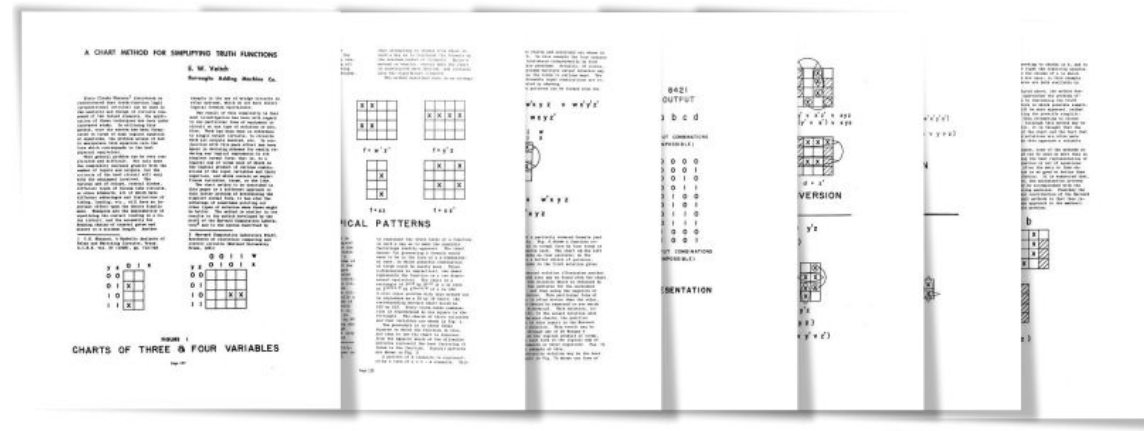


CST Análise e Desenvolvimento de Sistemas AOC786201 - Fundamentos de Arquitetura e Organização de Computadores

Simplificação de circuitos lógicos
Diagramas de Veitch-Karnaugh

Método do Diagrama de Veitch-Karnaugh

- O diagrama (mapa) de Karnaugh é um método de simplificação gráfico criado por Edward Veitch (1952) e aperfeiçoado pelo engenheiro de telecomunicações Maurice Karnaugh.
- Edward W. Veitch foi um matemático dos Estados Unidos. Ele descreveu em seu artigo "A Chart Method for Simplifying Truth Functions" (1952) um procedimento gráfico para otimizar circuitos lógicos, refinado em 1953 num artigo de Maurice Karnaugh no que hoje é conhecido como mapa de Karnaugh.

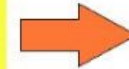


Edward W. Veitch, 1952, "A Chart Method for Simplifying Truth Functions", Transactions of the 1952 ACM Annual Meeting, ACM Annual Conference/Annual Meeting "Pittsburgh", ACM, NY, pp. 127-133.

Método do Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Os diagramas são chamados de mapas, pois trata-se de um mapeamento a partir de uma tabela verdade da função analisada.
- Ele é utilizado para simplificar uma equação lógica ou para converter uma tabela verdade no seu circuito lógico correspondente.
- O método de leitura por “mapa de Karnaugh” é considerado mais simples que a “álgebra booleana”.
- Porém quando utilizado mais de 4 entradas, esse método se torna complicado, pois fica difícil identificar as células adjacentes no mapa. Para esse caso são utilizados soluções algorítmicas computacionais.

A	B	C	F
0	0	0	m0
0	0	1	m1
0	1	0	m2
0	1	1	m3
1	0	0	m4
1	0	1	m5
1	1	0	m6
1	1	1	m7



\overline{C} \ AB	00	01	11	10
0	m0	m2	m6	m4
1	m1	m3	m7	m5

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
\overline{C}	m0	m2	m6	m4
C	m1	m3	m7	m5

	\overline{A}		A	
\overline{C}	m0	m2	m6	m4
C	m1	m3	m7	m5
	\overline{B}	B	\overline{B}	B

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis)

