TD 1 : Rappels : tribus, indépendance, conditionnement

Exercice 1:
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une partition de Ω avec $A_n \in \mathscr{F}$. On note $\mathscr{A} = \sigma(A_n, n \geqslant 1)$. Montrer que $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une application $\mathscr{A}$–mesurable si et seulement si $X = \sum_{n\geqslant 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ avec $a_n \in \mathbf{R}$.

Corrigé:
Si $X = \sum_{n\geqslant 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ alors X est $\mathscr{A}$–mesurable car pour tout $n \geqslant 1$, $A_n \in \mathscr{A}$. La réciproque peut se montrer par l'absurde. Soit X une application $\mathscr{A}$–mesurable et supposons qu'il existe une partie $A_k \in (A_n)_{n\geqslant 1}$ sur laquelle X prenne deux valeurs distinctes x_1 et x_2. Alors les deux parties $B_1 = A_k \cap X^{-1}(\{x_1\})$ et $B_2 = A_k \cap X^{-1}(\{x_2\})$ sont non-vides, disjointes ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$) et sont dans $\mathscr{A}$. Or tout élément de la tribu $\mathscr{A}$ s'écrit comme union d'élément de $\mathscr{A}$. Donc B_1 et B_2 s'écrivent comme union (disjointe) de A_j, plus précisément,

$$\exists J_1 \subset \mathbf{N},\, B_1 = \bigcup_{j\in J_1} A_j \quad \text{et} \quad \exists J_2 \subset \mathbf{N},\, B_2 = \bigcup_{j\in J_2} A_j$$

Or B_1 est d'intersection non-vide avec A_k donc $k \in J_1$. De même on a $k \in J_2$ et donc $k \in J_1 \cap J_2$ c'est à dire $A_k \subset B_1 \cap B_2$. Absurde.

Exercice 2:
Soit $\Omega = \{1, \dots, 5\}$ muni de la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Soit $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ définies par

$$\begin{aligned} &X(1) = X(2) = 0, X(3) = 1, X(4) = X(5) = 2,\\ &Y(\omega) = \omega^2, \quad \forall \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

1. Déterminer $\sigma(X)$, la tribu engendrée par X.
2. On munit Ω de la loi uniforme $\mathbf{P}$. Déterminer $Z = \mathbf{E_P}[Y \mid X]$.
3. On munit Ω de la loi $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ avec $q_1 = q_2 = \frac{1}{4}$ et $q_3 = q_4 = q_5 = \frac{1}{6}$. Déterminer $\tilde{Z} = \mathbf{E_Q}[Y \mid X]$.

Corrigé:
1. La tribu engendrée par X est la plus petite tribu $\mathscr{G}$ de Ω telle que $X : (\Omega, \mathscr{G}) \to (\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ soit mesurable. Soit $\mathscr{G}$ une tribu de Ω telle que X soit $\mathscr{G}$–mesurable. On a pour tout $y \in \mathbf{R}$, $X^{-1}(\{y\}) \in \mathscr{G}$. Donc $\mathscr{G}$ contient $\{1, 2\}$,$\{3\}$ et $\{4, 5\}$ et $\mathscr{G}_0 = \sigma(\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}) \subset \mathscr{G}$. Par ailleurs X est $\mathscr{G}_0$–mesurable donc $\sigma(X) \subset \mathscr{G}_0$.
2. Z est $\sigma(X)$–mesurable donc constante sur chacun des ensembles $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3\}, A_3 = \{4, 5\}$ (formant une partition de Ω), *i.e.* $Z = a_1\mathbf{1}_{\{1,2\}} + a_2\mathbf{1}_{\{3\}} + a_3\mathbf{1}_{\{4,5\}}$. Par définition de l'espérance conditionnelle, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbf{E}_P[Y\mathbf{1}_{A_i}]$. En particulier

   $$a_i\mathbf{P}[A_i] = \sum_{\omega\in A_i} Y(\omega)p_\omega,$$

   donc sous la probabilité uniforme $p_\omega = 1/5$,

   $$Z = \frac{5}{2}\mathbf{1}_{\{1,2\}} + 9\mathbf{1}_{\{3\}} + \frac{41}{2}\mathbf{1}_{\{4,5\}}.$$

3. Par le même raisonnement, sous la probabilité $\mathbf{Q}$, on a

   $$\tilde{Z} = \mathbf{E_Q}[Y \mid X] = \sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_i\mathbf{1}_{A_i}$$

   avec $a_i = \frac{1}{\mathbf{Q}[A_i]} \sum_{\omega\in A_i} Y(\omega)q_\omega$.

