

Introduction à la Mécanique des Milieux Continus

L. Chamoin

ENS Cachan

chamoin@ens-paris-saclay.fr

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	La simulation numérique	3
1.2	Applications	3
2	Cinématique des milieux continus	3
2.1	Repérage en mécanique du point	3
2.2	Notion de milieu continu	4
2.2.1	Vision Lagrangienne	4
2.2.2	Vision Eulérienne	4
2.3	Déformation	4
2.3.1	Vision Lagrangienne	6
2.3.2	Vision Eulérienne	6
3	Représentation des efforts dans la matière	7
3.1	Classifications des efforts	7
3.2	Effort de cohésion : notion de contrainte	7
3.3	Pression hydrostatique	8
3.4	Notion de contrainte	8
3.5	Équations de conservation	9
3.5.1	Conservation de la masse	9
3.5.2	Conservation de la quantité de mouvement (équilibre de la matière)	10
3.5.3	Comportement du matériau	10
4	Écriture d'un problème de MMC	11
5	Quelques exemple de MMC	12
5.1	Problèmes de MMC - Solides	12
5.2	Problèmes de MMC - Fluides	14
6	Résolution approchée de problèmes de MMC	15
6.1	Méthode des différences finies	16
6.2	Méthode des volumes finis	16
6.3	Méthode des éléments finis	16
6.4	Et bien d'autres	17

Objectifs

- Comprendre les enjeux d'étudier les milieux déformables
- Introduire les concepts de base de la MMC
- Développer les modèles mathématiques qui en découlent
- Méthode de résolution numérique et application au HPC
- Limites de ces modélisations

Notation :

- Deux examens + quelques TD notés

28/09 Résolutions de problèmes (solides/fluides) + TD "noté"

05/10 (matin seulement) → résolution numérique (méthode des éléments finis)

12/10 Premier Examen (~ 2h) puis HPC/Code Matlab

23/10 Correction Examen 1 puis HPC (enjeux et illustrations)

16/11 Deuxième Examen + code Matlab

Notre professeur fait parti du LMT, un laboratoire du CNRS étudiant des applications sur les milieux solides.

1 Introduction

Qu'est-ce qu'un milieu continu ? → milieu physique dans lequel les grandeurs physiques varient de manière continue ("pas de trous"). La notion de milieu continu dépend de l'échelle : par exemple la structure (~ 100m – 10m) d'un avion peut être modélisée en utilisant la MMC, mais pas ses cristaux/molécules (~ 1μm – 1nm).

La MMC est l'étude des mouvements, déformations et efforts dans les milieux continus avec de nombreuses applications (météorologie, aéronautique, conception de bâtiments, ...). Dans ce cours, on s'intéressera principalement à l'aéronautique. Par exemple, pour un avion, il faudra décrire les phénomènes physiques au sein de la matière, les modéliser mathématiquement et les résoudre.

Différentes approches sont possibles : de très physique (matériaux) à très mathématique (équations) ou très informatique (logiciels de calcul). Une méthode numérique très utilisée en MMC pour les milieux solides est la Méthode des éléments finis ; et la méthode des cylindres finis pour les fluides.

L'outil informatique est intéressant pour la résolution de problèmes, qui est la partie la plus dure de la MMC, car à la fois les matériaux utilisés sont complexes, mais la géométrie également (→ non résoluble à la main → besoin de gros clusters).

La principale différence entre fluide et solide est que les solides se déforment relativement peu.

Au niveau industriels, des logiciels ont été conçus, notamment :

- ASTER (développé par EDF)
- CATIA (Dassault)
- CAST3M (gratuit et en français, développé par le CEA)
- NASTRAN et ABAQUS : développés par des informaticiens, vendus pour l'industrie

Chaque logiciel est plus performant sur une tâche précise.

1.1 La simulation numérique

Face à un problème, il faut dans un premier temps réaliser un modèle mathématique théorique (géométrie, comportement, matériaux, ...) puis une maquette numérique (un maillage par exemple) sur lequel sera utilisée la résolution numérique.

Mathématiquement, le problème est régi par des équations aux dérivées partielles, sur lequel on utilisera la plupart du temps la méthode des éléments finis (informatique).

Historique des simulations numériques

1850 : Méthodes analytiques de résolution, assez rudimentaire, résolution manuelle

1940 : Théorie de la Méthode des éléments finis, sans outils informatique cependant (premières applications sur les avions de chasse → dirigé par l'armée.

1960 : Utilisation limitée de la simulation, apparition des premiers codes de calcul (NASTRAN)

1980 : Développement avec l'essor de l'informatique

2000 : Standardisation

En terme de complexité du problème, on parle en nombre d'inconnues. Pour un ordinateur portables, on peut calculer dans un temps raisonnable des problèmes à environ 10^4 degrés de libertés (ddl). Pour la recherche, les grosses machines peuvent calculer entre 10^6 et 10^8 ddl.