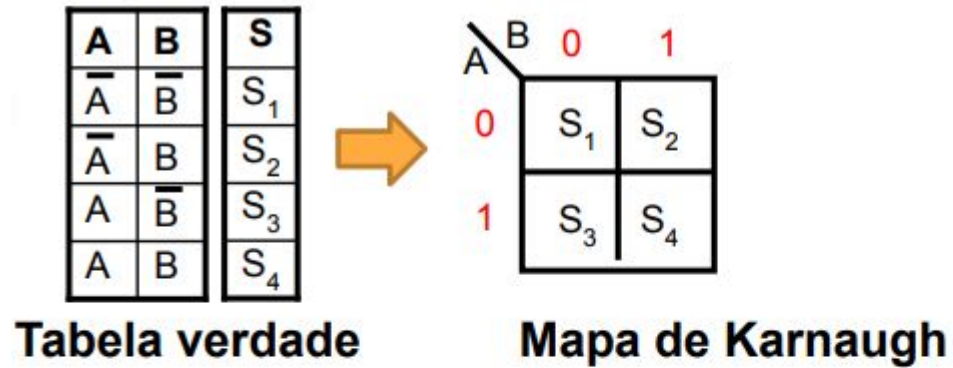
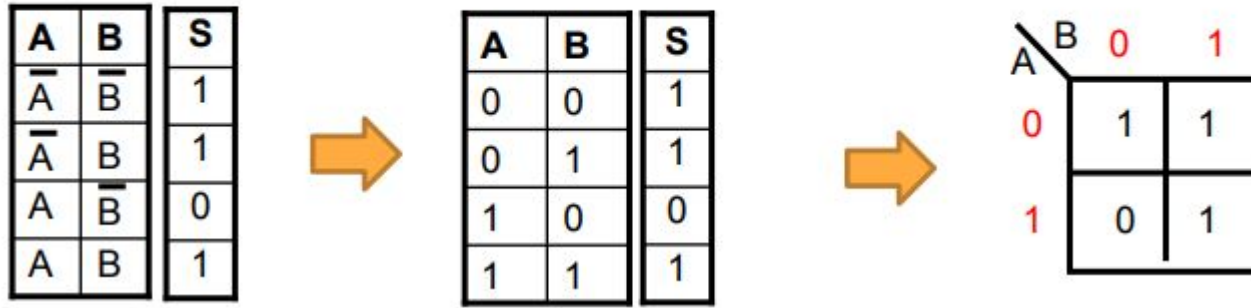


Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis)

Etapa 1: Montagem do diagrama

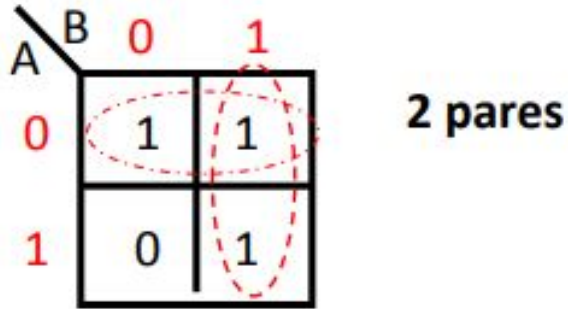
EXEMPLO



- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis)

Etapa 2: Identificação de agrupamentos



- Todos os elementos devem pertencer a ao menos um grupo.
- Busca-se ter o menor número de grupos possível.
- Um grupo deve envolver o máximo de elementos possível, sendo que a quantidade é uma potência de 2 (unidade, dupla, quadra, oitava,...).

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes

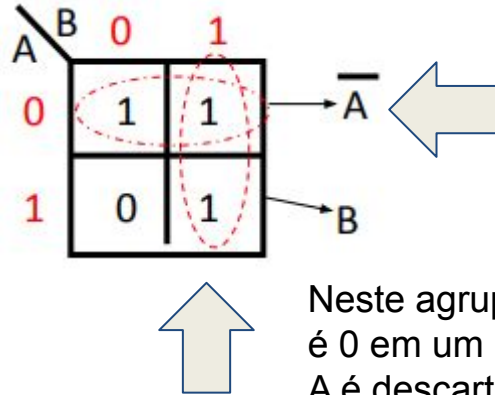
X	Y
Z	K

Elementos adjacentes, exemplo:

- Y e Z são adjacentes a X (Y está a LESTE de X e Z está ao SUL de X)
- K não é ortogonalmente adjacente a X (K está numa diagonal)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis)

Etapa 3: Obtenção da simplificação de cada mintermo



Neste agrupamento A é sempre 0, porém B é 0 em um elemento e 1 em outro, portanto B é descartado (fica apenas \overline{A}).

