[Nicolas Douillet]

Matrice et déterminant de Vandermonde

1 Matrice de Vandermonde

La matrice carrée de Vandermonde de dimensions $n \times n$ s'écrit :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Soit, plus simplement :

$$\forall (i,j) \in [1;n] \times [1;n],\ V_{i,j} = a_i^{j-1} \tag{2}$$

2 Déterminant de Vandermonde

2.1 Expression / formulation

Son déterminant vaut :

$$det(V) = |V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \tag{3}$$

2.2 Calculs aux ordres 2, 3

2.2.1 Ordre 2

$$V_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

D'où immédiatement :

$$|V_{(2,2)}| = a_2 - a_1 \tag{5}$$

2.2.2 Ordre 3

$$V_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

D'où, en développant suivant la 1ère colonne, on obtient successiment :

$$\begin{aligned}
|V_{(3,3)}| &= a_2a_3^2 - a_3a_2^2 + a_1^2a_3 - a_3^2a_1 + a_1a_2^2 - a_1^2a_2 \\
|V_{(3,3)}| &= (a_3 - a_2)a_2a_3 + (a_3 - a_2)a_1^2 + (a_2 + a_3)(a_2 - a_3)a_1 \\
|V_{(3,3)}| &= (a_3 - a_2)(a_2a_3 + a_1^2 - a_1(a_2 + a_3)) \\
|V_{(3,3)}| &= (a_3 - a_2)(a_1^2 - a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3) \\
|V_{(3,3)}| &= (a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) \\
|V_{(3,3)}| &= \prod_{1 \le i < j \le 3} (a_j - a_i)
\end{aligned}$$

2.3 Preuve par récurrence / induction

2.3.1 I Initialisation

Soit P_n la propriété à démontrer (3), pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1$.

P_2 et P_3 sont vraies d'après 2.2.

2.3.2 II Hypothèse de récurrence

On suppose P_n vraie pour n fixé, $n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1$.

2.3.3 III Hérédité

Montrons P_{n+1} vraie.
D'où P_{n+1} vraie.

2.3.4 IV Conclusion

On en conclut, d'après le principe de récurrence : $\forall n\ in\mathbb{N}^*,\ n > 1,\ P_n$ est vraie.

2.4 Preuve par calcul "direct"