645}$

COMO $Z_{AB} < Z_{TABELADO}$ NÃO PODEMOS REJEITAR H_0.

b) $\begin{cases} H_0: \mu_B = \mu_C \\ H_1: \mu_B > \mu_C \end{cases}$

$Z_{TABELADO} = 1,645$

$Z_{BC} = 1,44$ → COMO $Z_{BC} < Z_{TABELADO}$ NÃO PODEMOS REJEITAR H_0

c) $\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_C \\ H_1: \mu_A > \mu_C \end{cases}$ $Z_{AC} = 2,39$ → COMO $Z_{AC} > Z_{TABELADO}$ REJEITAMOS H_0

PODEMOS AFIRMAR QUE $\mu_A > \mu_C$ COM NC = 95%

22- Um determinado tipo de barbante é vendido como sendo capaz de resistir 180 N. Um cliente retirou 5 amostras e obteve valores de resistência de 185N, 182N, 187N, 183N e 189N. Com um nível de confiança de 99% é possível afirmar que os barbantes vendidos têm resistência superior à 180N ?

$\sigma_{RUPTURA} \Rightarrow$ 185N 182N 187N 183N 189N

$$S^2 = \frac{N.\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{N.(N-1)} = 8{,}2 \rightarrow \quad S = 2{,}86\,N \quad N = 5 \text{ AMOSTRAS}$$

$\bar{X} = 185{,}2\,N$

COM NC 99% RESISTÊNCIA É MAIOR QUE 180N ?

$$\begin{cases} H_o: & \mu_o = 180N \\ H_a: & \mu_o > 180N \end{cases}$$

SE $Z > Z_\alpha$ REJEITAR H_o

SE $t > t_o$ REJEITAR H_o

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{S/\sqrt{N}} = \frac{185 - 180}{2{,}86/\sqrt{5}} = 4{,}06$$

$t_o = 3{,}743$ COM $\alpha = 0{,}01$ E G.L. $= 4$

COMO $t > t_o$ $\rightarrow$ REJEITAMOS H_o

PODEMOS AFIRMAR COM NC 99% QUE RESISTÊNCIA $>$ 180N.

23- Um estudante fez um ensaio para determinar a influência da corrente de alimentação de um laser diodo na qualidade de um certo tipo de imagem. Para tal, realizou seis ensaios com a corrente de 60 mA e seis outros ensaios com a corrente de 100 mA. Para cada ensaio, calculou um certo coeficiente, encontrando os resultados da tabela abaixo. Quanto maior o valor do coeficiente, melhor é qualidade da imagem. Com 95% de probabilidade é possível afirmar que a corrente de alimentação do laser diodo influi na qualidade da imagem?

Corrente	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 4	Ensaio 5	Ensaio 6
60 mA	208,6	209,0	208,1	208,3	209,2	208,3
100 mA	202,1	197,9	200,4	200,7	203,0	203,1

$\bar{X}_{60} = 208,58 \qquad S_{60} = 0,435$

$\bar{X}_{100} = 201,2 \qquad S_{100} = 1,972$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{REJEITAR } H_0 \text{ SE } T > t_{\alpha,GL} \\ t_{\alpha,GL} = 1,812 \quad \text{TABELA T STUDENT} \end{cases}$$

ESTATÍSTICA DE TESTE

$$T = \frac{208,58 - 201,2}{\sqrt{5.0,435^2 + 5.\,1,972^2}} \cdot \sqrt{\frac{6.6.\,10}{12}} = 9,39$$

COMO $T > t_{\alpha,GL}$ ENTÃO REJEITAMOS H_0 COM NC = 95%

LOGO: CORRENTE INFLUENCIA NA QUALIDADE DE IMAGEM.

24- Um professor está pensando em se candidatar a vereador de uma cidade da Grande Florianópolis e quer saber se tem chances de ser eleito. Para isso contratou o Instituto de Pesquisas Lopes Populix. A cidade tem 30.000 habitantes. Para uma margem de erro de 10% qual deve ser a quantidade de pessoas entrevistas para saber se votariam no professor?

ERRO MÁXIMO = 10%

N = 30.000 PESSOAS

$$n_0 = \frac{1}{ERRO^2} = \frac{1}{(0,1)^2} = 100 \rightarrow n = \frac{n_0 \cdot N}{n_0 + N} = \frac{100 \cdot 30.000}{100 + 30.000} = 99,6$$

$\downarrow$ $\boxed{100 \text{ PESSOAS}}$

25- Um pesquisador não conhece a população de uma cidade, mas deseja saber a preferência de voto para presidente. Nesse caso, quantas pessoas devem ser entrevistadas para obter um resultado com margem de erro de 2% e nível de confiança de 95%?

$$N = \hat{p}(1-\hat{p}) \cdot \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{ERRO}\right)^2$$

MARGEM DE ERRO = 2%

NÍVEL CONFIANÇA = 5%

$Z_{\alpha/2} = 1,96$

VALOR MÁXIMO DE "N" OCORRE QUANDO $p = 0,5$ LOGO

$$N = 0,5 \cdot (1 - 0,5) \cdot \left(\frac{1,96}{0,02}\right)^2 = 2401 \text{ ELEITORES.}$$

26- Calcule a correlação que relaciona a idade e a altura de uma criança.

Idade (anos)	Altura (cm)
6	70
8	110
10	130
12	150

IDADE	ALTURA	X . Y	X^2
6	70	420	36
8	110	880	64
10	130	1300	100
12	150	1800	144
$\Sigma = 36$	$\Sigma = 460$	$\Sigma = 4400$	$\Sigma = 344$

SEJA $\begin{cases} IDADE = X \\ ALTURA = Y \end{cases}$

$\boxed{Y = BX + A}$ $A = \frac{\Sigma y}{N} - B\frac{\Sigma x}{N}$

$$B = \frac{N.\Sigma x.y - [(\Sigma x).(\Sigma y)]}{N.(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

LOGO:

$$B = \frac{(4.4400) - (36.460)}{N.4.344 - (36)^2} = 13$$

$$A = \frac{460}{4} - 13.\frac{36}{4} = -2$$

LOGO: $\boxed{Y = 13X - 2}$

OU : $\boxed{ALTURA = 13.IDADE - 2}$

27- Calcule a média, a mediana e a moda dos dados apresentados a seguir:

82, 86, 88, 84, 85, 85, 91, 93

ORDENANDO OS DADOS:

82 84 85 85 86 88 91 93

A MEDIANA DIVIDE OS DADOS EM 2 PARTES:

