TD 2 : Processus de Poisson

Exercice 1:
Montrer qu'une v.a. T à valeur dans $]0, +\infty[$ suit une loi exponentielle si et seulement si

$$\forall t, s \geqslant 0, \quad \mathbf{P}\left[T > t + s \,|\, T > t\right] = \mathbf{P}\left[T > s\right]. \qquad (*)$$

C'est la propriété d'absence de mémoire.

Corrigé:
Il est évident que si T suit une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ alors elle vérifie $(*)$.
Réciproquement supposons $(*)$ et notons $g(t) = \mathbf{P}\left[T > t\right]$. Alors pout tout $s, t > 0$, $g(t+s) = g(t)g(s)$. On commence par montrer que $g(1) > 0$. En effet, $T > 0$ donc il existe $n \geqslant 1$ tel que $g(1/n) > 0$. Or d'après la propriété $(*)$ on a $g(1) = g(1/n)^n > 0$.
Toujours d'après $(*)$, on a pour tout $q > 0$, $g(1) = g(1/q)^q$ et pour tout $p > 0$, $g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q}$. Posons $\lambda = -\ln g(1)$ de sorte que $g(1) = e^{-\lambda}$. Alors pour tout $r = p/q$ rationnel, $g(r) = e^{-\lambda r}$. La fonction g est continue à droite (car la fonction de répartition est continue à gauche) et l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbf{R}$ donc $g(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geqslant 0$.

Exercice 2:
Il y a 2 guichets à la poste. A chaque guichet, les clients sont servis pendant des temps aléatoires indépendants exponentiellement distribués de même paramètre λ. Un client C entre et voit qu'un client A se trouve au premier guichet et qu'un client B se trouve au second guichet. Il attend qu'un client (soit A, soit B) parte puis va au guichet disponible. Quelle est la probabilité que le client C quitte la poste en dernier ?

Corrigé:
On définit l'instant $t = 0$ à partir de l'entrée du client C dans la poste, c'est le temps d'observation initial du système. Le client A était arrivé au guichet à un instant $t_1 < 0$ et est servi pendant un temps aléatoire T_A. Comme le guichet est encore occupé en $t = 0$, on se place dans tout l'exercice sur l'événement $E_A = \{T_A + t_1 > 0\}$. Par la propriété d'absence de mémoire (exercice 1) cet instant d'arrivée t_1 n'a pas d'importance. En effet notons $\tilde{T}_A$ l'instant de départ du client A de son guichet c'est à dire $\tilde{T}_A = t_1 + T_A$. Alors la loi de $\tilde{T}_a$ sachant E_A est une exponentielle de paramètre λ car

$$\forall s \geqslant 0, \quad \mathbf{P}\left[\tilde{T}_A > s \,\middle|\, E_A\right] = \mathbf{P}\left[T_A + t_1 > s \,|\, T_A + t_1 > 0\right] = \mathbf{P}\left[T_A > s\right].$$

Par le même raisonnememnt le client B (arrivé à un instant $t_2 < 0$) libère son guichet à l'instant $\tilde{T}_B$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ sachant l'événement $E_B = \{T_B + t_2 > 0\}$.
Dans tout ce qui suit on considère la probabilité $\mathbf{P}$ comme la probabilité conditionnée aux événements $E_A \cap E_B$.
Le premier guichet à être disponible le sera à l'instant $\tau_1 = \tilde{T}_A \wedge \tilde{T}_B$. La variable aléatoire τ_1 est le minimum entre 2 lois exponentielles indépendantes de même paramètre λ, donc τ_1 suit la loi exponentielle de paramètre 2λ (écrire la fonction de survie). A cet instant τ_1 le client C arrive au guichet qui vient de se libérer et reste un temps T_C (exponentielle de paramètre λ, indépendante de τ_1). Le second guichet se libère à l'instant $\tau_2 = \tilde{T}_A \vee \tilde{T}_B$. La probabilité que le client C quitte la poste en dernier est donc $\mathbf{P}\left[T_C > \tau_2 - \tau_1 \,|\, \tau_1\right]$.
Il faut donc connaitre la loi de $\tau_2 - \tau_1$ sachant τ_1. Soit f une fonction mesurable bornée, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[f(\tau_1, \tau_2 - \tau_1)\right] &= 2\mathbf{E}\left[f(\tilde{T}_A, \tilde{T}_B - \tilde{T}_A)\mathbf{1}_{\{\tilde{T}_A < \tilde{T}_B\}}\right], \\
&= 2\int_{\mathbf{R}_+}\int_{\mathbf{R}_+} f(x, y - x)\mathbf{1}_{\{x<y\}}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\
&= \int_{\mathbf{R}_+}\int_{\mathbf{R}_+} f(x, z)(2\lambda e^{-2\lambda x})(\lambda e^{-\lambda z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Donc on a indépendance de $\tau_2 - \tau_1$ et de τ_1, et la loi $\tau_2 - \tau_1$ est la loi exponentielle de paramètre λ. Les deux variables aléatoires T_C et $\tau_2 - \tau_1$ sont indépendantes et de même loi donc $\mathbf{P}\left[T_C > \tau_2 - \tau_1\right] = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 (Lemme des trois réveils):
Trois réveils sonnent respectivement aux temps T_1, T_2 et T_3 v.a. indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1, λ_2 et λ_3. L'un des réveils sonne avant les autres au temps $T = T_1 \wedge T_2 \wedge T_3$ et on note R le numéro du réveil qui sonne le premier.
Montrer que les v.a. T et R sont indépendantes et préciser leur loi.

