Université Pierre et Marie Curie — **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
Période 2 — **Processus de sauts 4M036**

TD 7 : Chaîne de Markov, récurrence et mesure stationnaire

Exercice 1:
Retour à l'exercice 5 de la feuille 6. On considère la file d'attente des requêtes à un serveur informatique : X_n représente la taille de la file d'attente à l'instant n et ξ_{n+1} le nombre de requêtes qui arrivent entre n et $n+1$ ($(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ suite *i.i.d.* de loi μ).

1. Soit ϕ la fonction génératrice de ξ_1 et G_n celle de X_n. Donner une relation liant G_{n+1} à G_n et ϕ.
2. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante dont on déterminera la fonction génératrice, si et seulement si, $\mathbf{E}[\xi_1] < 1$.

Corrigé:

1. Par définition de la fonction génératrice on a
$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \mathbf{E}\left[s^{X_{n+1}}\right] = \mathbf{E}\left[s^{X_n - \mathbf{1}_{\{X_n\geqslant 1\}} + \xi_{n+1}}\right], \\ &= \mathbf{E}\left[s^{X_n - \mathbf{1}_{\{X_n\geqslant 1\}}}\right]\phi(s) \\ &= \phi(s)\left(\mathbf{E}\left[s^{X_n-1}\mathbf{1}_{\{X_n\geqslant 1\}}\right] + \mathbf{E}\left[s^{X_n}\mathbf{1}_{\{X_n=0\}}\right]\right). \end{aligned}$$
En utilisant l'écriture $G_n(s) = \sum_k \mathbf{P}[X_n = k]\, s^k$ on prouve que
$$G_{n+1}(s) = \phi(s)\left(G_n(0) + \frac{1}{s}\left(G_n(s) - G_n(0)\right)\right)$$

2. Par définition une probabilité stationnaire π vérifie $\pi Q = \pi$ ou de façon équivalente $G_\pi(s) = G_{\pi Q}$ où G_μ est la fonction génératrice d'une probabilité μ. Soit π une probabilité et supposons X_n de loi π. Alors X_{n+1} est de loi πQ et π est une probabilité stationnaire si et seulement si $G_{n+1}(s) = G_n(s)$ *i.e.* si et seulement si G_{n+1} est solution de
$$G(s) = \phi(s)\left(G(0) + \frac{1}{s}\left(G(s) - G(0)\right)\right) \qquad (*)$$
ou de façon équivalente
$$G(s) = G(0)\frac{\phi(s)}{\phi(s) - s\frac{1-\phi(s)}{1-s}}.$$
Comme ϕ est fonction génératrice de ξ_1 on a $\phi(1) = 1$ et $\phi'(1) = \lim_{s\to 1}\frac{1-\phi(s)}{1-s} = \mathbf{E}[\xi_1]$.
   — Si $\mathbf{E}[\xi_1] > 1$ alors toute solution de $(*)$ vérifie $\lim_{s\to 1} G(s) < 0$. Or $G_{n+1}(1) = 1$ donc G_{n+1} ne peut être solution de $(*)$.
   — Si $\mathbf{E}[\xi_1] = 1$ alors toute solution de $(*)$ vérifie $\lim_{s\to 1}|G(s)| = +\infty$ donc G_{n+1} ne peut pas vérifier $(*)$.
   — Si $\mathbf{E}[\xi_1] < 1$ alors G_{n+1} est solution de $(*)$ avec $G(0) = 1 - \mathbf{E}[\xi_1]$ *i.e.* $G_{n+1}(s) = (1 - \mathbf{E}[\xi_1])\frac{\phi(s)}{\phi(s) - s\frac{1-\phi(s)}{1-s}}$.

Exercice 2:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $\mathbf{Z}$ par la récurrence suivante
$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$
avec $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *i.i.d.* de loi de Bernoulli $\mathbf{P}[Z_1 = 1] = p = 1 - \mathbf{P}[Z_1 = -1]$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer P son noyau de transition.
2. Calculer pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{P}_0[X_n = 0]$.
3. Montrer que la chaîne est irréductible.

4. En utilisant la formule de Stirling
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$
montrer que $\mathbf{E}_0\left[N_0\right] = \infty$ si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.
5. Etudier la récurrence en fonction du paramètre p.

