TD 11 : Files d'attente markoviennes

Exercice 1:
On suppose que des requètes informatiques arrivent à N serveurs (identiques) selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque serveur ne peut traiter à chaque instant qu'une requète à la fois. Le temps de traitement d'une requète par un serveur est donné par une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Les temps de traitements sont indépendants (entre eux et du processus des arrivées) et une requète traîtée par un serveur quitte le système. Si les N serveurs sont occupés, la requète est mise en file d'attente. Il s'agit d'un modèle $M/M/N/+\infty$.
Soit Z_t le nombre total de requètes qui sont à l'instant t en traitement ou dans la file d'attente.

1. Déterminer le générateur infinitésimal du PMS $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ et la matrice de transition de la chaîne de Markov induite.
2. Sous quelle condition sur les paramètres λ et μ le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est-il récurrent positif ? Déterminer alors sa probabilité invariante π.
3. Pour tous paramètres λ et μ déterminer $\lim_{t\to+\infty} P_t(i,j)$.
4. On considère maintenant le cas $N = 1$. Soit U le temps d'attente à l'équilibre (ou en régime stationnaire). Déterminer la fonction de survie de U *i.e.*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbf{P}_\pi\left[U > t\right].$$

Corrigé:

1. L'espace d'états de $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est $\mathbf{N}$. Un changement d'état se fait soit par l'arrivée d'une requète à un instant donné par le processus de Poisson de paramètre λ, soit par la fin de traitement de requète c'est à dire à la libération d'un serveur parmi les serveurs occupés (au maximum N). Le temps de libération d'un serveur parmi i ($1 \leqslant i \leqslant N$) serveurs occupés est donné par le minimum de i v.a. exponentielles de paramètre $\mu > 0$ indépendantes, c'est à dire par une exponentielle de paramètre $i\mu$.
On peut donc écrire $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ sous la forme (en posant $T_0 = 0$)
$$\forall t \geqslant 0, \quad Z_t = \sum_{n\geqslant 0} \xi_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t),$$
où
   - $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ de probabilité de transition $Q(i,i) = 0$, $Q(i,i+1) = \frac{\lambda}{\lambda+(i\wedge N)\mu}$ pour tout $i \geqslant 0$ et $Q(i,i-1) = \frac{(i\wedge N)\mu}{\lambda+(i\wedge N)\mu}$ pour tout $i \geqslant 1$.
   - $(T_{n+1} - T_n)_{n\geqslant 0}$ est indépendante de $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$, où la loi conditionnelle de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{\xi_n = i\}$ est une exponentielle de paramètre $(i \wedge N)\mu$.

   Ainsi le générateur infinitésimal de $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est donné par
$$\begin{cases} A(0,0) = -\lambda, \quad A(0,1) = \lambda, \\ A(i,i-1) = i\mu,\ A(i,i) = -(\lambda + (i+1)\mu),\ A(i,i+1) = \lambda, \quad \forall 1 \leqslant i < N, \\ A(i,i-1) = N\mu,\ A(i,i) = -(\lambda + N\mu),\ A(i,i+1) = \lambda, \qquad \forall i \geqslant N. \end{cases}$$
La chaîne induite est la chaîne $(Z_{T_n})_{n\geqslant 0} = (\xi_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Tout d'abord, on vérifie aisément que le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible et non explosif.
Cherchons une mesure réversible π pour le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$, *i.e.* réversible pour le générateur A donc vérifiant
$$\forall i, j \in \mathbf{N}, \quad \pi(i)A(i,j) = \pi(j)A(j,i).$$
Le système à résoudre s'écrit alors
$$\begin{cases} \pi(0)\lambda = \pi(1)\mu, \\ \pi(i)\lambda = \pi(i+1)i\mu, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant N, \\ \pi(i)\lambda = \pi(i+1)N\mu \quad \forall i > N. \end{cases}$$

D'où la solution $\pi(k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\pi(0)$ pour $k \leqslant N$ et $\pi(k) = \left(\frac{\lambda}{N\mu}\right)^{k-N} \pi(N)$ pour $k > N$. La mesure π est A–réversible donc invariante pour le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$. Le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est récurrent positif si et seulement si la mesure π est de masse finie ce qui est équivalent à $\frac{\lambda}{N\mu} < 1$. On choisit $\pi(0)$ de sorte que la mesure π soit de masse 1 *i.e.* π est la probabilité invariante.