Corrigé:
La variable aléatoire R est à valeur dans $\{1,2,3\}$, et T dans $\mathbf{R}_+$. On a pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[T > t, R = 1] = \mathbf{P}[T_1 > t, T_2 > T_1, T_3 > T_1] &= \int_t^{+\infty} \mathbf{P}[T_2 > u, T_3 > u]\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \mathrm{d}u, \\ &= \int_t^{+\infty} \mathbf{P}[T_2 > u]\, \mathbf{P}[T_3 > u]\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \mathrm{d}u, \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\end{aligned}$$

Et de même pour tout $i \in \{1,2,3\}$ on a

$$\mathbf{P}[T > t, R = i] = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}.$$

d'où l'on déduit $\mathbf{P}[T > t] = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$ et $\mathbf{P}[R = i] = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ ainsi que l'indépendance.

Exercice 4:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus croissant continu à droite, $N_0 = 0$ et $0 < \lambda < \infty$. Montrer qu'il y a équivalence entre

(i) Soit $0 \leqslant T_1 < T_2 < \ldots$ les instants de sauts successifs de $(N_t)_{t\geqslant 0}$. Alors les variables $T_{i+1} - T_i$ sont *i.i.d.* exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ et les sauts $\Delta_i = N_{T_i} - N_{T_i^-}$ sont presque sûrement tous de taille 1.

(ii) $(N_t)_{t\geqslant 0}$ a des accroissements indépendants et quand h décroit vers 0

$$\forall t \geqslant 0, \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t = 0] = 1 - \lambda h + o(h) \text{ et } \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h),$$

où $o(h)$ est uniforme en t.

(iii) $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un PAIS (processus à accroissements indépendants et stationnaires) et pour tout $t \geqslant 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

Corrigé:

— Supposons (i). On suppose donc que le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ à temps continu, nul en 0, saute de 1 à des moments $(T_k)_{k\geqslant 1}$ aléatoires, exponentiellement espacés. Le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est le processus de comptage associé au processus ponctuel $(T_k)_{k\geqslant 1}$,

$$\forall t \geqslant 0, \quad N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \leqslant t\}}.$$

Dans la suite on note $S_0 = T_1$ et $S_n = T_{n+1} - T_n$, $n \geqslant 1$.
Montrons (ii). On commence par montrer que $(N_t)_{t\geqslant 0}$ a des accroissements indépendants *i.e.* $\forall s, t \geqslant 0$, $N_{t+s} - N_t \perp \mathscr{F}_t$ *i.e.*

$$\forall Z \in \mathscr{F}_t, m \geqslant 0, \quad \mathbf{E}\left[Z \mathbf{1}_{\{N_{t+s} - N_t = m\}}\right] = \mathbf{E}[Z]\, \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t = m]$$

ou encore (en utilisant la partition $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 0} \{N_t = n\}$) pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{E}\left[Z \mathbf{1}_{\{N_t = n\}} \mathbf{1}_{\{N_{t+s} - N_t = m\}}\right] = \mathbf{E}\left[Z \mathbf{1}_{\{N_t = n\}}\right] \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t = m]$. Plus précisément on va montrer que

$$\forall Z \in \mathscr{F}_t, m, n \geqslant 0, \quad \mathbf{E}\left[Z \mathbf{1}_{\{N_t = n\}} \mathbf{1}_{\{N_{t+s} - N_t = m\}}\right] = \mathbf{E}\left[Z \mathbf{1}_{\{N_t = n\}}\right] \mathbf{P}[N_s = m] \qquad (*)$$