Corrigé:

1. La suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* et X_{n+1} s'écrit comme une fonction déterministe de X_n et de Z_{n+1} donc la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbf{Z}$. Le noyau de transition est donné pour tout $x, y \in \mathbf{Z}$ par $P(x,y) = p\mathbf{1}_{\{x+1\}}(y) + (1-p)\mathbf{1}_{\{x-1\}}(y)$.
2. Tout d'abord si n est impair $\mathbf{P}_0\left[X_n = 0\right] = 0$ car pour revenir en 0 le nombre de sauts à droite (Z_j positif) doit être égal au nombre de sauts à gauche (Z_j négatif).
   Soit $n = 2k$, $k \geqslant 0$. Alors il y a k sauts vers la droite et k sauts vers la gauche, il y a donc C_{2k}^k chemins partant de 0 et revenant en 0. Chaque chemin a une probabilité $p^k(1-p)^k$ donc
$$\mathbf{P}_0\left[X_{2k} = 0\right] = C_{2k}^k p^k (1-p)^k, \quad k \geqslant 0$$
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, alors $\mathbf{P}_0\left[X_n = n\right] = \mathbf{P}\left[Z_1 = 1, \ldots, Z_n = 1\right] = p^n > 0$ donc $P^n(0,n) > 0$ *i.e.* $0 \rightsquigarrow n$. De même $\mathbf{P}_n\left[X_n = 0\right] = (1-p)^n > 0$ donc $P^n(n,0) > 0$ *i.e.* $n \rightsquigarrow 0$. Les points n et 0 communiquent pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. De la même façon, $-n$ et 0 communiquent dont la chaîne est irréductible.
4. On a
$$\mathbf{E}_0\left[N_0\right] = \mathbf{E}_0\Big[\sum_{n\geqslant 0}\mathbf{1}_{\{X_n=0\}}\Big] = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}_0\left[X_n = 0\right]$$
donc $\mathbf{E}_0\left[N_0\right] = \infty$ ssi la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}_0\left[X_n = 0\right]$ diverge. Or d'après Stirling on a
$$\mathbf{P}_0\left[X_{2k} = 0\right] = \frac{2k!}{k!k!}p^k(1-p)^k \sim \sqrt{4\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\frac{1}{2\pi k\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}}p^k(1-p)^k$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\left(4p(1-p)\right)^k.$$
Donc la série diverge ssi $p = \frac{1}{2}$.
5. D'après la question précédente, on sait que la chaîne est récurrente ssi $p = \frac{1}{2}$ (car c'est le seul cas où 0 est récurrent). Il existe donc une mesure stationnaire m unique. Or la mesure $m(i) = 1$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$ vérifie l'équation $mQ = m$ (*i.e.* $m(i-1)Q(i-1,i) + m(i+1)Q(i+1,i) = m(i)$) c'est donc l'unique mesure stationnaire. Cette mesure est de masse infinie ($m(\mathbf{Z}) = +\infty$) donc la chaîne est irréductible récurrente nulle.

Exercice 3:

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ de noyau de transition Q défini pour un $p \in]0,1[$ par
$$\begin{cases} Q(0,1) = 1 \\ Q(n,n+1) = p, \quad Q(n,n-1) = 1-p, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Ecrire la dynamique de la chaîne de Markov. Quelle est la différence avec la dynamique de l'exercice précédent ?
2. La chaîne est-elle irréducitble ?
3. Montrer que la chaîne est transiente si $p > \frac{1}{2}$.
4. Soit $p < \frac{1}{2}$. Déterminer l'unique probabilité réversible. Qu'en déduit-on sur la récurrence de la chaîne ?
5. Que peut-on dire dans le cas $p = \frac{1}{2}$?

Corrigé:

1. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. *i.i.d.* de loi $\mathbf{P}\left[Z_1 = 1\right] = p = 1 - \mathbf{P}\left[Z_1 = -1\right]$. Alors étant donné $X_0 \sim \mu$ indépendant de $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ on définit X_{n+1} par
$$X_{n+1} = (X_n + Z_{n+1})\,\mathbf{1}_{\{X_n\geqslant 1\}} + \mathbf{1}_{\{X_n=0\}},$$
$$= X_n + Z_{n+1}\mathbf{1}_{\{X_n\geqslant 1\}} + \mathbf{1}_{\{X_n=0\}}.$$
C'est une marche aléatoire sur $\mathbf{N}$ avec barrière de réflexion en 0.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $P^n(0,n) = p^{n-1} > 0$ donc $0 \rightsquigarrow n$ et $P^n(n,0) = (1-p)^{n-1} > 0$ donc $0 \sim n$. La chaîne est donc irréductible.
3. Par la loi des grands nombres. En effet on vérifie que $X_{n+1} \geqslant X_n + Z_{n+1}$ donc $X_n \geqslant X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) = X_0 + \sum_{k=1}^n Z_k$. Par la loi de grands nombres on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Z_k = \mathbf{E}[Z_1] = 2p-1$ donc $\lim_n X_n = +\infty$ dès que $2p-1 > 0$ *i.e.* $p > \frac{1}{2}$.
4. Une probabilité π est dite réversible si