La simulation numérique est donc un domaine couvrant à la fois physique (et SI) pour la créations de modèles, mathématiques pour la formulation du problème et les méthode numériques ; et informatique pour la mise en données et les algorithmes de résolution.

1.2 Applications

La simulation numérique a de nombreuses applications, pour la physique, biophysique, productique (comment imprimer en 3D de manière optimale?), etc. Au LMT (laboratoire de mécanique et de technologie) à Cachan, financée à 70% par airbus.

L'apport de la simulation numérique à l'industrie permet de réduire les essais nécessaires (→ on les simule à la place). Actuellement la simulation numérique est limitée à l'échelle de plusieurs pièces rassemblées ensemble, car on ne peut encore simuler un assemblage complexe, ni contrôler la marge d'erreur. On tends aujourd'hui à développer la simulation, car elle permet d'économiser de l'argent (pas besoin de pièces) et du temps.

Utilité des modèles Essentially, all models are wrong, but some are useful

Une modélisation ne sera jamais conforme à la réalité, mais on peut borner l'erreur. On peut par exemple contrôler l'erreur que l'on fait en modifiant le maillage.

2 Cinématique des milieux continus

Il s'agit de l'étude des mouvement des points de la matière du milieu.

2.1 Repérage en mécanique du point

- Temps t
- Référentiel (ou observateur)
- Vecteur position $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$
- Vitesse $\vec{v} : t \mapsto \vec{v}(M, t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
- Accélération $\vec{a} : t \mapsto \vec{a}(M, t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

2.2 Notion de milieu continu

Le milieu évolue avec le temps, en chaque point du milieu on peut utiliser les méthodes de repérage ponctuelles. Le milieu continu est un ensemble infini de points !

Deux visions existent : la vision Lagrangienne et Eulérienne.

2.2.1 Vision Lagrangienne

La vision Lagrangienne est la plus utilisée par les solides, on étudie le mouvement du solide par rapport à sa position initiale déterminée appelée configuration de référence. Elle consiste en la donnée pour tout temps et tout point M_0 du solide Ω de configuration initiale Ω_0 la trajectoire $\overrightarrow{OM_0}(t)$.

Tout est donnée par rapport à la position initiale. On suit chaque point, donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

2.2.2 Vision Eulérienne

Elle est la plus utile en mécanique des fluides. En effet pour un fluide, on ne sait pas exactement d'où la particule est partie. On se donne alors pour tout point $M(x, y, z)$ du milieu la vitesse $v(t, x(t), y(t), z(t))$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\vec{a}_M(t) &= \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ &= \frac{\partial \vec{v}_M(t)}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \vec{v}\end{aligned}$$

2.3 Déformation

Cela signifie que la distance entre les points change. En vision lagrangienne, soit M_0 et N_0 appartenant à Ω_0 . Le vecteur $\overrightarrow{M_0N_0}$ évolue pour donner $\overrightarrow{MN}(t)$ donnant la déformation de la matière en fonction du temps.

On pose :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{ON}(t, \overrightarrow{ON_0})}_{\vec{\Phi}(t, \overrightarrow{ON_0})} - \underbrace{\overrightarrow{OM}(t, \overrightarrow{OM_0})}_{\vec{\Phi}(t, \overrightarrow{OM_0})} \\ &= \vec{\Phi}(t, \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0N_0}) - \vec{\Phi}(t, \overrightarrow{OM_0}) \\ &= \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial M_0}}_{=\mathbb{F}}(\overrightarrow{M_0N_0}) + \dots \quad (\text{développement limité})\end{aligned}$$

On note \mathbb{F} la matrice gradient de la transformation, qui dépend de t et de M_0 . Par l'intermédiaire de \mathbb{F} , on peut déduire l'évolution d'un petit volume de matière V_0 : $V = V_0 \cdot \det(\mathbb{F})$

Pour qualifier le cisaillement (c'est à dire le fait que l'objet ne fait pas que tourner sur lui-même par exemple, mais que les angles évoluent). On utilise alors la matrice de déformation \mathbb{E} . On parle aussi de tenseurs.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{F}^t \mathbb{F} - \mathbb{I}) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

Les coefficients diagonaux correspondent à l'allongement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{11} &= \vec{x} \mathbb{E} \vec{x} \\ &= \frac{1}{2} \dots \\ &= \frac{1}{2\ell_0^2} (\ell - \ell_0^2)\end{aligned}$$

Avec ℓ_0 la longueur originale du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{M_0 A_0}$ selon Ox .

De même, les coefficients hors-diagonale quantifient le glissement (ou rotation) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{12} &= \vec{y}^t \mathbb{E} \vec{x} \\ &= \dots \\ &= \frac{\Delta \ell}{2\Delta_0 \ell_0} \cos \alpha\end{aligned}$$

Avec Δ_0 la longueur originale du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{M_0 B_0}$ selon \vec{y} et α l'angle entre \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MB} . A $t = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exemple

1. Un cylindre en translation selon \vec{x} .

$$\overrightarrow{OM_0} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \mapsto \overrightarrow{OM}(t) \begin{vmatrix} x(t) = x_0 + b(t) \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{vmatrix}$$

On trouve $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ pas de déformation.