D'une part on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[N_s = m] = \mathbf{P}[T_m \leqslant s < T_{m+1}] &= \mathbf{P}\left[\sum_{j=0}^{m-1} S_j \leqslant s < \sum_{j=0}^{m} S_j\right] \\ &= \int_{(\mathbf{R}_+)^{m+1}} \left(\prod_{k=0}^{m} \lambda e^{-\lambda r_k}\right) I_s(r_0, \ldots, r_m) \mathrm{d}r_0 \ldots \mathrm{d}r_m,\end{aligned}$$

avec $I_s(r_0,\dots,r_m) = \mathbf{1}_{\{r_0+\cdots+r_{m-1}\leqslant s<r_0+\cdots+r_m\}}$.
D'autre part, la v.a. $Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}$ est $\mathscr{F}_t$–mesurable donc s'écrit $\psi(T_1,\dots,T_n) = \tilde{\psi}(S_0,\dots,S_{n-1})$ avec ψ et $\tilde{\psi}$ mesurables. Donc de la même façon que précédemment on a

$$\mathbf{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right] = \int_{(\mathbf{R}_+)^{n+1}} \left(\prod_{k=0}^{n} \lambda e^{-\lambda s_k}\right) \tilde{\psi}(s_0,\dots,s_{n-1}) I_t(s_0,\dots,s_n)\mathrm{d}s_0\dots\mathrm{d}s_n,$$

et en intégrant par rapport à s_n on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right] &= \int_{(\mathbf{R}_+)^{n}} e^{-\lambda(t-(s_0+\cdots s_{n-1}))}\left(\prod_{k=0}^{n-1} \lambda e^{-\lambda s_k}\right) \tilde{\psi}(s_0,\dots,s_{n-1})\mathbf{1}_{\{s_0+\cdots+s_{n-1}\leqslant t\}}\mathrm{d}s_0\dots\mathrm{d}s_{n-1},\\ &= \int_{(\mathbf{R}_+)^{n}} \lambda^n e^{-\lambda t}\tilde{\psi}(s_0,\dots,s_{n-1})\mathbf{1}_{\{s_0+\cdots+s_{n-1}\leqslant t\}}\mathrm{d}s_0\dots\mathrm{d}s_{n-1},\end{aligned}$$

D'où le produit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right]\mathbf{P}\left[N_s=m\right] = \int_{(\mathbf{R}_+)^{m+n+1}} &\lambda^n e^{-\lambda t}\left(\prod_{k=0}^{m} \lambda e^{-\lambda r_k}\right) I_s(r_0,\dots,r_m)\\ &\times \tilde{\psi}(s_0,\dots,s_{n-1})\mathbf{1}_{\{s_0+\cdots+s_{n-1}\leqslant t\}}\mathrm{d}s_0\dots\mathrm{d}s_{n-1}\mathrm{d}r_0\dots\mathrm{d}r_m\end{aligned}$$

On pose $s_n = r_0 + t - (s_0+\cdots+s_{n-1})$ et $s_{n+k} = r_k$ pour tout $k \in \{1,\dots,m\}$ de sorte que $e^{-\lambda t} = e^{-\lambda(\sum s_j - r_0)}$ et que $I_s(r_0,\dots,r_m) = \mathbf{1}_{\{s_0+\cdots+s_{n+m-1}\leqslant t+s<s_0+\cdots+s_{n+m}\}}$. Par ce changement de variable on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right]\mathbf{P}\left[N_s=m\right] &= \int_{(\mathbf{R}_+)^{m+n+1}} \prod_{k=0}^{m+n} \lambda e^{-\lambda s_k} I_t(s_0,\dots,s_n) I_{t+s}(s_0,\dots,s_{n+m})\tilde{\psi}(s_0,\dots,s_{n-1})\mathrm{d}s_0\dots\mathrm{d}s_{n+m}\\ &= \mathbf{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\mathbf{1}_{\{N_{t+s}=n+m\}}\right]\\ &= \mathbf{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\mathbf{1}_{\{N_{t+s}-N_t\}}=m\right].\end{aligned}$$

