Université Pierre et Marie Curie | **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
Période 2 | **Processus de sauts 4M036**

TD 8 : Chaîne de Markov, ergodicité

Exercice 1:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $E=\{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition P

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Classer les états de la chaîne. Montrer qu'il existe une unique classe d'équivalence C formée par les états récurrents.
2. Soit $\tau=\inf\{n\geqslant 0, X_n\in C\}$ le temps d'entrée dans C. Calculer $\mathbf{E}_x[\tau]$.
3. Calculer pour $x\in E$ et $y\in C$, $\mathbf{P}_x[X_\tau=y]$.
4. Déterminer pour tout $x\in E$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$, $\mathbf{P}_x$–$p.s.$

Corrigé:
1. Les états $\{2,5\}$ forme l'unique classe C d'états récurrents et les états $\{1,3,4\}$ sont transients.
2. On rappelle (cf. exercice 7 feuille 6) que $v(x)=\mathbf{E}_x[\tau_C]$ est solution de

$$v(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in C\\ 1+Pv(x) & \text{si } x\notin C\end{cases}$$

où $Pv(x)=\sum_{y\in E}P(x,y)v(y)$. Donc, il est clair que $v(2)=v(5)=0$ et que $(v(1),v(3),v(4))$ est solution du système linéaire

$$\begin{cases} v(1)=1+\frac{1}{3}v(1)+\frac{1}{12}v(3)+\frac{1}{4}v(4)\\ v(3)=1+\frac{1}{3}v(1)+\frac{1}{2}v(3)\\ v(4)=1+\frac{1}{4}v(3)+\frac{1}{4}v(4)\end{cases}$$

La résolution du système donne $v(1)=3$, $v(3)=4$ et $v(4)=8/3$.
<u>preuve alternative</u> (utilisant la section 4.9 du polycopié de cours) : on réécrit la matrice de transition P en $\tilde{P}$ en échangeant les états 2 et 4 de sorte d'avoir les 2 états transients $\{1,4,3\}$ dans les 3 premières lignes de $\tilde{P}$ et les 2 états récurrents $\{2,5\}$ dans les 2 dernières lignes. De plus on tue la chaîne lorsqu'elle atteint $\{2,5\}$ donc on pose $\tilde{P}(x,x)=1$ pour tout $x\in\{2,5\}$. Ainsi $\tilde{P}=\begin{pmatrix} Q & A\\ 0 & Id_2\end{pmatrix}$ avec

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}$$

La matrice $N=\sum_{k\geqslant 0}Q^k$ existe et vérifie $N=(I-Q)^{-1}$ et $\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix} 0 & NA\\ 0 & Id_2\end{pmatrix}$, d'où

$$\forall i\in\{1,2,3\},\ \forall j\in\{4,5\},\ \mathbf{P}_i[X_\tau=j]=(NA)_{i,j} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_i[\tau]=N_{i,1}+N_{i,2}+N_{i,3}$$

Ici après calculs on obtient

$$N=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3\\ 2 & \frac{22}{3} & 4\\ 6 & 2 & 12\end{pmatrix}$$

et on retrouve $v(1)=(9+3+3)/5=3$, $v(4)=(6+22+12)/15=8/3$ et $v(3)=(6+2+12)/5=4$.

3. De même par la propriété de Markov (simple) la fonction $u(x) = \mathbf{P}_x[X_\tau = y]$ est solution de

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \in C \setminus \{y\} \\ Pu(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

   Pour un y donné, il suffit de résoudre un simple système linéaire comme en 2. Par exemple pour $y = 2$ on doit résoudre le système $u(2) = 1$, $u(5) = 0$ et

$$\begin{cases} u(1) = \frac{1}{3}u(1) + \frac{1}{12}u(3) + \frac{1}{4}u(4) \\ u(3) = \frac{1}{3}u(1) + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}u(3) \\ u(4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}u(3) + \frac{1}{4}u(4), \end{cases}$$

   et on obtient pour $y = 2$, $u(1) = \frac{3}{10}$, $u(3) = \frac{8}{15}$ et $u(4) = \frac{28}{45}$.
   preuve alternative on calcule NA avec les notations précédentes et on obtient

$$NA = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{22}{15} & \frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{28}{45} & \frac{17}{45} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