Neste agrupamento B é sempre 1, porém A é 0 em um elemento e 1 em outro, portanto A é descartado (fica apenas B).

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes
- 3) Para cada agrupamento obtém-se a simplificação que consiste em manter apenas as entradas que mantêm valor consistente e seu valor é representado com a identificação da variável ou dela invertida (barrada) conforme a situação.

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis)

Etapa 4: Obtenção da expressão final

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



		B	0	1
A	0	1	1	
1	0	1		



$$S = \bar{A} + B$$

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes
- 3) Para cada agrupamento obtém-se a simplificação que consiste em manter apenas as entradas que mantêm valor consistente e seu valor é representado com a identificação da variável ou dela invertida (barrada) conforme a situação.
- 4) Obtém-se a expressão final, uma soma de produtos (mintermos)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis)

Exemplo 2

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Tabela verdade

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **2 (duas)** entradas (variáveis) Exemplo 2 e demonstração de como fica o circuito simplificado

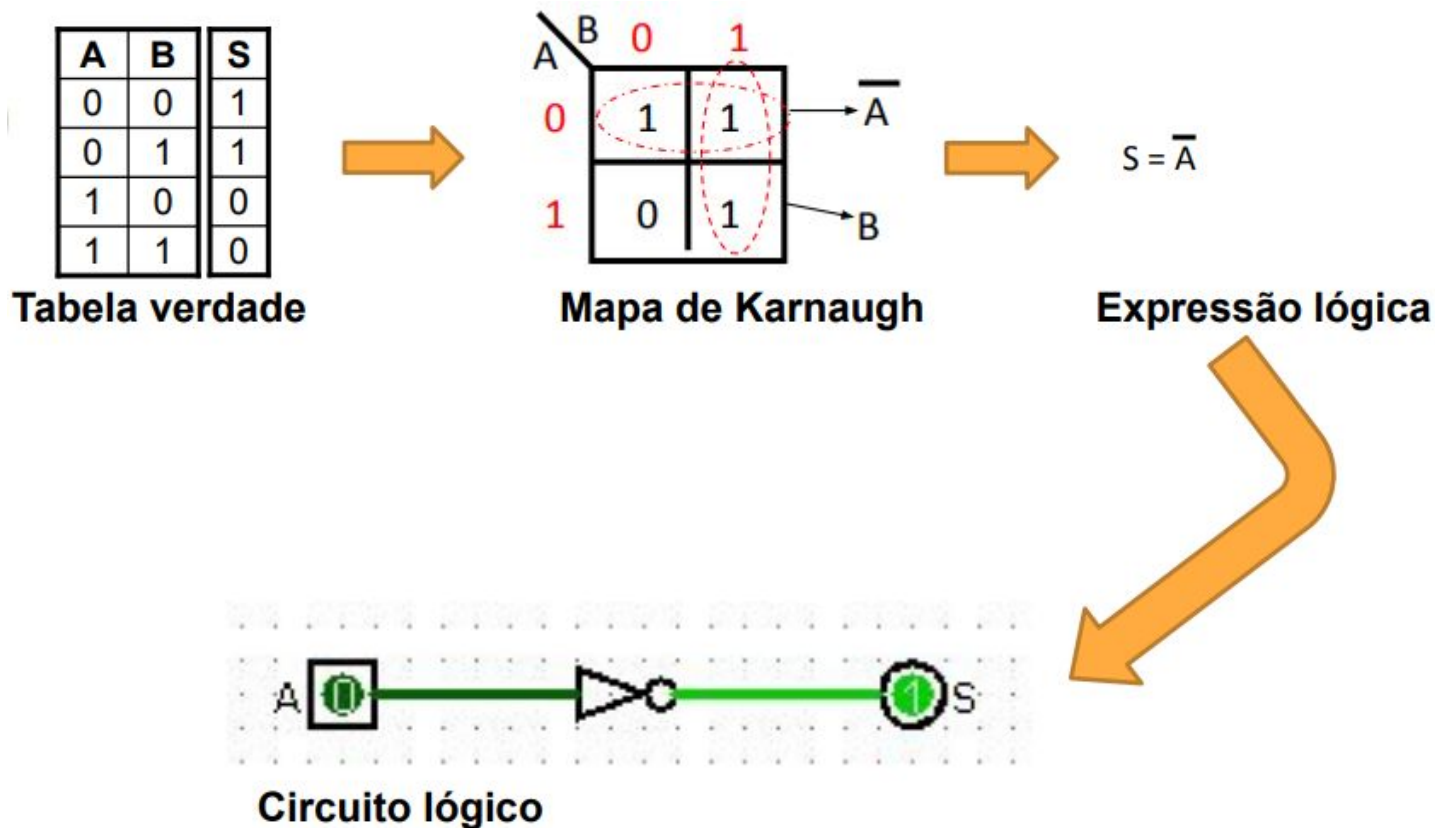


Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis)

A	B	C	S
0	0	0	S_1
0	0	1	S_2
0	1	0	S_3
0	1	1	S_4
1	0	0	S_5
1	0	1	S_6
1	1	0	S_7
1	1	1	S_8

BC A	00	01	11	10
0	S_1	S_2	S_4	S_3
1	S_5	S_6	S_8	S_7

