1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Algorithmen, Datenstrukturen und Datenabstratkion WS 17/18

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

Abgabe am 27. Oktober 2017 bis 10 Uhr in die jeweiligen Tutorenfächer

Aufgabe 1 Rekursionsgleichungen *10 Punkte*

(a)

$$T(1) = 0; \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n, \text{ für } n > 1.$$

Sie dürfen annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist.

Lösung:
Ermitteln eines Musters fr̈ geschlossene Formel durch Ausprobieren.
T(2)=T(1)+T(1)+2=2
T(4)=T(2)+T(2)+4=8
T(8)=T(4)+T(4)+8=8+8+8=24
T(16)=T(8)+T(8)+16=24+24+16
usw...

Es lsst sich folgende geschlossene Formel erkennen:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ n \cdot log(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis der geschlossenen Formel mithilfe vollständiger Induktion:

I.A.:
n=2
$T(2) = 2 \cdot log(2) = 2 \cdot 1 = 2 = 0 + 0 + 2 = T(1) + T(1) + 2$

I.S.:

$n- > 2n$
$T(2n) = T\left(\left\lfloor \frac{2 \cdot n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{2 \cdot n}{2} \right\rceil\right) + 2 \cdot n$
$= T(n) + T(n) + 2 \cdot n$
$= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n + 2 \cdot n$
$\overset{\text{I.V.}}{=} n \cdot log(n) + n \cdot log(n) + 2 \cdot n$
$= 2 \cdot n \cdot log(n) + 2 \cdot n$
$= 2 \cdot (n \cdot log(n) + n)$
$= 2(n \cdot log(n) + n \cdot log(2))$
$= 2n \cdot log(2n)$

(b)

$$S(1) = 1; \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i), \text{ für } n > 1.$$

Aufgabe 2 Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel *10 Punkte*

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

(a) $P(2)$ ist eine wahre Aussage.
Hinweis: $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

(b) Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n-1)$.
Hinweis: Wie muss man x_n wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn $x_1, \ldots, x_{n-1}$ schon feststehen?

(c) Aus $P(2)$ und $P(n)$ folgt $P(2n)$.

(d) Folgern Sie nun die Ungleichung.

Aufgabe 3 Manipulation elementarer Funktionen *10 Punkte*

Finden Sie Paare von äquivalenten Termen und formen Sie diese schrittweise ineinander um. Geben Sie die verwendeten Regeln an.

$$\log_a\left(n^{\log_b a}\right), \sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}}, b^{n \log a}, \log_b n, a^{\frac{n-m}{b}}, n(\log a + \log b), \log(a^n b^n), a^{(\log b^n)}.$$