4. Attention on ne peut appliquer le théorème ergodique que sur C, ensemble sur lequel la chaîne est irréductible récurrente positive. Le théorème ergodique donne pour tout $x \in C$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \sum_{y \in C} y\pi(y) \quad p.s. \tag{$*$}$$

   où π est la probabilité stationnaire de la chaîne restreinte à C. La probabilité stationnaire est solution de $\pi(2) + \pi(5) = 1$ et $\pi = \pi P$ $(\pi(x) = \sum_y P(y,x)\pi(y))$ *i.e.*

$$\begin{cases} \pi(2) &= \frac{1}{4}\pi(2) + \frac{1}{3}\pi(5) \\ \pi(5) &= \frac{3}{4}\pi(2) + \frac{2}{3}\pi(5) \end{cases}$$

   soit $\pi(2) = \frac{4}{13}$ et $\pi(5) = \frac{9}{13}$.
   Dans le cas où le point initial $x \notin C$, on ne peut pas appliquer le théorème ergodique directement mais le résultat $(*)$ reste vrai car en un temps fini on atteint un état $x_0 \in C$. En effet d'après la propriété de Markov forte, la chaîne $(X_{n+\tau})_{n \geqslant 0}$ est une μ–P chaîne de Markov dont la loi initiale μ est portée par C. Donc le résultat précédent donne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k+\tau} \to \sum_{y \in C} y\pi(y) = \frac{53}{13}, \quad p.s.$$

   D'autre part il est clair que $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k+\tau}$ car $\tau < +\infty$ *p.s.*

Exercice 2:
Soit X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. Le nombre de particules dans ce volume V évolue sur la période $[n, n+1[$ d'après la dynamique suivante :
- une particule (parmi les X_n) a une probabilité p de quitter V
- un nombre aléatoire Z_{n+1} de particules entre dans V

La suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de X_0.

1. Calculer $\mathbf{E}_x\left[e^{itX_1}\right]$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de transition

$$Q(x,y) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x \wedge y} C_x^k q^k (1-q)^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$

   En déduire que la chaîne est irréductible.
3. On suppose que X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ. Quelle est la fonction caractéristique de X_1 ?
   Pour quelle valeur de θ la loi de Poisson de paramètre θ est-elle probabilité invariante ?
   Que peut-on dire de la récurrence de $(X_n)_{n \geqslant 0}$?

4. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2$.

Corrigé:

1. Soit x l'état initial c'est à dire le nombre de particules (entier positif ou nul) présent dans le volume V. Alors d'après la dynamique $X_1 = (x-g(x))+Z_1$ où Z_1 représente le nombre de particules qui sont entrées dans V et $g(x)$ le nombre de particules qui ont quitté V. La fonction g est une application mesurable aléatoire, la loi de $g(x)$ est une binomiale de paramètres $B(x,p)$. Notons $Y_0 = x - g(x)$, alors Y_0 suit une loi binomiale de paramètres $B(x,q)$ avec $q = 1-p$. La v.a. Z_1 est indépendante de Y_0 donc
$$\mathbf{E}_x\left[e^{itX_1}\right] = \mathbf{E}_x\left[e^{itY_0}\right]\mathbf{E}_x\left[e^{itZ_1}\right] = (p+qe^{it})^x e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$
2. La dynamique est donnée par
$$X_{n+1} = Y_n + Z_{n+1},$$
où la loi de Y_n sachant $\{X_n = x\}$ est une binomiale de paramètres $B(x,q)$. L'espace d'état de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est $\mathbf{N}$. On détermine le noyau de transition, pour tout $x, y \in \mathbf{N}$,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[X_{n+1} = y \mid X_n = x\right] &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}\left[Y_n = k, Z_{n+1} = y-k \mid X_n = x\right],\\ &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}\left[Y_n = k \mid X_n = x\right]\mathbf{P}\left[Z_{n+1} = y-k\right]\\ &= e^{-\lambda}\sum_{0\leqslant k\leqslant x, k\leqslant y} C_x^k q^k (1-q)^{x-k}\frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.\end{aligned}$$
Comme $Q(x,y) > 0$ pour tout $x, y \in \mathbf{N}$, la chaîne est irréductible.
3. Si $X_0 \sim \mathcal{P}(\theta)$ alors on vérifie par un calcul similaire à 1. que la loi de $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda+\theta q)$. La loi de poisson est stationnaire si et seulement si $\theta = \lambda + \theta q$ *i.e.* $\theta = \frac{\lambda}{p}$. La chaîne est récurrente positive car elle admet une probabilité stationnaire et est irréductible.
4. Il suffit d'appliquer le théorème ergodique avec les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$. Ainsi on a $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k = \frac{\lambda}{p}$ et $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 = \frac{\lambda}{p}(1+\frac{\lambda}{p})$.

