Université Pierre et Marie Curie — **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
Période 2 — **Processus de sauts 4M036**

TD 6 : Chaîne de Markov, classification des états

Notations : $x \rightsquigarrow y$ la relation transitive « *y est accessible à partir de l'état x* »
$x \sim y$ la relation d'équivalence « *x et y communiquent* »

Exercice 1:
On considère sur $E = \{1, \ldots, 6\}$ la matrice de transition P (incomplète)

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

1. Compléter la matrice P pour en faire une matrice de transition.
2. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.
3. Quels sont les états récurrents et transitoires de cette chaîne ?
   Déterminer toutes les classe d'équivalences d'états pour la relation $\sim$.
4. Refaire l'exercice en changeant la valeur de $P(5, 6)$ à $\frac{1}{4}$.

Exercice 2:
Soit P une matrice de transition sur E dénombrable.

1. Montrer que $x \rightsquigarrow y$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ et des états $a_1, \ldots, a_{n-1}$ de E tels que

$$P(x, a_1) > 0, P(a_1, a_2) > 0, \ldots, P(a_{n-1}, y) > 0.$$

   Montrer qu'il existe des états $x, a_1, \ldots, a_{n-1}, y$ tous distincts entre eux.

Soit Q une autre matrice de transition sur E vérifiant

$$\forall x, y \in E, x \neq y, \quad P(x, y) > 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(x, y) > 0.$$

2. Montrer que si $x \rightsquigarrow y$ pour P alors $x \rightsquigarrow y$ pour Q.
   En déduire que si la chaîne associée à P est irréductible alors il en est de même pour celle associée à Q.

Exercice 3:
Soit une chaîne de Markov à valeurs dans E de matrice de transition P. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \quad x_0 \rightsquigarrow x & \textit{i.e. } x_0 \text{ conduit à tout autre état } x \\ \forall x \in E, \quad \mathbf{P}_x [\tau_{x_0} < +\infty] = 1, & \text{on atteint } x_0 \text{ en un temps fini} \end{cases}$$

où $\tau_{x_0} = \inf \{n \geqslant 0, X_n = x_0\}$. Montrer que la chaîne est récurrente irréductible.

Exercice 4:
On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sur $\mathbf{N}$ de noyau de transition P défini par

$$\forall n \geqslant 0, \quad P(n, 0) = p_n, \quad P(n, n+1) = 1 - p_n,$$

où pour tout $n \geqslant 0$, $p_n \in]0, 1[$.

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = +\infty$ (étudier la récurrence en 0).

3. Etudier la récurrence dans les 3 cas : $p_n = p$ pour tout $n \geqslant 0$, $p_n = \frac{1}{n+1}$ et $p_n = \alpha^n$ ($\alpha \in]0,1[$).

Exercice 5:
On considère un serveur informatique qui reçoit des requêtes informatiques. Pour traiter ces requêtes informatiques, le serveur crée une *file d'attente* des requêtes. On suppose que le temps de traitement d'une requête est constant (le même pour toutes les requêtes) et que le serveur ne peut traîter qu'une requête à la fois. On considère que le temps est discret et l'unité de temps correspond à ce temps de traitement constant.
On note ξ_{n+1} le nombre de requêtes arrivant pendant la période de temps $[n, n+1[$ et on suppose que la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi μ.
On note X_n le nombre de requêtes dans la file d'attente à l'instant n et l'on suppose X_0 indépendant de la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.
2. Montrer que si $\mathbf{E}[\xi_1] > 1$ alors $\lim_n X_n = +\infty$ *p.s.*
   En déduire que la chaîne est transitoire.
3. Montrer que si $\mathbf{E}[\xi_1] < 1$ alors l'état 0 est récurrent.

Exercice 6:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P. On note $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et $\mathbf{F}$ la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. On suppose la chaîne récurrente irréductible.

1. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 1, X_n \neq X_0\}$. Montrer que τ est un $\mathbf{F}$–temps d'arrêt fini *p.s.* et déterminer sa loi.
   Déterminer la loi de X_τ.

On définit la suite de variables aléatoires $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n, X_k \neq X_{\tau_n}\}$$

2. Monter que $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\mathbf{F}$–temps d'arrêt finis *p.s.*
3. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.
   Cette chaîne est-elle irréductible ?

Exercice 7:
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur E dénombrable de matrice P.
Soit $C \subset E$. On note $\tau_C = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in C\}$ le temps d'entrée dans C.

1. Montrer que $u(x) = \mathbf{P}_x[\tau_C < +\infty]$ est solution de
$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ Pu(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$
2. Montrer que $v(x) = \mathbf{E}_x[\tau_C]$ est solution de
$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ 1 + Pv(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$