$$\forall i,j \in \mathbf{N}, \quad \pi(i)Q(i,j) = \pi(j)Q(j,i).$$

Si une telle mesure π existe elle vérifie pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \pi(0)Q(0,1) = \pi(1)Q(1,0) \quad &\Leftrightarrow \quad \pi(1) = \frac{\pi(0)}{1-p} \\ \pi(n)Q(n,n+1) = \pi(n+1)Q(n+1,n) \quad &\Leftrightarrow \quad \pi(n+1) = \pi(n)\frac{p}{1-p}. \end{aligned}$$

La solution unique a ce système est donné par $\pi(n) = \pi(0)\frac{1}{1-p}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. La constante $\pi(0)$ est la constante de normalisation de façon à avoir $\pi(\mathbf{N}) = 1$. En effet comme $p < \frac{1}{2}$ on a $\frac{p}{1-p} < 1$ et $\pi(0) = \frac{1-2p}{2(1-p)}$. La probabilité π est réversible donc stationnaire, et la chaîne est donc récurrente positive.
5. Dans le cas $p = \frac{1}{2}$ la chaîne est récurrente nulle.

Exercice 4:
Soit X une μ–P chaîne de Markov sur E dénombrable. Soit $\psi : E \to F$ une application dans F dénombrable.

1. On suppose ψ bijective. Montrer que si $Y_n = \psi(X_n)$ alors $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une ν–Q chaîne de Markov sur F. Déterminer la loi initiale ν et la matrice de transition Q.
2. On suppose ψ surjective telle que pour tout $j \in F$

$$P(x, \psi^{-1}(j)) = P(y, \psi^{-1}(j)) \quad \text{si} \quad \psi(x) = \psi(y). \tag{$*$}$$

Montrer que $Y_n = \psi(X_n)$ est une ν–Q chaîne de Markov où pour tout $i,j \in F$

$$Q(i,j) = P(x, \psi^{-1}(j)) \quad \text{avec} \quad x \in \psi^{-1}(i).$$

3. Dans les 2 cas précédents, montrer que si π est une probabilité stationnaire pour P alors la loi image $\pi \circ \psi^{-1}$ est une probabilité stationnaire pour Q.

Corrigé:

1. Comme ψ est bijective donc inversible, on a pour tout $n \geqslant 0$ et tous $y_0, \ldots, y_{n+1} \in F$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Y_{n+1} = y_{n+1} \,|\, Y_n = y_n, \ldots, Y_0 = y_0] &= \mathbf{P}[\psi(X_{n+1}) = y_{n+1} \,|\, \psi(Y_n) = y_n, \ldots, \psi(Y_0) = y_0] \\ &= \mathbf{P}\left[X_{n+1} = \psi^{-1}(y_{n+1}) \,\middle|\, X_n = \psi^{-1}(y_n), \ldots, X_0 = \psi^{-1}(y_0)\right] \\ P(\psi^{-1}(y_n), \psi^{-1}(y_{n+1})), \end{aligned}$$

donc $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur F de transition $Q(x,y) = P(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)$. La loi initiale ν est l'image de μ par ψ, $\nu = \mu \circ \psi^{-1}$.
2. On a pour tout $n \geqslant 0$ et tous $y_0, \ldots, y_{n+1} \in F$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Y_{n+1} = y_{n+1} \,|\, Y_n = y_n, \ldots, Y_0 = y_0] &= \mathbf{P}[\psi(X_{n+1}) = y_{n+1} \,|\, \psi(Y_n) = y_n, \ldots, \psi(Y_0) = y_0] \\ &= \mathbf{P}\left[X_{n+1} \in \psi^{-1}(y_{n+1}) \,\middle|\, X_n \in \psi^{-1}(y_n), \ldots, X_0 \in \psi^{-1}(y_0)\right] \\ &= \mathbf{P}\left[X_{n+1} \in \psi^{-1}(y_{n+1}) \,\middle|\, X_n \in \psi^{-1}(y_n)\right], \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov pour $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Or $\psi^{-1}(y_n) = \bigcup_k x_k$ où $x_k \in E$ pour tout k donc