82 84 85 85 | 86 88 91 93

MEDIANA = (85+86)/2 = 85,5

O 1º QUARTIL DIVIDE A 1ª METADE EM 2 PARTES

(84+85)/2 = 84,5

O 2º QUARTIL DIVIDE A 2ª METADE EM 2 PARTES

(88+91)/2 = 89,5

28- Calcular a média dos dados apresentados por meio da tabela de classes / frequência:

Intervalo de classe	Frequência
170 a 175	8
175 a 180	12
180 a 185	5

CLASSE	FREQUÊNCIA	PONTO MÉDIO
170 A 175	8	172,5
175 A 180	12	177,5
180 A 185	5	182,5

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum x_i \cdot f_i}$$

$N = 25$

$$\bar{X} = \frac{1}{25}\left[(172{,}5 \cdot 8) + (177{,}5 \cdot 12) + (182{,}5 \cdot 5)\right] = 176{,}9$$

VARIÂNCIA: $$S^2 = \frac{(N \cdot \sum x_i^2 \cdot f_i) - (\sum x_i \cdot f_i)^2}{N \cdot (N-1)}$$

$S^2 = 13{,}16 \rightarrow \boxed{S = 3{,}63}$

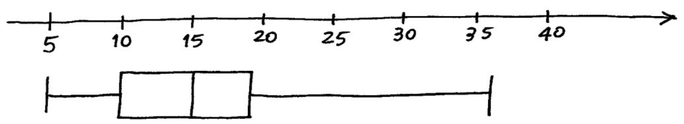
29- Construir o diagrama de caixa (Box-plot) dos dados:

13, 9, 18, 15, 14, 21, 7, 10, 11, 20, 5, 18, 37, 16, 17

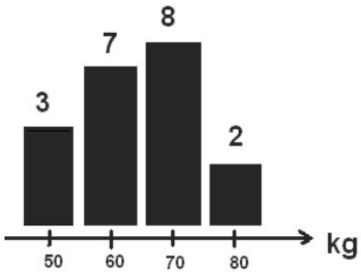
ORDENANDO OS DADOS:

5 7 9 10 11 13 14 15 16 17 18 18 20 21 37

1º QUARTIL: 10 — 2º QUARTIL MEDIANA: 15 — 3º QUARTIL: 18



30- Dado um histograma, qual a moda e o terceiro quartil ?



ORDENANDO DADOS EM ORDEM CRESCENTE:

| 50 50 50 60 60 | 60 60 60 60 60 | 70 70 70 70 70 | 70 70 70 80 80 |

| 25% | 25% | 25% | 25% |

1º QUARTIL MEDIANA 3º QUARTIL

$\frac{60+70}{2} = 65$

MODA = 70

1º QUARTIL = 60
2º QUARTIL = 65 (MEDIANA)
3º QUARTIL = 70

31- As notas de 40 alunos são mostradas na tabela. Qual a média e a mediana?

Nota	Quantidade
2	2
4	4
6	26
8	6
10	2

NOTAS : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f}$

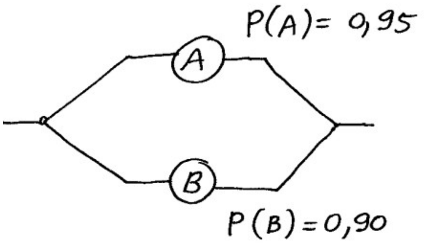
$$\bar{x} = \frac{1}{40}\left[(2.2) + (4.4) + (6.26) + (8.6) + (10.2)\right] = 6,1$$

COLOCANDO TODAS NOTAS EM ORDEM CRESCENTE

$2, 2, 4, 4, 4, 4, \underbrace{6, 6 \ldots\ldots}_{26 \text{ NOTAS } 6} \; 8, 8, \ldots \; 10, 10$

VISUALMENTE MEDIANA = 6 ⇒ NÚMERO DIVIDE DADOS EM 2 PARTES IGUAIS

32- Uma empresa tem 2 alarmes que funcionam de forma independente. Qual a probabilidade de que um problema seja detectado por apenas um deles? A probabilidade do alarme funcionar quando o sensor detecta uma invasão é de 95% no alarme A e 90% no alarme B.



$$\begin{cases} P(A) = \text{PROB. FUNCIONAR } A \\ P(\bar{A}) = \text{PROB. NÃO FUNCIONAR } A \\ P(B) = \text{PROB. FUNCIONAR } B \\ P(\bar{B}) = \text{PROB. NÃO FUNCIONAR } B \end{cases}$$

P(FUNCIONAR 1 ALARME E OUTRO NÃO) = ?

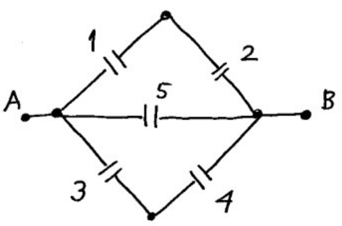
$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = [P(A) . P(\bar{B})] + [P(\bar{A}) . P(B)]$$

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = [P(A).(1-P(B)) + (1-P(A)).P(B)] =$$

$$= 0,95 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,9 = 0,14$$

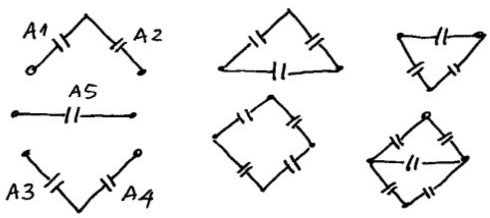
PROB. SER DETECTADO POR APENAS 1 ALARME = 14%

33- Um sistema funciona a partir de uma combinação de relés. A probabilidade de cada relé funcionar é "p". Qual a probabilidade do sistema funcionar ?



E = EVENTO FUNCIONAR

POSSÍVEIS FORMAS DE FUNCIONAR



$$P(E) = P(A_1 . A_2) + P(A_5) + P(A_3 . A_4) - P(A_1 . A_2 . A_5) - P(A_1 . A_2 . A_3 . A_4) - P(A_5 . A_3 . A_4) + P(A_1 . A_2 . A_3 . A_4 . A_5)$$

$$P(E) = p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 + p^5$$

$$\boxed{P(E) = p + 2p^2 - p^3 - p^4 + p^5}$$

34- Uma peça é montada a partir de 3 módulos. A probabilidade de ocorrer 1 defeito no primeiro módulo é de 80 por 1 milhão, no segundo é de 50 em 1 milhão e no terceiro 120 em 1 milhão. Selecionado um módulo aleatoriamente na produção, qual a probabilidade dele não ter nenhum defeito? Qual a probabilidade de serem fabricados 1000 módulos sem defeito?