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis)

Etapa 1: Montagem do diagrama

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

<div>BC A</div>	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x4) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis)

Etapa 2: Identificação de agrupamentos

<div>BC A</div>					
		00	01	11	10
0	1	1	1	0	
1	0	1	1	0	

- Há uma quadra de elementos ao centro do diagrama, sendo a maior quantidade de elementos que podem pertencer a um grupo neste exemplo.
- Ainda há um elemento que não foi incluído em nenhum agrupamento ainda...

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x4) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis)

Etapa 2: Identificação de agrupamentos

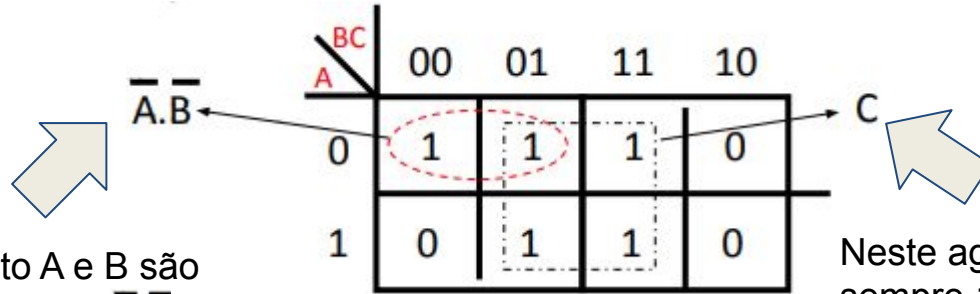
A \ BC	00	01	11	10
	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

- O elemento que ficou de fora deve pertencer a algum grupo
- O grupo deve ter o maior número de elementos possível, todos devem ser ortogonalmente adjacentes
- Neste caso o maior agrupamento é uma dupla (conforme ilustrado em vermelho)
- Observar que não há problema de haver um mesmo elemento em mais de um grupo

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x4) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis)

Etapa 3: Obtenção da simplificação de cada mintermo



Neste agrupamento A e B são sempre 0 e C varia (fica $\overline{A}.\overline{B}$).

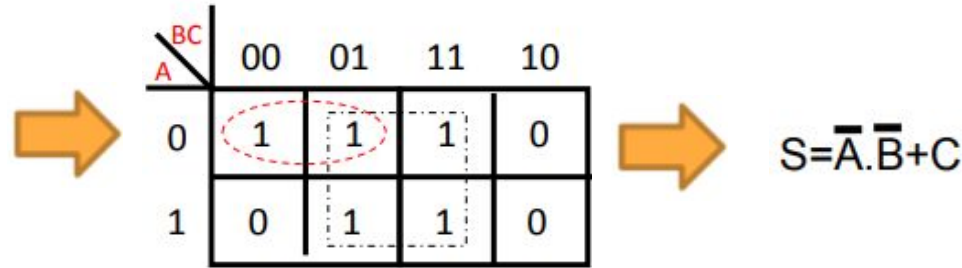
Neste agrupamento C é sempre 1 e A e B variam (fica apenas **C**).