Exercice 3:
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit ε une v.a. de Bernoulli symétrique (vérifiant $\mathbf{P}[\varepsilon = 1] = \mathbf{P}[\varepsilon = -1] = \frac{1}{2}$) et X une v.a. indépendante de ε.
   Montrer que εX et ε sont indépendantes si et seulement si X est symétrique.

Soit $A, B \in \mathscr{F}$ indépendantes telles que $\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[B] = \frac{1}{2}$.

2. Déterminer deux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et Y une v.a. telles que
   (i) Y est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$–mesurable
   (ii) Y est indépendante de $\mathscr{B}$
   (iii) Y n'est pas mesurable par rapport à $\mathscr{A}$
   (indication : considérer $X = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A^c}$ et $\varepsilon = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B^c}$).
3. Déterminer deux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et Z une v.a. non constante telles que
   (i) Z est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$–mesurable
   (ii) Z est indépendante de $\mathscr{B}$
   (iii) Z est indépendante de $\mathscr{A}$

Corrigé:

1. Soit f et g deux fonction mesurables bornées sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, alors
$$\mathbf{E}[f(\varepsilon X)g(\varepsilon)] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}[f(X)g(1)] + \mathbf{E}[f(-X)g(-1)]\right).$$
   Donc les v.a. εX et ε sont indépendantes si et seulement si pour toutes f et g mesurables bornées
$$\mathbf{E}[f(X)g(1)] + \mathbf{E}[f(-X)g(-1)] = \mathbf{E}[f(X)]\left(g(1) + g(-1)\right).$$
   Si X est symétrique alors l'égalité précédente est toujours vraie. Réciproquement, on considère g une fonction telle que $g(1) = 0$ et $g(-1) = 1$. Dans ce cas, l'égalité précédente s'écrit $\mathbf{E}[f(-X)] = \mathbf{E}[f(X)]$ et est vraie pour toute f mesurable bornée, donc X est symétrique.
2. On définit X et ε comme indiqué et on note $\mathscr{A} = \sigma(X)$ et $\mathscr{B} = \sigma(\varepsilon)$. Alors $\mathscr{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ et $\mathscr{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ sont deux sous-tribus de $\mathscr{F}$ et indépendantes entre elles. On définit $Y = \varepsilon X$ et on a
   — Y qui est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$–mesurable par définition
   — Y indépendante de $\mathscr{B}$ car indépendante de ε d'après la question 1.
   — Y non mesurable par rapport à $\mathscr{A}$ car $\sigma(Y) = \{\emptyset, (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c), \Omega\}$.
3. On définit toujours $Y = \varepsilon X$ et d'après la question 1. on a aussi que εX indépendante de X, *i.e.* Y indépendante de $\mathscr{A}$.

Exercice 4:
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Pour $A \in \mathscr{F}$, on considère $B = \{\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \,|\, \mathscr{G}] = 0\}$. Montrer que $B \subset A^c$.

Corrigé:
Il est clair que $B \in \mathscr{G}$ donc par définition de l'espérance conditionnelle
$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \,|\, \mathscr{G}]\, \mathbf{1}_B].$$
Or sur l'événement B on a $\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \,|\, \mathscr{G}] = 0$ et donc $\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B] = 0$. Comme $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ est une v.a. positive on en déduit que $\mathbf{1}_{A \cap B} = 0$ *p.s.*

Exercice 5:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de Bernoulli de paramètres respectifs p et q (vérifiant $\mathbf{P}[X = 1] = p$). On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$ et $\mathscr{G} = \sigma(Z)$.

1. Calculer $U = \mathbf{E}[X \,|\, \mathscr{G}]$ et $V = \mathbf{E}[Y \,|\, \mathscr{G}]$.
2. Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?