MÓDULO COMPOSTO POR PEÇAS A, B, C

P(DEFEITO A) = 80/MILHÃO, P(D.B) = 50/MILHÃO P(D.C) = 120/MILHÃO

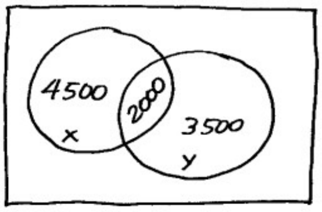
$$\begin{cases} P(\text{NÃO TER DEFEITO A}) = 1 - 0{,}00008 = 0{,}99992 \\ P(\text{NÃO " " B}) = 1 - 0{,}00005 = 0{,}99995 \\ P(\text{NÃO " " C}) = 1 - 0{,}00012 = 0{,}99988 \end{cases}$$

P(MÓDULO SEM DEFEITO) = 0,99992 × 0,99995 × 0,99988 = 0,99975

LOGO: P(1 OU MAIS MÓDULO COM DEFEITO) = 1 − 0,99975 = 0,00025 → 250/MILHÃO

P(1000 MÓDULOS SEM DEFEITOS) = $0{,}99975^{1000}$ → 0,778 = 77,8%

35- Uma pesquisa é realizada com 10.000 consumidores sobre a preferência por tipo de sabão em pó. Verificou-se que 6500 usam a marca X. 5500 usam a marca Y. 2000 utilizam as duas marcas. Foi sorteada uma pessoa entre as 10000 e verificou-se que ela usa a marca X. Qual a probabilidade dessa pessoa também ser usuária da marca Y?



$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

OU AINDA:

$$P(x \mid y) = \frac{P(x \cap y)}{P(y)} = \frac{2000/10.000}{6500/10.000}$$

$$\boxed{P(x \mid y) \cong 30\%} \leftarrow \boxed{P(x \mid y) = 4/13}$$

36- Uma empresa de aluguel de carros anota o número de carros alugados. Em um determinado período, a probabilidade de alugar 10 carros é de 25%, a de alugar 11 carros é e 30%, de alugar 12 carros é de 35% e de alugar 13 carros é de 10%. Calcule o número médio de carros alugados por semana.

$$\mu = E(x) = \sum \left(P(x) \cdot x \right)$$

$$\mu = (10 \cdot 0{,}25) + (11 \cdot 0{,}3) + (12 \cdot 0{,}35) + (13 \cdot 0{,}1) = 11{,}3$$

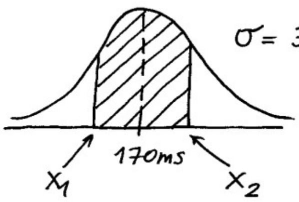
VARIÂNCIA

$$\sigma^2 = \sum \left((x-\mu)^2 \cdot P(x) \right)$$

$$\sigma^2 = (10 - 11{,}3)^2 \cdot 0{,}25 + (11 - 11{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + \ldots = 0{,}91$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}91} \cong 0{,}956$$ DESVIO PADRÃO

37- Uma pesquisa realizada com 100 estudantes, sendo 50 mulheres e 50 homens, mediu o tempo de reação para frear um carro em milisegundos. O valor médio obtido tanto para homens quanto para mulheres foi de 170ms com um desvio padrão de 30ms. Considerando que o tempo de reação obedece a uma distribuição normal, qual é a probabilidade de encontrar uma pessoa com tempo de reação maior que 140ms e menor que 200ms ?

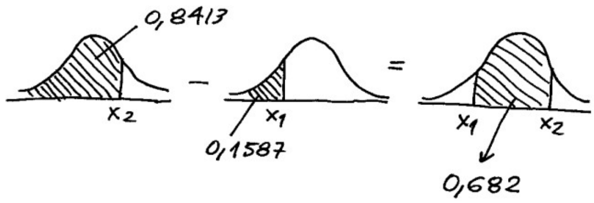


$\sigma = 30ms$ $\quad$ $P(140 \leq x \leq 200)\,ms$?

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{140-170}{30} = -1 \\ z_2 = \dfrac{200-170}{30} = +1 \end{cases}$$

NA TABELA DA CURVA NORMAL PADRÃO

$$\begin{cases} F(z_2) = 0{,}8413 \\ F(z_1) = 0{,}1587 \end{cases} \rightarrow$$



LOGO:

$$P(140 \leq x \leq 200) = 68{,}2\%$$

38- Em uma rede de computadores, em 50% dos dias ocorre alguma falha. Considere a variável aleatória X = número de dias com falha na rede. Considere o período de observação de 30 dias e suponha que os eventos são independentes. Qual a probabilidade de ocorrer 12 ou mais dias de falha na rede, considerando os 30 dias de observação? Qual a probabilidade de ocorrer exatamente 12 dias de falha na rede, considerando os mesmos 30 dias de observação?

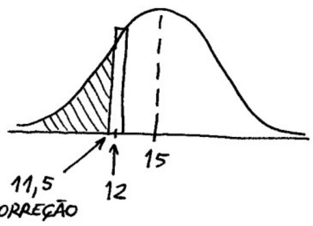
$P = 0,5$ OCORRÊNCIA DE FALHA NA REDE

$X =$ Nº DIAS COM FALHA $\quad N = 30$

$P(x = 12)$; $\quad P(x \geq 12)$

$$P(X = 12) = \frac{30!}{12!\,18!}\, 0,5^{12} \cdot 0,5^{18} = 0,08 \rightarrow 8\%$$

APROXIMAÇÃO COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL $\begin{cases} \bar{x} = N.p = 30.0,5 = 15 \\ \sigma = \sqrt{30.0,5.0,5} = 2,74 \end{cases}$



$$z_1 = \frac{11,5 - 15}{2,74} = -1,277$$

$F(z = -1,277) = 0,1020$

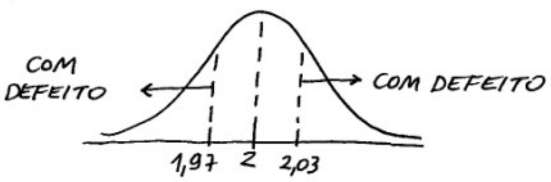
LOGO:

$P(x \geq 12) = 89,8\%$

39- Uma máquina produz discos de diâmetro médio de 2cm com desvio padrão de 0,01cm. As peças que se afastam por mais de 0,03cm desse valor médio são consideradas com defeito. Qual o percentual de peças consideradas defeituosas?

DISCOS $\mu = 2cm$
$\sigma = 0,01cm$

AS PEÇAS QUE SE AFASTAM MAIS QUE 0,03 cm SÃO DEFEITUOSAS.

