CALCUL D'UNE SOMME

Exemple de démonstration par récurrence :

Montrons : $\forall n \in IN, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit P_n *cette propriété.*

Initialisation :

$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ *donc* P_0 *est vraie*

Hypothèse de récurrence :

On suppose P_n *vraie pour n fixé de IN :* $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Hérédité :

On montre que P_{n+1} *est vraie*

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \text{ où } (-1) \text{ est racine évidente du numérateur}$$

que l'on factorise avec le schéma de Hörner :

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 9 & 13 & 6 \\ -1 & \downarrow & -2 & -7 & -6 \\ & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \text{ ; } \Delta = 49 - 48 = 1 \text{ ; } n = -2 \text{ ou } n = -\frac{3}{2} \left(\text{remarque : ici } n \in ✈ \text{ mais }\right)$$

ce n'est pas gênant pour le calcul de la somme.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1).2.(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie}$$

Conclusion :

On en déduit d'après le principe de récurrence : $\forall n \in IN, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$