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes
- 3) Para cada agrupamento obtém-se a simplificação que consiste em manter apenas as entradas que mantêm valor consistente e seu valor é representado com a identificação da variável ou dela invertida (barrada) conforme a situação.

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis)

Etapa 4: Obtenção da expressão final

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes
- 3) Para cada agrupamento obtém-se a simplificação que consiste em manter apenas as entradas que mantêm valor consistente e seu valor é representado com a identificação da variável ou dela invertida (barrada) conforme a situação.
- 4) Obtém-se a expressão final, uma soma de produtos (mintermos)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis) Exemplo 2

$$S = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}$$

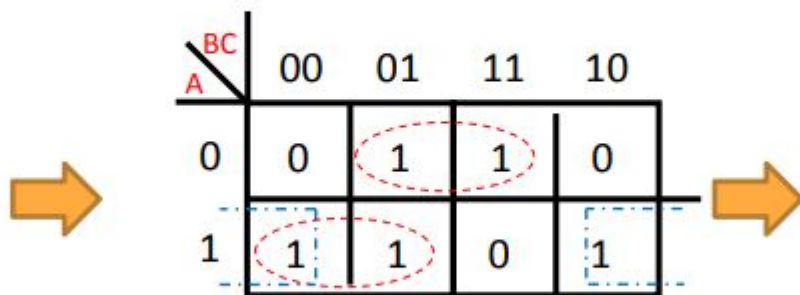
Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis) Exemplo 2

$$S = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + A.B.\bar{C}$$

Tabela verdade

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Mapa de Karnaugh

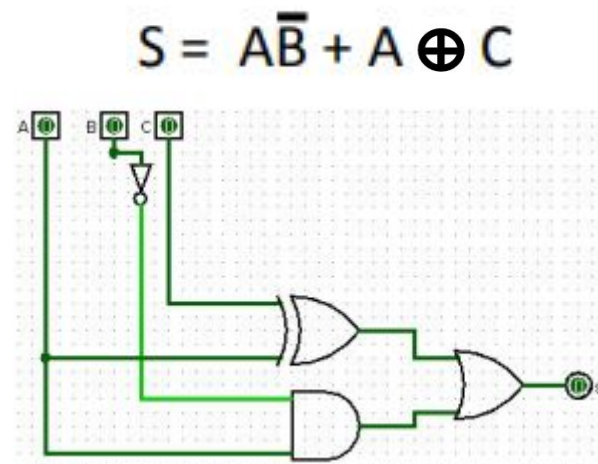
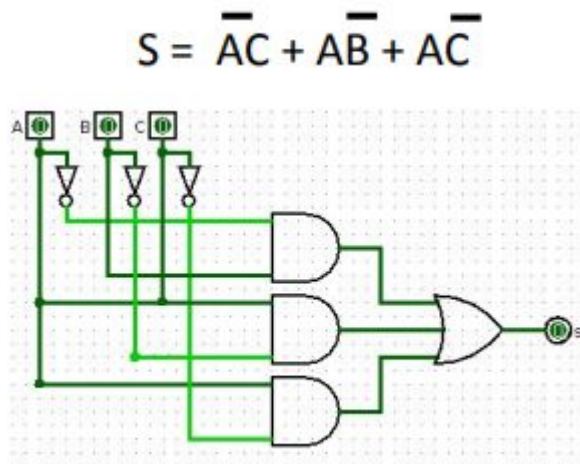
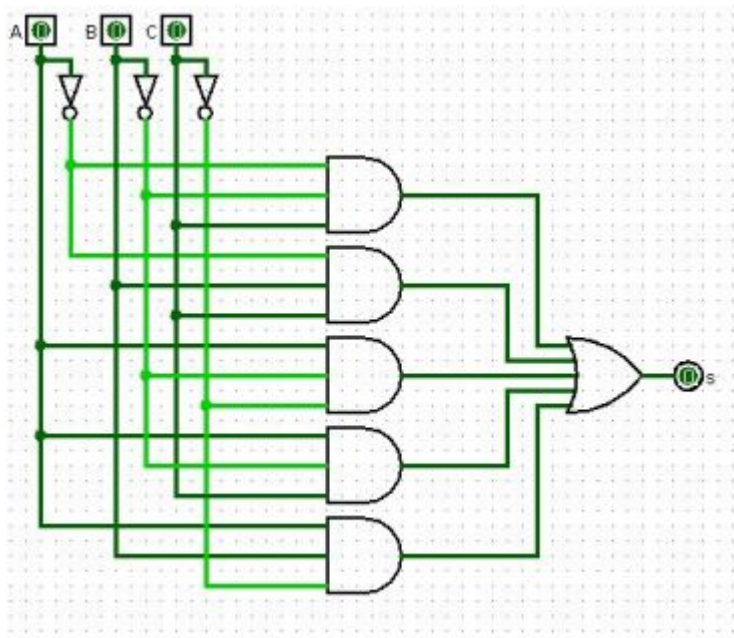


