LISTA DE EXERCÍCIOS DE SISTEMAS LINEARES - GABARITO

1. A soma dos quadrados das soluções do sistema $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=9 \end{cases} \Rightarrow L_2 = 3L_1 - 2L_2 \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=-15 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$1^a\, linha: 2x+3(-3)=1 \Rightarrow 2x-9=1 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{2}=5.$$

$$S=(-3)^2+(5)^2=9+25=34.$$

2. A solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+3y+2z=13 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+3y+2z=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \mathbf{4L_1 - L_2} \\ \mathbf{L_1 - L_3} \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2y+5z=19 \\ -2y-z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{L_2 + L_3} \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2y+5z=19 \\ 4z=12 \Rightarrow z=3 \end{cases}$$

$$2y+5(3)=19 \Rightarrow 2y=19-15 \Rightarrow y=\frac{4}{2}=2 \quad \Rightarrow \quad S=\{(1,2,3)\}$$

$$x+2+3=6 \Rightarrow x=1$$

3. Se a, b, e c são as soluções do sistema $\begin{cases} x+2y+z=16 \\ 2x+y+z=15 \\ x+y+2z=17 \end{cases}$, então a.b.c vale:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+2y+z=16 \\ 2x+y+z=15 \\ x+y+2z=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \mathbf{2L_1 - L_2} \\ \mathbf{L_1 - L_3} \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=16 \\ 3y+z=17 \\ y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{L_2 - 3L_3} \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=16 \\ 2y+5z=17 \\ 4z=20 \Rightarrow z=5 \end{cases}$$

$$3y+5=17 \Rightarrow 3y=17-5 \Rightarrow y=\frac{12}{3}=4 \quad \Rightarrow \quad S=a.b.c=3.4.5=60.$$

$$x+2(4)+5=16 \Rightarrow x=3$$

4. Se $\begin{cases} 2x-5y+9z=-7 \\ -4x-3y+8z=-12 \\ 7x+4y-9z=21 \end{cases}$ então encontre a solução:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x-5y+9z=-7 \\ -4x-3y+8z=-12 \\ 7x+4y-9z=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{2L_1+L_2} \\ \mathbf{7L_1-2L_3} \end{matrix} \begin{cases} 2x-5y+9z=-7 \\ -13y+26z=-26 \\ -43y+81z=-91 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{43L_2-13L_3} \begin{cases} 2x-5y+9z=-7 \\ -13y+26z=-26 \\ 65z=65 \Rightarrow z=1 \end{cases}$$

$$-13y+26(1)=-26 \Rightarrow -13y=-26-26 \Rightarrow y=\frac{-52}{-13}=4$$

$$2x-5(4)+9(1)=-7 \Rightarrow 2x=11-7 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2$$

$$\Rightarrow S=\{(2,4,1)\}.$$

5. Dado o sistema $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3x-z=-9 \\ 3y+2z=-9 \end{cases}$, podemos afirmar que x.y.z é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3x-z=-9 \\ 3y+2z=-9 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{3L_1-L_2} \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3y+10z=15 \\ 3y+2z=-9 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L_2-L_3} \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3y+10z=15 \\ 8z=24 \Rightarrow z=3 \end{cases}$$

$$3y+10(3)=15 \Rightarrow 3y=-30+15 \Rightarrow y=\frac{-15}{3}=-5$$

$$x-5+3(3)=2 \Rightarrow x=2-4=-2$$

$$\Rightarrow S=x.y.z=(-2).(-5).3=30.$$

6. Sendo a ≠ 1 o valor de y - x no sistema $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+y=2a-1 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+z=2a-1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L_1-aL_2} \begin{cases} ax+y=a^2 \\ y-ay=a^2-(2a^2-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y(1-a)=a^2-2a^2+a \\ y=\dfrac{a(1-a)}{1-a}=a \end{matrix}$$

$$ax+a=a^2 \Rightarrow ax=a(a-1) \Rightarrow x=\frac{a(a-1)}{a}=a-1$$

$$S=y-x=a-(a-1)=a-a+1=1.$$

7. Sendo |a| ≠ |b| o par (x, y) solução do sistema $\begin{cases} ax+by=2ab \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} ax+by=2ab \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{bL_1 - aL_2} \quad \begin{cases} ax+by=2ab \\ (b^2-a^2)y=2ab^2-a^3-ab^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y=\dfrac{ab^2-a^3}{b^2-a^2} \\ y=\dfrac{a(b^2-a^2)}{b^2-a^2}=a \end{array}$$

$$ax+b(a)=2ab \Rightarrow ax=2ab-ab \Rightarrow x=\frac{ab}{a}=b$$

$$S=\{(b,a)\}$$

8. Resolvendo o sistema $\begin{cases} x=2y \\ 2y=3z \\ x+y+z=11 \end{cases}$ vemos que x + 2y + 3z vale:

Solução. Substituindo os termos na 3ª equação do sistema, temos:

$$\begin{cases} x=2y \\ 2y=3z \\ x+y+z=11 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2y+y+\dfrac{2y}{3}=11 \Rightarrow 6y+3y+2y=33 \Rightarrow y=\dfrac{33}{11}=3 \\ x+2y+3z=6+2(3)+2(3)=18. \end{array}$$