2. Un cylindre en rotation d'axe Oz

$$\overrightarrow{OM_0} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \mapsto \overrightarrow{OM}(t) \begin{vmatrix} x(t) = x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta \\ y(t) = x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \\ z(t) = z_0 \end{vmatrix}$$

On trouve

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{E} = \mathbb{I}_3$$

3. Soit un carré de matière de côté η , avec $\vec{v}(M_0) = \alpha \begin{vmatrix} y_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (il s'étale en formant un parallélogramme à volume constant).

Dans ce cas, on trouve :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & (\alpha t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est cohérent physiquement : les longueurs sur Oy varient, et tout comme les angles avec ce dernier.

4. Soit un carré de côté η avec $\vec{v}(M_0) = \alpha \begin{vmatrix} y_0 \\ -x_0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (il tourne tout en s'agrandissant mais garde sa forme).

On trouve :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ -\alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\alpha t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est également physiquement cohérent : les angles (coefficients hors diagonales) ne varient pas, mais les longueurs sur Ox et Oy augmentent avec t .

2.3.1 Vision Lagrangienne

Outre $\mathbb{F}(t, M_0)$ et $\mathbb{E}(t, M_0)$, on introduit le déplacement \vec{u} , défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \vec{u}$. On a alors $\mathbb{F} = \mathbb{I} + \text{grad}_{|M_0} \vec{v}$
Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \frac{1}{2} [\mathbb{F}^t \mathbb{F} - \mathbb{I}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\mathbb{I} + \text{grad } \vec{u})^t (\mathbb{I} + \text{grad } \vec{u}) - \mathbb{I}}_{= \mathbb{I} + \text{grad } \vec{u} + {}^t \text{grad } \vec{u} + \underbrace{{}^t \text{grad } \vec{u} \text{ grad } \vec{u}}_{\substack{\text{négligé pour les solides} \\ \text{avec de petites déformations}}} - \mathbb{I} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \underbrace{[\text{grad}_{M_0} \vec{u} + {}^t \text{grad}_{M_0} \vec{u}]}_{\varepsilon(\vec{u}) \text{ déformation linéarisée}} \end{aligned}$$

Note \mathbb{F}, \mathbb{E} et ε sont des composants sans unité, de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-3} .

2.3.2 Vision Eulérienne

Pour avoir une idée de la déformation dans le milieu, on introduit

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} [\text{grad}_M \vec{v} + {}^t \text{grad}_M \vec{v}]$$

Avec $\frac{d\overrightarrow{MN}}{dt} = \mathbb{D} \cdot \overrightarrow{MN}$. \mathbb{D} est appelé tenseur taux de déformation, son unité est la s^{-1} .

Exemple $\vec{v}(M, t) = \begin{cases} v_x = \omega y \\ v_y = \omega x + a\omega^2 t \\ 0 \end{cases}$

Passage à une vision lagrangienne → retour à la notion de trajectoire

$$\begin{aligned} v_x = \omega y &= \frac{dx}{dt} \\ v_y = -\omega x + a\omega^2 t &= \frac{dy}{dt} \\ v_z = 0 &= \frac{dz}{dt} \Rightarrow z(t) = z_0 \end{aligned}$$

On se retrouve avec deux équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y &= a\omega^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} y(t) = a + K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t \\ x(t) = -\frac{1}{\omega}(-K_1 \omega \sin \omega t + K_2 \cos \omega t) + a\omega t \end{cases} \end{aligned}$$

3 Représentation des efforts dans la matière

3.1 Classifications des efforts

Le vrai mot serait plutôt "action mécanique". On parle :

- D'efforts extérieurs surfaciques → densité surfacique \vec{F}_d en $N.M^{-2}$, par exemple la pression (attention, elles ne sont pas toujours orthogonales à la surface!)
- D'efforts extérieurs volumiques → densité volumique \vec{f}_d en $N.m^{-3}$.
- D'efforts intérieurs surfaciques, en $N.m^{-2}$.

3.2 Effort de cohésion : notion de contrainte

Soit une surface élémentaire dS de normale \vec{n} . Il a été montré (Cauchy) que l'effort s'appliquant dessus $d\vec{F}$ (en N) se décompose en $d\vec{F} = dS \times \vec{T}(M, \vec{n})$ où \vec{T} est appelé vecteur contrainte en $N.m^{-2}$. Il a également été prouvé $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma(M) \cdot \vec{n}$ où σ est une matrice (tenseur) des contraintes.

Quelques propriétés

σ est symétrique (cela vient du fait que le système est à l'équilibre).