La propriété $(*)$ est prouvé donc en particulier pour $Z=1$ on obtient $\mathbf{P}\left[N_s=m\right] = \mathbf{P}\left[N_{t+s}-N_t=m\right]$ pour tout $m \geqslant 0$ et donc l'indépendance de $N_{t+s}-N_t$ avec $\mathscr{F}_t$.
On a de plus

$$\mathbf{P}\left[N_{t+h}-N_t \geqslant 1\right] = \mathbf{P}\left[N_h \geqslant 1\right] = \mathbf{P}\left[T_1 \leqslant h\right] = 1-e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$$

et

$$\mathbf{P}\left[N_{t+h}-N_t \geqslant 2\right] = \mathbf{P}\left[T_2 \leqslant h\right] = \mathbf{P}\left[S_0+S_1 \leqslant h\right] \leqslant \mathbf{P}\left[S_0 \leqslant h\right]\mathbf{P}\left[S_1 \leqslant h\right] = o(h)$$

donc (ii) est prouvé.

— Montrons $(ii) \implies (iii)$. Soit $j \geqslant 1$ et $p_j(t) = \mathbf{P}\left[N_t=j\right]$. Alors

$$p_j(t+h) = \mathbf{P}\left[N_{t+h}=j\right] = \sum_{i=0}^{j}\mathbf{P}\left[N_{t+h}-N_t=i\right]\mathbf{P}\left[N_t=j-i\right] = (1-\lambda h)p_j(t) + \lambda h p_{j-1}(t) + o(h),$$

donc $\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h} = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + O(h)$. Ainsi p_j est uniformément continue et dérivable à droite. De même on montre qu'elle est dérivable à gauche et donc

$$\forall t \geqslant 0, \quad p_j'(t) = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t)$$

De la même façon on montre que $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$. Pour expliciter $p_j(t)$ il faut résoudre $j+1$ EDO de conditions initiales $p_j(0) = 0$. Ainsi on a $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ et par récurrence $p_j(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$. Ainsi $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus à accroissements indépendants de loi marginale la loi de Poisson, *i.e.* $\forall t \geqslant 0$, $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.
Il reste à montrer que les accroissements sont stationnaires. Or si $(N_t)_{t\geqslant 0}$ vérifie (ii) il est immédiat de vérifier que pour tout $s \geqslant 0$, $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0} = (N_{t+s}-N_s)_{t\geqslant 0}$ vérifie aussi (ii) et donc $N_{t+s}-N_s$ a pour loi une Poisson de paramètre λt (et ce pour tout $s \geqslant 0$).

— Montrons $(iii) \implies (i)$. Montrons que les T_k sont *i.i.d.* de loi exponentielle. Tout d'abord pour tous $s, t \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}[T_1 > t+s] = \mathbf{P}[N_{t+s} = 0] = \mathbf{P}[N_{t+s} - N_t = 0, N_t = 0] = \mathbf{P}[N_s = 0]\,\mathbf{P}[N_t = 0] = \mathbf{P}[T_1 > t]\,\mathbf{P}[T_1 > s],$$

