[Nicolas Douillet]

Théorème d'Archimède
Calcul de l'aire d'une surface parabolique

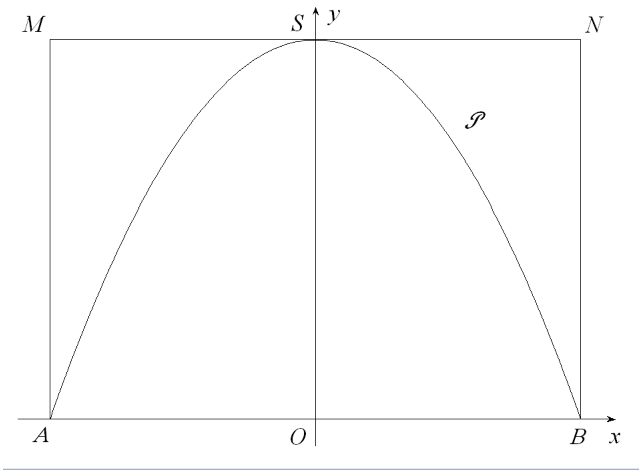

FIG. 1 – Arc de parabole inscrit dans son rectangle $ABNM$.

1 Enoncé

L'aire délimitée verticalement par l'axe des abscisses, une parabole, et bornée horizontalement à gauche et à droite par les racines du polynôme de degré 2 (équation de la parabole) vaut les deux tiers de l'aire du rectangle ainsi défini et dans lequel elle s'inscrit.

2 Démonstration

Soit :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad a \neq 0 \tag{1}$$

On impose ici $\Delta > 0$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant du trinôme, pôur avoir deux racines distinctes.

2.1 Calcul de l'aire du rectangle (figure 1)

Remarque : Dans le cas de figure 1, le coefficient a est choisi arbitrairement positif, mais la démonstration à venir est bien valable quel que soit son signe.

Soit S le sommet de la parabole $\mathcal{P}$, soient A et B les points d'intersections de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses, (O,x), et soient M et N enfin, les projetés orthogonaux des points A et B sur la droite d'équation $y = y_S$. On a :

$$
\begin{aligned}
&S(-\frac{b}{2a};\ P(-\frac{b}{2a}))\\
&A(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\ 0)\\
&B(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ 0)\\
&M(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\ P(-\frac{b}{2a}))\\
&N(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ P(-\frac{b}{2a}))
\end{aligned}
$$

Soit :

$$
\begin{aligned}
&S(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}))\\
&A(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\ 0)\\
&B(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ 0)\\
&M(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a})\\
&N(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a})
\end{aligned}
$$

On en déduit l'aire du rectangle $ABMN$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ABNM} &= AB.OS\\
\mathcal{A}_{ABNM} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|\\
\mathcal{A}_{ABNM} &= \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{4a^2}
\end{aligned}
$$

2.2 Calcul intégral de l'aire

Soit I l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
I &= \left| \int_{x_A}^{x_B} P(x)dx \right| \\
I &= \left| \int_{x_A}^{x_B} ax^2 + bx + cdx \right| \\
I &= \left| \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right]_{x_A}^{x_B} \right|
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
I = &\left| \frac{1}{24a^2} \left[(-b+\sqrt{\Delta})^3 - (-b-\sqrt{\Delta})^3 \right] \right. \\
&+ \frac{b}{8a^2} \left[(-b+\sqrt{\Delta})^2 - (b+\sqrt{\Delta})^2 \right] \\
&\left. + \frac{c}{2a} \left[-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta} \right] \right|
\end{aligned}
$$

D'où finalement, après calculs et simplifications :

$$
\begin{aligned}
I &= \left| \frac{2c\sqrt{\Delta}}{3a} - \frac{b^2\sqrt{\Delta}}{6a^2} \right| \\
I &= \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \\
I &= \frac{2}{3}\mathcal{A}_{ABNM}
\end{aligned}
$$