TD 10 : Processus markovien de sauts (2)

Exercice 1:
On suppose qu'une machine a une durée de vie aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Lorsqu'elle tombe en panne, elle est remplacée, après un délai de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, par une autre machine identique qui tombera en panne après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, puis remplacée après un délai aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, etc.
On suppose donc les durées de vie $(U_n)_{n\geqslant 0}$ des machines sont *i.i.d.* avec $U_1 \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et que les délais de remplacement $(V_n)_{n\geqslant 0}$ sont *i.i.d.* , indépendantes des durées de vie, et que $V_1 \sim \mathscr{E}(\mu)$.
On note pour tout $t \geqslant 0$, X_t l'état du système : fonctionnel ou non, avec la convention $X_t = 1$ si une machine fonctionne à l'instant t et $X_t = 0$ sinon (si on est en attente de remplacement).

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts sur $E = \{0, 1\}$, et déterminer son générateur infinitésimal A.
2. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible récurrent positif.
3. Déterminer la probabilité réversible π pour A et en déduire que π est l'unique probabilité invariante de $(X_t)_{t\geqslant 0}$.
4. On pose $p_0(t) = P_t(0, , 0)$ et $p_1(t) = P_t(1, 1)$. Ecrire les équations (Forward et Backward) de Kolmogorov et déterminer les équations différentielles satisfaites par p_0 et p_1.
5. Résoudre ces équations différentielles et déterminer $p_0(t)$ et $p_1(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
6. Déterminer $\lim_{t\to\infty} p_0(t)$ et $\lim_{t\to\infty} p_1(t)$.

Corrigé:

1. On peut modéliser $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de la façon suivante
$$X_t = \sum_{n\geqslant 0} \xi_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}[}$$
où $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $E = \{0, 1\}$ (on passe de l'état 0 à l'état 1 avec probabilité 1 et réciproquement) et où les $(T_n)_{n\geqslant 1}$ (on pose $T_0 = 0$) sont les instants aléatoires définis par
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_n}{\tilde{\lambda}(\xi_{k-1})},$$
avec $(E_n)_{n\geqslant 1}$ une *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre 1 et $\tilde{\lambda} : E \mapsto \mathbf{R}_+$. L'intensité du saut si on se trouve dans l'état 0 est μ (on est en attente d'une machine) donc $\tilde{\lambda}(0) = \mu$ et l'intensité du saut si on se trouve dans l'état 1 est λ.
Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est donc un PMS et son générateur est $A = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$.
2. La chaîne de Markov induite $(Y_n)_{n\geqslant 0} = (X_{T_n})_{n\geqslant 0}$ a pour probabilité de transition $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc elle est irréductible récurrente et comme E est fini elle est récurrente positive. De plus, comme E est fini, il n'y a pas explosion du PMS $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et il est donc aussi irréductible récurrent positif.
3. On cherche la probabilité π réversible pour A c'est à dire vérifiant
$$\forall i, j \in E, \quad \pi(i)A(i, j) = \pi(j)A(j, i).$$
Ce système d'équation s'écrit
$$\begin{cases} \pi(0)\mu = \pi(1)\lambda \\ \pi(0) + \pi(1) = 1 \quad \text{car } \pi \text{ est une probabilité sur } E. \end{cases}$$
D'où la solution $\pi(0) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et $\pi(1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.
Une probabilité π réversible pour A est toujours invariante pour A car elle vérifie $\pi A = 0$. En effet
$$\forall i \in E, \quad \pi A(i) = \sum_j \pi(j)A(j, i) = \sum_j \pi(i)A(i, j) = \pi(i) \times 0.$$

4. Les équations de Kolmogorov reliants P_t et A admettent une solution car E est fini et s'écrivent
$$\frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}t} = P_t A \text{ (forward)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}t} = AP_t \text{ (backward)}$$
On note $p_0(t) = P_t(0,0)$ et $p_1(t) = P_t(1.1)$ de sorte que $P_t = \begin{pmatrix} p_0(t) & 1-p_0(t) \\ 1-p_1(t) & p_1(t) \end{pmatrix}$ et que l'équation forward (par exemple) s'écrive
$$\begin{pmatrix} p_0'(t) & -p_0'(t) \\ -p_1'(t) & p_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0(t) & 1-p_0(t) \\ 1-p_1(t) & p_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$
Ainsi p_0 et p_1 sont solutions de
$$\begin{cases} p_0'(t) = -(\lambda+\mu)p_0(t) + \lambda \\ p_1'(t) = -(\lambda+\mu)p_1(t) + \mu \end{cases}$$
avec pour conditions initiales $p_0(0) = 1$ et $p_1(0) = 1$. On remarque qu'une solution particulière de l'EDO sur p_0 est $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et qu'une solution particulière de l'EDO sur p_1 est $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Ainsi on a les solutions
$$\begin{cases} p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{cases}$$
5. On vérifie qu'on a bien $\lim_t p_0(t) = \pi(0)$ et $\lim_t p_1(t) = \pi(1)$ en accord avec le théorème ergodique.