Corrigé:

1. Les ensembles $\{Z=0\}$ et $\{Z=1\}$ forment une partition de Ω qui engendre $\mathscr{G}$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbf{E}[X \mid Z=0]\,\mathbf{1}_{\{Z=0\}} + \mathbf{E}[X \mid Z=1]\,\mathbf{1}_{\{Z=1\}}.$$

Sur $\{Z=1\} = \{X=0\} \cap \{Y=0\}$, on a $X=0$ *p.s.* et donc $\mathbf{E}[X \mid Z=1] = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X \mid Z=0] &= \frac{\mathbf{P}[X=1]}{\mathbf{P}[Z=0]},\\ &= \frac{\mathbf{P}[X=1]}{1-\mathbf{P}[Z=1]},\\ &= \frac{p}{p+q-pq}.\end{aligned}$$

Comme X et Y jouent des rôles symétriques on a

$$\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}] = \frac{p}{p+q-pq}\mathbf{1}_{\{Z=0\}}, \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}] = \frac{q}{p+q-pq}\mathbf{1}_{\{Z=0\}}.$$

2. Les v.a. $\mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]$ et $\mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ sont proportionnelles *p.s.* et non constantes, elles ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 6:

Soit $X \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On note $Y = \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]$ et on veut montrer le résultat suivant :

si X et Y ont même loi alors $X = Y$ *p.s.*

1. Montrer le résultat dans le cas $X \in \mathbf{L}^2$.
2. Montrer que pour tout $K \in \mathbf{R}_+$,

$$\mathbf{E}[(X \wedge K) \vee (-K) \mid \mathscr{G}] = (Y \wedge K) \vee (-K) \quad p.s. \qquad (*)$$

et en déduire le résultat.

Corrigé:

1. Si X est dans $\mathbf{L}^2$, alors $(X-Y)$ aussi et on a

$$\mathbf{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2\right] + \mathbf{E}\left[Y^2\right] - 2\mathbf{E}[XY].$$

Or $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[XY \mid \mathscr{G}]] = \mathbf{E}\left[Y^2\right]$ donc $\mathbf{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}\left[Y^2\right] = 0$ (car X et Y ont même loi). La v.a. $(X-Y)^2$ est positive d'espérance nulle donc nulle *p.s.*

2. Par croissance de l'espérance conditionnelle on a $\mathbf{E}[X \wedge K \mid \mathscr{G}] \leqslant Y \wedge K$ *p.s.* Donc la v.a. $U = Y \wedge K - \mathbf{E}[X \wedge K \mid \mathscr{G}]$ est positive et d'espérance $\mathbf{E}[U] = \mathbf{E}[Y \wedge K] - \mathbf{E}[X \wedge K)] = 0$ (car les v.a. $X \wedge K$ et $Y \wedge K$ ont même loi). On a donc donc $\mathbf{E}[X \wedge K \mid \mathscr{G}] = Y \wedge K$ *p.s.*
De la même façon avec la fonction $(y \mapsto y \vee -K)$ on prouve le résultat $(*)$.
La v.a. $(X \wedge K) \vee (-K)$ est bornée donc dans $\mathbf{L}^2$ et en appliquant la question 1. on a

$$(X \wedge K) \vee (-K) = (Y \wedge K) \vee (-K), \quad p.s.$$

On fait tendre $K \to +\infty$ et on obtient $X = Y$ *p.s.*

Exercice 7:

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites de Bernoulli indépendantes, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, telles que

$$\mathbf{P}[X_n = 1] = p \quad \mathbf{P}[Y_n = 1] = q,$$

avec p, q fixés, $0 < p, q < 1$.

1. Montrer que les variables aléatoires $Z_n = X_n Y_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Déterminer leur loi.
2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Déterminer la loi de S_n et celle de T_n.

3. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 1, T_n = 1\}$. Montrer que τ et S_τ sont des variables aléatoires. Déterminer la loi de τ.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$,

$$\mathbf{P}[X_k = 1 \mid \tau = n] = \mathbf{P}[X_k = 1 \mid Z_k = 0] = \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$

5. Montrer que

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\} \middle| \tau = n\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}[X_i = x_i \mid \tau = n],$$

