Université Pierre et Marie Curie **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
Période 2 **Processus de sauts 4M036**

TD 5 : Chaîne de Markov, filtration

Exercice 1:
Soit $(W_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. *i.i.d.* à valeurs dans un espace mesurable $(W, \mathscr{W})$ et X_0 une v.a. indépendante de $(W_n)_{n\geqslant 1}$ de loi μ à valeurs dans un ensemble dénombrable E.
On définit la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ par la formule de récurrence

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, W_{n+1}), \ \forall n \geqslant 0,$$

où $\Phi : E \times W \to E$ est une application mesurable.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et en déterminer la matrice de transition.
2. Déterminer la matrice de transition dans le cas $W = E = \mathbf{Z}$ et $\Phi(x, w) = x + w$.
3. Déterminer la matrice de transition dans le cas $W = E = \mathbf{Z}$ et $\Phi(x, w) = (x + w)_+$.

Corrigé:

1. La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov si il existe un noyau de transition P (ou matrice stochastique car on travaille sur un ensemble dénombrable) tel que pour tout $n \geqslant 0$ et tous $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$

$$\mathbf{P}\left[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\right] = P(x_n, x_{n+1}).$$

D'après la définition de X_{n+1} on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\right] &= \frac{\mathbf{P}\left[\Phi(x_n, W_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = n, \dots, X_0 = x_0\right]}{\mathbf{P}\left[X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\right]}, \\ &= \mathbf{P}\left[\Phi(x_n, W_{n+1}) = x_{n+1}\right]\end{aligned}$$

car W_{n+1} est indépendant de $(X_0, \dots, X_n)$. La chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une μ–P chaîne de Markov avec

$$\forall x, y \in E, \quad P(x, y) = \mathbf{P}\left[\Phi(x, W_1) = y\right].$$

2. Si $W = E = \mathbf{Z}$ et $\Phi(x, w) = x + w$ alors d'après la question précédente $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une μ–P chaîne de Markov avec $P(x, y) = \mathbf{P}\left[x + W_1 = y\right] = \mathbf{P}\left[W_1 = y - x\right] = \nu(y - x)$ en notant ν la loi de W_1.
3. Si $W = E = \mathbf{Z}$ et $\Phi(x, w) = (x + w)_+$ alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une μ–P chaîne de Markov avec $P(x, y) = \mathbf{P}\left[(x + W_1)_+ = y\right]$. Donc en notant ν la loi de W_1, on a

$$P(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \mathbf{P}\left[W_1 \leqslant -x\right] = \nu(]-\infty, -x]) & \text{si } y = 0 \\ \mathbf{P}\left[W_1 = y - x\right] = \nu(y - x) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Exercice 2:
On lance un dé de manière répétitive. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Donner leur matrice de transition.

1. X_n le plus grand résultat obtenu après n lancers
2. N_n le nombre de 6 obtenus après n lancers
3. C_n le nombre de lancers à l'instant n depuis le dernier 6 ou depuis le départ tant qu'il n'y a pas eu de 6
4. $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$

Corrigé:
On modélise les résultats des jets successifs du dé par une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. *i.i.d.* de loi uniforme sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Le plus grand résultat obtenu après n lancers est $X_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ que l'on peut écrire aussi sous forme récurrente
$$\forall n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = X_n \vee U_{n+1},$$
en posant $X_0 = 1$. D'après l'exercice précédent $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur E, et la matrice de transition est donnée pour tout $(x, y) \in E^2$ par $P(x, y) = \mathbf{P}[x \vee U_1 = y]$ *i.e.*
$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Le nombre de 6 obtenus après n lancers est $N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k=6\}}$ ou encore $N_{n+1} = N_n + \mathbf{1}_{\{U_{n+1}=6\}}$, en posant $N_0 = 0$. Le processus $(N_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une chaîne de Markov homogène sur $\mathbf{N}$ de matrice de transition $P(x, y) = \mathbf{P}\left[x + \mathbf{1}_{\{U_1=6\}} = y\right]$ *i.e.*
$$\forall (x, y) \in \mathbf{N}^2, \quad P(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > y \text{ ou } x < y - 1 \\ \frac{5}{6} & \text{si } x = y \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = y - 1 \end{cases}$$

