

[Nicolas Douillet]

Courbes du ”tétraèdre sphérique régulier”

Le tétraèdre sphérique régulier (figure 1) est à différencier du tétraèdre de Reuleaux. Bien que leurs apparences puissent d’abord paraître assez semblables, le tétraèdre sphérique régulier n’est pas à proprement parler un solide différent de la sphère. Les segments de courbes qui l’interpolent définissent en effet la même surface régulière, sans angle / sommet (la sphère).

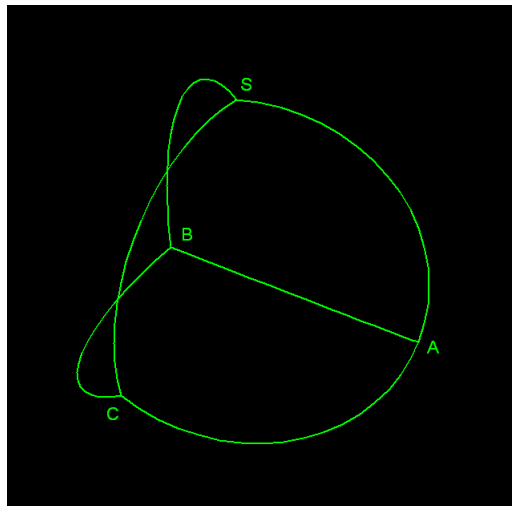


FIGURE 1 – Le tétraèdre sphérique régulier \widehat{SABC} constitué de 6 segments courbes.

Au delà de son esthétique, c’est finalement pour sa construction et les propriétés du maillage de la sphère qu’il constitue qu’il est intéressant à étudier.

Sa construction se développe à partir du tétraèdre régulier $SABC$ (figure 2 gauche et droite). Ses courbes peuvent en effet être vues comme des ”dilatées” des arêtes du tétraèdre régulier $SABC$ dans le plan passant par un segment et O, le centre commun de la sphère et du tétraèdre.

1 Construction

1.1 Coordonnées des sommets

On se place dans $\mathcal{S}_{(O,R)}$, la sphère de rayon R centrée sur le repère orthonormal (O, x, y, z) . Le tétraèdre régulier $SABC$ s'inscrit dans cette sphère et les coordonnées de ses sommets sont :

$$\overrightarrow{OS} = R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{R}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathcal{R}_{(Oz, 2\pi/3)} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{R}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{OC} = \mathcal{R}_{(Oz, -2\pi/3)} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{R}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Avec la notation habituelle :

$$\mathcal{R}_{(Oz, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Et en remarquant

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \cos(\arcsin(-\frac{1}{3})) \quad (6)$$

Où $\arcsin(-\frac{1}{3})$ est l'angle (en radians) interceptant chaque arc de grand cercle. L'isobary-centre O du tétraèdre $SABC$ étant situé pour rappel au $3/4$ de sa hauteur, sa base -ici ABC - a pour altitude $z = -R/3$.

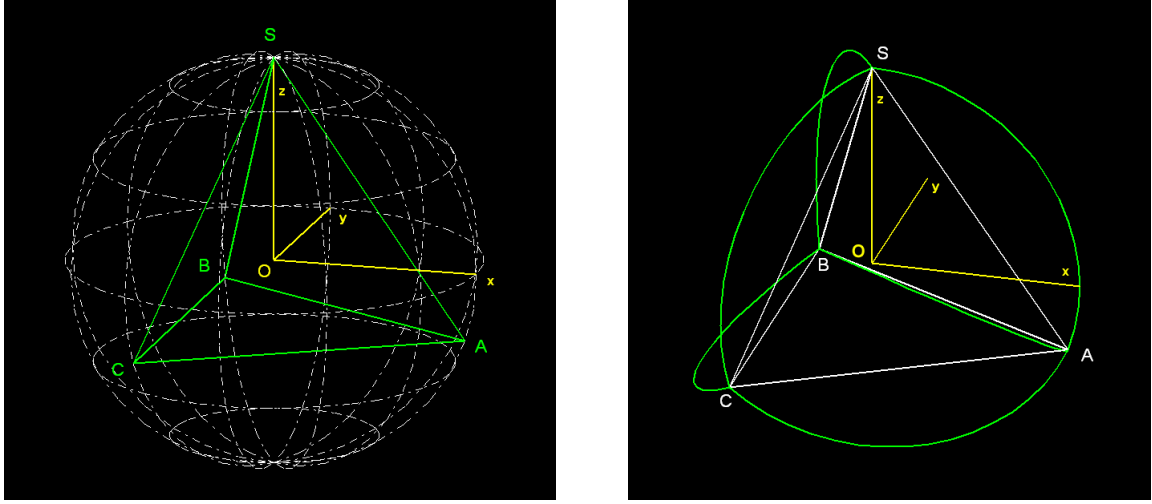


FIGURE 2 – A gauche : en vert, le tétraèdre régulier $SABC$ inclué dans la sphère unité (en blanc) centrée sur O , l'origine du repère (O, x, y) . A droite : en blanc, le tétraèdre régulier $SABC$ centré sur O ; en vert, le tétraèdre sphérique régulier \widehat{SABC} superposé.

