NI²CHOLAΣ
« SCIENCES ET CONSCIENCE »

[Nicolas Douillet]

Distance d'un point à une droite, distance d'un point à un plan

1 Distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^2$

1.1 Expression

Soit M un point de $\mathbb{R}^2$:

$$M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

et soit (Δ) la droite du plan d'équation cartésienne :

$$(\Delta) : ax + by + c = 0 \tag{2}$$

La distance de M à (Δ) est :

$$d\left(M, (\Delta)\right) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3}$$

1.2 Preuve

Un vecteur normal à (Δ) est :

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (Δ) :

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

Le vecteur $\overrightarrow{HN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, d'où :

$$\exists ! \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{HM} = \lambda \overrightarrow{n} \tag{6}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} x_M - x \\ y_M - y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{7}$$

D'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_M - \lambda a \\ y = y_M - \lambda b \end{array} \right. \tag{8}$$

Ce qui, combiné à l'équation de (Δ), donne successivement :

$$a(x_M - \lambda a) + b(y_M - \lambda b) + c = 0 \tag{9}$$

$$\lambda = \frac{ax_M + by_M + c}{a + b} \tag{10}$$

Comme

$$d\left(M, (\Delta)\right) = HN = \|\overrightarrow{HN}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{n}\| \tag{11}$$

On retrouve

$$d\left(M, (\Delta)\right) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{12}$$

2 Distance d'un point à un plan dans $\mathbb{R}^3$

2.1 Expression

Soit M un point de $\mathbb{R}^3$:

$$M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{13}$$

et soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0 \tag{14}$$

De manière analogue à la partie 1 on a l'expression de la distance de M à $(\mathcal{P})$:

$$d\left(M, \mathcal{P}\right) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{15}$$

2.2 Preuve

Un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est :

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{16}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$:

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{17}$$

Le vecteur $\overrightarrow{HN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, d'où :

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{HM} = \lambda \overrightarrow{n} \tag{18}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} x_M - x \\ y_M - y \\ z_M - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{19}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} x = x_M - \lambda a \\ y = y_M - \lambda b \\ z = z_M - \lambda c \end{cases} \tag{20}$$

Ce qui, combiné à l'équation de $(\mathcal{P})$, donne successivement :

$$a(x_M - \lambda a) + b(y_M - \lambda b) + c(z_M - \lambda c) + d = 0 \tag{21}$$

$$\lambda = \frac{ax_M + by_M + cz_M}{a+b+c} \tag{22}$$

Comme

$$d\left(M, (\Delta)\right) = HN = \|\overrightarrow{HN}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{n}\| \tag{23}$$

On retrouve finalement

$$d\left(M, (P)\right) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{24}$$

3 Distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$

3.1 Expression

3.2 Preuve

4 Distance d'un point à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$

4.1 Expression

De manière analogue, on peut conjecturer et démontrer :

$$d\left(M, \mathcal{H}\right) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + dt_M|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \tag{25}$$

4.2 Preuve