TD 6 : Chaîne de Markov, classification des états

Notations : $x \rightsquigarrow y$ la relation transitive « *y est accessible à partir de l'état x* »
$x \sim y$ la relation d'équivalence « *x et y communiquent* »

Exercice 1:
On considère sur $E = \{1, \ldots, 6\}$ la matrice de transition P (incomplète)

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

1. Compléter la matrice P pour en faire une matrice de transition.
2. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.
3. Quels sont les états récurrents et transitoires de cette chaîne ?
   Déterminer toutes les classe d'équivalences d'états pour la relation $\sim$.
4. Refaire l'exercice en changeant la valeur de $P(5, 6)$ à $\frac{1}{4}$.

Corrigé:
1. Il faut que la somme sur chaque ligne soit égale à 1, donc

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le graphe orienté est défini à partir des états et de la matrice de transition :
   — les états sont les sommets du graphe
   — les arêtes sont les couples (x, y) vérifiants $P(x, y) > 0$
3. La première ligne donne $P(1, 1) = \frac{1}{2}$ et $P(1, 3) = \frac{1}{2}$ donc $1 \rightsquigarrow 1$ et $1 \rightsquigarrow 3$. De même, on remarque que $3 \rightsquigarrow 1$ et $3 \rightsquigarrow 3$ puis que $5 \rightsquigarrow 1$, $5 \rightsquigarrow 3$ et $5 \rightsquigarrow 5$. Les états $\{1, 3, 5\}$ communiquent entre eux mais ne conduisent à aucun autre état *i.e.* $\forall x \in \{1, 3, 5\}, \sum_{y \in \{1,3,5\}} P(x, y) = 1$. Donc $\{1, 3, 5\}$ est une classe close irréductible.

   On a aussi $2 \sim 4$ et ces 2 états ne conduisent à aucun autre. Donc $\{2, 4\}$ est une classe close irréductible.

   Enfin l'état 6 ne conduit qu'à lui-même donc $\{6\}$ forme une classe close irréductible, on dit que 6 est un état absorbant.

   L'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se décompose en 3 classes irréductibles $\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}$.

Exercice 2:
Soit P une matrice de transition sur E dénombrable.
1. Montrer que $x \rightsquigarrow y$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ et des états $a_1, \ldots, a_{n-1}$ de E tels que

$$P(x, a_1) > 0, P(a_1, a_2) > 0, \ldots, P(a_{n-1}, y) > 0.$$

   Montrer qu'il existe des états $x, a_1, \ldots, a_{n-1}, y$ tous distincts entre eux.

Soit Q une autre matrice de transition sur E vérifiant

$$\forall x, y \in E, x \neq y, \quad P(x, y) > 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(x, y) > 0.$$

2. Montrer que si $x \rightsquigarrow y$ pour P alors $x \rightsquigarrow y$ pour Q.
   En déduire que si la chaîne associée à P est irréductible alors il en est de même pour celle associée à Q.

Corrigé:

1. Par définition on a $x \rightsquigarrow y$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $P^n(x,y) > 0$ or
$$P^n(x,y) = \sum_{a_1,\ldots,a_{n-1}\in E} P(x,a_1)P(a_1,a_2)\cdots P(a_{n-1},y).$$
   Donc $P^n(x,y) > 0$ ssi au moins un des termes dans la somme précédente est strictement positif, d'où l'existence des a_i.
   Soit n_0 le plus petit entier positif tel que $P^{n_0}(x,y) > 0$ alors les états $a_1,\ldots,a_{n_0-1}$ sont tous distincs car si on a $a_i = a_j$ pour $i < j$ alors on peut construire un chemin plus court $x, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, \ldots, y$.
2. Trivial d'après la question 1.