Exemple Traction pure : on étire de chaque côté une barre. Dans ce cas,

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

De la même manière que \mathbb{E} , les coefficients diagonaux représentent les tractions et les coefficients non-diagonaux le cisaillement. σ étant symétrique, on peut la diagonaliser :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}_{(e_I, e_{II}, e_{III})}$$

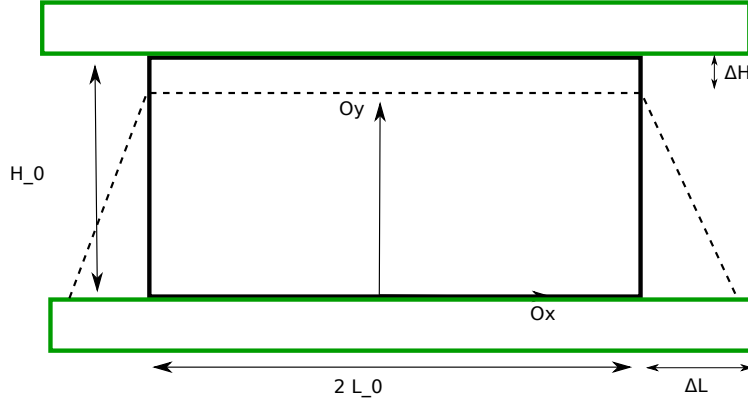
Les coefficients diagonaux sont appelés contraintes principales et la base base principale.

3.3 Pression hydrostatique

Une bille dans l'eau : $\sigma = -p.\mathbb{I}$

Ordre de grandeurs $\|\sigma\| \sim 100 \text{ MPa}$

Écrasement d'un solide entre deux plaques rigides On suppose qu'il y a glissement sur la plaque du bas mais frottement sur la plaque supérieure.



On trouve :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0} \left(1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right)\right)^2 - 1 & -\left(1 + \frac{\Delta L}{L_0} \left(1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right)\right) x_0 \frac{\Delta L}{L_0 H_0} & 0 \\ \times & \left(x_0 \frac{\Delta L}{L_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right)^2 - 1 & 0 \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$\varepsilon(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta L}{L_0} \left(1 - \frac{y_0}{H_0}\right) & -\frac{x_0}{2} \frac{\Delta L}{L_0 H_0} & 0 \\ \times & -\frac{H}{H_0} & 0 \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond à considérer que les mouvements sont petits ($\Delta H \ll H_0$ et $\Delta L \ll H_0$).

3.4 Notion de contrainte

Elle est particulièrement adaptée à une version eulérienne, il existe un autre outil (matrice de Piola).

Une surface élémentaire dS subit une force $d\vec{F} = dS.\vec{T}(M, \vec{n})$ où $\vec{T} = \sigma(M).\vec{n}$ avec σ la matrice des contraintes.

Exercice

- (2.4 de la fiche) Essai de traction dans une éprouvette d'essai de traction cylindrique de rayon R . Attention à bien orienter la normale en fonction de quelle matière effectue son effort sur qui (cela change le signe). Le chargement extérieur est $p_0 S_0 \vec{e}_1$, donc $\vec{T}(M, \vec{e}_1) = \rho_0 \vec{e}_1$. La section étudiée est une ellipse d'inclinaison θ par rapport à une section verticale. Sa surface est donc $\pi \frac{R^2}{\cos \theta}$. Sur cette ellipse, on a alors $\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{p_0 S_0 \vec{e}_1}{S_1} = p_0 \cos \theta \vec{e}_1$.

En fait, puisqu'on a une traction selon \vec{e}_1 , on pouvait directement dire que

$$\begin{aligned}\vec{T}(M, \vec{n}) &= \sigma(M) \cdot \vec{n} \\ &= \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\end{aligned}$$

D'un point de vu physique, on peut différencier l'effort normal et l'effort tangentiel. Ici, on trouve un effort normal de $p_0 \cos^2 \theta$ et un effort tangentiel de $p_0 \frac{\sin(2\theta)}{2}$ (avec un peu de trigo...), maximal quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ ce qui explique pourquoi les matériaux sensibles au cisaillement cassent avec un plan de cassure à 45° .

2. Essai de bi-traction : on exerce une pression uniforme σ_1 selon \vec{e}_1 et σ_2 selon \vec{e}_2 .

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot \cos \theta \\ \sigma_2 \cdot \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On trouve

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta] \vec{n} + [(\sigma_2 - \sigma_1) \cos \theta \sin \theta] \vec{t}$$

Ceci forme le cercle de Mohr.

3.5 Équations de conservation

Elles pilotent l'évolution de l'état de la matière (déformation, contraintes).

3.5.1 Conservation de la masse

Vision lagrangienne

$$n_0 = \int_{\omega_0} \rho_0 dv_0 = \int_{\omega} dv \Rightarrow \rho_0 = \rho \cdot \det \mathbb{F}$$

Vision eulérienne

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(L, t) dv = 0$$

Dont on extrait :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Pouvant se simplifier :

$$\text{Cas stationnaire : } \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{Cas incompressible : } \frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

3.5.2 Conservation de la quantité de mouvement (équilibre de la matière)

Si ω est un volume et γ sa frontière.

$$\int_{\omega(t)} \vec{f} dv + \int_{\gamma} \vec{T}(M, \vec{n}) dS$$

Que l'on peut réécrire en

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f} = \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} (= 0 \text{ en statique})$$

Noter qu'il existe aussi une équation de conservation de l'énergie \rightarrow pas traité ici.

