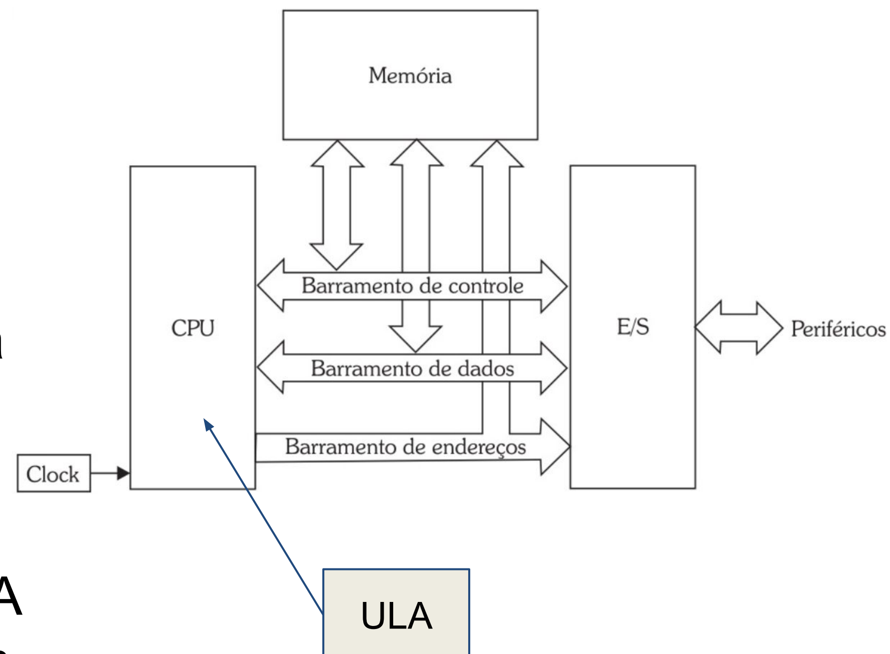
INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

CST Análise e Desenvolvimento de Sistemas
AOC786201 - Fundamentos de Arquitetura e Organização de Computadores

ULA (Unidade Lógica e Aritmética)

Arquitetura de John von Neumann

- Os computadores possuem blocos e sistemas funcionais básicos interligados, permitindo a troca de dados sob o controle da CPU
- Um sinal de clock determina a frequência de operação da CPU que busca uma instrução da memória, a decodifica, executa a operação correspondente, e então passa para a próxima instrução
- Nesta material focaremos na ULA (Unidade Lógica e Aritmética) um componente da CPU (Unidade Central de Processamento)



ULA (Unidade Lógica e Aritmética)

- A ULA é um componente interno da CPU, responsável por realizar operações matemáticas e lógicas básicas, como adição, subtração, AND, OR, NOT, comparação, etc.
- É projetada para executar instruções muito específicas, geralmente envolvendo cálculos simples ou manipulação de bits.
- Não possui controle de fluxo ou capacidade de gerenciar outros componentes.
- Para compreender melhor o funcionamento da ULA vamos estudar alguns circuitos aritméticos.

Relembrando a soma aritmética nos números decimais

- Para realizar a operação soma, fazemos cada "casa" por vez, primeiro das unidades, depois dezenas, depois centenas, …
- Como no sistema decimal temos 10 símbolos (de 0 a 9), se ao somar uma casa o valor for maior do que 9, então dizemos que "vai 1" para a casa da esquerda

$$\begin{array}{cr} & {\scriptstyle 1} \\ & 48 \\ + & \underline{95} \\ & 3 \end{array} \longrightarrow$$

Resultado final:
48 + 95 = 143

$$\begin{array}{cr} & {\scriptstyle 1} \\ & 48 \\ + & \underline{95} \\ & 143 \end{array}$$

A soma aritmética nos números binários

- Segue a mesma lógica dos decimais, porém temos apenas 2 símbolos (0 e 1), ou seja, se ao somar uma casa o valor for maior do que 1, então dizemos que "vai 1" para a casa da esquerda

```
    1
  1001
+  101
  ----
     0
```

```
   1
  1001
+  101
  ----
    10
```

```
  1
  1001
+  101
  ----
   110
```

```
   1
  1001
+ 0101
  ----
  1110
```

