Ayudantía: Método de Newton-Raphson

Ayudante: Nicolás Campos

April 25, 2025

1 Motivación

Muchas ecuaciones que aparecen en física y astrofísica son no lineales y no pueden resolverse analíticamente. El método de Newton-Raphson es una herramienta numérica útil para encontrar raíces de funciones cuando no se puede hallar una solución exacta.

Este método es particularmente valioso en problemas donde se busca una solución aproximada con alta precisión y se dispone de una estimación inicial razonablemente cercana a la raíz verdadera.

2 Fundamento del Método

La idea central del método de Newton-Raphson es aproximar una función suave usando su serie de Taylor de primer orden alrededor de un punto x_n:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \tag{1}$$

Buscando la raíz, es decir, imponiendo $f(x) = 0$, se obtiene:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{2}$$

Despejando x_{n+1}, se llega a la fórmula iterativa del método:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3}$$

Cada nueva estimación x_{n+1} se obtiene corrigiendo la anterior x_n con el cociente entre el valor de la función y el valor de su derivada evaluados en x_n.

2.1 Condiciones para la Aplicación

Para aplicar este método, necesitamos:

- Una función $f(x)$ diferenciable y su derivada $f'(x)$.
- Un valor inicial x_0 cercano a la raíz buscada.
- Un criterio de convergencia como $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ o $|f(x_n)| < \epsilon$.

3 Discusión sobre la Convergencia

El método de Newton-Raphson presenta **convergencia cuadrática** cerca de la raíz, lo que significa que el error se reduce aproximadamente al cuadrado en cada iteración. Esto produce una convergencia muy rápida si la aproximación inicial está suficientemente cerca de la raíz.

Sin embargo, existen riesgos:

- Si $f'(x_n) = 0$, el método falla.
- Si el valor inicial está lejos de la raíz, puede divergir o converger a una raíz incorrecta.
- En presencia de raíces múltiples, la convergencia puede ser más lenta.

4 Aplicaciones Típicas

El método de Newton-Raphson se utiliza en numerosos problemas de física, ingeniería y astrofísica, como:

- Cálculo de órbitas en mecánica celeste.
- Resolución de ecuaciones de equilibrio térmico.
- Cálculo de raíces de polinomios de alto grado.