Exemple : Un cube sur un plan subissant uniquement son poids propre. On suppose

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a + bz \end{pmatrix}$$

On trouve alors $\sigma_{33} = \rho \cdot g \cdot (z - H)$.

3.5.3 Comportement du matériau

Idée Trouver un lien entre $\mathbb{E}, \varepsilon, \mathbb{D}$ et σ .

Cas d'un solide (en petite perturbation) : $\sigma(M) = f_M(\varepsilon(M))$

- ★ Aspect homogène/hétérogène : dépendance avec la *position* du point M .
- ★ Aspect isotrope/anisotrope : dépendance du comportement avec l'*orientation*. Si le matériau est isotrope, $\sigma = f(\varepsilon, \text{Tr}(\varepsilon), \text{Tr}(\varepsilon^2), \text{Tr}(\varepsilon^3))$

— Cas d'un matériau élastique : Pas de notion de mémoire, et $\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$ (ε_{ii} coefficient de ε dans la direction de l'élongation).

Dans le cas d'un élastique linéaire : $\sigma = \mathbb{K} \cdot \varepsilon$, ou \mathbb{K} est un tenseur d'ordre 4 (dit tenseur d'élasticité de Hooke, K_{ijkl} , alors que σ et ε sont des matrices carrées d'ordre 3). \mathbb{K} a donc $3^4 = 81$ coefficients, mais par symétrie on se ramène à 21 coefficients indépendants. Il peut y avoir des symétries :

- Matériaux orthotrope : 3 plans de symétrie orthogonaux \rightarrow 9 coefficients
- Matériaux isotropes transverse : (matériaux en couches) \rightarrow 4 coefficients
- Matériaux isotropes : 2 coefficients : $E, \nu \rightarrow E =$ module d'Young et $\nu =$ coefficients de Poisson ; ou (autre représentation) λ, μ coefficients de Lamé

Dans ce cas, on a

$$\sigma = 2\mu \cdot \varepsilon + \lambda \cdot \text{Tr}[\varepsilon] \cdot \mathbb{I}$$

et la relation inverse

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}[\sigma] \cdot \mathbb{I}$$

avec $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$ et $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Noter que si $\nu = 0, 5$, alors le matériau est incompressible.

Pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\sigma}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \tilde{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \tilde{\sigma} \end{pmatrix}$$

Ordre de grandeur :

$$\star \varepsilon \sim 1^{-3} - 10^{-6}$$

$$\star \tilde{\sigma} \sim 0 - 100 \text{ MPa}$$

$$\star E \simeq 100 \text{ GPa}$$

$$\star \nu \sim 0,2 - 0,3 < 0,5 \text{ (peut être négative pour certaines micro-structures spécifiques (on tire dessus et tout s'allonge).)}$$

Cas d'un fluide :

— fluide parfait : $\sigma = -p.\mathbb{I}$, où p est la pression. Il n'y a alors pas de contrainte tangentielle donc pas de viscosité.

— fluide newtonien : $\sigma = -p.\mathbb{I} + 2\mu.\mathbb{D} + \underbrace{\lambda.\text{Tr}[\mathbb{D}].\mathbb{I}}_{=0 \text{ si incompressible}}$

4 Écriture d'un problème de MMC

Pour un problème fluide de volume ω et surface γ , on utilise :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho.\vec{v}) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f} &= \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \sigma &= -p.\mathbb{I} + 2\mu.\mathbb{D} \quad (+\lambda.\text{Tr}[\mathbb{D}].\mathbb{I}) \end{aligned}$$

Et les conditions aux limites (valeurs de \vec{v} ou $\sigma\vec{n}$ sur γ).

Pour les solides dans le modèle des petites perturbations ($\rho_0 = \rho \det \mathbb{F}$) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f} &= \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ \sigma &= 2\mu.\varepsilon(\vec{u}) + \lambda.\text{Tr}[\varepsilon(\vec{u})].\mathbb{I} \end{aligned}$$

Ainsi que les conditions aux limites.

Résolutions

- ★ On intuite une forme pour \vec{u}, \vec{v}, σ .
- ★ On regarde si on peut vérifier toutes les équations. Si non, on revient à l'étape précédente.

Exemple :

1. Écoulement dans une conduite cylindrique d'axe Oz . On suppose que $\vec{v} = v(r).\vec{e}_z$, et que l'ont est en régime stationnaire.

