« SCIENCES ET CONSCIENCE »

[Nicolas Douillet]

Sur la conjecture des nombres premiers jumeaux

Résumé

Dans cet article nous mettons en place les étapes successives servants de base à une démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux, que nous proposons en dernière partie. Le principe général consiste à segmenter les couples de jumeaux en cadets d'une part, et en aînés d'autre part, en les exprimant chacun de manière spécifique. La preuve en elle même enfin, utilise le procédé combiné de récurrence sur l'absurde, et dont l'étape clé consiste en une transposition ensembliste de la relation d'implication.

Mots clés

Mathématiques, arithmétique, nombres, théorie, premiers, jumeaux, conjecture, cadets, aînés, infini, couples.

I Expression commune aux nombres premiers

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

Tous les nombres premiers supérieurs à 2 sont impairs, d'où :

$$\forall p \in \mathbb{P} \backslash \{2\}, p = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Aussi, tous les nombres impairs supérieurs à 3 peuvent s'écrire comme multiple ce nombre à plus ou moins une unité de distance. C'est donc aussi vrai pour les nombres premiers supérieurs à 3 :

$$\forall p \in \mathbb{P} \wedge p > 3, p = 3n \pm 1, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

On déduit de 1 et 2 une expression commune aux nombres premiers supérieurs à 3 :

$$\forall p \in \mathbb{P} \wedge p > 3, \mathbf{p} = \mathbf{6n} \pm \mathbf{1}, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

II Segmentation des jumeaux : les aînés et les cadets

II.1 Expression propres aux aînés des jumeaux

Les couples de nombres premiers jumeaux sont par définition les couples de premiers (p, p') tels que $p' = p + 2$. L'ensemble des jumeaux, que l'on note $\mathbb{T}$ (twins), s'écrit donc :

$$\mathbb{T} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43 \ldots\}$$

Parmi les jumeaux, on distingue les aînés d'une part (les plus grands), des cadets d'autre part (les plus petits). Soit $\mathbb{E}$ (Elder) l'ensemble des aînés.

$$\mathbb{E} = \{5, 7, 13, 19, 31, 43, \ldots\} \tag{4}$$

D'après 3 et 4, on a :

$$\forall p \in \mathbb{E} \wedge p > 5, \mathbf{p} = \mathbf{6n} + \mathbf{1}, n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

II.2 Expression propre aux cadets des jumeaux

Soit $\mathbb{Y}$ (Younger) l'ensemble des cadets.

$$\mathbb{Y} = \{3, 5, 11, 17, 29, 41, \ldots\}$$

Avec

$$\mathbb{T} = \mathbb{Y} \cup \mathbb{E}$$

D'après 3, on a :

$$\forall p \in \mathbb{Y} \wedge p > 3, p = 6n - 1, n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Que l'on ramène à

$$\forall p \in \mathbb{Y} \wedge p > 3, \mathbf{p} = \mathbf{3n} + \mathbf{2}, n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

après un changement de variable du type $n' = 2n - 1$.

IV Cas particuliers

IV.1 Le nombre 2, le premier des premiers, et unique premier pair

Le nombre 2 est le premier diviseur entier effectif. Il génère l'ensemble des nombres pairs $2\mathbb{N}$ et définit aussi par complémentarité l'ensemble des nombres impairs, $2\mathbb{N} + 1$. Ainsi, le nombre 2 est la taille de la "maille de base" de $\mathbb{P}$, c'est à dire qu'il constitue le plus petit écart possible entre deux nombres premiers consécutifs supérieurs à lui-même. On pourrait aussi parler de pas ou de période.

Le nombre **2 est aussi le seul nombre premier p tel que $\mathbf{p + 2 = p \times 2}$**, (unique équivalence de l'auto-addition et l'auto-multiplication), s'exhibant ainsi comme diviseur explicite de son unique "candidat potentiel pour un jumeau" -le nombre 4- qu'il élimine d'office.

Comme le nombre 2 est le seul premier pair, et à l'origine de la définition de tous les nombres impairs, ensemble à la base des nombres premiers -excepté 2 lui-même-, 2 peut être considéré comme son propre jumeau (double par nature / en lui-même).

IV.2 Le triplet (3,5,7)

Le triplet $(3, 5, 7)$ constitue l'unique triplet de nombre premier, et 3 est la longueur maximum d'une suite de nombres premiers -jumeaux- consécutifs.

Preuve : soit $(p, p', p'') \in \mathbb{P}^3$ un triplet de nombres premiers consécutifs tel que $p > 3$. p, le plus petit, est un cadet d'où $p = 3n + 2, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p'' &= p' + 2 \\ p'' &= p + 4 \\ p'' &= 3n + 6 \\ p'' &= 3(n + 2) \end{aligned}$$

D'où p'' non premier, d'où $(3, 5, 7)$ unique triplet de nombres premiers, et 3 la longueur maximum d'une suite de nombres premiers consécutifs.

Autre conséquence : le nombre 5 est l'unique premier jumeau simultanément aîné et cadet.

V Infinité des nombres premiers du type $3n + 2$

L'expression $q = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$ génère une infinité de nombres premiers.

En effet le nombre $3n + 2, n \in \mathbb{N}$ peut être pris aussi grand que l'on veut, mais n'est jamais divisible par $6m + 1, m \in \mathbb{N}$.

VI Démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux

Par récurrence sur l'absurde.

Soit H l'hypothèse : "$\mathbb{P}$ contient une infinité de couples de nombres premiers jumeaux."

Envisager l'hypothèse contraire, $\overline{H}$ équivaut à affirmer : $\exists (p, p') \in \mathbb{P}^2, p' = p + 2$, soit le dernier des couples de nombres premiers jumeaux.

Soit

$$\forall q \in \mathbb{Y}, q > p \Rightarrow q + 2 \notin \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow \forall q = 3n + 2, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{P} \wedge (q > p) \Rightarrow q' = 3n + 4 \notin \mathbb{P}$$

$$\Leftrightarrow \forall q = 3n + 2, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{P} \wedge (q > p) \Rightarrow q \mid q'$$

$$\Leftrightarrow \forall q = 3n + 2, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{P} \wedge (q > p) \Rightarrow 3n + 2 \mid 3n + 4$$

Or cette dernière relation de divisibilité est absurde car deux nombres distants de 2 ne peuvent jamais constituer une couple de (diviseur, multiple) l'un de l'autre, la seule exception connue à cette règle étant bien sûr constituée par le couple $(2, 4)$ et générée par le nombre 2 lui-même (voir IV.1).

On en déduit qu'il existe un couple de premiers jumeaux (r, r') supérieurs à (p, p') :

$$\exists (r, r') \in \mathbb{P}^2, r' = r + 2 \wedge r > q$$

Par récurrence, en itérant sur ce nouveau couple pris comme le dernier couple de jumeaux dans l'hypothèse de l'absurde, on montre qu'il existe une infinité de couples de jumeaux dans $\mathbb{P}$ et que la conjecture des nombres premiers jumeaux est vraie.