1.2 Equations des segments de courbes

L'arc \widehat{SA} étant dans le plan (O, Ox, Oz) a pour équation :

$$\widehat{SA} = \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ 0 \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

Avec $\theta \in [0, \arccos(-1/3)]$, l'angle de colatitude habituel en coordonnées sphériques.

$$\widehat{SB} = \mathcal{R}_{(Oz, 2\pi/3)} \cdot \widehat{SA} \quad (8)$$

$$\widehat{SB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ 0 \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\widehat{SB} = R \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\widehat{SC} = \mathcal{R}_{(Oz, -2\pi/3)} \cdot \widehat{SA} \quad (11)$$

$$\widehat{SC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ 0 \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\widehat{SC} = R \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

L'équation de \widehat{AB} peut être calculée en remarquant que ce segment est obtenu en combinant les rotations :

$$\widehat{AB} = \mathcal{R}_{(Oy, \arccos(\frac{-1}{3}) - \frac{\pi}{2})} \cdot \mathcal{R}_{(Ox, -2\pi/3)} \cdot \mathcal{R}_{(Oy, \frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{-1}{3}))} \cdot \widehat{SA} \quad (14)$$

Avec les notations usuelles

$$\mathcal{R}_{(Ox, \alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (15)$$

Et

$$\mathcal{R}_{(Oy, \beta)} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (16)$$

Respectivement les rotations d'axes (Ox) et (Oy) .

D'où

$$\widehat{AB} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ 0 \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

En remarquant

$$\sin(\arccos(-\frac{1}{3}) - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} \quad (18)$$

Et

$$\cos(\arccos(-\frac{1}{3}) - \frac{\pi}{2}) = \sin(\arccos(-\frac{1}{3})) = \cos(\arcsin(-\frac{1}{3})) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (19)$$

D'où après calculs

$$\widehat{AB} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ 0 \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

Où l'on remarque que cette dernière matrice est en fait $\mathcal{R}_{(OA, -2\pi/3)}$ et vérifie en effet les propriétés d'une matrice orthogonale :

$$|\mathcal{R}_{(OA, 2\pi/3)}| = 1 \quad (21)$$

$$\mathcal{R}_{(OA, 2\pi/3)}^T = \mathcal{R}_{(OA, 2\pi/3)}^{-1} \quad (22)$$

D'où finalement

$$\widehat{AB} = R \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (23)$$

A partir duquel on peut immédiatement déduire

$$\widehat{BC} = \mathcal{R}_{(Oz, 2\pi/3)} \cdot \widehat{AB} \quad (24)$$

$$\widehat{BC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5R}{6} \sin \theta - \frac{R\sqrt{2}}{3} \cos \theta \\ \frac{R}{2\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ -\frac{R\sqrt{2}}{3} \sin \theta - \frac{R}{3} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\widehat{BC} = R \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (26)$$

Où l'on peut remarquer :

$$\sqrt{2}.z_{\widehat{BC}} = x_{\widehat{BC}} \quad (27)$$

Et

$$\widehat{CA} = \mathcal{R}_{(Oz, -2\pi/3)} . \widehat{AB} \quad (28)$$

$$\widehat{CA} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5R}{6} \sin \theta - \frac{R\sqrt{2}}{3} \cos \theta \\ \frac{R}{2\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ -\frac{R\sqrt{2}}{3} \sin \theta - \frac{R}{3} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\widehat{CA} = R \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \sin \theta + \frac{4}{3\sqrt{2}} \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (30)$$

2 Tétraèdre symétrique et propriétés

Les courbes \widehat{SA} , \widehat{AB} , \widehat{BC} , et \widehat{CA} constituant $SABC$ sont toutes des arcs de grands cercles, interceptant un angle de mesure $\theta = \arccos(-1/3)rad$ et deux à deux identiques à une rotation -d'angle $2\pi/3$ - près.