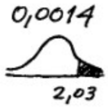


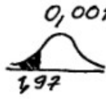
$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2,03 - 2}{0,01} = +3 \\ z_2 = \dfrac{1,97 - 2}{0,01} = -3 \end{cases}$$

$P(x > 2,03) + P(x < 1,97) = 0,028$

0,0014 $\quad$ 0,0014 $\quad$ 0,28%





SÃO DEFEITUOSAS

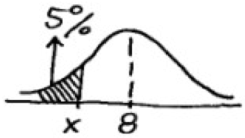
40- A campanha de lançamento diz que todos os produtos que tiverem defeito dentro do prazo de garantia serão trocados por novos. Se você fosse o gerente de produção, qual seria o tempo de garantia que você especificaria para ter no máximo 5% de trocas?

$\mu = 8$ ANOS

$\sigma = 1{,}8$ ANOS

MÁXIMO 5% TROCAS

$F(5\%) \Rightarrow z = -1{,}645$

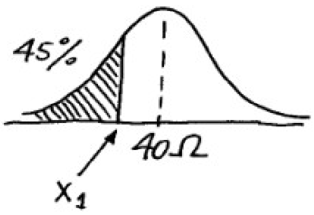


$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow X = Z.\sigma + \mu$$

$$X = (-1{,}645 \cdot 1{,}8) + 8$$

$$\boxed{X = 5{,}04 \text{ ANOS}}$$

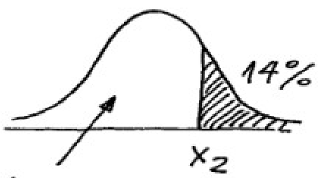
41- Uma empresa produz resistores com resistência média de 40 ohms e desvio padrão de 6 ohms. A resistência é normalmente distribuída. Quais os valores de resistências correspondem a 45% da área da curva normal à esquerda e área de 14% à direita da curva normal ?



$\mu = 40\Omega \quad \sigma = 6\Omega$

$X_1 = Z_1.\sigma + \mu$

$X_2 = Z_2.\sigma + \mu \rightarrow$



$A = 0{,}86$

$\downarrow$

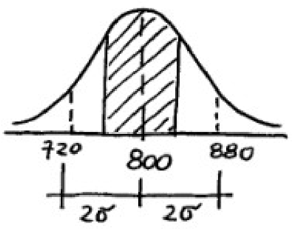
$z = 1{,}08$

$$\begin{cases} X_1 = (-0{,}125 \cdot 6) + 40 = 39{,}25 \\ X_2 = (1{,}08 \cdot 6) + 40 = 46{,}48 \end{cases}$$

42- A vida útil de um tipo de lâmpada é normalmente distribuída com valor médio de 800h e desvio padrão de 40h. Ao selecionarmos uma lâmpada aleatoriamente, qual a probabilidade de que ela queime entre 778 e 834 horas?

$$\begin{cases} \mu = 800h \\ \sigma = 40h \end{cases}$$

P(QUEIMAR ENTRE 778 E 834h) ?



$z_1 \to 778h \qquad z_1 = \dfrac{778-800}{40} = -0{,}55$

$z_2 \to 834h \qquad z_2 = \dfrac{834-800}{40} = 0{,}85$

$F(z_1) = 0{,}2912$

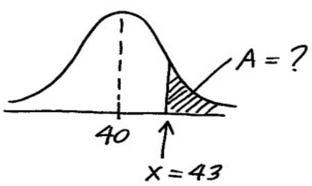
$F(z_2) = 0{,}8023$

$P(778 < x < 834) = 0{,}8023 - 0{,}2912 = 0{,}51 \to 51\%$

43- Em uma fábrica, um grande lote de resistores possui resistência elétrica normalmente distribuída com valor médio de 40 ohms e desvio padrão de 2 ohm. Qual a probabilidade de encontrarmos um resistor com resistência maior que 43 ohms?

RESISTORES

$$\begin{cases} \mu = 40\Omega \\ \sigma = 2\Omega \\ P(x > 43\Omega) \end{cases}$$



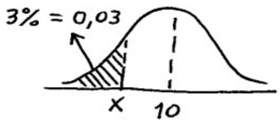
$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{43-40}{2}$

$z = 1{,}5 \to F(z = 1{,}5) = 0{,}933$

$P(x > 43) = 1 - 0{,}933 = 0{,}066$

$P(x > 43) \cong 6{,}6\%$

44- O engenheiro de uma fábrica de motores elétricos sabe que a vida média dos equipamentos produzidos é de 10 anos com desvio padrão de 2 anos. Os motores com defeito são trocados se estiverem na garantia. Se a fabrica quiser trocar somente 3% dos motores que apresentarem defeito, qual deve ser o tempo de garantia?



NA TABELA NORMAL $\rightarrow A = 0{,}03 \rightarrow \boxed{Z = -1{,}88}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow \boxed{X = Z.\sigma + \mu}$$

$$X = (-1{,}88 \,.\, 2) + 10 = 6{,}24 \text{ ANOS}$$

SE A GARANTIA FOR DE 6,2 ANOS APENAS 3% DOS PRODUTOS DEVERÃO SER TROCADOS NA GARANTIA.

45- Calcule o valor esperado e a variância da função distribuição de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \dfrac{3x^2}{2} & para\ \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \dfrac{3x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) x\, dx$$

$$E(x) = \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{3x^3}{2}\right) dx = \left(\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{3x^4}{8}\right)\Bigg|_0^1$$

$$E(x) = \left(x^3 - \frac{3x^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