3. Par le théorème ergodique, on a

$$\forall i, j, \quad \lim_{t\to\infty} P_t(i,j) = \begin{cases} \pi(j), & \text{si } \lambda < N\mu \\ 0, & \text{si } \lambda \geqslant N\mu \end{cases}$$

4. Soit $N = 1$. Dans ce cas, on vérifie aisément que $\pi(k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k (1 - \frac{\lambda}{\mu})$ pour $k \geqslant 0$.

   On doit déterminer le temps de traitement d'une requète arrivant lorsque le système est en régime stationnaire. On suppose donc Z_0 de loi π et en préconditionnant on a

$$\mathbf{P}_\pi\left[U > t\right] = \mathbf{E}_\pi\left[\mathbf{1}_{\{U>t\}}\right] = \sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}_n\left[U > t\right]\pi(n).$$

   Or sachant $\{Z_0 = n\}$ une nouvelle requète arrivant est la $(n + 1)$-ème requète de la file d'attente. Ainsi sachant $\{Z_0 = n\}$

$$\{U > t\} = \{Y_1 + \cdots + Y_n + Y_{n+1} > t\},$$

   où les $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ sont les temps de traitements indépendants *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre μ. Donc sachant $\{Z_0 = n\}$, U suit une loi Gamma $\Gamma(n + 1, \mu)$. Un calcul permet de conclure

$$\mathbf{P}_\pi\left[U > t\right] = \sum_{n\geqslant 0} \int_t^{+\infty} \frac{\mu^{n+1}u^n}{n!} e^{-\mu u} \mathrm{d}u \pi(n) = e^{-(\mu-\lambda)t}.$$

Exercice 2:
Des véhicules arrivent à une station aux instants $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ d'un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque véhicule dépose deux passagers qui se placent dans une file. Ils sont alors servis un par un. Les temps de service sont *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et indépendants des arrivées.

1. On note M_t le nombre de clients arrivés entre 0 et t. Quelle est la limite presque sûre de M_t/t lorsque $t \to \infty$?
2. Montrer que M_t est un PMS dont on déterminera le semi-groupe de transition $(\tilde{P}_t)_{t\geqslant 0}$ et générateur infinitésimal $\tilde{A}$.

On note X_t le nombre de clients présents dans la station à l'instant t.

3. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un PMS de générateur infinitésimal A qui a pour termes non diagonaux pour tout n
$$A(n, n + 2) = \lambda, \quad A(n, n - 1) = \mu \text{ si } \ n > 0.$$
4. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irreductible. Est-il réversible ?
5. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est récurrent positif si et seulement si $\mu > 2\lambda$ (considérer la fonction génératrice g de la mesure π solution de $\pi A = 0$ *i.e.* $g(s) = \sum_{n\geqslant 0} s^n\pi(n)$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$).
6. Sous la condition $\mu > 2\lambda$, déterminer $\mathbf{E}_\pi\left[X_t\right]$.
7. Quelle est la file la plus efficace entre celle considérée ci-dessus et la file $M/M/1/\infty$ avec le même taux moyen d'arrivée 2λ et de service μ ?

Corrigé:

1. Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors le nombre de clients M_t arrivés en t vaut $M_t = 2N_t$. Par le théorème ergodique pour les processus de Poisson on sait que $\lim_t \frac{N_t}{t} = \lambda$ *p.s.* donc $\lim_t \frac{M_t}{t} = 2\lambda$ *p.s.*.
2. Le processus $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est à valeurs dans $E = 2\mathbf{N}$ et admet la représentation suivante, $\forall t \geqslant 0$, $M_t = \sum_{n\geqslant 0} 2\mathbf{1}_{\{T_n\leqslant t\}}$ donc c'est un PMS de générateur inifinitésimal $\tilde{A}(x, x) = -\lambda$ et $\tilde{A}(x, x + 2) = \lambda$ pour tout $x \in E$. Le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ s'écrit

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \leqslant x_2, \quad P_t(x_1, x_2) = \frac{(\lambda t)^{x_2/2-x_1/2}}{(x_2/2 - x_1/2)!} e^{-\lambda t}$$

3. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ change d'états aux instants $(T_n)_{n\geqslant 1}$ composés des instants d'arrivés $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ et des instants de fin de service : instants de saut d'un processus de Poisson d'intensité $\mu > 0$ indépendant de $(N_t)_{t\geqslant 0}$.
   Le premier instant T_1 correspond au premier instant τ_1 et les instants suivants $(T_n)_{n\geqslant 2}$ sont des instants de sauts d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu > 0$. Par le lemme des réveils, la chaîne de Markov sous-jacente $(X_{T_n})_{n\geqslant 1}$ est de noyau de transition $Q(n, n+2) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et $Q(n, n-1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ pour tout $n > 0$ et $Q(0, 2) = 1$.
   Le générateur A s'écrit donc
   $$A(n, n+2) = \lambda, \quad A(n, n-1) = \mu \mathbf{1}_{\{n>0\}}, \quad A(n, n) = -(\lambda + \mu \mathbf{1}_{\{n>0\}})$$
   Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible car la chaîne sous-jacente l'est mais il n'est pas réversible car $A(n, n+2) > 0$ et $A(n+2, n) = 0$.
4. Supposons $(X_t)_{t\geqslant 0}$ récurrent positif de probabilité invariante π sur $\mathbf{N}$ vérifiant $\pi A = 0$ c'est à dire $\pi = (\pi(n))_{n\geqslant 0}$ solution de
   $$\begin{cases} \pi A(0) = \pi(0)A(0,0) + \pi(1)A(1,0) = 0, \\ \pi A(1) = \pi(1)A(1,1) + \pi(2)A(2,1) = 0, \\ \pi A(n) = \pi(n-2)A(n-2,n) + \pi(n)A(n,n) + \pi(n+1)A(n+1,n) = 0 \end{cases}$$
   d'où π solution de
   $$\begin{cases} -\lambda\pi(0) + \mu\pi(1) = 0, \\ -(\lambda+\mu)\pi(1) + \mu\pi(2) = 0, \\ \pi(n) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\pi(n-2) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\pi(n+1), \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$
   On considère g la fonction génératrice de π définie pour tout $s < 1$ par $g(s) = \sum_{n\geqslant 0} s^n \pi(n)$. Alors g vérifie
   $$\begin{aligned} g(s) &= \pi(0) + s\pi(1) + \sum_{n\geqslant 2} s^n \pi(n) \\ &= \pi(0) + s\rho\pi(0) + \frac{\rho}{1+\rho}s^2 g(s) + \frac{1}{s(1+\rho)}\left(g(s) - \pi(0) - s\rho\pi(0) - s^2\rho(1+\rho)\pi(0)\right) \\ &= \frac{s-1}{s(1+\rho)}\pi(0) + \frac{\rho}{1+\rho}s^2 g(s) + \frac{1}{s(1+\rho)}g(s), \end{aligned}$$
   avec $\rho = \lambda/\mu$. On en déduit que g vérifie
   $$g(s) = \frac{\pi(0)}{1 - \rho s(1+s)}.$$
   Par continuité on a $\lim_{s\to 1} g(s) = \frac{\pi(0)}{1-2\rho}$ or g est une fonction génératrice donc $g(1) = 1$ d'où $\pi(0) = 1 - 2\rho$ ce qui implique $1 - 2\rho > 0$ c'est à dire $\mu > 2\lambda$.
   A finir.

Exercice 3:
Soit $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ un processus de renouvellement *i.e.* tel que $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \cdots$ et $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est *i.i.d.* . Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de comptage associé
$$\forall t \geqslant 0, \quad N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau_n)$$

1. Montrer, en utilisant la loi de grands nombres, que
   $$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbf{E}[\tau_1]} \quad p.s.$$
2. Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ *i.e.* $\mathscr{F}_n = \sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ et T un $\mathscr{F}$–temps d'arrêt. Montrer que $\mathbf{E}[\tau_T] = \mathbf{E}[\tau_1]\,\mathbf{E}[T]$ (lemme de Wald).

3. Supposons τ_1 borné. Montrer que
$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}\left[\frac{N_t}{t}\right] = \frac{1}{\mathbf{E}[\tau_1]}$$
4. Etendre le résultat au cas τ_1 non borné.