6. En déduire l'expression de $\mathbf{P}[S_\tau = k \mid \tau = n]$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) (indication : commencer par le cas $k = 1$, puis le cas $k = n$).
7. Calculer $\mathbf{E}[S_\tau \mid \tau = n]$ (en utilisant la formule du binome de Newton et sa dérivée) et $\mathbf{E}[S_\tau]$. Vérifier qu'on a bien les égalités suivantes (identité de Wald)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_\tau] &= \mathbf{E}[\tau]\,\mathbf{E}[X_1],\\ \mathbf{E}[T_\tau] &= \mathbf{E}[\tau]\,\mathbf{E}[Z_1].\end{aligned}$$

Corrigé:

1. Soit $K_n = (X_n, Y_n)$ pour $n \geqslant 1$. L'indépendance des suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ implique l'indépendance de la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$. Comme fonction de K_n on en déduit l'indépendance de la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbf{P}[Z_n = 1] = pq$ et $\mathbf{P}[Z_n = 0] = 1 - pq$. Donc Z_n est une Bernoulli de paramètre pq.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note L_{X_n}, L_{Z_n}, L_{S_n}, et L_{T_n} les transformées de Laplace de X_n, Z_n, S_n et T_n. On a donc

$$L_{X_n}(s) = (1-p) + pe^{-s} \quad \text{et} \quad L_{Z_n}(s) = (1-pq) + pqe^{-s},$$

et par indépendance

$$L_{S_n}(s) = \big((1-p) + pe^{-s}\big)^n \quad \text{et} \quad L_{T_n}(s) = \big((1-pq) + pqe^{-s}\big)^n.$$

Donc S_n est une binomiale de paramètres (n, p) et T_n suit une loi binomiale de paramètres (n, pq). S_n (resp. T_n) correspond au nombre de succès dans l'épreuve de Bernoulli $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ (resp. $(Z_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

3. Pour n fixé, on a $\{\tau \geqslant n\} = \bigcap_{k=1}^{n-1}\{T_k = 0\} \in \mathscr{F}$, donc τ est une v.a. De même, on a $\{S_\tau = n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{S_k = n, \tau = k\} \in \mathscr{F}$ donc S_τ est une v.a.
De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}[\tau \geqslant n] = \mathbf{P}[\cap_{k=1}^{n}\{Z_k = 0\}] = (1-pq)^{n-1}.$$

La loi de τ est la loi géométrique de paramètre pq.

4. Par indépendance on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X_k = 1, \tau = n] &= \mathbf{P}[Z_1 = 0, \dots, Z_{k-1} = 0, X_k = 1, Y_k = 0, Z_{k+1} = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1],\\ &= p(1-q)(1-pq)^{n-2}pq.\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}[X_k = 1 \mid \tau = n] = \frac{p(1-q)(1-pq)^{n-2}pq}{(1-pq)^{n-1}-(1-pq)^n} = \frac{(1-q)p}{1-qp}$.
D'autre part l'indépendance entre X_k et Y_k donne $\mathbf{P}[X_k = 1 \mid Z_k = 0] = \frac{(1-q)p}{1-qp}$.

5. Le résultat est vrai pour $n = 1$, et pour tout $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\} \middle| \tau = n\right]\\ &= \frac{\mathbf{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1]}{(1-pq)^{n-1}pq}\\ &= \frac{\mathbf{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, x_1Y_1 = 0, \dots, x_{n-1}Y_{n-1} = 0, X_n = 1, Y_n = 1]}{(1-pq)^{n-1}pq}\\ &= \frac{\mathbf{P}[X_1 = x_1]\dots\mathbf{P}[X_n = x_n]\,\mathbf{P}[x_1Y_1 = 0]\dots\mathbf{P}[x_{n-1}Y_{n-1} = 0]\,\mathbf{P}[X_n = 1]\,\mathbf{P}[Y_n = 1]}{(1-pq)^{n-1}pq}\end{aligned}$$

De la même façon on prouve que

$$\mathbf{P}\left[X_i = x_i \mid \tau = n\right] = \frac{\mathbf{P}\left[X_i = x_i\right]\mathbf{P}\left[x_i Y_i = 0\right]}{1 - qp},$$

et on obtient

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\}\,\middle|\,\tau = n\right] = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\left[X_i = x_i \mid \tau = n\right],$$