9. Os valores de x , y e z solução do sistema $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4x+5y+6z=32 \\ 7x+8y+9z=a \end{cases}$ formam, nessa ordem, uma PA de razão 1. O valor de a é:

Solução. Escolhendo x = k; y = k + 1 e z = k + 2, temos:

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4x+5y+6z=32 \\ 7x+8y+9z=a \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 4k+5k+5+6k+12=32 \Rightarrow 15k=32-17 \Rightarrow k=\dfrac{15}{15}=1 \\ 7(1)+8(2)+9(3)=a \Rightarrow a=7+16+27=50 \end{array}$$

x = 1
y = 2
z = 3

10. O valor de $\dfrac{x}{y}$ no sistema $\begin{cases} x+2y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{L_1 - L_2} \begin{cases} x+2y=10 \\ 3y=6 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y=\dfrac{6}{3}=2 \\ x+2(2)=10 \Rightarrow x=10-4=6 \end{array} \Rightarrow \quad S=\frac{x}{y}=\frac{6}{3}=2.$$

11. O valor de $\frac{x+y}{z}$ no sistema $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ x-2y+3z=7 \\ 2x+3y+z=11 \end{cases}$, é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ x-2y+3z=7 \\ 2x+3y+z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ L_1-L_2 \\ 2L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3y-z=1 \\ -y+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_2+3L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3y-z=1 \\ 8z=16 \Rightarrow z=2 \end{cases}$$

$$3y-2=1 \Rightarrow y=\frac{3}{3}=1$$

$$x+1+2(2)=8 \Rightarrow x=8-5=3$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{z}=\frac{3+1}{2}=2.$$

12. O valor de x + y + z no sistema $\begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ 4x+5y+7z=7 \\ -2x+y-3z=3 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ 4x+5y+7z=7 \\ -2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2L_1-L_2 \\ L_1+L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ y-15z=17 \\ 4y-7z=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 4L_2-L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ y-15z=17 \\ -53z=53 \Rightarrow z=-1 \end{cases}$$

$$y-15(-1)=17 \Rightarrow y=17-15=2$$

$$2x+3(2)-4(-1)=12 \Rightarrow 2x=12-6-4=2 \Rightarrow x=1$$

$\Rightarrow$ x + y + z = 1 + 2 – 1 = 2.

13. O valor de $x^2 + y^2 + z^2$ no sistema $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y-z=5 \\ x+z=6 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y-z=5 \\ x+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ L_1-L_2 \\ L_1-L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2y=-6 \\ y-2z=-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x-3-2=-1 \Rightarrow x=4$$

$$y=\frac{-6}{2}=-3$$

$$-3-2z=-7 \Rightarrow -2z=-7-3 \Rightarrow z=\frac{-4}{-2}=2$$

$\Rightarrow$ **$x^2 + y^2 + z^2$ = 16 + 9 + 4 = 29**.

14. O valor de $\frac{x+z}{y}$ no sistema $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2z=11 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2z=11 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L_1 - 2L_2} \begin{cases} 2x+y=5 \\ y-4z=-17 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{2L_2 - L_3} \begin{cases} 2x+y=5 \\ y-4z=-17 \\ -9y=-36 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y-4(4)=-17 \Rightarrow y=-17+16=-1 \\ 2x-1=5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x+z}{y}=\frac{3+4}{-1}=-7.$$

15. O valor de x + y + z no sistema $\begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ 4y-2z=-10 \\ 6x-y+3z=4 \end{cases}$ é:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ 4y-2z=-10 \\ 6x-y+3z=4 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{2L_1 - L_3} \begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ 4y-2z=-10 \\ 5y-z=-8 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{5L_2 - 4L_3} \begin{cases} 3x+2y+z=-2 \\ 4y-2z=-10 \\ -6z=-18 \Rightarrow z=3 \end{cases}$$

$$4y-2(3)=-10 \Rightarrow y=-10+6 \Rightarrow y=\frac{-4}{4}=-1$$

$$3x+2(-1)+3=-2 \Rightarrow 3x+1=-2 \Rightarrow x=\frac{-3}{3}=-1$$

$\Rightarrow$ **x + y + z = - 1 - 1 + 3 = 1**.

16. Se $\begin{cases} x+4z=-7 \\ x-3y=-8 \\ y+z=1 \end{cases}$ então x + y + z é igual a:

Solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+4z=-7 \\ x-3y=-8 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L_1 - L_2} \begin{cases} x+4z=-7 \\ 3y+4z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L_2 - 3L_3} \begin{cases} x+4z=-7 \\ 3y+4z=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$3y+4(-2)=1 \Rightarrow 3y=1+8 \Rightarrow y=\frac{9}{3}=3$$

$$x+4(-2)=-7 \Rightarrow x=-7+8=1$$

$\Rightarrow$ **x + y + z = 1 + 3 - 2 = 2.**