Corrigé:

1. La suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $Y_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ est une suite *i.i.d.* et positive. Donc par la loi des grands nombres on a $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_i = \mathbf{E}[Y_1]$ (ce résultat est vrai même si Y_1 n'est pas intégrable car c'est une v.a. positive, dans ce cas on aurait $\mathbf{E}[Y_1] = \infty$). On a donc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = \mathbf{E}[\tau_1] \leqslant +\infty \quad p.s.$$
D'autre part on a $\lim_{t\to\infty} N_t = +\infty$ $p.s.$ donc $\lim_{t\to\infty} \frac{\tau_{N_t}}{N_t} = \mathbf{E}[\tau_1]$ $p.s.$ et $\lim_{t\to\infty} \frac{\tau_{N_t+1}}{N_t+1} = \mathbf{E}[\tau_1]$ $p.s.$ On conclut aisément en utilisant l'encadrement $\tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}$.
2. On a
$$\tau_T = \sum_{k\geqslant 1} (\tau_k - \tau_{k-1})\mathbf{1}_{\{k-1<T\}}$$
et $\mathbf{E}\left[(\tau_k - \tau_{k-1})\mathbf{1}_{\{k-1<T\}}\right] = \mathbf{E}[\tau_1]\,\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{k-1<T\}}\right]$ en préconditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{k-1}$ et en utilisant l'indépendance de $\tau_k - \tau_{k-1}$ par rapport à $\mathscr{F}_{k-1}$. On a donc
$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\tau_T] &= \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{E}[\tau_1]\,\mathbf{P}[k-1<T] = \mathbf{E}[\tau_1]\sum_{k\geqslant 0}\mathbf{P}[T>k]\,, \\ &= \mathbf{E}[\tau_1]\,\mathbf{E}[T]\,.\end{aligned}$$
3. Soit $M > 0$ tel que $\tau_1 \leqslant M$. Alors en appliquant le lemme de Wald au temps d'arrêt $N_t + 1$ on a $\mathbf{E}[\tau_{N_t+1}] = \mathbf{E}[\tau_1]\,\mathbf{E}[N_t+1]$. Comme $t \leqslant \tau_{N_t+1} \leqslant t + M$ on obtient facilement le résultat par croissance comparée.
4. Dans le cas τ_1 non borné, on a uniquement $\tau_{N_t+1} \geqslant t$ d'où l'on déduit $\lim_t \frac{\mathbf{E}[N_t]}{t} \geqslant \frac{1}{\mathbf{E}[\tau_1]}$. Pour obtenir le résultat on fait une troncation et on passe à la limite par Beppo Levy.

   On considère donc le processus de renouvellement tronqué
$$\tau_n^K = \sum_{k=1}^n (\tau_k - \tau_{k-1}) \wedge K,$$
et le processus de comptage $(N_t^K)_{t\geqslant 0}$ associé. Alors on a clairement $\tau_n^K \leqslant \tau_n$ et donc $N_t \leqslant N_t^K$ ce qui donne
$$\lim_t \frac{\mathbf{E}[N_t]}{t} \leqslant \lim_t \frac{\mathbf{E}\left[N_t^K\right]}{t} = \frac{1}{\mathbf{E}[\tau_1 \wedge K]}$$
Par Beppo Levy on a $\lim_K \mathbf{E}[\tau_1 \wedge K] = \mathbf{E}[\tau_1]$ d'où le résultat.

Exercice 4:

Des clients arrivent à des instants de sauts $T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$ d'un processus de Poisson homogène $(N_t)_{t\geqslant 0}$ de paramètre $\mu > 0$. Soit une suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ *i.i.d.* , indépendante de $(N_t)_{t\geqslant 0}$, de loi G portée par $\mathbf{N}$ et caractérisée par les $p_i = G(\{i\})$, $i \in \mathbf{N}$ avec $p_0 = 0$. On note $g(s) = \sum_{n\geqslant 0} s^n p_n$ la fonction génératrice de la loi G. Le nombre de clients arrivés entre 0 est t est donné par
$$Z_t = \sum_{n\geqslant 1} V_n \mathbf{1}_{\{T_n\leqslant t\}}.$$
On suppose qu'il y a un seul serveur et que les clients ont des temps de service indépendants entre eux et de toutes les autres variables de loi exponentielle de paramètre $\nu > 0$.

Soit X_t le nombre de clients présents dans la file d'attente à l'instant t.

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une PMS et déterminer son générateur infinitésimal A.
2. Montrer qu'il est irréductible et qu'il n'explose pas.