VARIÂNCIA $\quad VAR(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

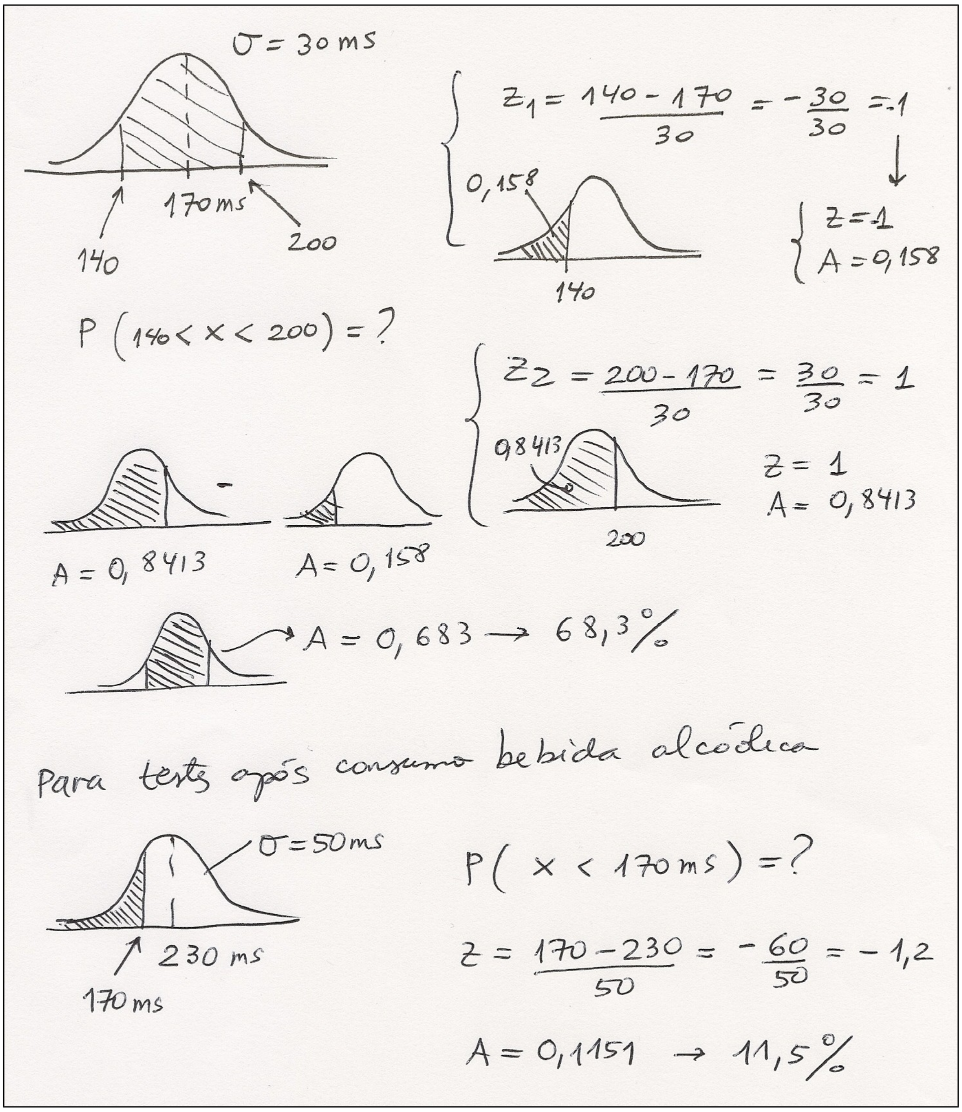
$$E(x^2) = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) x^2 dx = \int_0^1 \left(3x^3 - \frac{3x^4}{2}\right) dx$$

$$E(x^2) = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{3x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{10} = \frac{9}{20} \cong 0{,}45$$

logo

$$VAR(x) = \left(\frac{9}{20}\right) - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{9}{20} - \frac{25}{64} = \frac{19}{320}$$

46- Uma pesquisa realizada com 100 estudantes, sendo 50 mulheres e 50 homens, mediu o tempo de reação para frear um carro em milisegundos. O valor médio obtido tanto para homens quanto para mulheres foi de 170ms com um desvio padrão de 30ms. Considerando que o tempo de reação dos estudantes obedece uma distribuição normal, qual é a probabilidade de encontrar uma pessoa com tempo de reação maior que 140ms e menor que 200ms. A mesma pesquisa foi realizada após os mesmos 100 estudantes beberem 4 copos de cerveja, obtendo-se um tempo médio de reação para frear de 220ms com desvio padrão de 50ms para os homens e 240ms e desvio padrão 50ms para as mulheres. Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso que bebeu 4 copos de cerveja ter tempo de frenagem menor que 170ms? Considere que o tempo médio dos alunos que beberam é a média entre os tempos dos homens e das mulheres com o mesmo desvio padrão.



47- Os resistores de uma fábrica apresentam taxa de defeito de 40%. Um estagiário escolheu para teste uma amostra aleatória de 50 resistores de um lote de 1000. Qual é a probabilidade dele encontrar mais que 15 resistores com defeito na amostra?

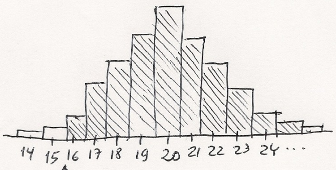
$P(\text{defeito}) = 0{,}40$

$N = 50$

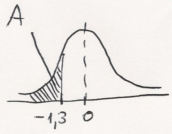
QUAL $P(x > 15$ peças com defeito$)$?

$\mu = N \cdot p = 50 \cdot 0{,}40 = 20$

$\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}60} = 3{,}46$



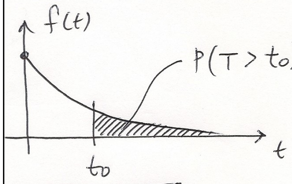
$15{,}5 \rightarrow Z = \dfrac{15{,}5 - 20}{3{,}46} = -1{,}30$



$A = 0{,}0968$

$P(x > 15) = 1 - 0{,}0968 = 0{,}903 \rightarrow 90{,}3\%$

48- Um componente eletrônico tem uma vida útil média de 1200 horas. Qual é a probabilidade dele ter uma vida útil menor que 1.000 horas?



$P(T > t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = e^{-\lambda t}$

$\boxed{E(T) = \dfrac{1}{\lambda}}$

Dado que vida média do componente $= 1200h$

Qual $P(T < 1000)$?

$E(T) = 1200h \rightarrow 1200 = \dfrac{1}{\lambda} \rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{1}{1200}}$

$P(T > 1000) = e^{-\frac{1}{1200} \cdot 1000}$

$P(T > 1000) = e^{-0{,}833} = 0{,}434$

logo:

$P(T < 1000h) = 1 - 0{,}434 = 0{,}565 \Rightarrow 56{,}5\%$

49- Calcule o valor esperado e a variância da função distribuição de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{PARA } 0 < X \leq 2 \\ -0{,}5x + 2 & \text{PARA } 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}25x & 0 \leq x < 2 \\ 1 - 0{,}25x & 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx}$$

