Université Pierre et Marie Curie — **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
Période 2 — **Processus de sauts 4M036**

TD 7 : Chaîne de Markov, récurrence et mesure stationnaire

Exercice 1:
Retour à l'exercice 5 de la feuille 6. On considère la file d'attente des requêtes à un serveur informatique : X_n représente la taille de la file d'attente à l'instant n et ξ_{n+1} le nombre de requêtes qui arrivent entre n et $n+1$ ($(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ suite *i.i.d.* de loi μ).

1. Soit ϕ la fonction génératrice de ξ_1 et G_n celle de X_n. Donner une relation liant G_{n+1} à G_n et ϕ.
2. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante dont on déterminera la fonction génératrice, si et seulement si, $\mathbf{E}[\xi_1] < 1$.

Exercice 2:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $\mathbf{Z}$ par la récurrence suivante

$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$

avec $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *i.i.d.* de loi de Bernoulli $\mathbf{P}[Z_1 = 1] = p = 1 - \mathbf{P}[Z_1 = -1]$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer P son noyau de transition.
2. Calculer pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{P}_0[X_n = 0]$.
3. Montrer que la chaîne est irréductible.
4. En utilisant la formule de Stirling
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$
montrer que $\mathbf{E}_0[N_0] = \infty$ si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.
5. Etudier la récurrence en fonction du paramètre p.

Exercice 3:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ de noyau de transition Q défini pour un $p \in]0,1[$ par

$$\begin{cases} Q(0,1) = 1 \\ Q(n,n+1) = p, \quad Q(n,n-1) = 1-p, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Ecrire la dynamique de la chaîne de Markov. Quelle est la différence avec la dynamique de l'exercice précédent ?
2. La chaîne est-elle irréducitble ?
3. Montrer que la chaîne est transiente si $p > \frac{1}{2}$.
4. Soit $p < \frac{1}{2}$. Déterminer l'unique probabilité réversible. Qu'en déduit-on sur la récurrence de la chaîne ?
5. Que peut-on dire dans le cas $p = \frac{1}{2}$?

Exercice 4:
Soit X une μ–P chaîne de Markov sur E dénombrable. Soit $\psi : E \to F$ une application dans F dénombrable.

1. On suppose ψ bijective. Montrer que si $Y_n = \psi(X_n)$ alors $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une ν–Q chaîne de Markov sur F. Déterminer la loi initiale ν et la matrice de transition Q.
2. On suppose ψ surjective telle que pour tout $j \in F$
$$P(x, \psi^{-1}(j)) = P(y, \psi^{-1}(j)) \quad \text{si} \quad \psi(x) = \psi(y). \qquad (*)$$
Montrer que $Y_n = \psi(X_n)$ est une ν–Q chaîne de Markov où pour tout $i, j \in F$
$$Q(i,j) = P(x, \psi^{-1}(j)) \quad \text{avec} \quad x \in \psi^{-1}(i).$$

3. Dans les 2 cas précédents, montrer que si π est une probabilité stationnaire pour P alors la loi image $\pi \circ \psi^{-1}$ est une probabilité stationnaire pour Q.

Exercice 5:
Retour à l'exercice 6 de la feuille 5. On considère d balles ($d > 1$) numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. L'état initial des urnes est de X_0 balles dans l'urne A et donc de $d - X_0$ balles dans l'urne B. Un changement d'état est modélisé de la façon suivante : « on tire un numéro de balle selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, d\}$ et à un tirage i on déplace la balle numéro i d'une urne à l'autre. »
Le nombre de balles dans l'urne A après n changement d'états est noté X_n et la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée *chaîne d'Ehrenfest*.

1. Rappeler la matrice de transition P de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 0}$.
2. En résolvant $\pi P = \pi$ déterminer la probabilité stationnaire π.
3. Exprimer en fonction de π, $\lim_n P^n(x, y)$ pour tout couple d'états (x, y).
4. On modifie maintenant le changement d'état de la chaîne : « on tire un numéro de balle selon la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, d\}$ et à un tirage i on déplace la balle numéro i d'une urne à l'autre **avec probabilité** $\frac{1}{2}$ ».
   Refaire l'exercice pour cette chaîne d'Ehrensfest modifiée.