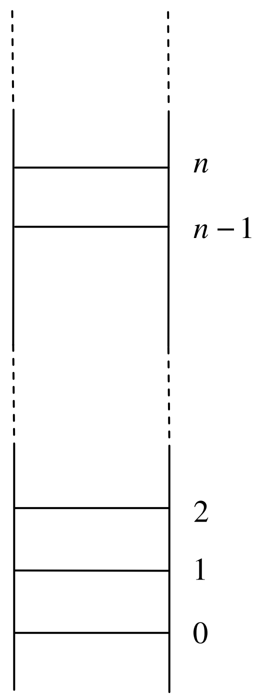
DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Objectif : On veut démontrer une propriété pour tout n de$\mathbb{N}$.

I Analogie avec une échelle : on assimile l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels à une échelle (infinie) ou chaque barreau représente un entier, de 0 à n :

Principe de récurrence : si on est sur un barreau de l'échelle, alors on peut immédiatement atteindre le suivant en gravissant un échelon.



1$^{\text{ère}}$ étape : on montre que l'on peut gravir le premier barreau de l'échelle. (étape d'initialisation)

2$^{\text{ème}}$ étape : on suppose que l'on est sur le nième barreau de l'échelle. (pour n fixé de $\mathbb{N}$)

3$^{\text{ième}}$ étape : en utilisant la deuxième étape, on montre que l'on peut gravir l'échelle et atteindre ainsi le (n+1)$^{\text{ième}}$ barreau.

4$^{\text{ème}}$ étape : on en déduit d'après le principe de récurrence que l'on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle $\mathbb{N}$ (en gravissant successivement chacun des barreaux).

Le principe de cette méthode de résolution mathématique est le même que celui des « dominos cascade » (lorsque le premier dominos tombe, il fait tomber tous les autres). Cette méthode est également appelée méthode par induction par les anciens. C'est une méthode très puissante très efficace et largement utilisée pour démontrer en mathématiques.

II Méthodologie et présentation :

Soit P_n la propriété à démonter.

1. Initialisation :

On montre que la propriété est vraie au rang 0 (P_0 vraie)

2. Hypothèse de récurrence :

On suppose que P_n est vraie pour n fixé de $\mathbb{N}$.

3. Hérédité :

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on montre que P_{n+1} est vraie.

4. Conclusion :

On en déduit, d'après le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

III Exemple de démonstration par récurrence :

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite des entiers naturels de 1 à n :

$u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 2 \quad \ldots \quad u_n = n$

Montrons par récurrence que la somme des termes de cette suite vaut $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Soit P_n cette propriété.

1. *Initialisation :*

$S_1 = u_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ *donc P_1 est vraie.*

2. *Hypothèse de récurrence :*

On suppose que pour n fixé ($n \in IN$), P_n est vraie : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *pour n fixé.*

3. *Hérédité :*

On montre que P_{n+1} est vraie :

$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ *(d'après l'hypothèse de récurrence).*

$S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = S_{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie.

4. *Conclusion :*

On en déduit d'après le principe de récurrence : $\forall n \in IN, S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$