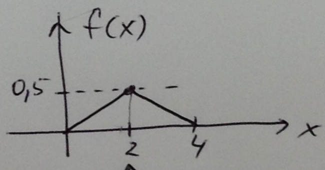
$$E(X) = \int_0^2 0{,}25x^2 dx + \int_2^4 (1 - 0{,}25x)x \, dx$$

$$E(X) = 0{,}25 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 - \frac{0{,}25x^3}{3}\Big|_2^4$$

$$E(X) = \frac{0{,}25 \cdot 8}{3} + \left[\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right] - \left[\frac{0{,}25 \cdot 64}{3} - \frac{0{,}25 \cdot 8}{3}\right]$$

$$E(X) = \frac{2}{3} + \frac{12}{2} - \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4 + 36 - 32 + 4}{6}$$

$$E(X) = \frac{12}{6} = 2$$



MEIO DO TRIÂNGULO OK

LOGO $VAR[X] = E[X^2] - (E(X))^2$

$$E(X^2) = \int_0^2 0{,}25x^3 dx + \int_2^4 (x^2 - 0{,}25x^3) dx$$

$$E(X^2) = \frac{0{,}25x^4}{4}\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 - \frac{0{,}25x^4}{4}\Big|_2^4 = 4{,}66$$

LOGO $VAR(X] = 4{,}66 - (2)^2 = 4{,}66 - 4 = 0{,}66$ //

50- Sabemos que 70% das empresas estão aptas a participar de uma licitação. Qual a probabilidade de encontrar pelo menos 1 apta em uma amostra aleatória de 20 empresas?

$$P(X=x)=\binom{N}{x}p^{x}\cdot q^{(N-x)}$$

$N=20$

$p=0{,}70$

$q=0{,}30$

$$P(X=0)=\binom{20}{0}.0{,}7^{0}.0{,}3^{20}=3{,}5\times 10^{-11}$$

$$P(X\geqslant 1)=1-(3{,}5\times 10^{-11})=0{,}99$$

$$P(X\geqslant 12)=P(X=12)+P(X=13)+\ldots+P(X=20)$$

OU APROXIMAÇÃO COM NORMAL

$$\bar{X}=N\cdot p=20.0{,}7=14$$

$$\sigma=\sqrt{N.p.q}=\sqrt{20.0{,}7.0{,}3}=4{,}2$$

CORREÇÃO DA CONTINUIDADE $(12-0{,}5)=11{,}5$

$$X\geqslant 12 \rightarrow Z=\frac{11{,}5-14}{4{,}2}=-0{,}59$$

$$F(-0{,}59)=0{,}277 \rightarrow$$

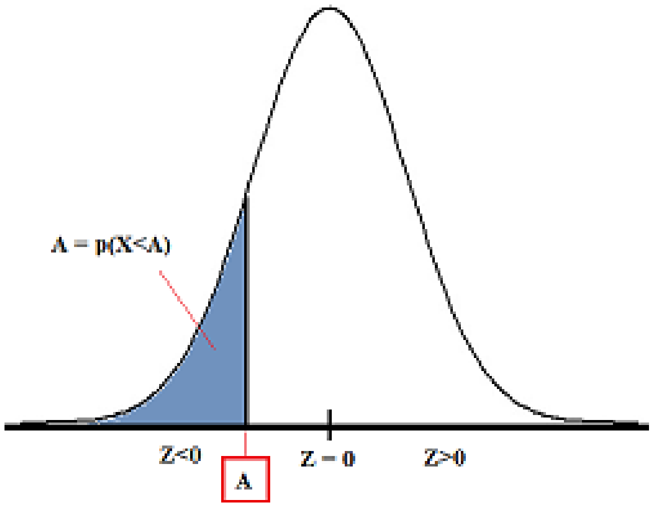
$$P(X\geqslant 12)=1-0{,}277=0{,}722$$

$$P(X\geqslant 12)=72{,}2\%$$

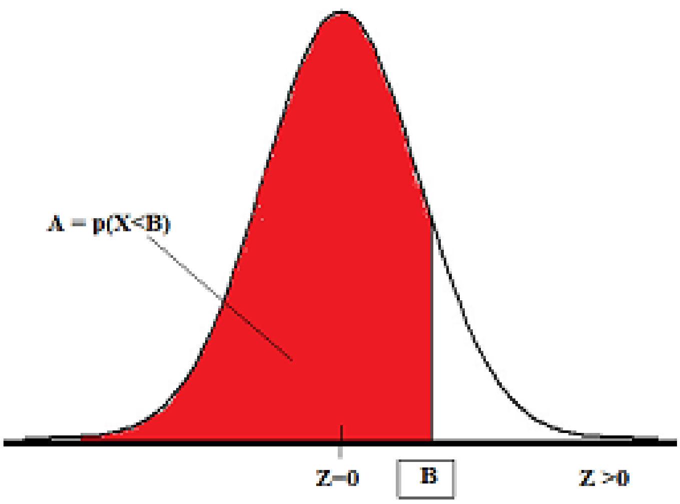
ANEXO C - TABELAS

CURVA NORMAL PADRONIZADA – VALORES SIMÉTRICOS

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990



a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

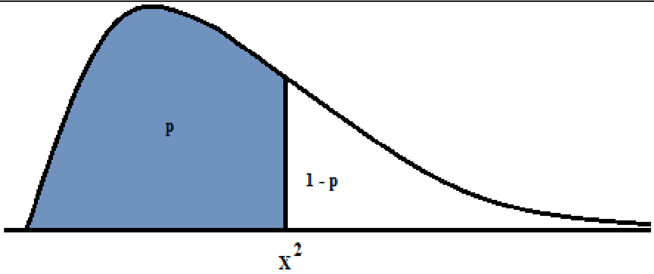


a	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

TABELA PARA DISTRIBUIÇÃO T STUDENT

gl	Teste Unilateral								
	15%	10%	5%	2,5%	2%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
	Teste Bilateral								
	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%
1	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	15,8945	31,8210	63,6559	318,2888	636,5776
2	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	4,8487	6,9645	9,9250	22,3285	31,5998
3	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	3,4819	4,5407	5,8408	10,2143	12,9244
4	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	2,9985	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	2,7565	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	2,6122	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,5168	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,4490	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,3984	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,3593	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,3281	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,3027	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,2816	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,2638	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,2485	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,2354	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.2238	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,2137	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,2047	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,1967	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,1894	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,1829	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,1770	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,1715	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,1666	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,1620	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,1578	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,1503	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,1470	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
35	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238	3,3400	3,5911

TABELA DE DISTRIBUIÇÃO Qui-QUADRADO



	Nível de Confiança													
GL	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	
1	3,93E-05	0,000157	0,000982	0,003932	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	1
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	2
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	4
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	5
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	6
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	7
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	8
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	9
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	10
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	11
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	12
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	13
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	14
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	15
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	16
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	17
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	18
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	19
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	20
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	21
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	22
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	23
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	24
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	25
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	26
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	27
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994	28
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335	29
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	30
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	40
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	50
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	60
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	70
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	80
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	90
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,170	100

