M1 Mathématiques

MM036 - processus à sauts

Devoir 2 : Chaînes de Markov

Pour montrer qu'un processus est une Chaîne de Markov, on utilisera souvent le Lemme 4.8.2.

Exercice 1. (Absorption). J'ai 1 euro, et j'ai besoin de 12 euros. Pierre accepte de jouer à pile ou face contre moi. Je mise toujours sur pile. J'adopte la stratégie suivante : quand j'ai 1, 2, ou 4 euros, je mise tout. Quand j'ai 8 euros, je mise 4 euros. Quand j'ai 0 ou 12 euros, j'arrête de jouer. (Bien sûr, chaque fois que je mise x euros, Pierre mise aussi x euros et le gagnant prend les $2x$ euros).

1. Modéliser le problème à l'aide d'une chaîne de Markov à 6 états (en précisant la matrice de transition et la loi initiale) dont deux états "absorbants".

2. Calculer la probabilité que je termine avec 12 euros.

Exercice 2. (Théorème ergodique). Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. qui valent -1 (proba 1/2) ou 1 (proba 1/2). Soit X le processus défini par $X_0 = 0$, et

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}\mathbf{1}_{\{|X_n+Z_{n+1}|\leq 3\}}$$

1. Montrer que X est une chaîne de Markov. Donner son espace d'états, sa loi initiale ν et (rapidement) sa matrice de transition P.

2. A chaque fois que la chaîne passe par l'état k, cela engendre un coût de k^2 euros. Calculer le coût moyen sur un grand (infini) nombre de coups (i.e. calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k^2$ p.s.) en justifiant bien.

Exercice 3. Comme dans l'exercice 4 du devoir 1, on considère une famille indépendante $(X_i)_{i\geq 1}$ de v.a. i.i.d., avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$, et on définit $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + ... + X_n$. On a montré que $\tau = \inf\{n > 0,\ S_n = 0\} < \infty$ p.s.

1. Montrer que S est une chaîne de Markov, en préciser l'espace d'états, la loi initiale, la matrice de transition, dire si elle est ou non irréductible.

2. Montrer qu'elle est récurrente.

3. Trouver une mesure invariante (qui ne sera pas une probabilité). Conclure que cette chaîne est récurrente mais non récurrente positive (un résultat du cours affirme que si une chaîne irréductible admet une probabilité invariante, alors toutes les mesures invariantes lui sont proportionnelles).

Exercice 4. (Convergence en loi). On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ irréductible, à valeurs dans un espace d'états E fini, de matrice de transition P, de loi initiale ν. On s'intéresse à la convergence en loi de X_n quand n tend vers l'infini. On rappelle que par le cours, $(X_n)_{n\geq 1}$ possède une unique probabilité invariante π. On notera μ_n la loi de X_n et on rappelle que $\mu_n = \nu P^n$. On rappelle que comme E est fini, on dit que X_n converge en loi vers μ (une probabilité sur E) si pour tout $i \in E$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \mu_n(i)$ tend vers $\mu(i)$.

1. Montrer que si X_n converge en loi vers μ, alors $\mu = \pi$.

2. On suppose ici que $E = \{0, 1\}$ et que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculer π, calculer P^n, montrer que X_n ne converge pas en loi quand $n \to \infty$, sauf pour une certaine loi initiale ν qu'on précisera.

3. Revenons au cas général. Pour $i \in E$, on appelle période de i l'entier naturel défini par

$$d_i = \text{PGCD } (n \geq 1 \ : \ P^n(i,i) > 0).$$

(a) Montrer que pour tout $i, j \in E$, d_i divise d_j (difficile, utiliser que la chaîne est irréductible).

(b) En déduire que pour tout $i, j \in E$, $d_i = d_j$. On peut donc définir la période d de la chaîne par $d = d_i$ (pour n'importe quel $i \in E$).

(c) Calculer d pour l'exemple de la question 2.

4. On suppose désormais que la chaîne est apériodique, c'est à dire que $d = 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $i, j \in E$, $P^n(i,j) > 0$. Pour cela,

(a) Montrer que pour tout $i \in E$, il existe n_i tel que pour tout $n \geq n_i$, $P^n(i,i) > 0$ (difficile !). On pourra introduire $I(i) = \{n \geq 0 \, ; P^n(i,i) > 0\}$, puis $J(i) = \{k - \ell \, ; k, \ell \in I(i)\}$, montrer que $J(i)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, puis qu'il contient 1, écrire $1 = a - b$ avec a et b dans $I(i)$, et conclure en séparant les cas $b = 0$ et $b > 0$.

(b) En déduire que pour tout $i, j \in E$, il existe $n_{i,j}$ tel que pour tout $n \geq n_{i,j}$, $P^n(i,i) > 0$.

(c) Conclure (rappelons que E est fini).

5. On considère maintenant une autre chaîne de Markov $(Y_n)_{n\geq 1}$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, aussi de transition P, mais partant d'une autre loi initiale η.

(a) Montrer que $Z_n = (X_n, Y_n)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E \times E$, de matrice de transition Q définie par $Q((i,k),(j,\ell)) = P(i,j)P(k,\ell)$.

(b) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est irréductible (en utilisant la question 4) et que son unique probabilité invariante n'est autre que $m(i,k) = \pi(i)\pi(k)$.

(c) Soit $i_0 \in E$ fixé. En appliquant le théorème ergodique, montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ passe p.s. une infinité de fois par (i_0, i_0). En déduire que le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{n \geq 0 \, ; X_n = Y_n = i_0\}$$

est fini p.s.

(d) En écrivant, pour $i \in E$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X_n = i, \tau > n) + \mathbb{P}(X_n = i, \tau \leq n)$, en utilisant la propriété de Markov pour montrer que $\mathbb{P}(X_n = i, \tau \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\tau = k) P^{n-k}(i_0, i)$, et en faisant les mêmes calculs pour $\mathbb{P}(Y_n = i)$, montrer que

$$|\mathbb{P}(X_n = i) - \mathbb{P}(Y_n = i)| \leq 2\mathbb{P}(\tau > n) \to 0$$

quand $n \to \infty$.

(e) Conclure, en choisissant $\eta = \pi$, que X_n converge en loi vers π.

Conclusion : une chaîne de Markov irréductible apériodique à espace d'états fini converge en loi, quand le temps tend vers l'infini, vers son unique probabilité invariante (pour n'importe quelle loi initiale).