6. Tout d'abord $\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right] = \mathbf{P}\left[S_n = k \mid \tau = n\right]$. On commence par les 2 cas extrêmes $k = 1$ et $k = n$ pour un $n \geqslant 1$. Alors

$$\mathbf{P}\left[S_n = 1 \mid \tau = n\right] = \frac{\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i = 0\}, X_n = 1, Y_n = 1\right]}{(1-pq)^{n-1}pq} = \left(\frac{1-p}{1-pq}\right)^{n-1}$$

$$\mathbf{P}\left[S_n = n \mid \tau = n\right] = \frac{\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = 1\}, \bigcap_{i=1}^{n-1}\{Y_i = 0\}, Y_n = 1\right]}{p^n(1-q)^{n-1}q} = \left(\frac{p(1-q)}{1-pq}\right)^{n-1}.$$

Dans le cas général, on note $E_{k,n} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = k\right\}$ et donc

$$\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right] = \sum_{x \in E_{k,n}} \mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\}\,\middle|\,\tau = n\right],$$

et d'après la question précédente

$$\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right] = \sum_{x \in E_{k,n}} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left[X_i = x_i \mid \tau = n\right], \tag{$**$}$$

Or attention d'après 4. on a $\mathbf{P}\left[X_i = x_i \mid \tau = n\right] \in \{1-a, a\}$ avec $a = \frac{p(1-q)}{1-pq}$ pour tout $i < n$ mais $\mathbf{P}\left[X_n = x_n \mid \tau = n\right] \in \{0,1\}$. Ainsi la somme dans le terme de droite $(**)$ est nulle pour les $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in E_{k,n}$ et

$$\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right] = \sum_{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in E_{k,n}} \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}\left[X_i = x_i \mid \tau = n\right],$$

De plus $\mathrm{Card}\left\{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in E_{k,n}\right\} = C_{n-1}^{k-1}$ et donc

$$\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right] = C_{n-1}^{k-1} a^{k-1}(1-a)^{n-k}.$$

7. On rappelle que

$$\mathbf{E}\left[S_\tau \mid \tau = n\right] = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right],$$

et donc d'après la question précédente on a $\mathbf{E}\left[S_\tau \mid \tau = n\right] = \sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1}a^{k-1}(1-a)^{n-k}$ d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[S_\tau \mid \tau = n\right] &= \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} a^j (1-a)^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} jC_{n-1}^{j} a^j (1-a)^{n-1-j} \\ &= 1 + a(n-1) \quad \text{(par la formule du binôme).}\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\mathbf{E}\left[S_\tau\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[\tau = n\right]\mathbf{E}\left[S_\tau \mid \tau = n\right] = 1 + a\sum_{n \geqslant 1}(n-1)\mathbf{P}\left[\tau = n\right] = 1 + a(\mathbf{E}\left[\tau\right] - 1).$$

τ suit une loi géométrique de paramètre pq donc $\mathbf{E}\left[\tau\right] = 1/(pq)$ et $a = \frac{p(1-q)}{1-pq}$ donc $\mathbf{E}\left[S_\tau\right] = 1/q = \mathbf{E}\left[\tau\right]\mathbf{E}\left[X_1\right]$.
D'autre part $T_\tau = 1$ *p.s.* donc $\mathbf{E}\left[T_\tau\right] = 1 = \mathbf{E}\left[\tau\right]\mathbf{E}\left[Z_1\right]$.

Exercice 8:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs a et b, $0 < a, b < 1$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$, de $X \wedge Y$ et de $X \vee Y$.
2. Déterminer la loi du couple $(X \wedge Y, X \vee Y)$.
3. Déterminer la loi du couple $(X - Y, X \wedge Y)$. Que remarque-t-on si $a = b$?

Corrigé:
On rappelle que si X suit une loi géométrique de paramètre a alors X correspond au rang du premier succès dans une épreuve de Bernoulli de paramètre $a \in]0, 1[$, *i.e.* $\mathbf{P}[X = k] = (1 - a)^{k-1}a$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

1. $X + Y$ est à valeurs dans $\mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ donc pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\{X + Y = n\} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{X = k\} \cap \{Y = n - k\},$$

donc

$$\mathbf{P}[X + Y = n] = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}[\{X = k\} \cap \{Y = n - k\}],$$

et par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{P}[X + Y = n] = \sum_{k=1}^{n-1} (1 - a)^{k-1}a(1 - b)^{n-k-1}b.$$