En reprenant les équations antérieures :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{div}} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}).\vec{v} \right] \\ \sigma &= -p.\mathbb{I} + 2\mu.\mathbb{D} \\ \vec{v} &= \vec{0} \text{ en } r = R \\ p(z=0) &= p_0 \\ p(z=L) &= p_L \end{aligned}$$

2. Un matériau élastique cylindrique linéaire isotrope homogène (E, ν) (ou (λ, μ)), possédant une pression interne, et statique.

$$\begin{aligned}\vec{\text{div}}\sigma &= \vec{0} \\ \sigma &= 2\mu.\varepsilon(\vec{u}) + \lambda.\text{Tr}[\varepsilon(\vec{u})].\mathbb{I} \\ \sigma.\vec{n} &= \vec{0} \text{ sur les bords } S_0, S_H \\ \sigma.\vec{n} &= p_i.\text{vece}_r \text{ sur } S_{int}\end{aligned}$$

5 Quelques exemple de MMC

5.1 Problèmes de MMC - Solides

Hypothèses

- Statique
- Élasticité Linéaire
- Hypothèse des petites perturbations ($\mathbb{E} \simeq \varepsilon(\vec{u})$)

A noter que le problème est linéaire : on peut donc utiliser le principe de superposition (on peut sommer des solutions élémentaires).

Soit un solide Ω de bord Γ , sur lequel s'appliquent des forces volumiques \vec{f} . Sur une frontière Γ_1 , une contrainte impose $\vec{u} = \vec{u}_1$ (typiquement un encastrement). Sur la partie complémentaire Γ_2 s'applique un effort \vec{F}_d .

On cherche alors deux grandeurs : le champ de déplacement $\vec{u}(M)$ et la matrice des contraintes $\sigma(M)$.

La solution de problème doit vérifier :

- ★ $\vec{u} = \vec{u}_d$ sur Γ_1
- ★ $\vec{\text{div}}\sigma + \vec{f} = \vec{0}$ (en particulier $\sigma.\vec{n} = \vec{F}_d$ sur Γ_2)
- ★ $\sigma = \mathbb{K}.\varepsilon(\vec{u})$

Remarque Cas isotrope : \rightarrow deux coefficients définissent entièrement \mathbb{K} : soit (E, ν) soit (λ, μ) et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\mu.\varepsilon + \lambda.\text{Tr}[\varepsilon].\mathbb{I} \\ &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon + \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{Tr}[\varepsilon].\mathbb{I}\end{aligned}$$

et

$$\epsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{Tr}[\sigma].\mathbb{I}$$

Note On peut tout écrire sous la forme de produits matrices-vecteurs :

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbb{K}.\varepsilon \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}}_{\hat{\sigma}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & & & & & \\ \times & & & & & \\ \times & & & & & \\ \times & & & & & \\ \times & & & & & \end{pmatrix}}_{\hat{K} \rightarrow 21 \text{ coefficients}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}}_{\hat{\varepsilon}}\end{aligned}$$

Il est possible de rajouter des $\sqrt{2}$ ou des 2 dans les σ ou ε (respectivement) de manière à retrouver $\text{Tr}[\sigma\varepsilon] = \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}$

Si le matériau est orthotrope, alors

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ & & & \times & 0 & 0 \\ & & & & \times & 0 \\ & & & & & \times \end{pmatrix}$$

(9 coefficients différents car \hat{K} symétrique)

Si le matériau est isotrope, alors

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & (2\mu + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & (2\mu + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix}$$

On peut noter également que

$$\hat{\varepsilon} = \hat{K}^{-1} \hat{\sigma}$$

Où $\hat{S} = \hat{K}^{-1}$ est la souplesse.

Résolution exacte de problèmes

Nécessite :

- Géométrie simple
- Chargement simple
- Matériaux simple

Exemples :

1. Tube sous pression

Un tube cylindrique parfait creux est soumis à une pression interne p . On suppose (μ, λ) (ou (E, ν)) connus. On se donne le rayon interne r_i et externe r_e et la hauteur h .

Méthode en déplacement : $\vec{u} = u_r \vec{u}_r + u_z \vec{u}_z$.

Equations :

- ★ Rien à dire : pas de contraintes ici
- ★ $\vec{\text{div}} \sigma = \vec{0}$:
 Sur S_{ext} : $\sigma \cdot \vec{e}_r = \vec{0}$
 Sur S_{int} : $\sigma \cdot (-\vec{e}_r) = p \cdot \vec{e}_r$
 Sur S_0 et S_H : $\sigma \cdot \vec{e}_z = 0$ (les surfaces en haut et en bas du tube).
- ★ $\sigma = 2\mu \cdot \varepsilon(\vec{u}) + \lambda \cdot \text{Tr}[\varepsilon(\vec{u})] \mathbb{I}$

Après calcul, on trouve une solution de la forme $u_z = Az + B$ et $u_r(r) = Cr + \frac{D}{r}$, avec B constante introuvable (le problème est identique à un déplacement vertical près) et A, C, D constantes fixées par les conditions limites.

