

**Aufgabe 1** Rekursionsgleichungen

10 Punkte

(a)

$$T(1) = 0; \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n, \text{ für } n > 1.$$

Sie dürfen annehmen, dass  $n$  eine Zweierpotenz ist.

**Lösung:**

Ermitteln eines Musters für geschlossene Formel durch Ausprobieren.

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 2$$

$$T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 8$$

$$T(8) = T(4) + T(4) + 8 = 8 + 8 + 8 = 24$$

$$T(16) = T(8) + T(8) + 16 = 24 + 24 + 16 = 64$$

usw...

Es lässt sich folgende geschlossene Formel erkennen:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ n \cdot \log(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis der geschlossenen Formel mithilfe vollständiger Induktion:**

**I.A.:**

$$n=2$$

$$T(2) = 2 \cdot \log(2) = 2 \cdot 1 = 2 = 0 + 0 + 2 = T(1) + T(1) + 2$$

**I.S.:**

$$n- > 2n$$

$$T(2n) = T\left(\left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{2n}{2} \right\rceil\right) + 2 \cdot n$$

$$= T(n) + T(n) + 2 \cdot n$$

$$= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n + 2 \cdot n$$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} n \cdot \log(n) + n \cdot \log(n) + 2 \cdot n$$

$$= 2 \cdot n \cdot \log(n) + 2 \cdot n$$

$$= 2 \cdot (n \cdot \log(n) + n)$$

$$= 2(n \cdot \log(n) + n \cdot \log(2))$$

$$= 2n \cdot \log(2n)$$

(b)

$$S(1) = 1; \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i), \text{ für } n > 1.$$

**Aufgabe 2** Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel 10 Punkte

Seien  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \dots x_n \leq \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

(a)  $P(2)$  ist eine wahre Aussage.

*Hinweis:*  $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ .

(b) Wenn  $P(n)$  gilt, dann gilt auch  $P(n-1)$ .

*Hinweis:* Wie muss man  $x_n$  wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn  $x_1, \dots, x_{n-1}$  schon feststehen?

(c) Aus  $P(2)$  und  $P(n)$  folgt  $P(2n)$ .

(d) Folgern Sie nun die Ungleichung.

**Aufgabe 3** Manipulation elementarer Funktionen

10 Punkte

Finden Sie Paare von äquivalenten Termen und formen Sie diese schrittweise ineinander um. Geben Sie die verwendeten Regeln an.

$$\log_a \left( n^{\log_b a} \right), \sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}}, b^{n \log a}, \log_b n, a^{\frac{n-m}{b}}, n(\log a + \log b), \log(a^n b^n), a^{(\log b^n)}.$$