9. Equivalência Lógica

- Definição:

Uma fórmula ou proposição \mathbf{X} é *equivalente* a uma fórmula ou proposição \mathbf{Y} se, e somente se, $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ for uma equivalência tautológica.

$$simbolo: \iff (X \iff Y)$$

– Principais Equivalências:

(a) IDEMPOTÊNCIA

$$X \land X \Longleftrightarrow X$$

 $X \lor X \Longleftrightarrow X$

(b) COMUTAÇÃO

$$X \land Y \Longleftrightarrow Y \land X$$

 $X \lor Y \Longleftrightarrow Y \lor X$

(c) ASSOCIAÇÃO

$$(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} \Longleftrightarrow \mathbf{X} \wedge (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z})$$

 $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z} \Longleftrightarrow \mathbf{X} \vee (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z})$

(d) DISTRIBUIÇÃO

$$X \land (Y \lor Z) \Longleftrightarrow (X \land Y) \lor (X \land Z)$$

 $X \lor (Y \land Z) \Longleftrightarrow (X \lor Y) \land (X \lor Z)$
 $X \to (Y \land Z) \Longleftrightarrow (X \to Y) \land (X \to Z)$
 $X \to (Y \lor Z) \Longleftrightarrow (X \to Y) \lor (X \to Z)$

(e) TEOREMAS DE MORGAN

$$\sim$$
(X V Y) \Leftrightarrow \sim X \wedge \sim Y \sim (X \wedge Y) \Leftrightarrow \sim X \vee \sim Y

(f) DUPLA NEGAÇÃO

$$\sim (\sim X) \Leftrightarrow X$$

(g) IMPLICAÇÃO MATERIAL

$$X \rightarrow Y \Leftrightarrow \sim X \vee Y$$

(h) EQUIVALÊNCIA MATERIAL

$$X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \land (Y \rightarrow X)$$

 $X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X \land Y) \lor (\sim X \land \sim Y)$

(i) NEGAÇÃO DA IMPLICAÇÃO MATERIAL

$$\sim (X \rightarrow Y) \Leftrightarrow X \land \sim Y$$

(j) TRANSPOSIÇÃO (CONTRAPOSIÇÃO)

$$X \rightarrow Y \Leftrightarrow \sim Y \rightarrow \sim X$$

(k) IMPORTAÇÃO/EXPORTAÇÃO

$$(X \land Y) \rightarrow Z \Leftrightarrow X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$$

(1) ABSURDO

$$X \rightarrow (Y \land \sim Y) \Leftrightarrow \sim X$$

EXERCÍCIOS - EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Demonstrar a validade das inferências a seguir, utilizando a tabela-verdade.

ASSOCIAÇÃO 1

 $\overline{(A \land B)} \land C \Longleftrightarrow A \land (B \land C)$

A	В	С	АлВ	(А л В) л С	ВлС	Ал (ВлС)	$((A \land B) \land C) \longleftrightarrow (A \land (B \land C))$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

ASSOCIAÇÃO 2

 $(A \lor B)\lor C \Longleftrightarrow A \lor (B \lor C)$

A	В	C	A v B	(A v B) v C	B v C	A v (B v C)	((A v B) v C) ↔ (A v (B v C))
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					



DISTRIBUIÇÃO 1

 $\overrightarrow{A} \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	В	C	B v C	Α Λ (B v C)	ΑΛВ	АлС	(A Λ B) v (A Λ C)	$(A \land (B \lor C)) \rightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$
V	V	V						
V	V	F						
V	F	V						
V	F	F						
F	V	V						
F	V	F						
F	F	V						
F	F	F						

DISTRIBUIÇÃO 2

 $\overrightarrow{A \vee} (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	В	C	ВлС	Α ν (ΒΛC)	A v B	A v C	(A v (B∧C))→ ((A v B)∧ (A v C))
V	v	V					
V	v	F					
V	F	\mathbf{V}					
V	F	F					
F	V	V					
F	\mathbf{V}	F					
F	F	V					
F	F	F					

DISTRIBUIÇÃO 3

 $\overrightarrow{A} \rightarrow (\overrightarrow{B} \land C) \iff (A \rightarrow B) \land (A \rightarrow C)$

				\ \	-,	.	<i>, ,</i> , ,, ,, ,,	
A	В	C	ВлС	$A \rightarrow (B \wedge C)$	$A \to B$	A → C	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$	$(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$
V	\mathbf{v}	V						
V	V	F						
V	F	V						
V	F	F						
F	\mathbf{V}	V						
F	\mathbf{v}	F						
F	F	V						
F	F	F						

DISTRIBUIÇÃO 4

	$A \rightarrow ($	(B v ($C) \iff 0$	$(A \rightarrow B)$) v ($(A \rightarrow$	C)
--	-------------------	--------	-------------	---------------------	-------	------------------	----

A	В	C	B v (2	A → (B v C	(i) A → B	A → C	(A → B) V (A → C)	$(A \rightarrow (B \mathbf{V} C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \mathbf{V} (A \rightarrow C))$
V	V	V							
V	V	F							
V	F	V							
V	F	F							
F	V	V							
F	V	F							
F	F	V							
F	F	F							

TEOREMAS DE MORGAN

$$\overline{\sim}(A \lor B) \Longleftrightarrow \sim A \land \sim B$$

A	В	AVB	~(A v B)	~ A	~B	~A ^ ~B	~(A V B) ~ (~A A ~B)
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

$$\sim$$
(A A B) $\Longleftrightarrow \sim$ A $\vee \sim$ B

A	В	АлВ	~(A A B)	~ A	~ B	~A v ~B	~(A ∧ B) → (~A ∨ ~B)
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

IMPLICAÇÃO MATERIAL

$$\begin{array}{c} CAO \text{ MATERIAL} \\ A \rightarrow B \iff \sim A \lor B \end{array}$$

A	В	$A \rightarrow B$	~ A	~A v B	$(A \rightarrow B) \leftarrow (\sim A \lor B)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

$\frac{\text{NEGAÇÃO DA IMPLICAÇÃO MATERIAL}}{\sim (\mathsf{A} \to \mathsf{B} \) \Longleftrightarrow \textbf{A} \ \land \ \sim \textbf{B}}$

$$\sim$$
 (A \rightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \sim B

A	В	A → B	~(A → B)	~ B	A A ~ B	$\sim (A \rightarrow B) \rightarrow (A \land \sim B)$
V	\mathbf{V}					
V	F					
F	V					
F	F					

$$\frac{\text{IMPORTAÇÃO}/\text{EXPORTAÇÃO}}{(A \text{ A B}) \to C \Longleftrightarrow \text{A} \to (B \to C)}$$

A	В	C	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	$(A \wedge B) \rightarrow C$	B → C	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$((A \land B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
\mathbf{V}	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

ABSURDO

$$A \rightarrow (B \land \sim B) \iff \sim A$$

A	В	B ∧ ~ B	$A \rightarrow (B \land \sim B)$	$(A \rightarrow (B \land \sim B)) \leftrightarrow \sim A$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			