et donc T_1 est de loi exponentielle d'après l'exercice 1. D'autre part, $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Levy donc vérifie la propriété de Markov fort donc le processus $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ défini par $Z_t = N_{T_n+t} - N_{T_n}$ a même loi que $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et est indépendant de $\mathscr{F}_{T_n}$. Ainsi $T_{n+1} - T_n = \inf\{t \geqslant 0, Z_t = 1\}$ est indépendant de $\mathscr{F}_{T_n}$ et a même loi que T_1.
Il reste à montrer que les sauts sont de taille 1. Pour cela on se fixe $m \geqslant 1$, et on considère l'événement $D_m = \{\exists t \in [0,m], N_t - N_{t^-} \geqslant 2\}$. On considère la partition dyadique de D_m pour un $n \geqslant 0$ fixé $D_m^n = \bigcup_{k=0}^{m2^n-1}\left\{N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} \geqslant 2\right\}$. La suite $(D_m^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et on a $D_m = \bigcap_{n\geqslant 0} D_m^n$ d'où $\mathbf{P}[D_m] = \lim_n \mathbf{P}[D_m^n]$. Or par indépendance des accroissements qui suivent une loi de Poisson on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[D_m^n] &= 1 - \mathbf{P}\left[\bigcap_{k=0}^{m2^n-1}\left\{N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} \leqslant 1\right\}\right] \\ &= 1 - \prod_{k=0}^{m2^n-1}\left(1+\frac{\lambda}{2^n}\right)e^{-\frac{\lambda}{2^n}}, \\ &= 1 - e^{-m\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2^n}\right)^{m2^n}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{P}[D_m] = 1 - \lim_{n\to\infty} e^{-m\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2^n}\right)^{m2^n} = 0$. Ainsi $\mathbf{P}[\{\exists t \geqslant 0, N_t - N_{t^-} \geqslant 2\}] = 0$.

Le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ défini par (i), (ii) ou (iii) est le processus de poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 5:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On note T_i le i-ième instant de saut.

1. Montrer que la loi de T_1 conditionnellement à $\{N_t = 1\}$ est la loi uniforme sur $[0,t]$.
2. Montrer que la loi du vecteur $(T_1, \ldots, T_n)$ conditionnellement à $\{N_t = n\}$ est la loi de n v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,t]$ réordonnées dans l'ordre croissant *i.e.* de densité sur $\mathbf{R}_+^d$

$$f(t_1, \ldots, t_n) = n!\,t^{-n}\mathbf{1}_{\{0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant t\}}.$$

Corrigé:

1. Pour tout $0 \leqslant s \leqslant t$, on a $\mathbf{P}[T_1 \leqslant s \mid N_t = 1] = \frac{\mathbf{P}[T_1\leqslant s, N_t=1]}{\mathbf{P}[N_t=1]}$. Or $\{T_1 \leqslant s, N_t = 1\} = \{N_s = 1, N_t - N_s = 0\}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[T_1 \leqslant s \mid N_t = 1] &= \frac{\mathbf{P}[N_s = 1]\,\mathbf{P}[N_t - N_s = 0]}{\mathbf{P}[N_t = 1]}, \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.\end{aligned}$$

preuve alternative : en utilisant la propriété de Markov forte du processus de Poisson. On a $\{T_1 \leqslant s, N_t = 1\} = \{T_1 \leqslant s, N_t - N_{T_1} = 0\}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[T_1 \leqslant s, N_t = 1] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_1\leqslant s\}}\mathbf{1}_{\{N_t - N_{T_1}=0\}}\right], \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_1\leqslant s\}}\mathbf{P}[N_t - N_{T_1} = 0 \mid T_1]\right].\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov fort le processus $(N_t - N_{T_1})_{t\geqslant T_1}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ donc pour tout $k \geqslant 0$, $\mathbf{P}[N_t - N_{T_1} = k \mid T_1] = \frac{(\lambda(t-T_1))^k}{k!}e^{-\lambda(t-T_1)}$ (on dit que la loi de $N_t - N_{T_1}$ conditionnellement à T_1 est la loi de Poisson de paramètre $t - T_1$). Ainsi

$$\mathbf{P}[T_1 \leqslant s, N_t = 1] = \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_1\leqslant s\}}e^{-\lambda(t-T_1)}\right]$$

et on conclut en utilisant la loi de T_1.

2. Soit $S_0 = T_1$ et $S_k = T_{k+1} - T_k$. Alors on sait que le vecteur $(S_0, \dots, S_{n-1})$ est un vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes et de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ *i.e.* la densité de $(S_0, \dots, S_{n-1})$ est donnée par

$$g(s_0, \dots, s_{n-1}) = \lambda^n e^{-\lambda(s_0 + \dots + s_{n-1})} \mathbf{1}_{(\mathbf{R}_+)^n}(s_0, \dots, s_{n-1})$$

On vérifie aisément que le vecteur $(T_1, \dots, T_n) = M(S_0, \dots, S_{n-1})$ (avec M matrice de déterminant 1) admet alors pour densité

$$\tilde{g}(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant t_0 \leqslant \dots \leqslant t_n\}}.$$