2. Une sphère (pleine) sous pression de centre O , soumise à une pression p uniforme. On cherche $\vec{u}(M)$ et $\sigma(M)$ tels que :

- ★ Toujours rien
- ★ $\vec{\text{div}}\sigma = \vec{0}$ et $\sigma.\vec{e}_r = -p\vec{e}_r$
- ★ $\sigma = \mathbb{K}\varepsilon$

Une méthode en déplacement est possible : poser $\vec{u} = u_r\vec{e}_r$ puis résoudre.

On va prendre ici une méthode en contrainte :

- On intuite une forme pour σ
- On vérifie les conditions limites sur σ
- On calcul ε à partir de la loi de comportement
- On cherche \vec{u} tel que $\varepsilon = \nabla\vec{u}$ (Attention : Si ce n'est pas possible, erreur quelque part, toute contrainte provient d'un déplacement ! Le plus souvent, ε sera constant, et alors $\vec{u} = \varepsilon.\overrightarrow{OM} + cste$)

Ici, on intuite

$$\sigma = -p.\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Immédiatement, on vérifie les conditions sur la divergence et sur $\sigma.\vec{e}_r = -p.\vec{e}_r$. Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbb{K}^{-1}.\sigma \\ &= \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{Tr}[\sigma]\mathbb{I} \\ &= -p\frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \\ &= \frac{p(1-2\nu)}{E}.\mathbb{I} \end{aligned}$$

On effectue ici une méthode en contrainte : il faut vérifier que $\varepsilon \xrightarrow{?} \frac{1}{2}(\text{grad } \vec{u} + {}^t\text{grad } \vec{u})$.

Cas simple :

Si $\varepsilon = cst$, alors il existe \vec{u} et $\vec{u}(M) = \varepsilon.\overrightarrow{OM} + \vec{u}_0$ (solide rigide (HPP))

Ici, $\vec{u} = -\frac{p(1-2\nu)}{E}r.\vec{e}_r$. On n'observe donc uniquement de la traction et jamais de cisaillement.

Si la sphère est creuse, il faut rajouter une condition sur le bord intérieur : la contrainte ne peut plus être constante (elle va dépendre de r) → utiliser la méthode en déplacement.

5.2 Problèmes de MMC - Fluides

On cherche (\vec{v}, ρ) tel que :

- $\vec{\text{div}}\sigma + \vec{f} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}$ avec $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\vec{v}.\vec{v}$. Dans le cas d'un écoulement lent (ou les effets d'inerties sont négligeables devant les effets visqueux), on néglige le terme $\Delta\vec{v}.\vec{v}$. Dans le cas d'un fluide incompressible, on a $\text{div}\vec{v} = 0$. Avec :

- ★ $\sigma = -p.\mathbb{I}$ (fluide parfait)
- ★ $\sigma = -p.\mathbb{I} + \pi$ avec $\pi = \underbrace{2.\mu.\mathbb{D}(\vec{v})}_{\text{partie visqueuse}} + \underbrace{\lambda.\text{Tr}[\mathbb{D}].\mathbb{I}}_{=0 \text{ si incompressible}}$

On a alors

$$\operatorname{div} \sigma = \operatorname{div}(-p.\mathbb{I}) + \mu [\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v}) + \operatorname{div}({}^t\operatorname{grad} \vec{v})]$$

Qui se simplifie en : (avec $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v}) = \vec{\Delta} \vec{v}$ et $\operatorname{div}({}^t\operatorname{grad} \vec{v}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{v}) = \vec{0}$ car le fluide est incompressible)

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\Delta} \vec{v} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Note : Pour les solides, $\sigma = \alpha.\mathbb{I} + \mathbb{D}$ également, on peut alors en déduire la pression pour un solide de l'équation de comportement du solide $\sigma = 2.\mu.\varepsilon + \lambda.\operatorname{Tr}[\varepsilon].\mathbb{I}$

Équation de Navier-Stokes

$$-\vec{\nabla} p + \mu \left(\vec{\Delta} \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{v}) \right) + \vec{f} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} \right]$$

On définit le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \frac{\text{effets d'inertie}}{\text{effets visqueux}}$. Lorsque ce dernier est petit, on parle d'écoulement de Stokes. En négligeant la gravité :

$$-\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = 0$$

(et $\operatorname{div} \vec{v} = 0$)

Écoulement de Poiseuille Écoulement incompressible principalement visqueux en négligeant la gravité dans une conduite cylindrique de longueur L et de conditions limites $p(z=0) = p_0$ et $p(z=L) = p_1$.

On trouve $p(z) = p_0 + \frac{p_1 - p_0}{L} \cdot z$ et $\vec{v} = v_z \vec{e}_z$ avec $v_z = \frac{p_0 - p_1}{4\mu L} \cdot (R^2 - r^2)$. Le débit volumique $Q = \iint_S v_z dS = \frac{\pi}{8\mu L} \cdot R^4 (p_0 - p_1)$

Écoulement de Couette

- ★ stationnaire
- ★ incompressible
- ★ effets d'inertie négligés

Navier-Stokes nous donne :

$$\mu \vec{\Delta} \vec{v} = \vec{\nabla} p$$

On trouve alors $\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Or V_x ne dépend que de y et p ne dépend que de x , donc $\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{cte} = \alpha$.

