[Nicolas Douillet]

# Formule de Leibniz pour les dérivées ènièmes

## 1 Enoncé

Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues et dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ :

$$(u, v) \in C^n(\mathbb{R}) \times C^n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

On a :

$$\forall (u, v) \in C^n(\mathbb{R}) \times C^n(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}\ v^{(n-k)} \tag{2}$$

## 2 Demonstration par récurrence / induction

### 2.1 I Initialisation

Soit $P_n$ la propriété à démontrer.

Comme par convention $u^{(0)} = u$ et $v^{(0)} = v$, et comme $(uv)' = u'v + uv'$, $P_0$ et $P_1$ sont vraies.

### 2.2 II Hypothèse de récurrence

On suppose $P_n$ vraie pour $n$ fixé appartenant à $\mathbb{N}$ :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}\ v^{(n-k)} \tag{3}$$

## 2.3 III Hérédité

Montrons $P_{n+1}$ vraie :

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= \left[(uv)^{(n)}\right]' \\
(uv)^{(n+1)} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}\ v^{(n-k)}\right]' \\
(uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[u^{(k)}\ v^{(n-k)}\right]' \\
(uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)} \\
(uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} \\
(uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} \\
(uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] u^{(k)} v^{(n-k+1)} + u^{(n+1)} v + u v^{(n+1)} \\
(uv)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)}
\end{aligned}
$$

D'où $P_{n+1}$ vraie.

## 2.4 IV Conclusion

On en déduit :

$$
\forall (u,v) \in C^n(\mathbb{R}) \times C^n(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}\ v^{(n-k)} \tag{4}
$$

D'après le principe de récurrence.