**Université Pierre et Marie Curie** — **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
**Période 2 - 2013/2014** — **Processus de sauts 4M036**

**TD 1 : Rappels : tribus, indépendance, conditionnement**

---

**Exercice 1:**
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une partition de $\Omega$ avec $A_n \in \mathscr{F}$. On note $\mathscr{A} = \sigma(A_n, n \geqslant 1)$. Montrer que $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une application $\mathscr{A}$–mesurable si et seulement si $X = \sum_{n\geqslant 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ avec $a_n \in \mathbf{R}$.

**Exercice 2:**
Soit $\Omega = \{1, \ldots, 5\}$ muni de la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Soit $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ définies par

$$X(1) = X(2) = 0, X(3) = 1, X(4) = X(5) = 2,$$
$$Y(\omega) = \omega^2, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

1. Déterminer $\sigma(X)$, la tribu engendrée par $X$.
2. On munit $\Omega$ de la loi uniforme $\mathbf{P}$. Déterminer $Z = \mathbf{E_P}[Y \mid X]$.
3. On munit $\Omega$ de la loi $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ avec $q_1 = q_2 = \frac{1}{4}$ et $q_3 = q_4 = q_5 = \frac{1}{6}$. Déterminer $\tilde{Z} = \mathbf{E_Q}[Y \mid X]$.

**Exercice 3:**
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit $\varepsilon$ une v.a. de Bernoulli symétrique (vérifiant $\mathbf{P}[\varepsilon = 1] = \mathbf{P}[\varepsilon = -1] = \frac{1}{2}$) et $X$ une v.a. indépendante de $\varepsilon$.
   Montrer que $\varepsilon X$ et $\varepsilon$ sont indépendantes si et seulement si $X$ est symétrique.

Soit $A, B \in \mathscr{F}$ indépendantes telles que $\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[B] = \frac{1}{2}$.

2. Déterminer deux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et $Y$ une v.a. telles que
   (i) $Y$ est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$–mesurable
   (ii) $Y$ est indépendante de $\mathscr{B}$
   (iii) $Y$ n'est pas mesurable par rapport à $\mathscr{A}$
   (indication : considérer $X = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A^c}$ et $\varepsilon = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B^c}$).
3. Déterminer deux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et $Z$ une v.a. non constante telles que
   (i) $Z$ est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$–mesurable
   (ii) $Z$ est indépendante de $\mathscr{B}$
   (iii) $Z$ est indépendante de $\mathscr{A}$

**Exercice 4:**
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Pour $A \in \mathscr{F}$, on considère $B = \{\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mid \mathscr{G}] = 0\}$. Montrer que $B \subset A^c$.

**Exercice 5:**
Soit $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes de Bernoulli de paramètres respectifs $p$ et $q$ (vérifiant $\mathbf{P}[X = 1] = p$). On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$ et $\mathscr{G} = \sigma(Z)$.

1. Calculer $U = \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]$ et $V = \mathbf{E}[Y \mid \mathscr{G}]$.
2. Les v.a. $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 6:**
Soit $X \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On note $Y = \mathbf{E}[X \mid \mathscr{G}]$ et on veut montrer le résultat suivant :

$$\text{si } X \text{ et } Y \text{ ont même loi alors } X = Y \ p.s.$$

1. Montrer le résultat dans le cas $X \in \mathbf{L}^2$.
2. Montrer que pour tout $K \in \mathbf{R}_+$,

$$\mathbf{E}\left[(X \wedge K) \vee (-K) \mid \mathscr{G}\right] = (Y \wedge K) \vee (-K) \quad p.s. \tag{$*$}$$

   et en déduire le résultat.

**Exercice 7:**
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de Bernoulli indépendantes, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, telles que

$$\mathbf{P}\left[X_n = 1\right] = p \quad \mathbf{P}\left[Y_n = 1\right] = q,$$

avec $p, q$ fixés, $0 < p, q < 1$.

1. Montrer que les variables aléatoires $Z_n = X_n Y_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Déterminer leur loi.
2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Déterminer la loi de $S_n$ et celle de $T_n$.
3. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 1, T_n = 1\}$. Montrer que $\tau$ et $S_\tau$ sont des variables aléatoires.
   Déterminer la loi de $\tau$.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$,

$$\mathbf{P}\left[X_k = 1 \mid \tau = n\right] = \mathbf{P}\left[X_k = 1 \mid Z_k = 0\right] = \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$

5. Montrer que

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\} \,\middle|\, \tau = n\right] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\left[X_i = x_i \mid \tau = n\right],$$

6. En déduire l'expression de $\mathbf{P}\left[S_\tau = k \mid \tau = n\right]$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) (indication : commencer par le cas $k = 1$, puis le cas $k = n$).
7. Calculer $\mathbf{E}\left[S_\tau \mid \tau = n\right]$ (en utilisant la formule du binome de Newton et sa dérivée) et $\mathbf{E}\left[S_\tau\right]$. Vérifier qu'on a bien les égalités suivantes (identité de Wald)

$$\mathbf{E}\left[S_\tau\right] = \mathbf{E}\left[\tau\right] \mathbf{E}\left[X_1\right],$$
$$\mathbf{E}\left[T_\tau\right] = \mathbf{E}\left[\tau\right] \mathbf{E}\left[Z_1\right].$$

**Exercice 8:**
Soit $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs $a$ et $b$, $0 < a, b < 1$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$, de $X \wedge Y$ et de $X \vee Y$.
2. Déterminer la loi du couple $(X \wedge Y, X \vee Y)$.
3. Déterminer la loi du couple $(X - Y, X \wedge Y)$. Que remarque-t-on si $a = b$ ?

**Exercice 9:**
Soit $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes, de loi binomiale de paramètres respectifs $(n, p)$ et $(m, p)$.

1. Déterminer la loi de $X$ sachant $X + Y = l$ pour tout $0 \leqslant l \leqslant n + m$.
2. Calculer $\mathbf{E}\left[X \mid X + Y\right]$ et retrouver le résultat $\mathbf{E}\left[X\right] = np$ (en préconditionnant par rapport à $X + Y$).

**Exercice 10:**
Soit $X$ une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1. Calculer $\mathbf{E}\left[X\right]$, $\mathrm{var}\,(X)$, $L(s) = \mathbf{E}\left[e^{sX}\right]$ (la transformée de Laplace), $\bar{F}(t) = \mathbf{P}\left[X > t\right]$ (la fonction de survie).
2. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ (la partie entière de $X$). Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 11:**
Soit $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

1. Calculer $\mathbf{E}\left[X \vee Y \mid X\right]$.
2. En déduire $\mathbf{E}\left[X \vee Y\right]$.