Modélisation par Processus Gaussiens

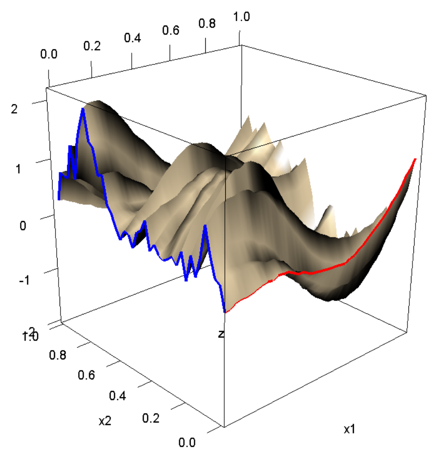
Examen

14 décembre 2010

Exercice 1 :

On considère une trajectoire issue d'un processus Z sur $\mathbb{R}^2$ de noyau produit tensoriel :

$$K(x, y) = K_1(x_1, y_1)K_2(x_2, y_2).$$



Soit $Z_1(x_1)$ le processus correspondant à la restriction de Z sur la droite $x_2 = 0$. On a donc $Z_1(x_1) = Z(x_1, 0)$.

1. Calculez le noyau de covariance du processus Z_1 : $K_{Z_1}(x_1, y_1) = \mathrm{cov}(Z_1(x_1), Z_1(y_1))$.

2. Puisque la courbe tracée en rouge correspond à une trajectoire de Z_1, quel type de noyau vous semble le plus vraisemblable pour Z_1 ?

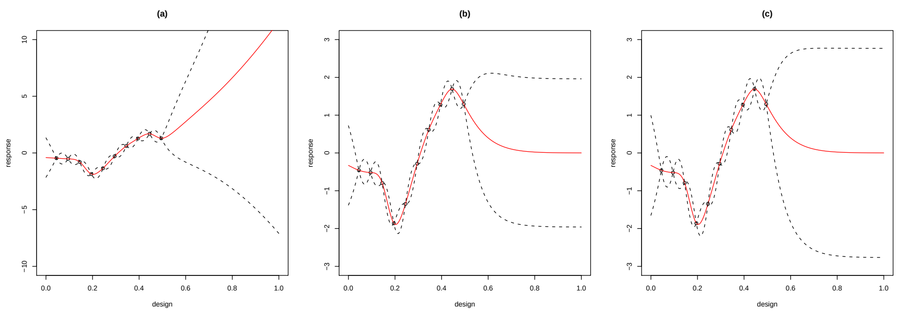
3. De même, si on note $Z_2(x_2) = Z(0, x_2)$, quel type de noyau intuitez vous pour Z_2 ?

4. Déduisez en une expression de K. Cette expression peut dépendre des paramètres σ_1, σ_2, θ_1, θ_2.

5. Le processus Z est il stationnaire et/ou isotrope ?

Exercice 2 :

Pour les trois modèles de krigeage suivants, le noyau utilisé est le noyau Matern 3/2 de paramètres $(\sigma^2, \theta) = (0.5, 0.8)$.



1. Précisez pour les trois figures :
- le type de krigeage utilisé,
- la tendance choisie.

2. Si σ^2 avait varié d'un modèle à l'autre, une des conclusions précédentes n'aurait pas été possible. Laquelle et pourquoi ?

Exercice 3 :

Le but de cet exercice est de trouver un noyau $K_\mathcal{S}$ adapté à la modélisation d'une fonction f qui est symétrique sur $[-1, 1]$. Soit Z un processus gaussien sur [-1,1] de moyenne μ et de noyau K. On note $\mathcal{S}$ l'application qui a toute fonction f associe sa symétrisée $f_\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} : f(x) \mapsto f_\mathcal{S}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{1}$$

1. Soit $Z_\mathcal{S}$ la symétrisée du processus Z : $Z_\mathcal{S} = \mathcal{S}(Z)$. Montrez que l'on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Z_\mathcal{S}(x)) = \mu \\ &\mathrm{cov}(Z_\mathcal{S}(x), Z_\mathcal{S}(y)) = \frac{K(x,y) + K(-x,y) + K(x,-y) + K(-x,-y)}{4}. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Notons $K_\mathcal{S}$ le noyau de $Z_\mathcal{S}$. Montrez que $K_\mathcal{S}(-x, y) = K_\mathcal{S}(x, y)$

3. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de points sur $[-1\ 1]$, $Y = f(X)$ le vecteur des observations et $m_\mathcal{S}(x)$, $v_\mathcal{S}(x)$ la moyenne et la variance de krigeage construites avec le noyau $K_\mathcal{S}$. Déduire de la question précédente que
- $m_\mathcal{S}(-x_1) = f(x_1)$
- $v_\mathcal{S}(-x_1) = 0$

4 Question Bonus. On vient de voir que l'utilisation du noyau $K_\mathcal{S}$ permet de prendre en compte la symétrie de la fonction f dans la construction du modèle de krigeage. Si on simule des trajectoires du processus conditionnel $Z_{\mathcal{S}}|Z_{\mathcal{S}}(X) = Y$, on trouve qu'elles sont toutes symétriques par rapport à 0. Ces trajectoires seront elles équivalentes aux trajectoires du processus $Z|Z(X) = Y, Z(-X) = Y$ (on symétrise ici l'ensemble des points du plan d'expérience) ?

Exercice 4 :

Soit $D = [0,1]^n$, X un plan d'expérience sur D et Y le vecteur des observations. Notons Z un PG indexé par D, centré et de noyau K.

1. Soit $x_0 \in D$. Quelle est la loi de $Z(x_0)|Z(X) = Y$? Notons Y_{x_0} une variable de même loi.

2. On considère maintenant que l'on ajoute le point x_0 au plan d'expérience et que l'on ajoute la variable aléatoire Y_{x_0} au vecteur des observations. Donnez alors l'expression du meilleur prédicteur et de la variance de prédiction. Ces 2 fonctions sont-elles aléatoires ?

3. Montrez que l'ajout de l'observation aléatoire Y_{x_0} ne modifie pas la moyenne de krigeage, i.e. $\mathrm{E}(Z(x)|Z(X) = Y, Z(x_0) = Y_{x_0}) = \mathrm{E}(Z(x)|Z(X) = Y)$.

4. En utilisant la formule de la variance totale

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Z(x)|Z(X) = Y, Z(x_0) = Y_{x_0}) =& \mathrm{E}[\mathrm{var}(Z(x)|Z(X) = Y, Z(x_0) = Y_{x_0})] \\ &+ \mathrm{var}(\mathrm{E}[Z(x)|Z(X) = Y, Z(x_0) = Y_{x_0}]),\end{aligned} \tag{3}$$

calculez $\mathrm{var}(Z(x)|Z(X) = Y, Z(x_0) = Y_{x_0})$. Concluez.