3. Le nombre de lancers depuis le dernier 6 (ou depuis le début tant qu'il n'y a pas eu de 6) peut se modéliser de la façon suivante : le compteur C_n est incrémenté de 1 sur l'événement $\{U_{n+1} < 6\}$ et remis à 0 sur l'événement $\{U_{n+1} = 6\}$. Donc
$$\forall n \geqslant 0, \quad C_{n+1} = C_n + \mathbf{1}_{\{U_n<6\}} - C_n \mathbf{1}_{\{U_n=6\}}, \quad C_0 = 0,$$
définit une P-chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ avec $P(x, y) = \mathbf{P}\left[x + \mathbf{1}_{\{U_1<6\}} - x\mathbf{1}_{\{U_1=6\}} = y\right]$ *i.e.*
$$\forall (x, y) \in \mathbf{N}^2, \quad P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } y = 0, \text{ pour tout } x \in F \\ \frac{5}{6} & \text{si } y = x + 1 \\ 0 & \text{si } y \neq x + 1 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

4. On a $B_{n+1} = B_n + N_{n+1} = B_n + N_n + \mathbf{1}_{\{U_{n+1}=6\}}$. La suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas une chaîne de Markov mais on peut montrer que le couple $(B_n, N_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov. Ecrire précisément l'espace d'état, la matrice de transition et la loi initiale de cette chaîne.

Exercice 3:
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité munit d'une filtration $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, de loi initiale μ et de matrice de transition P.
Soit $F \subset E$, on note $\tau = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in F\}$ le temps d'entrée dans F et on pose $Y_n = X_{n\wedge\tau}$.
Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

Corrigé:
Le processus $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ vit dans E et est figé à sa valeur d'entrée dans F. En utilisant la partition, $\{Y_n \in F\} \cup \{Y_n \notin F\}$ on a
$$\mathbf{P}[Y_{n+1} = y \mid \mathscr{F}_n] = \mathbf{P}[Y_{n+1} = y, Y_n \in F \mid \mathscr{F}_n] + \mathbf{P}[Y_{n+1} = y, Y_n \notin F \mid \mathscr{F}_n],$$
or $\{Y_{n+1} = y, Y_n \in F\} = \{Y_n \in F, Y_n = y\}$ et $\{Y_{n+1} = y, Y_n \notin F\} = \{Y_n \notin F, X_{n+1} = y\}$, donc
$$\begin{aligned}\mathbf{P}[Y_{n+1} = y \mid \mathscr{F}_n] &= \mathbf{1}_{\{Y_n\in F\}}\mathbf{1}_{\{Y_n=y\}} + \mathbf{1}_{\{Y_n\notin F\}}\mathbf{P}[X_{n+1} = y \mid \mathscr{F}_n], \\ &= \mathbf{1}_{\{Y_n\in F\}}\mathbf{1}_{\{Y_n=y\}} + \mathbf{1}_{\{Y_n\notin F\}}P(X_n, y), \\ &= Q(Y_n, y),\end{aligned}$$
avec $Q(x, y) = \mathbf{1}_{\{x\in F\}}\mathbf{1}_{\{x=y\}} + \mathbf{1}_{\{x\notin F\}}P(x, y)$.

Exercice 4:
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable munit d'une filtration $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. On note τ et ν deux $\mathbf{F}$–temps d'arrêt ainsi que $\mathscr{F}_\tau$ et $\mathscr{F}_\nu$ leur tribu engendrée. Montrer les propriétés suivante

(i) $\tau \vee \nu$, $\tau \wedge \nu$ et $\tau + \nu$ sont des $\mathbf{F}$–temps d'arrêt,

(ii) si $\tau = p$ alors $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_p$,

(iii) si $\tau \leqslant \nu$ alors $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\nu$,

(iv) $\mathscr{F}_{\tau\wedge\nu} = \mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\nu$,

(v) $\{\tau < \nu\}$ et $\{\tau = \nu\}$ appartiennent à $\mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\nu$.

Corrigé:
Cf. cours.

Exercice 5:
Une information prenant deux valeurs possibles (0 et 1, ou *vrai* et *faux*, etc.) est transmises à travers n intermédiaires indépendants. On suppose que chaque intermédiaire transmet l'information reçue de façon correcte avec une probabilité p $(0 < p < 1)$ ou modifie l'information en son contraire avec probabilité $1 - p$.

