

TD 2 : Processus de Poisson

Exercice 1:

Montrer qu'une v.a. T à valeur dans $]0, +\infty[$ suit une loi exponentielle si et seulement si

$$\forall t, s \geq 0, \quad \mathbf{P}[T > t + s \mid T > t] = \mathbf{P}[T > s]. \quad (*)$$

C'est la propriété d'absence de mémoire.

Exercice 2:

Il y a 2 guichets à la poste. A chaque guichet, les clients sont servis pendant des temps aléatoires indépendants exponentiellement distribués de même paramètre λ . Un client C entre et voit qu'un client A se trouve au premier guichet et qu'un client B se trouve au second guichet. Il attend qu'un client (soit A , soit B) parte puis va au guichet disponible. Quelle est la probabilité que le client C quitte la poste en dernier ?

Exercice 3 (Lemme des trois réveils):

Trois réveils sonnent respectivement aux temps T_1, T_2 et T_3 v.a. indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1, λ_2 et λ_3 . L'un des réveils sonne avant les autres au temps $T = T_1 \wedge T_2 \wedge T_3$ et on note R le numéro du réveil qui sonne le premier.

Montrer que les v.a. T et R sont indépendantes et préciser leur loi.

Exercice 4:

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus croissant continu à droite, $N_0 = 0$ et $0 < \lambda < \infty$. Montrer qu'il y a équivalence entre

- (i) Soit $0 \leq T_1 < T_2 < \dots$ les instants de sauts successifs de $(N_t)_{t \geq 0}$. Alors les variables $T_{i+1} - T_i$ sont *i.i.d.* exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ et les sauts $\Delta_i = N_{T_i} - N_{T_i^-}$ sont presque sûrement tous de taille 1.
- (ii) $(N_t)_{t \geq 0}$ a des accroissements indépendants et quand h décroît vers 0

$$\forall t \geq 0, \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t = 0] = 1 - \lambda h + o(h) \text{ et } \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h),$$

où $o(h)$ est uniforme en t .

- (iii) $(N_t)_{t \geq 0}$ est un PAIS (processus à accroissements indépendants et stationnaires) et pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

Exercice 5:

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On note T_i le i -ième instant de saut.

1. Montrer que la loi de T_1 conditionnellement à $\{N_t = 1\}$ est la loi uniforme sur $[0, t]$.
2. Montrer que la loi du vecteur (T_1, \dots, T_n) conditionnellement à $\{N_t = n\}$ est la loi de n v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$ réordonnées dans l'ordre croissant *i.e.* de densité sur \mathbf{R}_+^d

$$f(t_1, \dots, t_n) = n! t^{-n} \mathbf{1}_{\{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t\}}.$$

Exercice 6:

Les employés d'une entreprise arrivent au travail selon un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\lambda > 0$. Soit T_i le temps d'arrivée du i -ième employé.

1. Montrer que le nombre total des heures de travail effectuées dans l'entreprise jusqu'au temps $t \geq 0$ est $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} (t - T_i)$.
2. Evaluer $\mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{N_t} T_i \mid N_t = n \right]$ et en déduire que $\mathbf{E}[X_t] = \lambda t^2 / 2$.

Exercice 7:

Les arrivées des bus numéro 1 à un arrêt sont modélisées par un processus de Poisson d'intensité α (par heure). On arrive à l'arrêt à 7h du matin.

1. Quelle est la probabilité d'attendre le prochain bus plus qu'une demi-heure ?
Quel temps moyen va-t-on attendre un prochain bus ?
On décide de laisser passer 3 bus et de prendre le quatrième. Quel temps moyen va-t-on rester à l'arrêt ?
2. Quelle est la probabilité que exactement trois bus passent à l'arrêt entre 7h et 9h ?
Quel est le nombre moyen de bus qui vont passer à l'arrêt entre 7h et 9h ?
3. On sait que 100 bus sont passés entre 7h et 9h.
 - (a) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un seul bus passe entre 9h et 10h ?
 - (b) Quel est le nombre moyen conditionnel de bus passés entre 9h et 10h ?
 - (c) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'ils sont tous passés entre 8h et 9h ?
 - (d) Quelle est la probabilité conditionnelle que 30 de ces bus sont passés entre 8h et 9h ?
 - (e) Quelle est la probabilité conditionnelle d'attendre un bus plus de $3/4$ d'heures à partir de 7h du matin ?
 - (f) Quel est le temps moyen conditionnel d'attendre un bus ?