OPERATEURS DIFFERENTIELS

1 GRADIENT

Définition :

$$df(M,t) = \overrightarrow{grad}\, f(M,t).d\overrightarrow{M} + \frac{\partial f(M,t)}{\partial t} dt$$

Expressions :

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{grad}\, f(x,y,z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = \vec{\nabla} f$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,z,t) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\partial f}{r\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,\varphi,t) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

2 DIVERGENCE

Définition :

$$d\phi = div\vec{F}(M,t)d\tau = \vec{F}(M,t).\,\overrightarrow{dS}$$

Expressions :

En coordonnées cartésiennes : $div\vec{F}(x,y,z,t) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla}.\vec{F}$

En coordonnées cylindriques : $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{F}}(r,\theta,z,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

En coordonnées sphériques : $div\vec{F}(r,\theta,\varphi,t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F\varphi}{\partial \varphi}$

3 ROTATIONNEL

Définition :

$$dC = \left(\overrightarrow{rot}\vec{F}\right).\overrightarrow{dS}$$

Expressions :

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}(x,y,z,t)=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z}-\dfrac{\partial F_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}\end{vmatrix}\ \overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{F}(r,\theta,z,t)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_z}{\partial\theta}-\dfrac{\partial F_\theta}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_r}{\partial z}-\dfrac{\partial F_z}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\dfrac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\end{vmatrix}\ \overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{rot}\vec{F}(r,\theta,\varphi,t)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial(F_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\dfrac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right]\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\dfrac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\end{vmatrix}\ \overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi}$

4 LAPLACIEN

LAPLACIEN SCALAIRE

Définition :

$\Delta f=div\ \overrightarrow{grad}f$

Expressions :

En coordonnées cartésiennes : $\Delta f(x,y,z,t)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\overrightarrow{\nabla^2}f$

En coordonnées cylindriques : $\Delta f(r,\theta,z,t)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées sphériques : $\Delta f(r,\theta,\varphi,t)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$

5 PROPRIETES

$$div\left(U\vec{a}\right)=\vec{a}.\overrightarrow{grad}(U)+U\,div\left(\vec{a}\right) \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}.\left(U\vec{a}\right)=U\left(\vec{\nabla}.\vec{a}\right)+\left(\vec{\nabla}U\right)\vec{a}$$
$$\overrightarrow{rot}\left(U\vec{a}\right)=U\,\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)+\overrightarrow{grad}(U)\wedge\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}\wedge\left(U\vec{a}\right)=U\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}\right)+\left(\vec{\nabla}U\right)\wedge\vec{a}$$
$$div\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\vec{b}.\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)-\vec{a}.\overrightarrow{rot}\left(\vec{b}\right) \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}.\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\vec{b}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}\right)-\vec{a}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{b}\right)$$
$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{a}\right)\right)-\Delta\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{a}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{a}$$
$$div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right)=0 \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(U)\right)=\vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{0}$$
$$div\left(\overrightarrow{grad}(U)\right)=\Delta U \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}^2 U=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right)$$
$$\overrightarrow{grad}(UW)=U\,\overrightarrow{grad}(W)+W\,\overrightarrow{grad}(U) \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla}(UW)=U\vec{\nabla}W+W\vec{\nabla}U$$
$$\left(\vec{A}\,\overrightarrow{grad}\right)\vec{A}=\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right)\wedge\vec{A}-\overrightarrow{grad}\left(\frac{A^2}{2}\right).$$

6 THEOREME DE STOKES

Soit C un contour fermé et S une surface quelconque prenant appui sur le contour C. La circulation d'un champ de vecteur $\vec{a}(M,t)$ le long du contour C est égale au flux du vecteur $\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M,t)$ à travers la surface S.

$$\oint_C \vec{a}.\vec{dl}=\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\overrightarrow{dS}.$$

7 THEOREME D'OSTROGRADSKY

Soit S une surface fermée et V le volume délimité par la surface S. Le flux d'un champ de vecteur $\vec{a}(M,t)$ à travers la surface S est égale à l'intégrale sur le volume V de la divergence du champ $\vec{a}(M,t)$.

$$\oiint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS}=\iiint_V div\left(\vec{a}\right)dV.$$

LE SYMBOLE NABLA

On introduit l'opérateur vectoriel symbolique appelé nabla et noté $\vec{\nabla}$ avec :

$\vec{\nabla}=\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\cdot$ On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{grad}\,U=\vec{\nabla}U \quad ; \quad div\,\vec{a}=\vec{\nabla}.\vec{a} \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{a}=\vec{\nabla}\wedge\vec{a} \quad ; \quad \Delta U=\vec{\nabla}^2 U \quad ; \quad \Delta\vec{a}=\vec{\nabla}^2\vec{a}$$

L'opérateur "$\vec{a}$ scalaire nabla" est un opérateur scalaire symbolique noté $(\vec{a}.\vec{\nabla})$. Il es défini par la relation :

$$\left(\vec{a}.\vec{\nabla}\right) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \cdot$$

Cet opérateur agit :

- sur un champ scalaire U : $\left(\vec{a}.\vec{\nabla}\right)U = a_x \frac{\partial U}{\partial x} + a_y \frac{\partial U}{\partial y} + a_z \frac{\partial U}{\partial z}$;

- sur un champ vectoriel $\vec{b}$: $\left(\vec{a}.\vec{\nabla}\right)\vec{b} = \left(\vec{a}.\vec{\nabla}\right)b_x \vec{i} + \left(\vec{a}.\vec{\nabla}\right)b_y \vec{j} + \left(\vec{a}.\vec{\nabla}\right)b_z \vec{k}$;