TABELA DE NÚMEROS ALEATÓRIOS – GERADAS NO EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	8	8	1	5	4	0	1	1	3	3	9
2	8	5	9	1	8	8	1	0	7	3	9	0
3	9	3	3	8	6	8	9	7	8	5	4	8
4	4	0	2	3	4	9	4	5	3	9	2	1
5	0	9	6	4	4	9	3	3	8	8	8	0
6	1	7	4	4	8	6	4	8	5	7	6	0
7	8	1	0	0	6	4	6	3	5	8	2	1
8	9	0	1	0	5	1	1	6	0	1	6	2
9	9	6	2	4	3	3	2	7	2	1	7	4
10	8	6	9	4	7	2	6	6	1	9	4	0
11	9	4	1	2	1	8	6	6	9	3	2	5
12	6	2	5	7	5	9	4	9	6	8	1	1
13	3	7	3	4	2	8	4	4	0	5	3	6
14	0	6	8	2	9	2	8	1	3	8	0	5
15	7	6	2	3	5	1	1	6	5	1	1	5
16	7	5	7	3	9	0	1	9	8	1	0	5
17	5	4	5	0	3	8	7	9	4	4	0	2
18	3	8	0	2	4	2	3	1	9	1	6	8
19	2	8	5	3	8	9	9	3	0	3	7	1
20	9	2	7	2	4	5	8	9	6	2	6	9
21	5	2	0	6	7	5	9	1	1	7	0	0
22	5	8	6	5	7	1	5	9	6	2	8	7
23	7	6	2	4	7	6	3	0	3	2	3	7
24	9	1	3	1	0	9	6	3	7	9	6	2
25	0	6	8	6	0	0	4	7	3	0	5	4
26	0	5	8	1	1	2	2	7	0	9	1	1
27	9	8	8	1	8	9	6	0	7	7	1	4
28	3	7	9	0	0	9	5	1	1	1	3	2
29	4	7	3	6	5	1	4	5	9	8	4	9

REFERÊNCIAS:

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Censo da educação superior. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/>. Acesso em: 07 jun. 2016.

______. Ministério do Trabalho e Emprego. Classificação Brasileira de Ocupações. CBO 2002. Disponível em: Acesso em: 26 out. 2004.

BARBETTA, P. A. Estatística Aplicada às Ciências Sociais. Florianópolis: Ed. UFSC, 2011.

BUSSAB, W.; Morettin, P. Estatística básica; 5ª ed. São Paulo. Saraiva, 206.

COSTA, S.F. (1992). Introdução Ilustrada à Estatística. 2 ed. São Paulo. Harbra.

CRESPO, Antonio A. Estatística Fácil; 19ª ed. São Paulo. Saraiva, 2009.

DOWNING, Douglas; CLARK, Jeffrey Estatística Aplicada (Série Essencial). 3ª ed. São Paulo. Saraiva, 2010.

FONSECA, J.S. e MARTINS, G.A. Curso de Estatística. 3ª ed. São Paulo. Ed. Atlas,1982.

FREUND, J.E. e SIMON, G.A. Estatística Aplicada. Ed. Bookman, 1999.

HAZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade. 7 ed. São Paulo. Ed. Atual, 2004.

KAZMIER, Leonard J. Estatística Aplicada à Economia e Administração. Makron, 1982.

GONÇALVES Junior, A.A. Estatística e Metrologia. Notas de aula. Florianópolis. 2012.

LARSON, Ron; FARBER, Betsy Estatística aplicada; 2ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

MEYER, P.L. Probabilidade: Aplicações à Estatística: 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, George C. Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros; 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. Estatística Básica. São Paulo. Saraiva, 2010.

ROGERSON, Peter A. Métodos estatísticos para a geografia: um guia para o estudante. 7 ed. Porto Alegre. Bookman, 2012.

SALSBURG, David. Uma Senhora Toma Chá...como a estatística revolucionou a ciência no século XX. Rio de Janeiro. Ed. Sahar. 2009.

SPIEGEL, Murray R Estatística. 3ª ed. São Paulo. Pearson, 1994.

STEVENSON, W.J. Estatística Aplicada à Administração. Editora HARBRA, 1986.

STEWART, Ian. Dezessete equações que mudaram o mundo. Rio de Janeiro. Zahar, 2013.

TRIOLA, Mario F. Introdução á Estatística. 7a ed., Rio de Janeiro. LTC, 1999.

BRASIL. MINISTÉRIO DO TRABALHO – Apresentação sobre RAIS – CAGED.2014

SITES DE INTERNET CONSULTADOS

1- VEDUCA – CURSO DE ESTATÍSTICA
https://www.youtube.com/watch?v=VPrM1O--uKk

2- METÓDOS QUANTITATIVOS EM MEDICINA – USP
https://www.youtube.com/watch?list=PLKN-Hz0lVZ-JSq2_ZtaUl2CRdsfqJg7ln&v=U_ivNXumrhw

3- CURSO DE ESTATÍSTICA UNIVESP - TV
https://www.youtube.com/watch?v=K1MXYc_89D8

4- CURSO DE ESTATÍSTICA – IFPR
https://www.youtube.com/watch?v=nK-cHaBNVeQ

5- APRENDA USAR O SOFTWARE R
https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=wYXpbu-Y370

6- HANS ROSLING
https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=jbkSRLYSojo

7- COMO PREVER O FUTURO
https://www.youtube.com/watch?v=gAifa_CVGCY

8- CURSO DO M.I.T (EUA)
https://www.youtube.com/watch?list=PLQ3khvAsNhargDx0dG1cQXOrA2u3JsFKc&v=j9WZyLZCBzs

9- REPORTAGEM DA GLOBO NEWS SOBRE BIG DATA:
http://www.youtube.com/watch?v=LsMt5jp1a9k

10 – O PRAZER DA ESTATÍSTICA:
http://www.youtube.com/watch?v=AfYVOsuT-EI

11- O QUE É ESTATÍSTICA:
http://www.youtube.com/watch?v=-Wm9cxiXUe0

12- VOCAÇÃO – ESTATÍSTICA:
http://www.youtube.com/watch?v=vwo3GzKuNXo

13- AULAS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE DO VEDUCA:
http://www.veduca.com.br/play/7026

14- KHAN ACADEMY:
https://www.khanacademy.org/math/probability/independent-dependent-probability/old_prob_videos/v/introduction-to-random-variables?playlist=Statistics

15- DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE BINOMIAL
http://www.youtube.com/watch?v=ConmIDAzRqI&feature=youtu.be

