TD 3 : Processus de Poisson, approche mesure aléatoire

Exercice 1:
Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ un processus ponctuel sur $\mathbf{R}_+$ (*i.e.* $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$ et $\lim_n T_n = +\infty$ *p.s.*) et le processus de comptage $(N_t)_{t\geqslant 0}$ associé,

$$\forall t \geqslant 0, \quad N_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leqslant t\}}.$$

On définit pour tout $\omega \in \Omega$ la mesure (appelée mesure aléatoire) sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+), \quad \mu(\omega, A) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n(\omega)\in A\}},$$

et pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbf{R}_+$ on note $\mu(f)$ l'application mesurable $\omega \mapsto \mu(f)(\omega)$

$$\forall f \in \mathscr{M}_+(\mathbf{R}_+), \quad \mu(f) = \sum_{n\geqslant 1} f(T_n).$$

Dans tout l'exercice on note m la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que si $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ pour toute fonction mesurable positive f la transformation de Laplace vérifie
$$\mathbf{E}\left[e^{-\mu(f)}\right] = e^{-\lambda \int_0^{+\infty}(1-e^{-f(t)})\mathrm{d}t} \qquad (*)$$
2. Montrer que si $\mu(f)$ verifie $(*)$ pour toute $f \in \mathscr{M}_+(\mathbf{R}_+)$ alors
$$\begin{cases} \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \text{ disjoints, alors les v.a.} \mu(A_1), \ldots, \mu(A_n) \text{ sont indépendantes,} \\ \forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+),\ \mu(A) \sim \mathscr{P}(\lambda m(A)) \text{ si } m(A) < +\infty, \text{ et } \mu(A) = +\infty \ p.s. \text{ si } m(A) = +\infty \end{cases} \qquad (**)$$
(on rappelle que la transformée de Laplace d'une loi de Poisson $X \sim \mathscr{P}(\theta)$ vérifie $\mathbf{E}\left[e^{-uX}\right] = e^{-\theta(1-e^{-u})}$).
3. Montrer la réciproque de la question 2.
4. En déduire que $(*)$ et $(**)$ sont des critères équivalents au fait que $(N_t)_{t\geqslant 0}$ soit un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.

Exercice 2:
Soient $(N_t^1)_{t\geqslant 0}$, $(N_t^2)_{t\geqslant 0}$ et $(N_t^3)_{t\geqslant 0}$ trois processus de Poisson indépendants et de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$. On définit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ par $N_t = N_t^1 + N_t^2 + N_t^3$ pour tout $t \geqslant 0$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ les instants successifs de sauts du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$.

1. En utilisant la caractérisation par la transformée de Laplace, montrer que $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
2. Quelle est la loi de T_n pour un $n \geqslant 1$?
3. Quelle est la probabilité que le premier saut de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ soit un saut de $(N_t^1)_{t\geqslant 0}$?
4. Quelle est la probabilité que le premier saut après un instant $s > 0$ soit un saut de $(N_t^3)_{t\geqslant 0}$?

Exercice 3:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ d'instants de sauts $(T_n)_{n\geqslant 1}$. On propose d'effacer des sauts de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et donc de considérer un processus $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$ avec moins de sauts que ceux de $(N_t)_{t\geqslant 0}$. Pour cela, on considère une suite de Bernoulli $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$, suite de v.a. *i.i.d.* $\mathbf{P}[\xi_1 = 0] = p = 1 - \mathbf{P}[\xi_1 = 1]$ avec $p \in]0, 1[$. On suppose la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ indépendante du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et on définit

$$\forall t \geqslant 0, \quad \tilde{N}_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leqslant t\}} \xi_n$$

1. Soit f une fonction mesurable positive sur $\mathbf{R}_+$ et $g_p(t) = -\log(p+e^{-f(t)}(1-p))$ pour tout $t \geqslant 0$. Montrer que
$$\mathbf{E}\Big[e^{-\sum_{n\geqslant 1} g_p(T_n)}\Big] = e^{-\lambda(1-p)\int_0^{+\infty}(1-e^{-f(t)})\mathrm{d}t}.$$
2. En déduire que $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $(1-p)\lambda$.
3. Que peut-on dire du processus $(N_t - \tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$?

Exercice 4:
A un arrêt de bus, les bus numéro 1 arrivent selon un processus de Poisson d'intensité $\alpha > 0$ (par heure) et les bus numéro 2 arrivent selon un processus de Poisson d'intensité $\beta > 0$. On suppose que ces 2 processus sont indépendants.
On arrive à l'arrêt à 7h du matin.

1. Quelle est la probabilité que le premier bus soit un numéro 1 ?
2. Quelle est la probabilité que les deux premiers soient des numéro 1 ?
3. Quelle est la probabilité que exactement k bus numéro 1 passent à l'arrêt pendant qu'on attend un bus numéro 2 ?
4. Quelle est la probabilité que exactement k bus numéro 1 passent à l'arrêt pendant 1 heure si le nombre total de bus passés est n (on suppose $n \geqslant k$) ?