3. Supposons qu'il existe probabilité invariante π pour $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de fonction génératrice ψ. Montrer qu'alors
$$\forall 0 \leqslant s < 1, \quad \psi(s) = \frac{\nu\pi(0)(1-s)}{s\mu(g(s)-1)+\nu(1-s)}.$$
En déduire que $m = \mathbf{E}[V_1] < +\infty$ et que $m\frac{\mu}{\lambda} < 1$.
4. Montrer réciproquement que si $m\frac{\mu}{\lambda} < 1$ alors il existe une probabilité invariante et une seule.
5. Que peut-on dire de la récurrence du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$?
6. Quelle est l'espérance de X_t à l'équilibre (ou en régime stationnaire) ?

Exercice 5:
On considère une file d'attente $M/M/1/0$. Il s'agit d'une file à un serveur avec temps d'arrivés et de services Poissoniens et une salle d'attente à 0 place : si un client arrive alors que le serveur est déjà occupé, ce client est rejetté.
La taille du système X_t est donc à valeur dans $\{0,1\}$. Son générateur A s'écrit
$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$
où $\lambda, \mu > 0$. On note T_n les temps de sauts successifs du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Excepté pour la question 5, on supposera toujours $X_0 = 0$.
1. Quelle est la loi de $(T_1, T_2 - T_1)$.
2. Plus généralement quelle est la loi du vecteur
$$(T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_{2n-1} - T_{2n-2}, T_{2n} - T_{2n-1})$$
3. Montrer que si $\lambda = \mu$ alors $(T_n)_{n\geqslant 1}$ représente les instants de sauts d'un processus de Poisson.
4. Calculer la probabilité invariante π du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.
5. Le processus des sorties est-il à l'équilibre un processus de Poisson ? (on pourra calculer $\mathbf{E}_\pi\left[e^{-\alpha S}\right]$ pour $\alpha \geqslant 0$ où S est le l'instant de sortie du premier client).
6. Déterminer $(P_t)_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe de transition.

Corrigé:
Corrigé rapide.
1. T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendantes, de lois exponentielles λ et μ.
2. On sait d'après le cours que la suite $(T_{n+1}-T_n)_{n\geqslant 0}$ sachant $\left\{X_0 = 0, X_{T_1} = 1, X_{T_2} = 0, \ldots, X_{T_{2k}} = 0, X_{T_{2k+1}} = 1, \ldots\right\}$ est une suite de v.a. independantes de lois exponentielles de paramètres $\bar\lambda(X_{T_n})$ avec ici $\bar\lambda(X_{T_n}) = \lambda$ si n est pair et $\bar\lambda(X_{T_n}) = \mu$ si n est impair.
3. Si $\lambda = \mu$ alors $\bar\lambda(x) = \lambda$ et la suite $(T_{n+1} - T_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de v.a. *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont les instants de sauts d'un processus de Poisson de paramètre λ.
4. La chaîne de Markov induite sur $\{0,1\}$ a pour transition $Q(0,1) = 1$ et $Q(1,0) = 1$, elle est donc irréductible récurrente positive. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est donc récurrent. On cherche une probabilité π réversible pour A et on trouve $\pi(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ et $\pi(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.
5. Si personne n'est en train d'être servi, sur l'événement $\{X_0 = 0\}$, on peut écrire $S = U + V$ où U le premier temps d'arrivée d'un client et V le temps de service de ce client donc
$$\mathbf{E}_0\left[e^{-\alpha S}\right] = \mathbf{E}\left[e^{-\alpha U}\right]\mathbf{E}\left[e^{-\alpha V}\right] = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\frac{\mu}{\mu+\alpha}.$$
Si une personne est en train d'être servie, sur l'événement $\{X_0 = 1\}$, on peut écrire $S = V$ où V est de loi $\mathscr{E}(\mu)$ donc
$$\mathbf{E}_1\left[e^{-\alpha S}\right] = \mathbf{E}\left[e^{-\alpha V}\right] = \frac{\mu}{\mu+\alpha}.$$
On conclut facilement d'après l'expression de π
$$\mathbf{E}_\pi\left[e^{-\alpha S}\right] = \pi(0)\mathbf{E}_0\left[e^{-\alpha S}\right] + \pi(1)\mathbf{E}_1\left[e^{-\alpha S}\right] = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\frac{\mu}{\mu+\alpha} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\mu}{\mu+\alpha}.$$
La loi de S sous π n'est pas celle d'une loi exponentielle, donc le processus des sorties n'est pas un processus de Poisson.
6. On résoud les équations de Kolmogorov et on obtient
$$\forall t \geqslant 0, \quad P_t = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}$$