TD 11 : Files d'attente markoviennes

Exercice 1:
On suppose que des requêtes informatiques arrivent à N serveurs (identiques) selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque serveur ne peut traiter à chaque instant qu'une requête à la fois. Le temps de traitement d'une requête par un serveur est donné par une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Les temps de traitements sont indépendants (entre eux et du processus des arrivées) et une requête traîtée par un serveur quitte le système. Si les N serveurs sont occupés, la requête est mise en file d'attente. Il s'agit d'un modèle $M/M/N/+\infty$.
Soit Z_t le nombre total de requêtes qui sont à l'instant t en traitement ou dans la file d'attente.

1. Déterminer le générateur infinitésimal du PMS $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ et la matrice de transition de la chaîne de Markov induite.
2. Sous quelle condition sur les paramètres λ et μ le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est-il récurrent positif ? Déterminer alors sa probabilité invariante π.
3. Pour tous paramètres λ et μ déterminer $\lim_{t\to+\infty} P_t(i,j)$.
4. On considère maintenant le cas $N = 1$. Soit U le temps d'attente à l'équilibre (ou en régime stationnaire). Déterminer la fonction de survie de U *i.e.*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbf{P}_\pi [U > t] .$$

Exercice 2:
Des véhicules arrivent à une station aux instants $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ d'un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque véhicule dépose deux passagers qui se placent dans une file. Ils sont alors servis un par un.
Les temps de service sont *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et indépendants des arrivées.

1. On note M_t le nombre de clients arrivés entre 0 et t. Quelle est la limite presque sûre de M_t/t lorsque $t \to \infty$?
2. Montrer que M_t est un PMS dont on déterminera le semi-groupe de transition $(\tilde{P}_t)_{t\geqslant 0}$ et générateur infinitésimal $\tilde{A}$.

On note X_t le nombre de clients présents dans la station à l'instant t.

3. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un PMS de générateur infinitésimal A qui a pour termes non diagonaux pour tout n
$$A(n, n+2) = \lambda, \quad A(n, n-1) = \mu \text{ si } \ n > 0.$$
4. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irreductible. Est-il réversible ?
5. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est récurrent positif si et seulement si $\mu > 2\lambda$ (considérer la fonction génératrice g de la mesure π solution de $\pi A = 0$ *i.e.* $g(s) = \sum_{n\geqslant 0} s^n \pi(n)$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$).
6. Sous la condition $\mu > 2\lambda$, déterminer $\mathbf{E}_\pi [X_t]$.
7. Quelle est la file la plus efficace entre celle considérée ci-dessus et la file $M/M/1/\infty$ avec le même taux moyen d'arrivée 2λ et de service μ ?

Exercice 3:
Soit $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ un processus de renouvellement *i.e.* tel que $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \cdots$ et $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est *i.i.d.* . Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de comptage associé

$$\forall t \geqslant 0, \quad N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau_n)$$

1. Montrer, en utilisant la loi de grands nombres, que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbf{E}[\tau_1]} \quad p.s.$$

2. Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ *i.e.* $\mathscr{F}_n = \sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ et T un $\mathscr{F}$–temps d'arrêt. Montrer que $\mathbf{E}[\tau_T] = \mathbf{E}[\tau_1]\,\mathbf{E}[T]$ (lemme de Wald).
3. Supposons τ_1 borné. Montrer que
$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}\left[\frac{N_t}{t}\right] = \frac{1}{\mathbf{E}[\tau_1]}$$
4. Etendre le résultat au cas τ_1 non borné.

Exercice 4:
Des clients arrivent à des instants de sauts $T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$ d'un processus de Poisson homogène $(N_t)_{t\geqslant 0}$ de paramètre $\mu > 0$. Soit une suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ *i.i.d.* , indépendante de $(N_t)_{t\geqslant 0}$, de loi G portée par $\mathbf{N}$ et caractérisée par les $p_i = G(\{i\})$, $i \in \mathbf{N}$ avec $p_0 = 0$. On note $g(s) = \sum_{n\geqslant 0} s^n p_n$ la fonction génératrice de la loi G. Le nombre de clients arrivés entre 0 est t est donné par
$$Z_t = \sum_{n\geqslant 1} V_n \mathbf{1}_{\{T_n \leqslant t\}}.$$
On suppose qu'il y a un seul serveur et que les clients ont des temps de service indépendants entre eux et de toutes les autres variables de loi exponentielle de paramètre $\nu > 0$.
Soit X_t le nombre de clients présents dans la file d'attente à l'instant t.

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une PMS et déterminer son générateur infinitésimal A.
2. Montrer qu'il est irréductible et qu'il n'explose pas.
3. Supposons qu'il existe probabilité invariante π pour $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de fonction génératrice ψ. Montrer qu'alors
$$\forall 0 \leqslant s < 1, \quad \psi(s) = \frac{\nu\pi(0)(1-s)}{s\mu(g(s)-1) + \nu(1-s)}.$$
En déduire que $m = \mathbf{E}[V_1] < +\infty$ et que $m\frac{\mu}{\lambda} < 1$.
4. Montrer réciproquement que si $m\frac{\mu}{\lambda} < 1$ alors il existe une probabilité invariante et une seule.
5. Que peut-on dire de la récurrence du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$?
6. Quelle est l'espérance de X_t à l'équilibre (ou en régime stationnaire) ?

Exercice 5:
On considère une file d'attente $M/M/1/0$. Il s'agit d'une file à un serveur avec temps d'arrivés et de services Poissoniens et une salle d'attente à 0 place : si un client arrive alors que le serveur est déjà occupé, ce client est rejetté.
La taille du système X_t est donc à valeur dans $\{0, 1\}$. Son générateur A s'écrit
$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$
où $\lambda, \mu > 0$. On note T_n les temps de sauts successifs du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Excepté pour la question 5, on supposera toujours $X_0 = 0$.

1. Quelle est la loi de $(T_1, T_2 - T_1)$.
2. Plus généralement quelle est la loi du vecteur
$$(T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_{2n-1} - T_{2n-2}, T_{2n} - T_{2n-1})$$
3. Montrer que si $\lambda = \mu$ alors $(T_n)_{n\geqslant 1}$ représente les instants de sauts d'un processus de Poisson.
4. Calculer la probabilité invariante π du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.
5. Le processus des sorties est-il à l'équilibre un processus de Poisson ? (on pourra calculer $\mathbf{E}_\pi\left[e^{-\alpha S}\right]$ pour $\alpha \geqslant 0$ où S est le l'instant de sortie du premier client).
6. Déterminer $(P_t)_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe de transition.