FACULDADE SUPERIOR DE TECNOLOGIA EM ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE SISTEMAS	
Disciplina: Matemática Discreta	Professor: Lívia Ribeiro
Exercícios – LÓGICA E CÁLCULO PROPOSICIONAL	

1. Tautologia

A **tautologia** é uma função lógica que **é sempre verdadeira** (V) para quaisquer valores de suas variáveis proposicionais.

Exemplo: A proposição $[A \vee \neg(A \wedge B)]$ é uma tautologia conforme a tabela verdade a seguir ilustra.

A	B	A ∧B	¬(A ∧ B)	A ∨¬(A ∧ B)
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

2. Contradição

A **contradição** é uma função lógica que **é sempre falsa** (F) para quaisquer valores de suas variáveis proposicionais.

Exemplo

Prove que $(A \vee B) \wedge [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ é uma contradição.

Conforme a tabela verdade que é dada a seguir.

A	B	A ∨B	¬A	¬B	(¬A) ∧ (¬B)	(A ∨B) ∧ [(¬A) ∧ (¬B)]
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

Como pode-se notar, todos os valores da função lógica $(A \vee B) \wedge [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ são falsos (F), assim, pode-se concluir que esta função lógica é uma contradição.

3. Contingência

Se tem uma contingencia quando não há nem uma tautologia e nem uma contradição, ou seja, quando a tabela-verdade apresenta, ao mesmo tempo, alguns valores verdadeiros e alguns falsos, a depender do valor das proposições que dão origem à afirmação em análise.

Exemplo: Pode-se verificar que a sentença (A ↔B) é uma contingência, verificando-se sua tabela-verdade.

A	B	A ⟷ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De fato, a tabela-verdade do bicondicional, dada acima, nos retorna valores que são hora verdadeiro e hora falsos, e dessa maneira que não se pode caracterizar esta afirmação como tautologia ou contradição. Assim, função lógica dada pode ser chamada de contingência. A contingência é a situação mais comum de ocorrer. Ela é a regra geral. A tautologia e a contradição são exceções.

Importante

- *Tautologia:* proposição composta cuja tabela verdade **só** apresenta **valor lógico V**.
- *Contradição:* proposição composta cuja tabela verdade **só** apresenta **valor lógico F**.
- *Contingência:* proposição composta que apresenta tabela verdade com **valores** lógicos **V e F**.

4. Equivalência lógica

Dizemos que duas proposições P e **Q** são **equivalentes** se os resultados de suas tabelas-verdade são **idênticos** (ou seja, as colunas com os valores de **P** e Q são iguais). Para dizer que **P** e **Q** são equivalentes, escrevemos **P = Q**. Um exemplo simples está na dupla negação, **(p')'**, equivalente a **P**. Observe a tabela seguinte:

P	Q	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Equivalências lógicas básicas

O início da nossa lista contém equivalências diretas e intuitivas quando associadas a propriedades e equivalências usadas na própria álgebra. As duas primeiras, de certa forma, tratam de "redundâncias" no emprego de construções lógicas:

1) $P \wedge P = P$

Suponha que P seja a proposição "Pedro é ótimo aluno". Assim, a proposição composta "Pedro é ótimo aluno e Pedro é ótimo aluno" pode ser resumida em "**P:** Pedro é ótimo aluno".
É um pouco (muito!) estranho pensar nesse tipo de construção, mas a lógica matemática possui ferramentas para tratá-las.

2) $P \vee P = P$

A ideia é a mesma que fora apresentada acima e agora a redundância está no uso do conectivo "**ou**" para duas proposições equivalentes. Assim, a proposição *"Estudar RLM é desafiador ou Estudar RLM é desafiador"* é equivalente a *"Estudar RLM é desafiador"*
Até o momento, nada de extraordinário. Nas duas equivalências a seguir, destacamos uma propriedade que diz que a ordem dos operandos (proposições) não altera o resultado quando se tratar de "conjunção" ou "disjunção". Essa característica é chamada de comutatividade.

3) $P \wedge Q = Q \wedge P$

Aqui podemos traçar um **paralelo** entre a disjunção e a multiplicação de números reais. Assim como a ordem dos fatores não altera o produto (resultado da multiplicação), a ordem das proposições **P** e **Q** não altera a tabela-verdade da proposição **P** e **Q**.
Veja:

P: 2 divide 30.
Q: 3 divide 30.
$P \wedge Q$: 2 divide 18 **e** 3 divide 18.
$Q \wedge P$: 3 divide 18 **e** 2 divide 18.

A mensagem passada com as frases (P e Q) e (Q e P) é a mesma.

4) $P \vee Q = Q \vee P$

Para a disjunção, o paralelo que costumo traçar está relacionado à adição de números naturais. Da mesma forma que a ordem dos fatores não altera a adição (resultado da soma), a ordem das proposições **P** e **Q** não altera a tabela-verdade da proposição **P** ou **Q**. Veja que, mesmo alterando a ordem das proposições P e Q seguinte, a mensagem não tem significado modificado.

P: 2 é par.
Q: 7 é número primo.
P ∨ Q: 2 é par **ou** 7 é número primo.
Q ∨ P: 7 é número primo **ou** 2 é par.

Equivalências de De Morgan

As importantíssimas relações de De Morgan tratam, em última análise, da negação de proposições lógicas compostas. Mais especificamente, da equivalência para a negação da conjunção e da equivalência para a disjunção de proposições simples:

5) $\sim(P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$
Leia assim: *"A negação da conjunção* **~(P e Q)** *é equivalente à disjunção das negações* **(~P) ou (~Q)***"*. Vejam uma questão que explora essa equivalência lógica:

6) $\sim(P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$
Leia assim: *"A negação da disjunção* **~(P Ú Q)** *é equivalente à disjunção das negações* **(~Q) Ù (~Q)***"*. Bem parecida com a anterior...

Exercícios:

1. Assinale a alternativa que apresenta uma contradição.
   a. Nenhum político é ladrão e algum político é ladrão.
   b. Todo político é ladrão e algum político é ladrão.
   c. Todo ladrão é político e nenhum ladrão é político
   d. Algum político é ladrão e algum político não é ladrão.
   e. Nenhum político é ladrão e algum político não é ladrão.

2. Julgue o item que segue, a respeito de lógica proposicional. Se P e Q forem proposições simples, então a proposição $\neg[P \vee (\neg Q)] \leftrightarrow [(\neg P) \wedge Q]$ é uma tautologia. Justifique sua resposta com a tabela verdade.

3. A negação da proposição se P então Q é equivalente à proposição
   a. (não P) e Q.
   b. (não P) ou Q
   c. Se (não P), então (não Q)
   d. (não Q) e P.
   e. Se (não Q), então (não P)

4. Uma afirmação que corresponda à negação lógica da afirmação "Pedro distribuiu amor e Pedro colheu felicidade" é:
   (A) Pedro não distribuiu amor ou Pedro não colheu felicidade.
   (B) Pedro distribuiu ódio e Pedro colheu infelicidade.
   (C) Pedro não distribuiu amor e Pedro não colheu felicidade.
   (D) Se Pedro colheu felicidade, então Pedro distribuiu amor.
   (E) Pedro não distribuiu ódio e Pedro não colheu infelicidade.