16- O CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO MUNDIAL – ANÁLISE ESTATÍSTICA
http://www.youtube.com/watch?v=RuGTZEXh6yw

17- AULA DE ESTATÍSTICA DA RNP:
Curso Estatística RNP

18- ESTATÍSTICA DESCRITIVA:
http://www.youtube.com/watch?v=l2MyLvp82Rg

19 – TEOREMA DO LIMITE CENTRAL 2:
http://www.youtube.com/watch?v=zEwT_fIpSBE

20- AS MELHORES ESTATÍSTICAS QUE VOCÊ JÁ VIU.
http://www.youtube.com/watch?v=HQPSRHncJLo

21- ESTATÍSTICAS E O PODER DA MÁQUINA DE LAVAR ROUPA
http://www.youtube.com/watch?v=khsq7nHAveA

22- COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO E REGRESSÃO
http://www.youtube.com/watch?v=ODGzDA4zAq8

23- COMO SÃO REALIZADAS AS PESQUISAS ELEITORAIS:
http://www.youtube.com/watch?v=mWI8QM-HoeU&feature=youtu.be

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – EDUCREATIONS - BLOG SEGREDOSDAESTATISTICA.WORDPRESS.COM

- Aula 1 - Exercícios de Probabilidade
- Aula 2 - Exercícios de Probabilidade
- Aula 3 - Probabilidade de eventos não exclusivos
- Aula 4 - Probabilidade Condicional 1
- Aula 5 - Probabilidade Condicional 2
- Aula 6 - Probabilidade Condicional 3
- Aula 7 - Probabilidade Condicional 4
- Aula 8 - Probabilidade Condicional 5
- Aula 9 - Exercícios Gerais
- Aula 10 - Aplicando distribuição de probabilidades binomial 1
- Aula 11 - Cálculo de probabilidades usando diagrama de Veen
- Aula 12 - Distribuição probabilidades binomial
- Aula 13 - Distribuição de probabilidades binomial
- Aula 14 - Organização de dados e construção de diagrama de caixa (Quartil e Box Plot)
- Aula 15 - Cálculo de probabilidades usando curva normal
- Aula 16 - Calculando probabilidades com curva normal
- Aula 17 - Organização de dados em quartis e construção de diagrama de caixa
- Aula 18 - Probabilidade de obter bolas da mesma cor de uma urna
- Aula 19 - Média e desvio padrão a partir de um histograma
- Aula 20 - Poisson
- Aula 21 - Distribuição Normal
- Aula 22 - Distribuição normal
- Aula 23 - Média, moda e diagrama de caixa
- Aula 24 - Distribuição de Poisson
- Aula 25 - Distribuição binomial
- Aula 26 - Construção de diagrama de caixa
- Aula 27 - Aproximação da distribuição binomial como uma normal
- Aula 28 - Teorema Do Limite Central
- Aula 29 - Exercício de probabilidade
- Aula 30 - Probabilidade binomial aplicada ao controle estatístico de processos
- Aula 31 - Correlação entre idade e altura de crianças
- Aula 32 - Distribuição de Poisson
- Aula 33 - Probabilidade de erros em um módulo
- Aula 34 - Diagrama De Veen
- Aula 35 - Eventos
- Aula 36 - Usando Curva Normal
- Aula 37 - Aproximação Normal
- Aula 38 - Aproximação Normal
- Aula 39 - Usando Curva Normal
- Aula 40 - Construção De Histograma
- Aula 41 - Construção De Histograma
- Aula 42 - Usando Curva Normal

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS - EDUCREATIONS

- Aula 43 - Uso Da Curva Normal
- Aula 44 - Distribuição Normal
- Aula 45 - Distribuição Binomial
- Aula 46 - Probabilidade Binomial
- Aula 47 - Distribuição Binomial
- Aula 48 - Distribuição Binomial
- Aula 49 - Exercícios Resolvidos - Binomial E Probabilidade Condicional
- Aula 50 - Exercícios
- Aula 51 - Probabilidade
- Aula 52 - Inferência Estatística

Jesué Graciliano da Silva, natural de Marília (SP), é Engenheiro Mecânico graduado pela Universidade Federal de Santa Catarina, no ano de 1993. Sua carreira profissional iniciou 10 anos antes como Auxiliar de Desenhista em um escritório de engenharia, profissão que lhe permitiu custear seus estudos. Possui especialização em Engenharia de Segurança do Trabalho pela UFSC (1994-1995) e Curso "Escola de Governo" pela UDESC (1995). Concluiu em 1999 o mestrado na UFSC, na área de Ciências Térmicas (POSMEC).

Desde 1993, é professor efetivo do atual Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina – Câmpus São José, onde atua na Área Técnica de Refrigeração e Condicionamento de Ar e no Curso de Engenharia de Telecomunicações, nas disciplinas de Projetos, Termodinâmica, Transferência de Calor, Mecânica dos Fluidos, Estatística, Mecânica dos Sólidos, Desenho Técnico e Instalações de Refrigeração e Ar-Condicionado.

De 2003 a 2006, foi Diretor do Câmpus São José. Atuou como Diretor de Gestão do Conhecimento do IFSC de fevereiro de 2008 a fevereiro de 2009. A partir de fevereiro de 2009, assumiu a função de Pró-Reitor de Desenvolvimento do IFSC. De junho a dezembro de 2011, atuou como Reitor pro tempore do Instituto Federal de Santa Catarina. De fevereiro a maio de 2012, atuou como Ouvidor-Geral do IFSC. De junho a outubro de 2012 atuou como Reitor *pro tempore* do IF-Farroupilha. De agosto de 2013 a janeiro de 2014 atuou como Reitor *pro tempore* do IF Paraná.

É autor dos livros Introdução à Tecnologia da Refrigeração e Climatização (Editora Artliber) e Liderança Ética e Servidora (Editora do IFSC). É também coautor dos livros: "Do Discurso à Ação – uma experiência de gestão participativa na educação pública" (Editora Nova Letra), "Desenho Técnico para Refrigeração e Climatização" (Amazon), "Instalação de climatizadores tipo Splits na Prática" (Amazon), "Refrigeração e Climatização na Prática" (Amazon), e do livro-blog "Transformação do CEFET-SC em IFSC, concepções, conquistas e desafios". Em 2017 concluiu curso de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Geografia – Área de Desenvolvimento Regional e Urbano na UFSC. Sua pesquisa versou sobre a expansão da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica no Brasil e suas implicações socioespaciais no Estado de Santa Catarina. É autor do blog: www.jesuegraciliano.wordpress.com.