M1 Mathématiques

MM036 - processus à sauts

Devoir 1

Exercice 1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ le processus de comptage d'un processus de Poisson $0 < T_1 < T_2 < ...$ de paramètre $\lambda > 0$, et $(R_i)_{i\geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles i.i.d.

1. Montrer que N_t/t converge p.s. vers λ quand $t \to \infty$. Pour cela, on pourra

(i) montrer que $N_t \to \infty$ p.s. quand $t \to \infty$;

(ii) utiliser la loi forte des grands nombres usuelle pour trouver la limite p.s. de T_n/n ;

(iii) montrer que $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$;

(iv) conclure.

2. Supposons maintenant que $\mathbb{E}[|R_1|] < \infty$ et introduisons $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} R_i$. Montrer que Z_t/t converge p.s. vers $\lambda\mathbb{E}[R_1]$ quand $t \to \infty$.

Exercice 2. Un pêcheur attrape, aux instants $0 < T_1 < T_2 < ...$, des poissons de masses $Z_1, Z_2, ...$ (en grammes). On suppose que $0 < T_1 < T_2 < ...$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, que la famille $(Z_i)_{i\geq 1}$ est i.i.d. de loi μ (sur $\mathbb{R}_+$) et est indépendante de $0 < T_1 < T_2 < ...$ Il rejette tous les poissons de masse inférieure à 50 grammes. Soit X_t le nombre de poissons (de masse supérieure à 50 grammes) pêchés jusqu'à l'instant t. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est le processus de comptage d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda\mu([50, \infty[)$. *On pourra introduire le processus ponctuel de Poisson* $(T_n, Z_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, $0 < f(t) \leq C$. On introduit $h(t) = \int_0^t f(s)ds$, ainsi que sa fonction réciproque $r(t)$.

1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ le processus de comptage d'un processus de Poisson $0 < T_1 < T_2 < ...$ de paramètre 1 et $Z_t = N_{h(t)}$.

(i) Montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de comptage d'instants de sauts $0 < S_1 < S_2 < ...$ (qu'on exprimera en fonction des T_i).

(ii) Pour $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$, donner la loi du vecteur $(Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, ..., Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})$.

(iii) Les accroissements de $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont-ils indépendants ? stationnaires ?

2. Soit $(T_n, U_n)_{n\geq 1}$ un processus ponctuel de Poisson sur $[0, \infty[\times[0, C]$ d'intensité $dtdu$ (la

mesure de Lebesgue sur $[0,\infty[\times[0,C])$ et

$$Y_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t, U_n \leq f(T_n)\}}.$$

Pour $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$, donner la loi du vecteur $(Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, ..., Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})$.

3. Conclure.

Exercice 4. On considère une famille indépendante $(X_i)_{i\geq 1}$ de v.a. i.i.d., avec $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$, et on définit $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + ... + X_n$. L'objectif est de montrer que $\tau = \inf\{n > 0,\ S_n = 0\}$ est p.s. fini.

1. Montrer que $P[S_n = 0]$ est nul pour n impair et vaut $C_n^{n/2} 2^{-n}$ pour n pair.

2. Soit $N = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n = 0\}}$ le nombe total de passages en 0 du processus $(S_n)_{n\geq 0}$. Déduire du 1 que $\mathbb{E}[N] = \infty$ (on utilisera la formule de Stirling).

3. On pose $\tau_0 = 0$ puis, pour $k \geq 1$, $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1},\ S_n = 0\}$. Que représente τ_k ? Montrer que c'est un temps d'arrêt.

Pour la suite, on admettra la propriété de Markov forte pour un temps d'arrêt σ pas forcément fini p.s.: si σ est un temps d'arrêt pour le processus $(S_n)_{n\geq 0}$, alors sur l'évènement $\{\sigma < \infty\}$, le processus $(S_{\sigma+n} - S_\sigma)_{n\geq 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\sigma$ et de même loi que $(S_n)_{n\geq 0}$.

4. Montrer que $P[\tau_k < \infty] = P[\tau_1 < \infty]^k$ pour tout $k \geq 1$.

5. Montrer que $N = \sum_{k\geq 0} \mathbf{1}_{\{\tau_k < \infty\}}$, et donc $\mathbb{E}[N] = \sum_{k\geq 0} P[\tau_k < \infty]$.

6. Conclure en utilisant les questions 2, 4 et 5.

Question supplémentaire. Montrer que p.s., le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ visite tous les points de $\mathbb{Z}$ une infinité de fois (ceci se déduit, non immédiatement, de ce qui précède).