D'où $p(x) = \alpha x + p_0$. Si on a $p = p_0$ sur les deux bords $\rightarrow \alpha = 0$ et $p(x) = p_0$ donc $V_x(y) = ay + b = \frac{V_0}{H} y$.

6 Résolution approchée de problèmes de MMC

\rightarrow méthode utilisée très souvent, mais approchée (erreurs).

6.1 Méthode des différences finies

Très utilisée en mécanique des fluides.

L'idée est de résoudre le problème aux dérivées partielles en approchant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n) \simeq \frac{u_{n+1} - u_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Toutes les méthodes commencent ainsi par transformer le modèle en cherchant la valeur (approchée) de la solution dans des points particuliers appelés nœuds.

La méthode des différences finies est donc très pratique pour les problèmes de mécanique des fluides car la géométrie est simple à représenter car le quadrillage doit être régulier dans toutes les directions.

6.2 Méthode des volumes finis

Également très utilisée en mécanique des fluides.

Dans cette approche, les inconnus de ce problème sont les flux (thermiques, contraintes) transmis d'un bord à l'autre des surface (lignes en 2D). On va donc travailler en terme de débit/vitesse arrivant dans chaque élément du découpage.

6.3 Méthode des éléments finis

Utilisés en mécanique des solides.

On discrétise la géométrie en un maillage, les éléments étant les sous-domaines du maillage, dans lequel on va calculer les valeurs à certains endroits appelés nœuds. Le maillage est calculé par un mailleur (informatique), qui est un problème complexe car les éléments peuvent avoir une forme quelconque (triangles, quadrilatères, etc). On cherche ensuite la solution sous la forme

$$u(M) = \sum_{\text{nœuds}} \underbrace{u_i}_{\text{inconnues}} \underbrace{\phi_i(M)}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{de forme} \\ \text{(de base)}}$$

Où les fonctions de formes sont des polynômes de degré n (donc continus) définis sur chaque élément (par morceaux) valant 1 au nœud i et 0 sur les autres nœuds.

On stocke le maillage sous la forme de deux tableaux : les tables de connectivité, associant les éléments à leurs nœuds et les nœuds à leur coordonnées.

Lorsque le polynôme est de degré 1, les ϕ des portion de droites \rightarrow les dérivées sont constantes, ce qui se traduira par des approximations des flux. Les nœuds sont alors les coins des éléments.

Lorsque le polynôme est de degré 2, on rajoute des nœuds de manière à fixer un condition supplémentaire ($\phi(x) = 0$) sur le polynôme (il doit valoir 0 sur tous les nœuds de l'élément).

Remarque : Vu que l'on travaille en 3D, le nombre de constantes à fixer pour la détermination des fonctions de base augmente très rapidement (et donc la puissance de calcul nécessaire au calcul) en n^3 par rapport au nombre de nœuds, et le nombre de nœuds en $p!$ par rapport au degrés du polynôme. Dans les logiciels actuels, on utilise le degré 1 ou 2, 3 au pire ; au-delà des problèmes de résolution existent. Le nombre de nœuds est égal au nombre de constantes nécessaire pour chaque fonction.

Par exemple, un cube avec des polynômes de degré 1 possède n^3 éléments, $(n+1)^3$ nœuds et donc $3(n+1)^3$ degrés de liberté (ddl ou dof en anglais).

Pour calculer les u_i , en mécanique des solides (élastiques), le problèmes est équivalent à minimiser une énergie potentielle $E_p(u) = E_d(u) + W(u)$, où $E_d = \frac{1}{2} \int \mathbb{K} \cdot \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u})$ est l'énergie de déformation et W le travail. Le problèmes est alors de minimiser E_p dans l'espace de dimension fini des nœuds.

On peut écrire

$$u = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_N \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_{=U}$$

Et alors :

$$E_p(U) = \frac{1}{2} {}^tU \mathbb{K} U - {}^tU E$$

Où E est le vecteur des efforts connus et K la matrice de rigidité, elle aussi connue.

On se retrouve (après dérivation pour minimiser) avec le problème

$$\mathbb{K}.U = F$$

Pour la résolution du $\mathbb{K}.U = F$ (décomposition de domaine), on peut utiliser des méthodes directes (si n n'est pas trop grande, < 1000 ddl) ou itératives¹

Propriétés de \mathbb{K} Inversible (sauf s'il y a des mouvements de solides rigides) et symétriques, ce qui permet de simplifier les calculs. Elle est également creuse (les différents coefficients sont le produit de dérivées des ϕ_i localisées qui n'ont donc pas souvent un support commun), ce qui est très intéressant pour le stockage et l'inversion.

6.4 Et bien d'autres

Méthodes spectrales, ...

1. Cf cours de MPNA