« SCIENCES ET CONSCIENCE »

[Nicolas Douillet]

Résolution de systèmes linéaires d'équations par la méthode de Kramer

1 Système linéaire de 2 équations à 2 inconnues

Soit le système (Σ_2) :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ux + vy = w \end{cases} \quad \text{avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et comme paramètres } (a, b, c, u, v, w) \in \mathbb{R}^6 \tag{1}$$

Soient les déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ w & v \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ u & w \end{vmatrix} \tag{2}$$

On a les solutions :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{cv - bw}{av - bu} \tag{3}$$

Et :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{aw - cu}{av - bu} \tag{4}$$

Preuve : immédiate en résolvant le système par une autre méthode (combinaison linéaire, substitution).

Matriciellement, on obtient :

$$(\Sigma_2) \Leftrightarrow MX = N \tag{5}$$

Avec :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} c \\ w \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$(\Sigma_2) \Leftrightarrow X = M^{-1}N \quad |M| \neq 0 \tag{7}$$

$$M^{-1}N = \frac{1}{det(M)} com(M)^T N \tag{8}$$

Où $com(M)$ est la matrice des cofacteurs de M. D'où :

$$(\Sigma_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{av - bu} \begin{pmatrix} v & -b \\ -u & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ w \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad av - bu \neq 0 \tag{9}$$

D'où :

$$x = \frac{cv - bw}{av - bu} \quad ; \quad y = \frac{aw - cu}{av - bu} \tag{10}$$

2 Système linéaire de 3 équations à 3 inconnues

Soit le système (Σ_3) :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ mx + ny + pz = r \end{cases} \quad \text{avec } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et comme paramètres } (a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, p, r) \in \mathbb{R}^{12} \tag{11}$$

Soient les déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & p \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ r & n & p \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ m & r & p \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & r \end{vmatrix} \tag{12}$$

On a les solutions :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{dfp - dng + hnc - hbp + rbg - rfc}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \tag{13}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{ahp - arg + erc - edp + mdg - mhc}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \tag{14}$$

Et :

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{afr - anh + end - ebr + mbh - mfd}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \tag{15}$$

Preuve (avec la matrice inverse) :

$$(\Sigma_3) \Leftrightarrow MX = N \tag{16}$$

Avec :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & p \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} d \\ h \\ r \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$(\Sigma_3) \Leftrightarrow X = M^{-1}N \quad |M| \neq 0 \tag{18}$$

$$M^{-1}N = \frac{1}{det(M)} com(M)^T N \tag{19}$$

Où $com(M)$ est la matrice des cofacteurs de M. D'où :

$$(\Sigma_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \begin{pmatrix} fp - ng & nc - bp & bg - fc \\ mg - ep & ap - mc & ce - ag \\ ne - fm & bm - an & af - be \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ h \\ r \end{pmatrix} \tag{20}$$

Avec :

$$afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc \neq 0 \tag{21}$$

D'où :

$$x = \frac{dfp - dng + hnc - hbp + rbg - rfc}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \tag{22}$$

$$y = \frac{ahp - arg + erc - edp + mdg - mhc}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \tag{23}$$

$$z = \frac{afr - anh + end - ebr + mbh - mfd}{afp - ang + enc - ebp + mbg - mfc} \tag{24}$$

3 Extension et preuve en dimension n

Soit le système (Σ_n) :

$$\begin{cases} \Sigma_{k=1}^{n} a_{1k} x_k = b_1 \\ ... \\ \Sigma_{k=1}^{n} a_{nk} x_k = b_n \end{cases} \quad \text{avec } (x_k)_{1 \leq k \leq n} \ \in \mathbb{R}^n \quad \text{et comme paramètres } (a_{ij})_{1 \leq i,\ j \leq n} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{25}$$

Soient les déterminants :

$$\Delta = |a_{i,j}|_{1 \leq i,\ j \leq n} \tag{26}$$

Et

$$\Delta x_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k,1} & ... & a_{k,k-1} & b_k & a_{k,k+1} & ... & a_{k,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{27}$$

On a les solutions :

$$(x_k)_{1\leq k\leq n} = \frac{\Delta x_k}{\Delta} \tag{28}$$

3.1 Preuve, par induction / récurrence

$$(\Sigma_n) \Leftrightarrow AX = B \tag{29}$$

Avec :

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,\ j\leq n} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$(\Sigma_n) \Leftrightarrow X = A^{-1}B \quad |A| \neq 0 \tag{31}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{det(A)} com(A)^T B \tag{32}$$

Où $com(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.

3.1.1 Initialisation

Soit P_n la propriété à démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [1;\ n], (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \frac{\Delta x_k}{\Delta} \tag{33}$$

P_1 triviale. P_2 et P_3 vraies d'après 1 et 2.

3.1.2 Hypothèse de récurrence

On suppose P_n vraie pour n fixé, $n \in \mathbb{N}$.

3.1.3 Hérédité

Montrons P_{n+1} vraie.

Le développement de l'équation 29 donne (pour la dernière ligne de la matrice A) :

3.1.4 Conclusion

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$ vraie, d'après le principe de récurrence.