Resultado final:
9 + 5 = 14

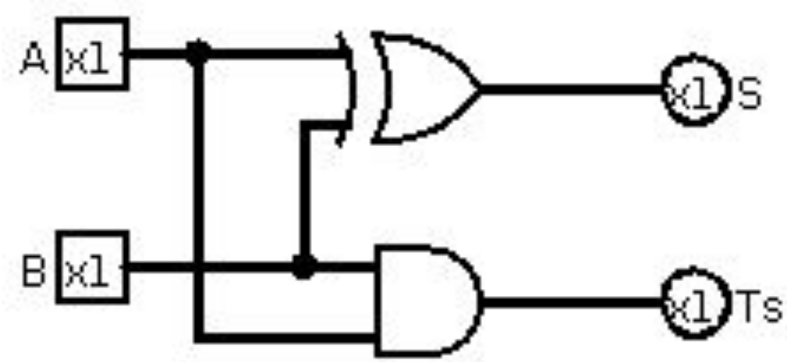
Circuitos Aritméticos: Meio somador

- Considerando um somador de um bit, sabemos que:
  - 0 + 0 = 00
  - 0 + 1 = 01
  - 1 + 0 = 01
  - 1 + 1 = 10, ou seja, 0 e vai 1
- Considerando esta tabela verdade, podemos obter a expressão de S e Ts:

A	B	S	Ts
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$S = A \oplus B$$

$$Ts = AB$$



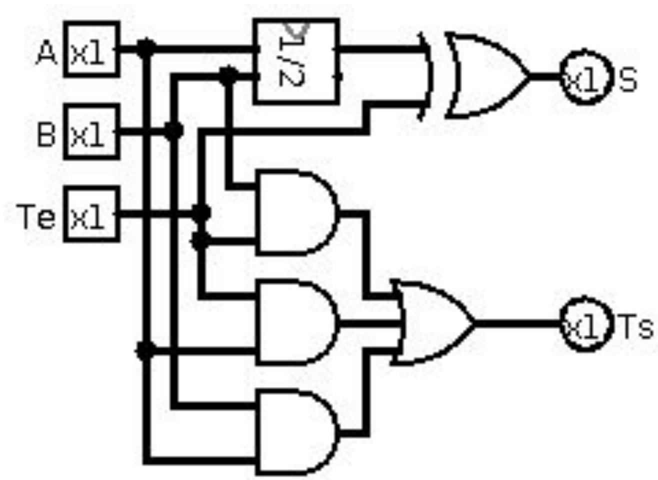
Circuitos Aritméticos: Somador completo

- O meio somador não considera um bit que tenha sobrado (transporte de outra soma).
- Para isso é necessário haver uma terceira entrada, a Te (transporte de entrada)
- Considerando esta tabela verdade, podemos obter a expressão de S e Ts:

A	B	T_E	S	T_S
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

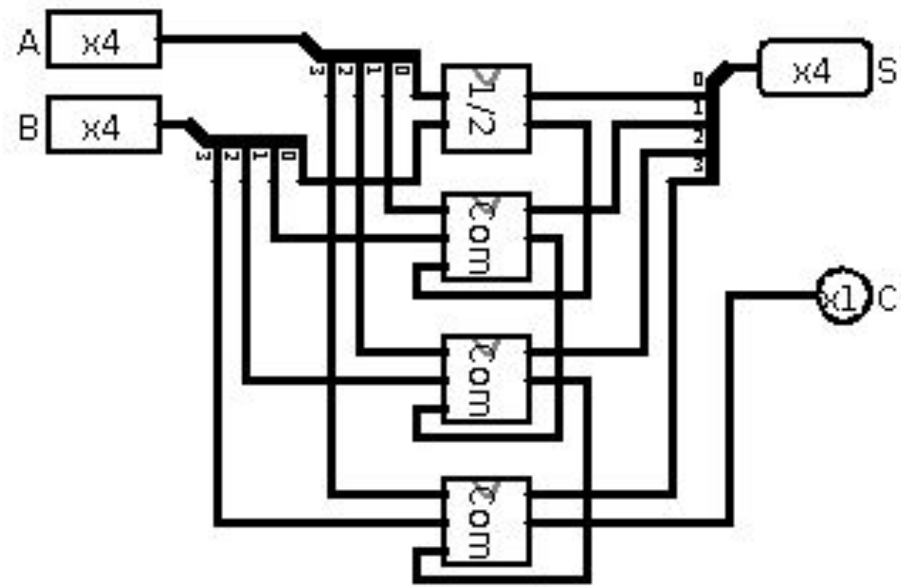
$$S = A \oplus B \oplus T_E$$

$$T_S = BT_E + AT_E + AB$$



Circuitos Aritméticos: Somador de 4 bits

- Um somador de 4 bits pode ser construído associando 1 meio somador e 4 somadores completos.
- Observe que as entradas A e B agora são de 4 bits e a saída é de 4 bits e mais o bit de transporte (Carry / vai um)



