Ayudantía III: Derivación Numérica

Física Computacional III — Licenciatura en Astrofísica con mención en Ciencia de Datos

Profesor: Omar Fernández
Ayudante: Nicolás Campos

April 22, 2025

Ejercicio 1: Cálculo teórico a mano

Calcular la derivada numérica de la función $f(x) = \ln(x)$ en $x_0 = 1.5$ utilizando la fórmula de diferencia centrada:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

para $h = 0{,}1$. Comparar con el valor exacto $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Solución:

Sea $f(x) = \ln(x)$. Entonces:

$$f(1.6) = \ln(1.6) \approx 0.4700$$
$$f(1.4) = \ln(1.4) \approx 0.3365$$

Aplicamos la fórmula de diferencia centrada:

$$\begin{aligned} f'(1.5) &\approx \frac{f(1.6) - f(1.4)}{2h} = \frac{0.4700 - 0.3365}{2 \cdot 0.1} \\ &= \frac{0.1335}{0.2} = 0.6675 \end{aligned}$$

Derivada exacta:

$$f'(1.5) = \frac{1}{1.5} = 0.6667$$

Error absoluto:

$$|f'_{\text{num}} - f'_{\text{exacto}}| = |0.6675 - 0.6667| = 0.0008$$

Extensión: análisis de errores y valor óptimo de h

Recordamos:

- Error de aproximación:

$$\varepsilon_{\text{aprox}} \approx \frac{h^2}{24} f'''(x)$$

- Error de redondeo:

$$\varepsilon_{\text{redondeo}} \approx \frac{\varepsilon_m}{h}$$

Con:

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1.5) \approx 0.5926$$
$$\varepsilon_m \approx 10^{-16}$$

Error total:

$$\varepsilon_{\text{total}}(h) = \frac{h^2}{24} f'''(x) + \frac{\varepsilon_m}{h} \approx 0.0247h^2 + \frac{10^{-16}}{h}$$

Para minimizarlo:

$$\frac{d\varepsilon_{\text{total}}}{dh} = 2 \cdot 0.0247h - \frac{10^{-16}}{h^2} = 0$$
$$\Rightarrow h^3 = \frac{10^{-16}}{0.0494} \approx 2.02 \times 10^{-15}$$
$$\Rightarrow h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{2.02 \times 10^{-15}} \approx 1.26 \times 10^{-5}$$

Interpretación: El valor óptimo de h que minimiza el error total es del orden 10^{-5}. Para valores mayores domina el error de truncamiento, y para valores menores el de redondeo.