Donc pour tout borélien de $A \in \mathbf{R}_+^n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[(T_1, \dots, T_n) \in A, N_t = n\right] &= \mathbf{P}\left[(T_1, \dots, T_n) \in A, T_n \leqslant t < T_{n+1}\right] \\
&= \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A, t_n \leqslant t < t_{n+1}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant t_0 \leqslant \dots \leqslant t_{n+1}\}} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \mathrm{d}t_{n+1}, \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant t_0 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant t\}} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n, \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{\lambda t} \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A} f(t_1, \dots, t_n) \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat (important !).

Exercice 6:
Les employés d'une entreprise arrivent au travail selon un processus de Poisson $(N_t)_{t \geqslant 0}$ d'intensité $\lambda > 0$. Soit T_i le temps d'arrivé du i-ième employé.

1. Montrer que le nombre total des heures de travail effectuées dans l'entreprise jusqu'au temps $t \geqslant 0$ est $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} (t - T_i)$.
2. Evaluer $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} T_i \,\middle|\, N_t = n\right]$ et en déduire que $\mathbf{E}\left[X_t\right] = \lambda t^2 / 2$.

Corrigé:

1. Les employés qui sont arrivés à l'instant $t \geqslant 0$, il y en a N_t, ont chacun travaillé depuis leur temps d'arrivée T_i (pour i de 1 à N_t). Le temps de travail de l'employé i en t est donc $t - T_i$. Le temps total est

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} (t - T_i) = t N_t - \sum_{i=1}^{N_t} T_i.$$

2. Conditionnellement à $\{N_t = n\}$ le vecteur $(T_1, \dots, T_n)$ a même loi que l'échantillon ordonné $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ de $(U_1, \dots, U_n) \sim \mathscr{U}([0, t]^n)$. Donc

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_t} T_i \Big| N_t = n\Big] = \mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} T_i \Big| N_t = n\Big] = \mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} U_{(i)}\Big] = \mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} U_i\Big],$$

car pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n U_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n U_i$. On en déduit donc

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_t} T_i \Big| N_t = n\Big] = \frac{nt}{2}.$$

En utilisant la partition de $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 0} \{N_t = n\}$, on a $\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_t} T_i\Big] = \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} T_i \Big| N_t = n\Big] \mathbf{P}\left[N_t = n\right]$ donc

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_t} T_i\Big] = \frac{t}{2} \sum_{n \geqslant 0} n \mathbf{P}\left[N_t = n\right] = \frac{t}{2} \mathbf{E}\left[N_t\right] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

On conclut facilement.

Exercice 7:
Les arrivées des bus numéro 1 à un arrêt sont modélisées par un processus de Poisson d'intensité α (par heure). On arrive à l'arrêt à 7h du matin.

1. Quelle est la probabilité d'attendre le prochain bus plus qu'une demi-heure ?
   Quel temps moyen va-t-on attendre un prochain bus ?
   On décide de laisser passer 3 bus et de prendre le quatrième. Quel temps moyen va-t-on rester à l'arrêt ?
2. Quelle est la probabilité que exactement trois bus passent à l'arrêt entre 7h et 9h ?
   Quel est le nombre moyen de bus qui vont passer à l'arrêt entre 7h et 9h ?
3. On sait que 100 bus sont passés entre 7h et 9h.
   (a) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un seul bus passe entre 9h et 10h ?
   (b) Quel est le nombre moyen conditionnel de bus passés entre 9h et 10h ?
   (c) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'ils sont tous passés entre 8h et 9h ?
   (d) Quelle est la probabilité conditionnelle que 30 de ces bus sont passés entre 8h et 9h ?
   (e) Quelle est la probabilité conditionnelle d'attendre un bus plus de 3/4 d'heures à partir de 7h du matin ?
   (f) Quel est le temps moyen conditionnel d'attendre un bus ?

Corrigé:
Par la propriété d'absence de mémoire (Markov) on considère le temps $t = 0$ au temps initial d'observation c'est à dire 7h du matin. Les bus arrivent à partir de 7h du matin selon les temps de sauts $(T_n)_{n\geqslant 1}$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité $\alpha > 0$.