Exercice 3:
Soit une chaîne de Markov à valeurs dans E de matrice de transition P. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que
$$\begin{cases} \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \quad x_0 \rightsquigarrow x & \textit{i.e. } x_0 \text{ conduit à tout autre état } x \\ \forall x \in E, \quad \mathbf{P}_x\left[\tau_{x_0} < +\infty\right] = 1, & \text{on atteint } x_0 \text{ en un temps fini} \end{cases}$$
où $\tau_{x_0} = \inf\{n \geqslant 0, X_n = x_0\}$. Montrer que la chaîne est récurrente irréductible.

Corrigé:
Tout d'abord la chaîne est irréductible car pour tous $x, y \in E$, on a $x \rightsquigarrow x_0$ et $x_0 \rightsquigarrow y$ donc $x \sim y$. Il suffit de montrer la récurrence d'un état. Montrons que l'état x_0 est récurrent. Par définition x_0 est récurrent si $\mathbf{P}_{x_0}\left[T_{X_0} < +\infty\right]$ avec $T_{x_0} = \inf\{n \geqslant 1, X_n = x_0\}$. Or on a
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{x_0}\left[T_{x_0} < +\infty\right] &= \mathbf{E}_{x_0}\left[\mathbf{1}_{\left\{T_{x_0}<+\infty\right\}}\right] \\ &= \mathbf{E}_{x_0}\left[\mathbf{E}_{x_0}\left[\mathbf{1}_{\left\{T_{x_0}<+\infty\right\}}|X_1\right]\right] \quad \text{par préconditionnement.}\end{aligned}$$
Or d'après la propriété de Markov, le processus $(Y_n = (X_{n+1}))_{n\geqslant 0}$ est une δ_{X_1}–P chaîne de Markov et donc $\mathbf{E}_{x_0}\left[\mathbf{1}_{\left\{T_{x_0}<+\infty\right\}}|X_1\right] = \mathbf{E}_{X_1}\left[\mathbf{1}_{\left\{S_{x_0}<+\infty\right\}}\right]$, où $S_{x_0} = \inf\{n \geqslant 0, Y_n = x_0\}$. Or par hypothèse $\mathbf{P}_x\left[S_{x_0} < +\infty\right] = 1$ donc $\mathbf{P}_{X_1}\left[S_{x_0} < +\infty\right] = \int \mathbf{P}_x\left[S_{x_0} < +\infty\right]\mathbf{P}_{X_1}(\mathrm{d}x) = 1$.

Exercice 4:
On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbf{N}$ de noyau de transition P défini par
$$\forall n \geqslant 0, \quad P(n,0) = p_n, \quad P(n,n+1) = 1 - p_n,$$
où pour tout $n \geqslant 0$, $p_n \in]0,1[$.

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = +\infty$ (étudier la récurrence en 0).
3. Etudier la récurrence dans les 3 cas : $p_n = p$ pour tout $n \geqslant 0$, $p_n = \frac{1}{n+1}$ et $p_n = \alpha^n$ ($\alpha \in]0,1[$).

Corrigé:

1. Dans chaque état, la chaîne peut passer à l'état suivant ou revenir à l'état 0. Donc pour tout $n \geqslant 0$ on a $0 \sim n$, la chaîne est donc irréductible.
2. Il suffit d'étudier la récurrence en un état. Prenons l'état 0 et notons $T_0 = \inf\{n \geqslant 1, X_n = 0\}$. Alors pour tout $n \geqslant 1$,
$$\mathbf{P}_0\left[T_0 \geqslant n\right] = P(0,1)P(1,2)\cdots P(n-2,n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-p_k).$$
   Comme $\mathbf{P}_0\left[T_0 = \infty\right] = \lim_n \mathbf{P}_0\left[T_0 \geqslant n\right]$, l'état 0 est récurrent ssi
$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-p_k) = 0.$$
   On conclut aisément.

3. D'après le critère précédent, la chaîne est récurrente si $p_n = p$ et si $p_n = \frac{1}{n+1}$, et transiente si $p_n = \alpha^n$ (pour $\alpha \in]0,1[$).