$$\mathbf{P}\left[X_{n+1} \in \psi^{-1}(y_{n+1}) \,\middle|\, X_n \in \psi^{-1}(y_n)\right] = \sum_{x, \psi(x) = y_n} P(x, \psi^{-1}(y_{n+1}))\mathbf{P}\left[X_n = x \,\middle|\, X_n \in \psi^{-1}(y_n)\right],$$

et d'après la propriété $(*)$ satisfaite par P, $\mathbf{P}[Y_{n+1} = y_{n+1}]\, Y_n = y_n, \ldots, Y_0 = y_0 = P(x_0, \psi^{-1}(y_{n+1}))$ où $x_0 \in \psi^{-1}(y_n)$. La suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien une ν–Q chaîne de Markov avec $\nu = \mu \circ \psi^{-1}$.

3. Soit $\tilde{\pi} = \pi \circ \psi^{-1}$ alors $\tilde{\pi}(y) = \pi(\psi^{-1}(y)) = \sum_{x,\psi(x)=y} \pi(x)$. Il faut montrer $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}Q$ *i.e.*

$$\tilde{\pi}(y_2) = \sum_{y_2 \in F} \tilde{\pi}(y_1)Q(y_1, y_2).$$

Or $\tilde{\pi}(y_1)Q(y_1, y_2) = \displaystyle\sum_{x_1,\psi(x_1)=y_1} \sum_{x_2,\psi(x_2)=y_2} \pi(x_1)P(x_1, x_2)$. On conclut facilement.

Exercice 5:
Retour à l'exercice 6 de la feuille 5. On considère d balles ($d > 1$) numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. L'état initial des urnes est de X_0 balles dans l'urne A et donc de $d - X_0$ balles dans l'urne B. Un changement d'état est modélisé de la façon suivante : « on tire un numéro de balle selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, d\}$ et à un tirage i on déplace la balle numéro i d'une urne à l'autre. »
Le nombre de balles dans l'urne A après n changement d'états est noté X_n et la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée *chaîne d'Ehrenfest*.

1. Rappeler la matrice de transition P de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$.
2. En résolvant $\pi P = \pi$ déterminer la probabilité stationnaire π.
3. Exprimer en fonction de π, $\lim_n P^n(x, y)$ pour tout couple d'états (x, y).
4. On modifie maintenant le changement d'état de la chaîne : « on tire un numéro de balle selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, d\}$ et à un tirage i on déplace la balle numéro i d'une urne à l'autre **avec probabilité** $\frac{1}{2}$ ».
   Refaire l'exercice pour cette chaîne d'Ehrensfest modifiée.

Corrigé:
1. On a $P(x, x+1) = \frac{d-x}{d}$ si $x \leqslant d-1$ et $P(x, x-1) = \frac{x}{d}$ si $x \geqslant 1$.
2. On cherche une mesure stationnaire $\pi = (\pi(0), \ldots, \pi(d))$ qui doit vérifier $\pi P = \pi$ *i.e.* pour tout $0 < k < d$,

$$\pi(k) = \pi(k-1)P(k-1, k) + \pi(k+1)P(k+1, k),$$

   $\pi(0) = \frac{\pi(1)}{d}$, et $\pi(d) = \frac{\pi(d-1)}{d}$. On résoud explicitement, itérativement, $\pi(1) = d\pi(0)$, $\pi(2) = \frac{d(d-1)}{2}\pi(0)$, ..., $\pi(k) = C_d^k \pi(0)$. On a $\sum_{k=0}^{d} \pi(k) = \pi(0) \sum_{k=0}^{d} C_d^k = \pi(0)2^d < +\infty$ donc la mesure stationnaire est la probabilité (renormalisée) $\pi(k) = \frac{C_d^k}{2^d}$.
3. La chaîne est irréductible récurrente positive. Il est clair que $P^n(x, y) = 0$ si $|y - x|$ est impair et $P^{2n+1}(x, y)$ si $|y - x|$ est pair. La chaîne est dite de période 2 et on a $\lim P^{2n}(x, y) = 2\pi(y)$ si $|y - x|$ est pair et $\lim P^{2n+1}(x, y) = 2\pi(y)$ si $|y - x|$ est impair.