1. Introduire une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ modélisant l'état de l'information après les différents intermédiaires.
2. Calculer la probabilité que l'information transmise par le dernier intermédiaire soit conforme à l'information initiale.

Corrigé:

1. On note X_n l'information donnée par l'intermédiaire n et X_0 l'information initiale. La dynamique de cette information dépend d'un aléatoire : l'intermédiaire transmet correctement l'information avec probabilité p. On modélise cela par une v.a. U_n de loi de Bernoulli de paramètre p, l'événement $\{U_n = 1\}$ correspond à une transmission correct et $\{U_n = 0\}$ à une transmission erronée. Les intermédiares sont indépendants donc la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.*
   La dynamique des v.a. X_n est alors donnée par
   $$\forall n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = X_n \mathbf{1}_{\{U_n=1\}} + (1 - X_n)\mathbf{1}_{\{U_n=0\}},$$
   et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une P chaîne de Markov avec $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.
2. On doit calculer $\mathbf{P}[X_n = X_0]$. Or
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}[X_n = X_0] &= \mathbf{P}[X_n = X_0 \mid X_0 = 1]\,\mathbf{P}[X_0 = 1] + \mathbf{P}[X_n = X_0 \mid X_0 = 0]\,\mathbf{P}[X_0 = 0] \\ &= P^n(1,1)p + P^n(0,0)(1-p).\end{aligned}$$
   Il faut donc calculer la puissance n-ième de la matrice P symétrique. On diagonalise P en trouvant les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2p - 1$ et les 2 vecteurs propres associés $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$. On a donc
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
   d'où
   $$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix},$$
   et $\mathbf{P}[X_n = X_0] = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$. On peut remarquer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}[X_n = X_0] = \frac{1}{2}$.

Exercice 6:
On considère d balles $(d > 1)$ numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. L'état initial des urnes est de X_0 balles dans l'urne A et donc de $d - X_0$ balles dans l'urne B. Un changement d'état est modélisé de la façon suivante : « on tire un numéro de balle selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, d\}$ et à un tirage i on déplace la balle numéro i d'une urne à l'autre. »
Le nombre de balles dans l'urne A après n changement d'états est noté X_n et la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée *chaîne d'Ehrenfest*.

1. Déterminer la matrice de transition P de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$? La chaîne est-elle homogène ?
2. Si X_0 est distribuée suivant une loi binomiale $B(d, \frac{1}{2})$, déterminer la distribution de X_1.
3. On suppose maintenant $d = 3$. Calculer P, P^2 et P^3.
   Si $\mu_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est la loi initiale de la chaîne, déterminer les lois μ_1, μ_2 et μ_3 de X_1, X_2 et X_3.

Corrigé:

1. L'espace des états est $E = \{0, 1, \ldots, d\}$. On modélise les résultats des tirages par une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. *i.i.d.* uniforme sur $\{1, 2, \ldots, d\}$. Alors
$$X_{n+1} = X_n + \mathbf{1}_{\{U_{n+1}\in B\}} - \mathbf{1}_{\{U_{n+1}\in A\}},$$
   où l'événement $\{U_n \in B\}$ signifie que la balle de numéro U_n est dans B. La matrice de transition de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $P_n(x,y) = \mathbf{P}\left[X_{n+1} = y \mid X_n = x\right]$. Donc il est clair que $P_n(x,y) = 0$ si $y \notin \{x-1; x+1\}$ d'autre part
$$P_n(x,y) = \begin{cases} \mathbf{P}\left[U_{n+1} \in B \mid X_n = x\right] = \frac{x}{d} & \text{si } y = x-1 \text{ et } x \geqslant 1, \\ \mathbf{P}\left[U_{n+1} \in A \mid X_n = x\right] = \frac{d-x}{d} & \text{si } y = x+1 \text{ et } x \leqslant d-1, \end{cases}$$

2. Supposons pour tout $x \in \{0, \ldots, d\}$, $\mathbf{P}\left[X_0 = x\right] = \frac{C_d^x}{2^d}$. Alors
$$\mathbf{P}\left[X_1 = y\right] = \sum_{x=0}^{d} \mathbf{P}\left[X_0 = x\right] P(x,y)$$