Circuitos Aritméticos: Somador de 4 bits - exercícios

- 0+1=1 0000 + 0001 = ________
- 4+8=12 0100 + 1000 = ________
- 8+4=12 1000 + 0100 = ________
- 4+11=15 0100 + 1011 = ________
- 5+11=16 0101 + 1011 = ________
- 5+12=17 0101 + 1100 = ________
- 9+12=21 1001 + 1100 = ________
- 15+14=29 1111 + 1110 = ________
- 15+15=30 1111 + 1110 = ________

Relembrando a subtração aritmética nos decimais

- Para realizar a operação subtração, fazemos cada "casa" por vez, primeiro das unidades, depois dezenas, depois centenas, …
- Ao subtrair uma casa se o valor da casa do minuendo é maior do que do subtraendo, então dizemos que "pega 1" (emprestado) da casa da esquerda

$$\begin{array}{rr} & {\color{red}8}\;\;{\color{red}1} \\ & 95 \\ - & \underline{48} \\ & 7 \end{array} \quad \longrightarrow$$

Resultado final:
95 - 48 = 47

$$\begin{array}{rr} & {\color{red}8}\;\;{\color{red}1} \\ & \cancel{9}5 \\ - & \underline{48} \\ & 47 \end{array}$$

A subtração aritmética nos números binários

- Segue a mesma lógica dos decimais, porém temos apenas 2 símbolos (0 e 1), ou seja, "pega 1" para a casa da esquerda se o valor da casa do minuendo for menor do que do subtraendo

$$\begin{array}{rr} & 1001 \\ - & 101 \\ \hline & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rr} & 1001 \\ - & 101 \\ \hline & 00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rr} & {\color{red}0}\;\;{\color{red}1}\;\;\; \\ & 1001 \\ - & 101 \\ \hline & 100 \end{array}$$

Resultado final:
9 - 5 = 4

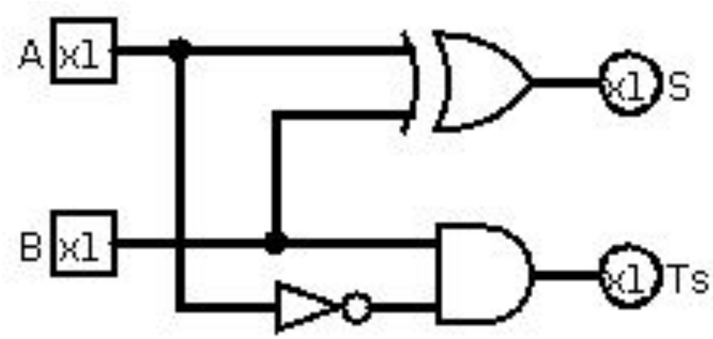
$$\begin{array}{rr} & {\color{red}0}\;{\color{red}1}\;\;\;\; \\ & \cancel{1}001 \\ - & 0101 \\ \hline & 0100 \end{array}$$

Circuitos Aritméticos: Meio subtrator

- Considerando um subtrator de um bit, sabemos que:
  - 0 - 0 = 0
  - 0 - 1 = 1 e transporta 1
  - 1 - 0 = 1
  - 1 - 1 = 0
- Considerando esta tabela verdade, podemos obter a expressão de S e Ts:

$$S = A \oplus B$$
$$Ts = \overline{A}B$$

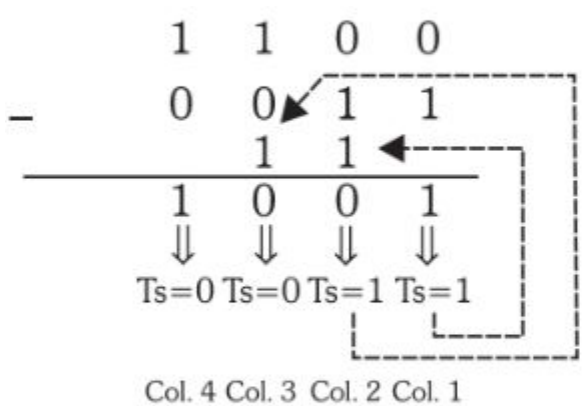
A	B	S	Ts
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

