RACINE ENIEME DE L'UNITE

$Soit\,(E)\,l'\,equation : z^n = 1,\ z \in \mathbb{C}, n \in IN$

$On\ pose : z = \rho\, e^{i\theta}, \rho > 0, \theta \in [0;2\pi]$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n = 1\\ &\Leftrightarrow \rho^n\, e^{ni\theta} = 1 = e^{2i\pi}\end{aligned}$$

Deux nombres complexes sont égaux sont égaux si et seulement si ils ont le même mod ule et le même arg ument.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^n = 1\\ n\theta = 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases}\rho = 1\\ \theta = \dfrac{2(k+1)\pi}{n}, k \in [0;n-1];\end{cases}$$

De plus, les solutions de (E) *forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.*

$$Et \sum_{k=1}^{n-1} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k = 0\ (où\ \omega_k\ est\ la\ racine\ d'\,ordre\ k)$$

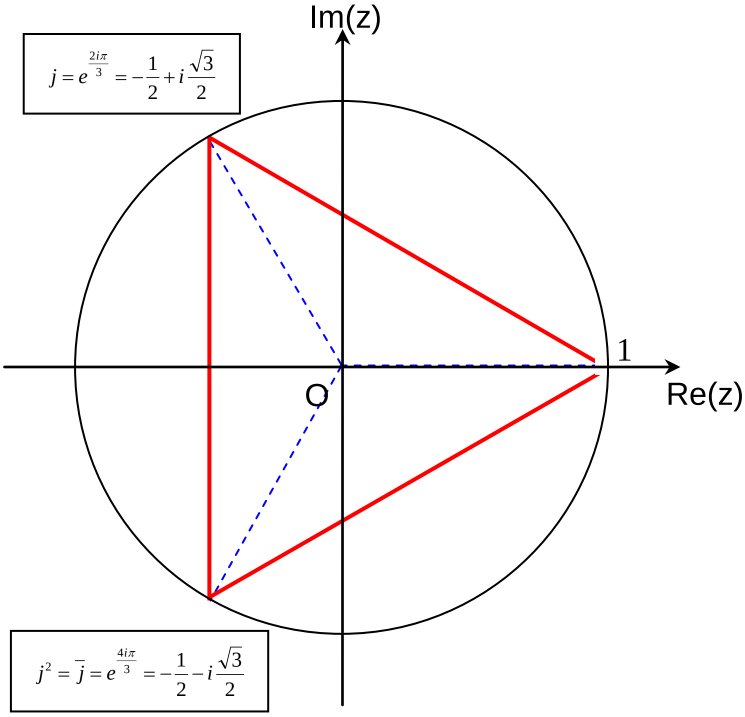
$Exemple :\ z^3 = 1$

$$\Leftrightarrow z = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ ou\ e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ ou\ e^{2i\pi} = 1;$$

$$On\ définit :\ j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ d'\,où\ j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j};$$

$$Et\ 1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 0$$

Re présentation géométrique des complexes solutions de (E):



Ici, le triangle formé par les complexes d'affixes $1,\ j,\ \bar{j}$ *est équilatéral.*

Remarque : les solutions de l'équation $(E') \Leftrightarrow z^n = -1$

$z^3 = -1$ *(dans notre exemple)*

sont décalées d'un angle de π *rad par rapport aux solutions de* (E). $\left(\pi = Arg(-1) = Arg\left(e^{i\pi}\right)\right)$

$$(E') \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1; \\ \theta = \dfrac{(2k-1)\pi}{n},\ k \in [0; n-1]; \end{cases}$$

Et dans notre exemple, les solutions sont :

$$z = e^{\frac{-i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ ou\ z = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ ou\ z = e^{i\pi} = -1;$$

Le triangle équilatéral ainsi formé est le symétrique du précédent par rapport à l'axe imaginaire.