1. Le prochain bus est le premier bus passant après 7h c'est donc le premier saut T_1 du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$. Donc $T_1 \sim \mathcal{E}(\alpha)$. On a donc $\mathbf{P}\left[T_1 > \frac{1}{2}\right] = e^{-\frac{\alpha}{2}}$ et le temps moyen d'attente est $\mathbf{E}[T_1] = 1/\alpha$.
   Si on laisse passer 3 bus, le temps d'attente du quatrième est donné par T_4 qui suit une loi gamma de paramètres 4 et α. C'est la somme de 4 exponentielles indépendantes de même paramètre α donc $\mathbf{E}[T_4] = 4/\alpha$.
2. Le nombre de bus qui passent entre 7h et 9h est donné par la variable aléatoire N_2 qui suit la loi de Poisson de paramètre 2α (qui compte le nombre de sauts entre 0 et 2). La probabilité que 3 bus exactement passent est $\mathbf{P}[N_2 = 3] = \frac{4\alpha^3}{3}e^{-2\alpha}$.
   Le nombre moyen de bus est donné par $\mathbf{E}[N_2] = 2\alpha$.
3. On se place maintenant conditionnellement à l'événement $\{N_2 = 100\}$.
   (a) L'événement un seul bus passe entre 9h et 10h est donné par $\{N_3 - N_2 = 1\}$ donc par indépendance des accroissements on a $\mathbf{P}[N_3 - N_2 = 1 \mid N_2 = 100] = \mathbf{P}[N_3 - N_2 = 1]$ et par stationnarité des accroissements c'est égal à $\mathbf{P}[N_1 = 1] = \alpha e^{-\alpha}$.
   (b) De même par indépendance $\mathbf{E}[N_3 - N_2 \mid N_2 = 100] = \mathbf{E}[N_1] = \alpha$.
   (c) On s'intéresse au nombre de bus passés entre 9h et 10h, c'est à dire à $N_2 - N_1$. Donc par indépendance des accroissements on a
   $$\mathbf{P}[N_2 - N_1 = 100 \mid N_2 = 100] = \frac{\mathbf{P}[N_2 - N_1 = 100, N_2 = 100]}{\mathbf{P}[N_2 = 100]} = \frac{\mathbf{P}[N_2 - N_1 = 100]\,\mathbf{P}[N_1 = 0]}{\mathbf{P}[N_2 = 100]}$$
   $$= \frac{(\alpha^{100}/100!)e^{-2\alpha}}{(2\alpha)^{100}/100!)e^{-2\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$
   <u>preuve alternative :</u> l'événement $\{N_2 - N_1 = 100\}$ correspond à $\{\forall 1 \leqslant i \leqslant 100,\ T_i \in [1,2]\}$. Or la loi des instants de sauts conditionnellement au nombre de sauts $n = 100$ est celle d'un vecteur $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$ reordonnement croissant d'un vecteur $(U_1, \ldots, U_n)$ uniforme sur $[0,2]^n$. Ainsi
   $$\mathbf{P}[N_2 - N_1 = 100 \mid N_2 = 100] = \mathbf{P}\left[(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}) \in [1,2]^n\right]$$
   $$= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}[U_i \in [1,2]] = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$
   (d) Comme dans la question précédente, les deux approches donnent
   $$\mathbf{P}[N_2 - N_1 = 30 \mid N_2 = 100] = C_{100}^{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$
   (e) Attendre un bus plus de u ($u \in [0,2]$) est donné par l'événement $\{T_1 > u\}$. On a donc $\mathbf{P}[T_1 > u \mid N_2 = 100] = \mathbf{P}[N_u = 0 \mid N_2 = 100] = \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{100}$. Donc pour $u = 3/4$ on a $\mathbf{P}[T_1 > 3/4 \mid N_2 = 100] = \left(\frac{5}{8}\right)^{100}$.
   (f) Le temps moyen est donné par $\mathbf{E}[T_1 \mid N_2 = 100]$ d'où
   $$\mathbf{E}[T_1 \mid N_2 = 100] = \int_0^{\infty} \mathbf{P}[T_1 > u \mid N_2 = 100]\,\mathrm{d}u = \int_0^{2} (1 - \frac{u}{2})^{100}\mathrm{d}u = \frac{2}{101}.$$