Exercice 3:

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbf{N}$ de matrice de transition
$$P(x,x-1) = q_x, \quad P(x,x) = r_x, \quad P(x,x+1) = p_x,$$
avec $q_x + r_x + p_x = 1$, $q_0 = 0$, $q_x > 0$ si $x > 0$ et $p_x > 0$. Une telle chaîne est appelée *chaîne de naissance et de mort*.

On pose $\tau_k = \inf\{n \geqslant 0, X_n = k\}$ et étant donné trois états a, x et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$ on pose $u(x) = \mathbf{P}_x\left[\tau_a < \tau_b\right]$ et $\gamma(x) = \frac{q_1\cdots q_x}{p_1\cdots p_x}$ (avec la définition $\gamma(0) = 1$).

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $u(x+1) - u(x) = \frac{q_x}{p_q}\left(u(x) - u(x-1)\right)$.
2. En déduire que pour tout $a \leqslant x \leqslant b$,
$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1}\gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma_y}$$
Que vaut $\gamma(x)$ et $u(x)$ dans le cas symétrique $p_x = q_x$.
3. Déterminer $\mathbf{P}_1\left[\tau_0 = \infty\right]$ et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{y\geqslant 0}\gamma_y = +\infty$.
4. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire qu'elle est récurrente positive si et seulement si
$$\sum_{x\geqslant 1}\frac{p_0\cdots p_{x-1}}{q_1\cdots q_x} < +\infty.$$

Corrigé:

1. Soit $x \geqslant 1$. On préconditionne par rapport à X_1 et d'après Markov on a
$$u(x) = \mathbf{P}_{x-1}\left[\tau_a < \tau_b\right]P(x,x-1) + \mathbf{P}_x\left[\tau_a < \tau_b\right]P(x,x) + \mathbf{P}_{x+1}\left[\tau_a < \tau_b\right]P(x,x+1)$$
donc $u(x) = q_x u(x-1) + r_x u(x) + p_x u(x+1)$.

2. On a donc $u(x+1)-u(x)=\frac{\gamma(x)}{\gamma(a)}\left(u(a+1)-u(a)\right)$. D'autre part $u(a)=1$ et $u(b)=0$ donc $u(b)-u(a)=-1=\sum_{y=a}^{b-1}u(y+1)-u(y)=(u(a+1)-u(a))\sum_{y=1}^{b-1}\frac{\gamma(y)}{\gamma(a)}$ d'où le résultat.
3. D'après le résultat précédent
$$\mathbf{P}_1\left[\tau_0<\tau_n\right]=1-\frac{1}{\sum_{y=0}^{n-1}\gamma(y)},$$
car $\gamma(0)=1$. On en déduit $\mathbf{P}_1\left[\tau_0=+\infty\right]=\lim_n\mathbf{P}_1\left[\tau_0\geqslant\tau_n\right]=\frac{1}{\sum_{y=0}^{+\infty}\gamma(y)}$. L'état 1 est récurrent (et donc la chaîne par irréductibilité) si et seulement si $\sum_{y\geqslant 0}\gamma(y)=+\infty$.
4. Soit m une mesure invariante pour P. Alors m est solution de
$$\begin{cases} m(0)=m(0)r_0+m(1)q_1, \\ m(y)=m(y-1)p_{y-1}+m(y)r_y+m(y+1)q_{y+1}, \quad \forall y\geqslant 1 \end{cases}$$
i.e. $m(y)=\frac{p_0\ldots p_{y-1}}{q_1\ldots q_y}m(0)$ pour tout $y\geqslant 1$. La chaîne est récurrente positive si et seulement si $m(\mathbf{N})<+\infty$ *i.e.* $\sum_{y\geqslant 1}\frac{p_0\ldots p_{y-1}}{q_1\ldots q_y}<+\infty$.