— Si $a = b$, alors $\mathbf{P}[X + Y = n] = a^2 \sum_{k=1}^{n-1} (1 - a)^{n-2} = (n - 1)a^2(1 - a)^{n-2}$.
— Si $a > b$, alors $\mathbf{P}[X + Y = n] = ab(1 - b)^n \sum_{k=0}^{n-2} (1 - a)^k(1 - b)^{-k} = ab(1 - b)^n \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$ avec $q = \frac{1-a}{1-b}$.
— Si $a < b$, par symétrie en échangeant X et Y, $\mathbf{P}[X + Y = n] = ab(1 - a)^n \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$ avec $q = \frac{1-b}{1-a}$.
La fonction de survie d'une loi géométrique de paramètre a est définie par $\mathbf{P}[X > k] = (1 - a)^k$, $\forall k \geqslant 1$.
Et par indépendance

$$\mathbf{P}[X \wedge Y > k] = \mathbf{P}[\{X > k\} \cap \{Y > k\}] = \mathbf{P}[X > k] \mathbf{P}[Y > k] = (1 - a)^k(1 - b)^k,$$

donc $X \wedge Y$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1 - a)(1 - b)$.
Pour déterminer la loi de $X \vee Y$ on utilise la décomposition $\{X \vee Y = k\} = \{X = k, Y < k\} \cup \{X < k, Y = k\} \cup \{X = k, Y = k\}$ et $\mathbf{P}[X < k] = 1 - (1 - a)^{k-1}$ pour $k \geqslant 2$.

2. Déterminer la loi du couple $(X \wedge Y, X \vee Y)$ revient à calculer $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X \vee Y = l]$ pour tout couple $(k, l) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
— si $k > l$ alors $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X \vee Y = l] = 0$
— si $k = l$ alors $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X \vee Y = k] = \mathbf{P}[X = k, Y = k] = ((1 - a)(1 - b))^{k-1} ab$
— si $k < l$ alors $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X \vee Y = l] = ab\left((1 - a)^{k-1}(1 - b)^{l-1} + (1 - a)^{l-1}(1 - b)^{k-1}\right)$

3. Tout d'abord la v.a. $X - Y$ est à valeurs dans $\mathbf{Z}$ donc on veut calculer $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X - Y = l]$ pour tout couple $(k, l) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$. Or pour tout $k \geqslant 1$,

$$\{X \wedge Y = k\} \cap \{X - Y = l\} = \begin{cases} \{Y = k\} \cap \{X = l + k\} & \text{si } l \geqslant 0 \\ \{X = k\} \cap \{Y = k - l\} & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

donc $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X - Y = l] = a(1 - a)^{l+k-1}b(1 - b)^{k-1}$ si $l \geqslant 0$ et $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X - Y = l] = a(1 - a)^{k-1}b(1 - b)^{k-l-1}$ si $l < 0$.
Dans le cas $a = b$, on a $\mathbf{P}[X \wedge Y = k, X - Y = l] = a^2(1 - a)^{2(k-1)}(1 - a)^{|l|} = (1 - a)^{2(k-1)}(1 - (1 - a)^2) \times \frac{a^2(1-a)^{|l|}}{1-(1-a)^2} = \mathbf{P}[X \wedge Y = k] \mathbf{P}[X - Y = l]$. Donc $X \wedge Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 9:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes, de loi binomiale de paramètres respectifs (n, p) et (m, p).

1. Déterminer la loi de X sachant $X + Y = l$ pour tout $0 \leqslant l \leqslant n + m$.
2. Calculer $\mathbf{E}[X \mid X + Y]$ et retrouver le résultat $\mathbf{E}[X] = np$ (en préconditionnant par rapport à $X + Y$).

Corrigé:
On rappelle que si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) alors X correspond au nombre de succès dans une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ répétée $n \geqslant 0$ fois. La loi est donc donnée pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ par

$$\mathbf{P}[X = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Comme X et Y sont indépendantes, on vérifie aisément que $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(n+m, p)$.

