[Nicolas Douillet]

Binôme de Newton et loi binômiale

1 Binôme de Newton

1.1 Enoncé

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k} \tag{1}$$

1.2 Démonstration (par récurrence / induction)

1.2.1 I Initialisation

Soit P_n la propriété à démontrer.

P_0, P_1 sont vraies (trivial).

D'après les identités remarquables d'ordre 2 et 3, P_2 et P_3 sont vraies.

1.2.2 II Hypothèse de récurrence

On suppose P_n vraie pour n fixé, $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k} \tag{2}$$

1.2.3 III Hérédité

Montrons P_{n+1} vraie :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\ b^{n-k} \\
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\ b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\ b^{n-k+1} \\
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k\ b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\ b^{n-k+1} \\
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k\ b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k\ b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\ b^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

D'où P_{n+1} vraie.

1.2.4 IV Conclusion

On en déduit :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall n\in\mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\ b^{n-k} \tag{3}$$

D'après le principe de récurrence.