Expressão lógica

$$S = \bar{A}C + A\bar{B} + A\bar{C}$$

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **3 (três)** entradas (variáveis) Exemplo 2

$$S = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$$



Exercícios: obtenha a tabela verdade, diagrama de Veitch-Karnaugh e a expressão simplificada dadas estas expressões

a) $S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.C$

b) $S = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C}$

c) $S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.C + A.B.C$

d) $S = A.B.C + \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

e) $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$

f) $S = (\overline{A + B + C}).(\overline{A + C})$

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 (**quatro**) entradas (variáveis)

ABCD	S
0000	S_1
0001	S_2
0010	S_3
0011	S_4
0100	S_5
0101	S_6
0110	S_7
0111	S_8
1000	S_9
1001	S_{10}
1010	S_{11}
1011	S_{12}
1100	S_{13}
1101	S_{14}
1110	S_{15}
1111	S_{16}

CD \ AB	00	01	11	10
00	S_1	S_2	S_4	S_3
01	S_5	S_6	S_8	S_7
11	S_{12}	S_{13}	S_{16}	S_{15}
10	S_8	S_9	S_{11}	S_{10}

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **4 (quatro)** entradas (variáveis)

Etapa 1: Montagem do diagrama

ABCD	S
0000	0
0001	1
0010	1
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	1
1010	0
1011	1
1100	1
1101	1
1110	0
1111	1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	0

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 4x4) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 (quatro) entradas (variáveis)

Etapa 2 e 3: Identificação de agrupamentos e obtenção da simplificação de cada mintermo

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	0

→ D

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	0

→ D

← $\bar{A} \cdot \bar{C}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	1	1	0

→ $\bar{A} \bar{B} C$

← $A \cdot \bar{C}$

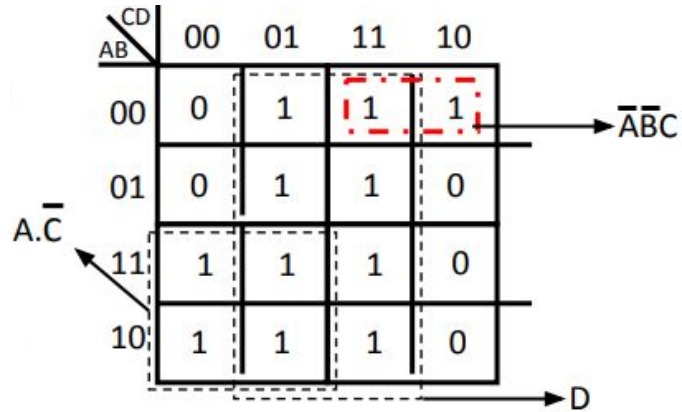
→ D

- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 4x4) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes
- 3) Para cada agrupamento obtém-se a simplificação que consiste em manter apenas as entradas que mantêm valor consistente e seu valor é representado

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 (quatro) entradas (variáveis)

