TD 4 : Processus Ponctuel de Poisson

Exercice 1:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ un processus ponctuel de Poisson sur $(E,\mathcal{E})$ d'intensité μ (mesure positive σ–finie).

1. Rappeler l'expression de la fonctionnelle de Laplace de $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour toute fonction mesurable positive $f : E \to \mathbf{R}_+$ par $\mathbf{E}\left[e^{-\sum_{n\geqslant 1} f(X_n)}\right]$.
2. Montrer que pour toute fonction mesurable positive $f : E \to \mathbf{R}_+$
$$\mathbf{E}\Big[\sum_{n\geqslant 1} f(X_n)\Big] = \mu(f).$$
Montrer que ce résultat est vrai pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^1(E,\mathcal{E},\mu)$ *(formule de Campbell).*

Exercice 2:
Un cobaye reçoit une quantité positive ξ_n d'un médicament à l'instant T_n et la quantité décroît au cours du temps de façon exponentielle (déterminisite) en e^{-at} avec $a > 0$. On suppose que les instants $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont les instants de saut d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et que $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi ν sur $\mathbf{R}_+$ indépendante de $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Que peut-on dire du processus $(T_n, \xi_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Soit Z_t la quantité de médicament présente dans le sang du cobaye à l'instant $t \geqslant 0$.
En utilisant la formule de Campbell, calculer $\mathbf{E}[Z_t]$ et la limite lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 3:
Soit h une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans $]0,1]$. On note $H(t) = \int_0^t h(u)\mathrm{d}u$.

1. Soit $(T_n, U_n)_{n\geqslant 1}$ un processus ponctuel sur $\mathbf{R}_+ \times [0,1]$ d'intensité $\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u) = \mathrm{d}t\mathrm{d}u$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de comptage défini par
$$\forall t \geqslant 0, \quad Y_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leqslant t, U_n \leqslant h(T_n)\}}$$
On note $(\tilde{T}_n)_{n\geqslant 1}$ les instants de sauts de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$.
Montrer que $(\tilde{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus ponctuel de poisson sur $\mathbf{R}_+$ de mesure d'intensité $\tilde{\mu}(\mathrm{d}t) = h(t)\mathrm{d}t$.
2. Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité 1 d'instants de saut $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $Z_t = N_{H(t)}$.
Montrer que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de comptage d'instants de sauts $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 1}$ (à déterminer).
En déduire que $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus ponctuel de poisson sur $\mathbf{R}_+$ de mesure d'intensité $\tilde{\mu}(\mathrm{d}t) = h(t)\mathrm{d}t$.
3. Conclure.
4. Adapter l'exercice dans le cas où h est bornée par $C > 0$.