TD 8 : Chaîne de Markov, ergodicité

Exercice 1:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition P

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Classer les états de la chaîne. Montrer qu'il existe une unique classe d'équivalence C formée par les états récurrents.
2. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in C\}$ le temps d'entrée dans C. Calculer $\mathbf{E}_x[\tau]$.
3. Calculer pour $x \in E$ et $y \in C$, $\mathbf{P}_x[X_\tau = y]$.
4. Déterminer pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$, $\mathbf{P}_x$–*p.s.*

Exercice 2:
Soit X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. Le nombre de particules dans ce volume V évolue sur la période $[n, n+1[$ d'après la dynamique suivante :
— une particule (parmi les X_n) a une probabilité p de quitter V
— un nombre aléatoire Z_{n+1} de particules entre dans V
La suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de X_0.

1. Calculer $\mathbf{E}_x\left[e^{itX_1}\right]$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de transition
$$Q(x,y) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x\wedge y} C_x^k q^k (1-q)^{x-k}\frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$
En déduire que la chaîne est irréductible.
3. On suppose que X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ. Quelle est la fonction caractéristique de X_1 ?
Pour quelle valeur de θ la loi de Poisson de paramètre θ est-elle probabilité invariante ?
Que peut-on dire de la récurrence de $(X_n)_{n\geqslant 0}$?
4. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2$.

Exercice 3:
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbf{N}$ de matrice de transition

$$P(x,x-1) = q_x, \quad P(x,x) = r_x, \quad P(x,x+1) = p_x,$$

avec $q_x + r_x + p_x = 1$, $q_0 = 0$, $q_x > 0$ si $x > 0$ et $p_x > 0$. Une telle chaîne est appelée *chaîne de naissance et de mort.*
On pose $\tau_k = \inf\{n \geqslant 0, X_n = k\}$ et étant donné trois états a, x et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$ on pose $u(x) = \mathbf{P}_x[\tau_a < \tau_b]$ et $\gamma(x) = \frac{q_1\ldots q_x}{p_1\ldots p_x}$ (avec la définition $\gamma(0) = 1$).

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $u(x+1) - u(x) = \frac{q_x}{p_q}(u(x) - u(x-1))$.
2. En déduire que pour tout $a \leqslant x \leqslant b$,
$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1}\gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y}$$
Que vaut $\gamma(x)$ et $u(x)$ dans le cas symétrique $p_x = q_x$.
3. Déterminer $\mathbf{P}_1[\tau_0 = \infty]$ et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{y\geqslant 0}\gamma_y = +\infty$.
4. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire qu'elle est récurrente positive si et seulement si
$$\sum_{x\geqslant 1}\frac{p_0\cdots p_{x-1}}{q_1\cdots q_x} < +\infty.$$