Exercice 2:
Un chauffeur-routier emprunte l'autoroute. On suppose que sa vitesse peut prendre trois valeurs : $v_1 = 100$ (km/h), $v_2 = 110$ (km/h) et $v_3 = 120$ (km/h). On note V_t sa vitesse à l'instant $t \geqslant 0$.
Son patron le contacte à des instants $T_1^+ < T_2^+ < \cdots$. Si sa vitesse est v_1 ou v_2 il accélère de 10 (km/h) et si sa vitesse est v_3 il la conserve.
Indépendamment, il croise des gendarmes à des instants $T_1^- < T_2^- < \cdots$. Si sa vitesse est v_2 ou v_3 il ralentit de 10 (km/h) et si sa vitesse est v_1 il la conserve.
On suppose que $(T_n^+)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n^-)_{n\geqslant 1}$ sont les temps de sauts de deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ^+ et λ^-.

1. On suppose $V_0 = v_1$. Soit $S = \inf\{t \geqslant 0, V_t = v_2\}$ le premier instant auquel le chauffeur atteint la vitesse v_2. Quelle est la loi de S ?
   Même question en supposant $V_0 = v_3$.
2. On suppose $V_0 = v_2$. Soit $\tilde{S} = \inf\{t \geqslant 0, V_t \neq v_2\}$ le premier instant auquel le chauffeur change sa vitesse. Quelle est la loi de $\tilde{S}$?
   Montrer que $\tilde{S}$ et $V_{\tilde{S}}$ sont indépendantes et donner la loi de $V_{\tilde{S}}$.
3. Montrer que $(V_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts et préciser son générateur infinitésimal A.
4. Déterminer la loi stationnaire μ du processus $(V_t)_{t\geqslant 0}$.
5. Soit $D_t = \int_0^t V_s \mathrm{d}s$ la distance totale parcourue par le chauffeur à l'instant t.
   Montrer que $\frac{D_t}{t}$ a une limite lorsque t tend vers l'infini.

Corrigé:

1. Sur $\{V_0 = v_1\}$ on a $S = T_1^+$ donc la loi de S (conditionnellement à cet événement) est une exponentielle de paramètre λ^+.
   Sur $\{V_0 = v_3\}$ on a $S = T_1^-$ donc la loi de S (conditionnellement à cet événement) est une exponentielle de paramètre λ^-.
2. Sur $\{V_0 = v_2\}$, l'instant $\tilde{S}$ correspond au minimum entre les 2 instants T_1^+ et T_1^-. Or ces deux instants sont indépendants donc $\tilde{S} = T_1^+ \wedge T_1^- \sim \mathscr{E}(\lambda^+ + \lambda^-)$. D'après l'exercice sur les trois réveils (ici avec 2 réveils) on sait que $V_{\tilde{S}}$ et $\tilde{S}$ sont indépendantes et que
$$\mathbf{P}\left[V_{\tilde{S}} = v_1\right] = \frac{\lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left[V_{\tilde{S}} = v_3\right] = \frac{\lambda^+}{\lambda^+ + \lambda^-}.$$

3. Le processus $(V_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts sur $E=\{v_1,v_2,v_3\}$ où la chaîne de Markov induite admet comme noyau de transition

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda^-}{\lambda^++\lambda^-} & 0 & \frac{\lambda^+}{\lambda^++\lambda^-} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'intensité des durées entre les sauts est donnée par la fonction $\lambda : E\to \mathbf{R}_+$ avec $\lambda(v_1)=\lambda^+$, $\lambda(v_2)=\lambda^++\lambda^-$ et $\lambda(v_3)=\lambda^-$.
On en déduit immédiatemment le générateur infinitésimal A de $(V_t)_{t\geqslant 0}$

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda^+ & \lambda^+ & 0 \\ \lambda^- & -(\lambda^++\lambda^-) & \lambda^+ \\ 0 & \lambda^- & -\lambda^- \end{pmatrix}$$

4. La chaîne induite est irréductible récurrente positive sur E fini donc il en est de même pour $(V_t)_{t\geqslant 0}$. On recherche la probabilité stationnaire en recherchant une probabilité réversible (qui sera nécessairement stationnaire). On cherche donc μ probabilité sur E telle que

$$\forall i,j\in E,\quad \mu(i)A(i,j)=\mu(j)A(j,i).$$

Ce système correspond à $\mu(v_2)=\frac{\lambda^+}{\lambda^-}\mu(v_1)$ et $\mu(v_3)=\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)^2\mu(v_1)$ et comme $\mu(v_1)+\mu(v_2)+\mu(v_3)=1$ on en déduit

$$\mu(v_1)=\frac{1}{1+q+q^2},\quad \mu(v_2)=\frac{q}{1+q+q^2},\quad\text{et}\quad \mu(v_3)=\frac{q^2}{1+q+q^2},$$

avec $q=\frac{\lambda^+}{\lambda^-}$.