2.1 Tétraèdre symétrique

On peut définir $S'A'B'C'$ le tétraèdre symétrique de $SABC$ (figure 3 gauche). $S'A'B'C'$ est en fait le symétrique de $SABC$ par rapport à l'origine O du repère. D'où :

$$S'A'B'C' = \mathcal{S}_O.SABC = -I.SABC \quad (31)$$

$$S'A'B'C' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} SABC \quad (32)$$

Les tracés superposés de $SABC$ et de $S'A'B'C'$ fournissent un maillage régulier de la sphère par des calottes sphériques dont les contours forment douze quadrilatères à segments courbes tous superposables (figure 3 droite).

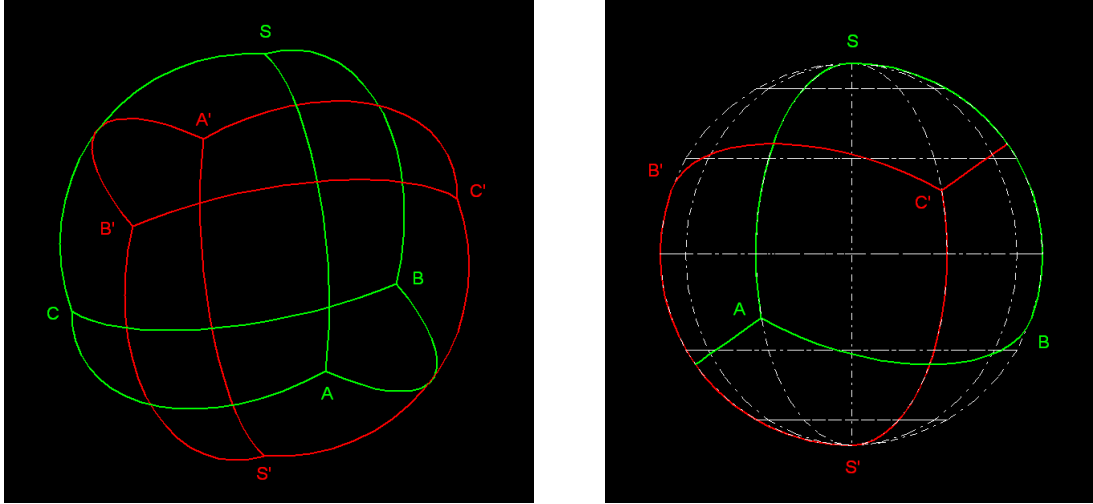


FIGURE 3 – A gauche : en vert, le tétraèdre sphérique régulier $S\widehat{A}BC$ et, en rouge, son symétrique par rapport à O , $S'A'B'C'$, tous deux inclus dans la sphère unité. A droite : vue équatoriale ($\theta = \pi/2$ rad et dans l'axe de la longitude $\varphi = \pi/6$ rad, où la référence de longitude est l'axe (O, x)). des deux tétraèdres sphérique réguliers. Chacun des 6 calottes sphériques visibles ("quadrilatères à segments courbes") a pour aire $\pi/3$.

2.2 Aires

Dans le cas de la sphère unité ($R = 1$), par construction on a :

$$\mathcal{A}_{S\widehat{A}B} = \mathcal{A}_{S\widehat{B}C} = \mathcal{A}_{S\widehat{A}C} = \mathcal{A}_{A\widehat{B}C} = \pi = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{S_{(O,1)}} = \mathcal{A}_{C_{(O,1)}} \quad (33)$$

Et donc aussi par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\widehat{SAC'}} &= \mathcal{A}_{\widehat{SBC'}} = \mathcal{A}_{\widehat{ABC'}} \\
&= \mathcal{A}_{\widehat{SBA'}} = \mathcal{A}_{\widehat{SCA'}} = \mathcal{A}_{\widehat{BCA'}} \\
&= \mathcal{A}_{\widehat{SCB'}} = \mathcal{A}_{\widehat{SAB'}} = \mathcal{A}_{\widehat{ACB'}} \\
&= \mathcal{A}_{\widehat{ABS'}} = \mathcal{A}_{\widehat{ACS'}} = \mathcal{A}_{\widehat{BCS'}} \\
&= \frac{\pi}{3} = \frac{1}{12} \mathcal{A}_{S_{(O,1)}}
\end{aligned} \tag{34}$$

Où 4π est pour mémoire l'angle solide sous lequel on voit tout l'espace, et donc l'aire de la sphère unité.