Etapa 3: Obtenção da simplificação de cada minitermo

ABCD	S
0000	S ₁
0001	S ₂
0010	S ₃
0011	S ₄
0100	S ₅
0101	S ₆
0110	S ₇
0111	S ₈
1000	S ₉
1001	S ₁₀
1010	S ₁₁
1011	S ₁₂
1100	S ₁₃
1101	S ₁₄
1110	S ₁₅
1111	S ₁₆



$$S = D + A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

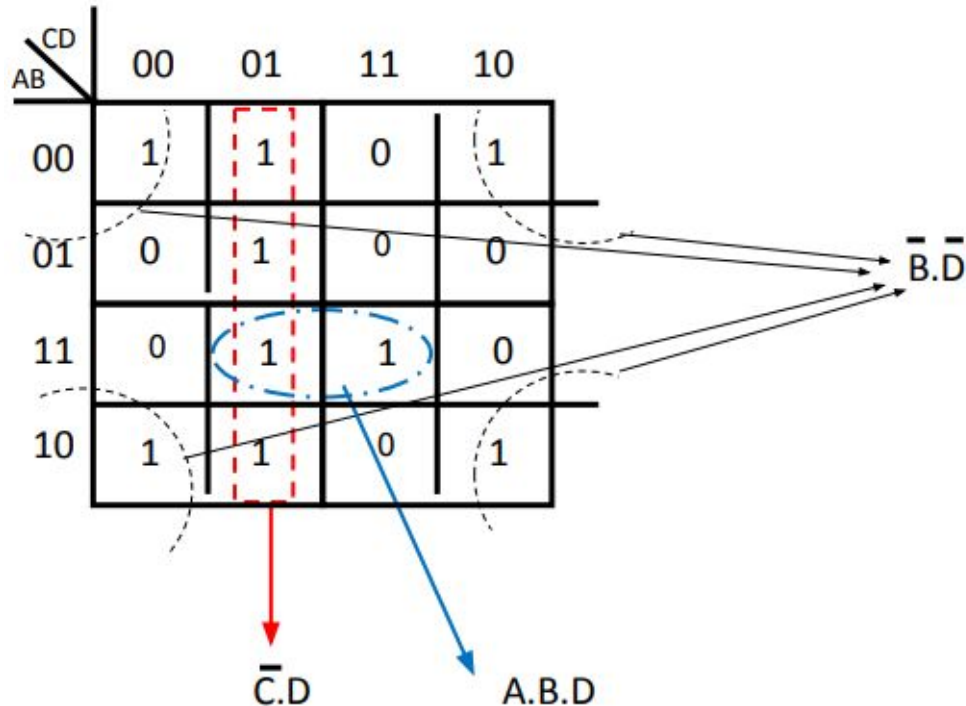
- 1) Monta-se um diagrama (neste caso 2x2) contemplando as possíveis combinações de valores das entradas (conforme exemplo)
- 2) Agrupam-se de elementos igual a 1 que sejam ortogonalmente adjacentes
- 3) Para cada agrupamento obtém-se a simplificação que consiste em manter apenas as entradas que mantêm valor consistente e seu valor é representado com a identificação da variável ou dela invertida (barrada) conforme a situação.
- 4) Obtém-se a expressão final, uma soma de produtos (mintermos)

Diagrama de Veitch-Karnaugh para **4 (quatro)** entradas (variáveis) Exemplo 2

$$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.D + A.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.D + A.B.\overline{C}.\overline{D} + A.B.\overline{C}.D + A.B.C.\overline{D} + A.B.C.D$$

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 (quatro) entradas (variáveis) Exemplo 2

$$S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.\bar{B}.C.D + A.B.C.D$$



Expressão minimizada:

$$S = A.B.D + \bar{C}.D + \bar{B}.\bar{D}$$

Exercícios

a)

ABC	S
000	1
001	0
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	1

b)

ABCD	S
0000	1
0001	1
0010	1
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	0
1010	0
1011	1
1100	0
1101	1
1110	0
1111	1

c)

ABC	S
000	1
001	0
010	1
011	1
100	1
101	1
110	1
111	0

d)

ABCD	S
0000	0
0001	0
0010	0
0011	0
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	1
1110	1
1111	1