1. Soit $0 \leqslant l \leqslant n+m$ et $0 \leqslant k \leqslant l \wedge n$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X = k \mid X+Y = l] &= \frac{\mathbf{P}[X = k, Y = l-k]}{\mathbf{P}[X+Y = l]} \\ &= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_m^{l-k} p^{l-k} (1-p)^{m-(l-k)}}{C_{n+m}^l p^l (1-p)^{n+m-l}} = \frac{C_n^k C_m^{l-k}}{C_{n+m}^l}.\end{aligned}$$

   La loi conditionnelle $X|\{X+Y = l\}$ est donc la loi hypergéométrique de paramètres $n+m, n, l$.

2. On a pour tout $0 \leqslant l \leqslant n+m$, $\mathbf{E}[X \mid X+Y = l] = n\frac{l}{n+m}$ et donc

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid X+Y]] = \sum_{l=0}^{n+m} n\frac{l}{n+m}\mathbf{P}[X+Y = l] = \frac{n}{n+m}\mathbf{E}[X+Y] = np.$$

Exercice 10:
Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ.

1. Calculer $\mathbf{E}[X]$, $\mathrm{var}(X)$, $L(s) = \mathbf{E}\left[e^{sX}\right]$ (la transformée de Laplace), $\bar{F}(t) = \mathbf{P}[X > t]$ (la fonction de survie).
2. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ (la partie entière de X). Déterminer la loi de Y.

Corrigé:
On rappelle qu'une v.a. X de loi exponentielle de paramètre λ a pour densité $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$.

1. Des calculs classiques donnent

$$\mathbf{E}[X] = 1/\lambda, \quad \mathrm{var}(X) = 1/\lambda^2, \quad L(s) = \frac{1}{1-s/\lambda}\mathbf{1}_{\{0 \leqslant s < \lambda\}}, \quad \bar{F}(t) = e^{-\lambda x}.$$

2. Soit f une fonction borélienne bornée, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[f(Y)] &= \int_0^{+\infty} f(\lfloor x \rfloor)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} f(k)\lambda e^{-\lambda k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda}).\end{aligned}$$

   La loi de $\lfloor X \rfloor$ de support $\mathbf{N}$ correspond la modélisation d'avoir k échecs suivit d'un succès dans une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda} \in]0,1[$. C'est une loi géométrique décalée.

Exercice 11:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Calculer $\mathbf{E}[X \vee Y \mid X]$.
2. En déduire $\mathbf{E}[X \vee Y]$.

Corrigé:

1. On sait que $\mathbf{E}[X \vee Y \mid X] = \varphi(X)$ où φ est une fonction mesurable et pour toute fonction f borélienne bornée on a

$$\mathbf{E}[\varphi(X)f(X)] = \mathbf{E}[(X \vee Y)f(X)].$$

   Or $X \vee Y = X\mathbf{1}_{\{X>Y\}} + Y\mathbf{1}_{\{X<Y\}}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(X \vee Y)f(X)] &= \mathbf{E}\left[Xf(X)\mathbf{1}_{\{X>Y\}}\right] + \mathbf{E}\left[Yf(X)\mathbf{1}_{\{X<Y\}}\right] \\ &= \mathbf{E}[Xf(X)\mathbf{P}[X > Y \mid X]]\,\mathbf{E}\left[f(X)\mathbf{E}\left[Y\mathbf{1}_{\{Y>X\}} \mid X\right]\right].\end{aligned}$$

On a d'une part $\mathbf{E}\left[Y\mathbf{1}_{\{Y>x\}}\right] = \int_x^\infty z\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\mathrm{d}z = xe^{-\lambda_2 x} + \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2}$ et d'autre part $\mathbf{P}\left[Y < x\right] = 1 - e^{-\lambda_2 x}$. Donc

$$\mathbf{E}\left[(X \vee Y)\, f(X)\right] = \mathbf{E}\left[f(X)\left(X + \frac{1}{\lambda_2}\right)e^{-\lambda_2 X} + Xf(X)(1 - e^{-\lambda_2 Y})\right],$$

c'est à dire $\mathbf{E}\left[\varphi(X)f(X)\right] = \mathbf{E}\left[f(X)\left(X + e^{-\lambda_2 X}/\lambda_2\right)\right]$ et donc $\varphi(X) = X + e^{-\lambda_2 X}/\lambda_2$ *p.s.*

2. On a

$$\mathbf{E}\left[X \vee Y\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X \vee Y \mid X\right]\right] = \mathbf{E}\left[X + \frac{e^{-\lambda_2 X}}{\lambda_2}\right] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$