Exercice 5:
On considère un serveur informatique qui reçoit des requêtes informatiques. Pour traiter ces requêtes informatiques, le serveur crée une *file d'attente* des requêtes. On suppose que le temps de traitement d'une requête est constant (le même pour toutes les requêtes) et que le serveur ne peut traîter qu'une requête à la fois. On considère que le temps est discret et l'unité de temps correspond à ce temps de traitement constant.
On note ξ_{n+1} le nombre de requêtes arrivant pendant la période de temps $[n, n+1[$ et on suppose que la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi μ.
On note X_n le nombre de requêtes dans la file d'attente à l'instant n et l'on suppose X_0 indépendant de la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.
2. Montrer que si $\mathbf{E}[\xi_1] > 1$ alors $\lim_n X_n = +\infty$ *p.s.*
   En déduire que la chaîne est transitoire.
3. Montrer que si $\mathbf{E}[\xi_1] < 1$ alors l'état 0 est récurrent.

Corrigé:
1. Si la file d'attente était vide en n alors l'état $n+1$ correspond au nombres de requêtes qui sont arrivées dans l'intervalle $[n, n+1[$ c'est à dire ξ_{n+1}. Si la file d'attente était dans un état X_n non nul, alors 1 requête est traitée et la file sera dans l'état $X_n - 1 + \xi_{n+1}$ en $n+1$. On a donc
$$X_{n+1} = X_n - \mathbf{1}_{\{X_n \geqslant 1\}} + \xi_{n+1},$$
   et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov.
   La matrice de transition est donnée par
$$P(x,y) = \begin{cases} \mu(y) & \text{si } x = 0 \\ \mu(y-x+1) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
2. D'après la définition récurrente de X_n on a
$$X_n \geqslant X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n - n$$
   d'où $X_n \geqslant n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k - 1\right)$. Par la loi des grands nombres, si $\mathbf{E}[\xi_1] > 1$ on a $\lim_n X_n = +\infty$. Donc tout état x est transitoire.
3. Par l'absurde. Supposons 0 transitoire *i.e.* $\mathbf{P}_0[T_0 < +\infty] < 1$. Toujours d'après la définition de X_n on a
$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k - n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k = 0\}}$$
   Or par la LGN on a d'une part $\sum_{k=1}^n \xi_k - n \to -\infty$ *p.s.* et d'autre part $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=0\}} \to N_0 < +\infty$ *p.s.* (si 0 est transitoire, N_0 suit une loi géométrique de paramètre $1 - \mathbf{P}_0[T_0 < +\infty]$. D'où $X_n \to -\infty$ *p.s.* absurdre.

Exercice 6:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P. On note $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et $\mathbf{F}$ la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. On suppose la chaîne récurrente irréductible.

1. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 1, X_n \neq X_0\}$. Montrer que τ est un $\mathbf{F}$–temps d'arrêt fini *p.s.* et déterminer sa loi.
   Déterminer la loi de X_τ.

On définit la suite de variables aléatoires $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence
$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n, X_k \neq X_{\tau_n}\}$$

2. Monter que $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\mathbf{F}$–temps d'arrêt finis *p.s.*
3. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.
   Cette chaîne est-elle irréductible ?

Corrigé:

1. Il est clair que τ est un $\mathbf{F}$-temps d'arrêt car $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{P}_x[\tau \geqslant n+1] = P(x,x)^n$ donc $\mathbf{P}_x[\tau = \infty] = 0$ car $P(x,x) < 1$ (sinon la chaîne ne serait pas récurrente irréductible). La loi de τ est alors
   $$\forall n \geqslant 0, \quad \mathbf{P}[\tau = n] = P^{n-1}(x,x)(1-P(x,x)).$$
   La v.a. X_τ vérifie $\mathbf{P}_x[X_\tau = x] = 0$ et pour tout $y \neq x$
   $$\mathbf{P}_x[X_\tau = y] = \frac{P(x,y)}{1-P(x,x)}.$$
2. Par récurrence, soit $n \geqslant 0$. Supposons $\tau_n < +\infty$ *p.s.* Alors par la propriété de Markov forte
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}_x[\tau_{n+1} < +\infty] &= \mathbf{E}_x\left[\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{n+1}<+\infty\}} \,\middle|\, \tau_n\right]\right] \\ &= \mathbf{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{n+1}<+\infty\}} \,\middle|\, \tau_n\right]\right] \\ &= \mathbf{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}\mathbf{E}_{X_{\tau_n}}\left[\mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}\right]\right] = 1.\end{aligned}$$
3. Si $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov c'est par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_{\tau_n})_{n\geqslant 0}$. On a pour tout $x \neq y$
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}[Y_{n+1} = y \mid X_{\tau_n} = x_n, \dots, X_0 = x] &= \mathbf{P}\left[X_{\tau_{n+1}} = y \,\middle|\, X_{\tau_n} = x_n, \dots, X_0 = x\right] \\ &= \mathbf{P}_{x_n}[X_\tau = y].\end{aligned}$$
   Donc $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de transition $\tilde{P}$ définie par
   $$\tilde{P}(x,y) = \frac{P(x,y)}{1-P(x,x)}\mathbf{1}_{\{x\neq y\}}$$
   Si $X_{\tau_n} = x_n$ alors $X_k = x_n$ pour tout les $k \in [\tau_n, \tau_{n+1}[$ donc X a pour valeur Y_n entre les instants τ_n et $\tau_{n+1} - 1$. Tous les états visités par Y coïncident avec ceux visités par X donc Y est récurrente irréductible.

Exercice 7:
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur E dénombrable de matrice P.
Soit $C \subset E$. On note $\tau_C = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in C\}$ le temps d'entrée dans C.

1. Montrer que $u(x) = \mathbf{P}_x[\tau_C < +\infty]$ est solution de
   $$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ Pu(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$
2. Montrer que $v(x) = \mathbf{E}_x[\tau_C]$ est solution de
   $$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ 1 + Pv(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Corrigé:

1. Tout d'abord si $X_0 = x \in C$ alors $\tau_C = 0$ et donc $\tau_C < +\infty$. D'autre part si $X_0 = x \notin C$ alors on a $\tau_C = \inf\{n \geqslant 1, X_n \in C\} = T_C$ (car $\tau_C \geqslant 1$) et
   $$\mathbf{P}_x[\tau_C < +\infty] = \mathbf{E}_x\left[\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_C<+\infty\}} \,\middle|\, X_1\right]\right] = \sum_{y\in E} P(x,y)\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_C<+\infty\}} \,\middle|\, X_1 = y\right]$$
   Or par la propriété de Markov, $\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_C<+\infty\}} \,\middle|\, X_1 = y\right] = \mathbf{E}_y\left[\mathbf{1}_{\{\tau_C<+\infty\}}\right]$ où τ_C est le temps d'entrée de de la chaîne $Y_n = X_{1+n}$ (de transition P) dans C.
   Ainsi on a $u(x) = \sum_{y\in E} P(x,y)u(y)$ si $x \notin C$.
2. Le cas $x \in C$ est trivial car $\tau_C = 0$. Si $x \notin C$ alors $\tau_C = 1 + T_C$. On introduit $Y_n = X_{1+n}$ la chaîne de Markov de transition P et de loi initiale δ_{X_1} (d'après la proriété de Markov) et on obtient
   $$\mathbf{E}_x[T_C] = \sum_{y\in E} P(x,y)\mathbf{E}[T_C \mid X_1 = y] = \sum_{y\in E} P(x,y)\mathbf{E}_y[\tau_C],$$
   i.e. $v(x) = 1 + \sum_{y\in E} P(x,y)v(y)$.