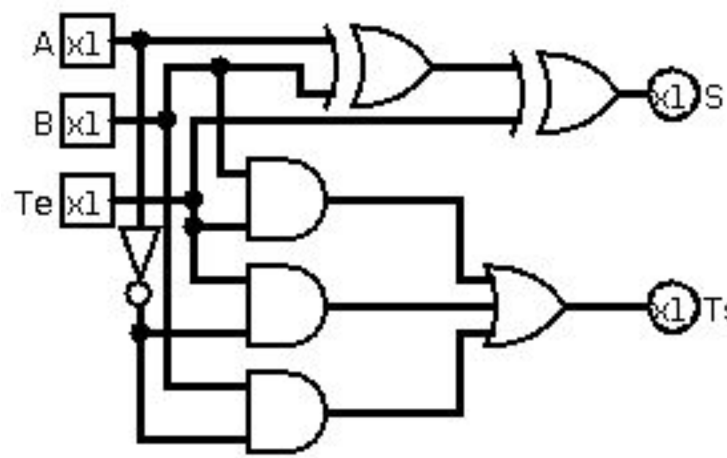


Circuitos Aritméticos: Subtrator completo

- Novamente, o meio subtrator não considera o bit de transporte de outra operação
- É necessário considerar se emprestou um para que esse bit seja subtraído
- Para entender a lógica, vamos calcular 12 - 3 = 9, em binário

A	B	T_E	S	T_S
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1





Circuitos Aritméticos: sistema de complemento de 2

- Primeiro, obtenha o complemento de 1 de um numaral invertendo cada
  - Todo ‘1’ vira ‘0’ e todo ‘0’ vira ‘1’
  - Exemplo:

$$\begin{array}{cccccc l} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \text{número binário original} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{complementa-se cada bit para obter o complemento de 1} \end{array}$$

- Depois some 1 a este numeral
  - Exemplo:

$$\begin{array}{rl} 101101 & \text{número binário de 45} \\ 010010 & \text{complementa-se cada bit para obter o complemento de 1} \\ +\qquad 1 & \text{adiciona-se 1 para obter o complemento de 2} \\ \hline 010011 & \text{complemento de 2 do número binário original} \end{array}$$

Resultados negativos na subtração

- Quando o minuendo é menor que o subtraendo é necessário trocar estes numerais de posição e determinar que o resultado será negativo.
- Exemplo: 45 - 98. O 45 é menor que 98, então faremos 98 - 45.

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ \underline{98} \\ ? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ -\ \underline{45} \\ -\ \ ? \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 98 \\ -\ \underline{45} \\ -\ \ 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 98 \\ -\ \underline{45} \\ -53 \end{array}$$

Resultado final:
98 - 45 = - 53

Representamos o resultado negativo com o símbolo - (menos) antes do numeral. Como representar o negativo em sistemas digitais?

Representação de numerais negativos nos sistemas digitais

- Como nos sistemas digitais tudo se resume a 0's e 1's, mesmo o sinal, que representa o número negativo, precisa ser representado com 0's e 1's.
- A forma mais utilizada para representar números negativos é através da notação de complemento de 2, mas antes de ver esta, vamos estudar a representação sinal-magnitude.
- Nesta o numeral negativo é idêntico ao positivo, variando apenas o algarismo mais a esquerda que representa o sinal, quando for 0 (zero) o numeral é positivo e quando for 1 (um) é negativo.
- Exemplo de um numeral de 8 bits:
  - $00000011_2 = 3$
  - $10000011_2 = -3$
- Essa representação é muitas vezes mais intuitiva, porém traz o problema de que existem 2 zeros, um positivo ($+0 = 00000000_2$) e outro negativo ($-0 = 1000000_2$). Outra questão é que operações matemáticas entre numerais representados assim são mais complexas.

Circuitos Aritméticos: sistema de complemento de 2

- O complemento de 2 é muito utilizado para representação de numerais com sinal
  - Quando um numeral é positivo, o bit mais a esquerda é 0 (zero)
  - Quando um numeral é negativo, o bit mais a esquerda é 1 (um)

- Exemplo de cálculo e representação:

$$
\begin{array}{rrl}
+9 = & 01001 & \\
 & 10110 & \text{(complemento de 1 de cada bit, incluindo o bit de sinal)} \\
+ & \underline{1} & \text{(soma-se 1 ao LSB)} \\
-9 = & 10111 & \text{(representação de –9 em complemento de 2)}
\end{array}
$$

Circuitos Aritméticos: sistema de complemento de 2

Valor decimal	Binário com sinal usando complemento de 2
$+7 = 2^3 - 1$	0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
0	0000
–1	1111
–2	1110
–3	1101
–4	1100
–5	1011
–6	1010
–7	1001
$-8 = -2^3$	1000