5. Par le théorème ergodique on a avec probabilité 1

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{D_t}{t}=\mathbf{E}_\mu\left[V\right]=v_1\mu(v_1)+v_2\mu(v_2)+v_3\mu(v_3).$$

Exercice 3:
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n<+\infty$. On considère un processus markovien de saut $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$, de générateur infinitésimal A vérifiant

$$\forall k\geqslant 1,\quad A(0,k)=a_k,\ A(k,k)=-a_k,\ A(k,k-1)=a_k$$

1. Préciser les valeurs $A(0,0)$ et $A(k,j)$ pour $k\geqslant 1$ et $j\notin\{k,k-1\}$.
2. Montrer que la chaîne de Markov induite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est irréductible récurrente et préciser son noyau de transition Q.
3. Pour tout $k\geqslant 1$, on pose
$$\nu(k)=\sum_{j\geqslant k}a_j.$$
Montrer que l'on peut choisir $\nu(0)$ de sorte que la mesure ν sur $\mathbf{N}$ soit invariante pour la chaîne $(Y_n)_{n\geqslant 0}$.
4. Vérifier que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente positive si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}na_n<+\infty$.
5. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est récurrent et déterminer une mesure invariante π.
6. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est-il récurrent positif ?

Corrigé:
1. Le générateur infinitésimal A est une matrice qui doit vérifier $\sum_{j\geqslant 0}A(i,j)=0$. Notons $S=\sum_{n\geqslant 1}a_n$, on doit donc avoir $A(0,0)=-S$ et pour tout $i\geqslant 1$, $A(i,j)=0$ pour tout $j\notin\{i,i-1\}$.
2. La chaîne de Markov induite admet pour probabilité de transition la matrice Π définie par

$$\forall i\geqslant 0,\ \Pi(0,i)=\frac{a_i}{S},\quad\text{et}\quad \forall i\geqslant 1,\ \Pi(i,i-1)=1.$$

La chaîne est irréductible car on atteint tout état $i \geqslant 1$ partant de 0 puis on redescend de 1 jusqu'à atteindre 0. Il suffit donc d'étudier la récurrence en 0. Pour cela on introduit $T_0 = \inf\{n \geqslant 1, Y_n = 0\}$ le temps de retour en 0. Or pout tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}_0[T_0 \geqslant k] = \mathbf{P}_0[Y_1 \geqslant k-1] = \sum_{j \geqslant k-1} Q(0,j) = \frac{1}{S} \sum_{j \geqslant k-1} a_j.$$

D'où l'on déduit que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}_0[T_0 \geqslant k] = \mathbf{P}_0[T_0 = +\infty] = 0$ *i.e.* $T_0 < +\infty$ *p.s.* ce qui signifie que l'état 0 est récurrent.

3. La chaîne de Markov $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ admet une mesure invariant ν qui doit vérifier $\nu Q = \nu$ *i.e.*

$$\begin{cases} \nu(0) = \nu Q(0) = \sum_{j\geqslant 0} \nu(j) Q(j,0) = \nu(1) \\ \nu(k) = \nu(0)Q(0,k) + \nu(k+1) = \nu(0)\frac{a_k}{S} + \nu(k+1), \quad \forall k \geqslant 1. \end{cases}$$

On résoud ce système et on obtient $\nu(k) = \nu(0)\frac{1}{S}\sum_{j\geqslant k} a_j$. La mesure ν est invariante pour la chaîne $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ si et seulement si $\nu(0) = S$ et dans ce cas $\nu(k) = \sum_{j\geqslant k} a_j$.

4. La chaîne $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente positive ssi la mesure invariante est de masse finie *i.e.*

$$\sum_{n\geqslant 0} \nu(n) = S + \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{j\geqslant n} a_j\right) = S + \sum_{n\geqslant 1} n a_n < +\infty$$

(sommation par parties d'Abel).

5. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible récurrent comme sa chaîne induite. La mesure invariante π pour $(X_t)_{t\geqslant 0}$ c'est à dire vérifiant $\pi A = 0$ est donnée par

$$\forall k \geqslant 0, \quad \pi(k) = \frac{\nu(k)}{\lambda(k)} \quad \text{avec} \quad \lambda_k = -A(k,k).$$

On en déduit $\pi(0) = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\pi(k) = \frac{\nu(k)}{a_k}$.

6. Comme les $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sont positifs on a $\nu(k) \geqslant a_k$ et donc $\pi(k) \geqslant 1$. La masse totale de π est nécessairement infinie et donc le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ n'est pas récurrent positif, il est récurrent nul.

Exercice 4:

Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut sur $E = \mathbf{N}$ récurrent positif. On note A son générateur infinitésimal et π sa probabilité invariante. On suppose que

$$A(0,0) = -A(0,1).$$

Soit T_1 le premier instant de saut du processus et on pose pour tout $i \in E$,

$$S_i = \inf\{t \geqslant T_1, \quad X_t = i\}.$$

1. Déterminer $A(0,k)$ pour tout $k \in E$.
2. Déterminer $\lambda(0) = \frac{1}{\mathbf{E}_0[T_1]}$ et $Q(0,1) = \mathbf{P}_0[X_{T_1} = 1]$.
3. Montrer que
$$\mathbf{E}_0[S_0] = \mathbf{E}_0[S_1] + \mathbf{E}_1[S_0]$$
4. En déduire $\mathbf{E}_1[S_0]$ en fonction de π et de λ.