2.2.1 Vérification avec le théorème de Guldin

Dans le cas de la sphère unité, la longueur de l'arc, \widehat{SA} par exemple, est $l = \arccos(-1/3)$. L'isobarycentre de \widehat{SA} est le point G de coordonnées :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\arccos(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} \int_0^{\arccos(-\frac{1}{3})} \sin \theta \, d\theta \\ 0 \\ \int_0^{\arccos(-\frac{1}{3})} \cos \theta \, d\theta \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3 \arccos(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{36}$$

La distance entre (Oz) et le centre de gravité de \widehat{SA} est donc x_G . D'après le théorème de Guldin, l'aire de la calotte \widehat{SAB} limitée au parallèle de colatitude $\theta = \arccos(\frac{-1}{3})$ vaut donc :

$$\mathcal{A}_{\widehat{SAB}_G} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{4}{3 \arccos(-\frac{1}{3})} \cdot \arccos(-\frac{1}{3}) = \frac{8\pi}{9} \tag{37}$$

Pour trouver \mathcal{A}_c l'aire du "croissant" manquante pour calculer $\mathcal{A}_{\widehat{SAB}}$ (au delà parallèle de colatitude $\theta = \arccos(\frac{-1}{3})$), on résout l'équation :

$$\mathcal{A}_{\widehat{SAB}_G} + \mathcal{A}_{\widehat{SBC}_G} + \mathcal{A}_{\widehat{SCA}_G} + 3\mathcal{A}_c + \mathcal{A}_{\widehat{ABC}_G} + \mathcal{A}_c = 4\pi \tag{38}$$

D'où :

$$\mathcal{A}_c = \frac{\pi}{9} \quad (39)$$

Et donc :

$$\mathcal{A}_{\widehat{SAB}} = \pi \quad (40)$$

2.3 Autres propriétés

2.3.1 Perpendicularité locale des arcs

Soit X le point d'intersection des arcs \widehat{SA} et $\widehat{B'C'}$. Par construction

$$\overrightarrow{OX} = R \begin{pmatrix} \sin \left(\frac{\arccos(\frac{-1}{3})}{2} \right) \\ 0 \\ \cos \left(\frac{\arccos(\frac{-1}{3})}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (41)$$

Le vecteur tangent à l'arc \widehat{SA} est :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \widehat{SA}}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (42)$$

L'arc $\widehat{B'C'}$ est tel que :

$$\widehat{B'C'} = \mathcal{S}_O.\widehat{BC} = -I.\widehat{BC} \quad (43)$$

D'où :

$$\widehat{B'C'} = R \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sin \theta + \frac{1}{3} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (44)$$

Le vecteur tangent à l'arc $\widehat{B'C'}$ est alors :

$$\frac{\partial \widehat{B'C'}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{3} \sin \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (45)$$

Après calculs, il vient :

$$\frac{\partial \widehat{SA}}{\partial \theta} \left(\frac{\arccos(\frac{-1}{3})}{2} \right) \cdot \frac{\partial \widehat{B'C'}}{\partial \theta} \left(\frac{\arccos(\frac{-1}{3})}{2} \right) = R \begin{pmatrix} \cos(\frac{\arccos(\frac{-1}{3})}{2}) \\ 0 \\ -\sin(\frac{\arccos(\frac{-1}{3})}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (46)$$

D'où $\frac{\partial \widehat{SA}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \widehat{B'C'}}{\partial \theta}$ orthogonaux en X (figure 4). Par symétrie, il en va de même avec les vecteurs tangents liés aux cinq autres points d'intersection entre $SABC$ et $S'A'B'C'$.

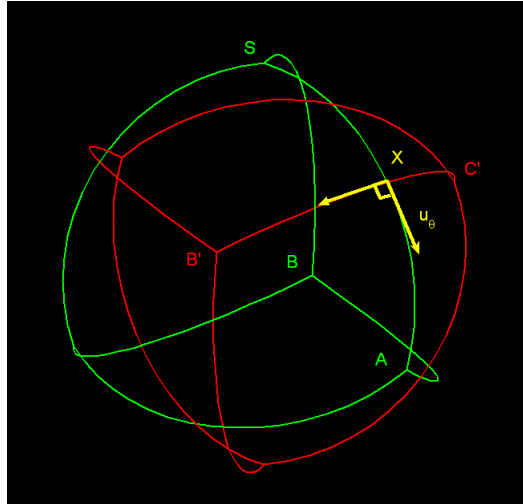


FIGURE 4 – En vert, le tétraèdre sphérique régulier $S\widehat{A}BC$ et son symétrique $S'A'\widehat{B'C'}$. Les segments courbes \widehat{SA} et $\widehat{B'C'}$ se coupent en X , point où leurs vecteurs tangents sont orthogonaux.