+

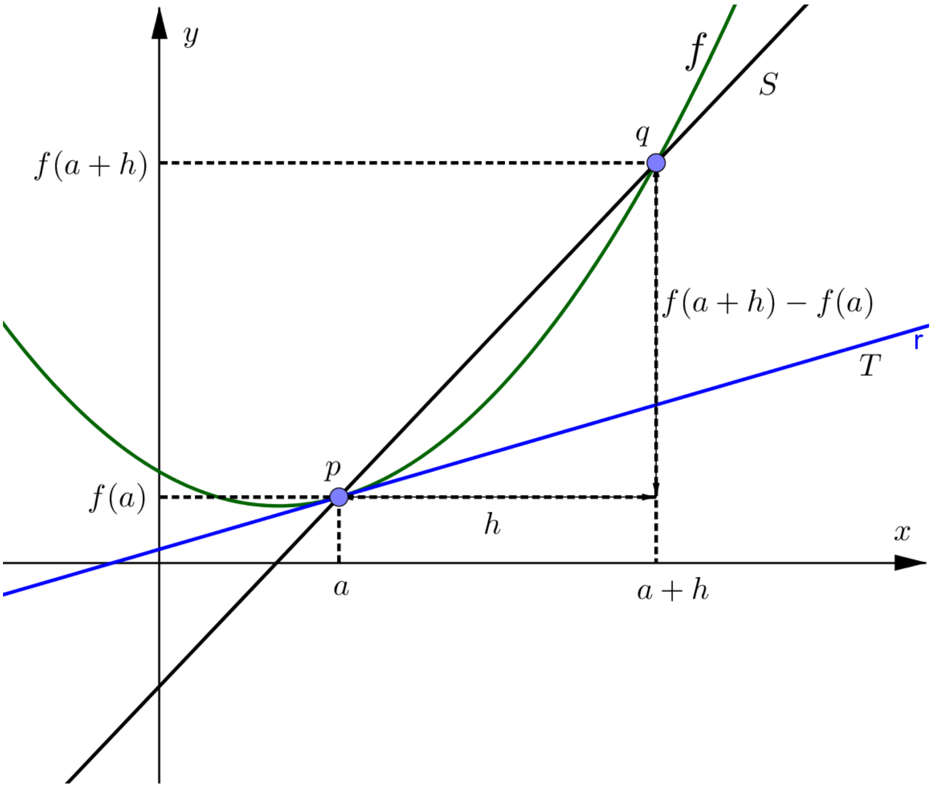
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO MANUEL BELGRANO

NIVEL PREGRADO

Analista Universitario en Sistemas Informáticos

Análisis Matemático y Numérico

Derivada



Unidad: Derivada

Curso: 2° A y B

Docente: Víctor Palazzesi y Andrea Campos

AÑO LECTIVO 2020

Variación de funciones

Se sabe que muchos de los fenómenos que nos rodean están sujetos a un cambio continuo; por ejemplo, una planta crece a medida que el tiempo transcurre, puede detener su crecimiento en algún instante, para luego volver a crecer; o permanecer estacionaria.
También, la población de un país varía con el correr del tiempo, y la variación depende básicamente de la cantidad de nacimientos y de muertes.
Si se observan los ejemplos presentados puede verse que existen "**variaciones**" de las cantidades que se relacionan; al pasar el tiempo, cambia el tamaño de una planta o la cantidad de pobladores de una localidad.
Sin embargo, en ***todos*** los ejemplos presentados se producen cambios en los cuales una variable depende de la otra.
Es importante "medir" estas variaciones y expresarlas en números. Esto permitirá, por ejemplo, saber cuándo una enfermedad se está propagando con mayor rapidez y así reforzar las medidas sanitarias necesarias; o saber durante qué período de tiempo una población crecerá con mayor rapidez, lo que permitirá una planificación adecuada de viviendas, atención sanitaria, etc.

Actividad 1

Observen la siguiente noticia:

por LaAraña en Sucesos, Córdoba.

Ayer Martes a las 11 a.m., se vivió un momento tenso en la Oficina de Tránsito de la Ciudad de Córdoba, cuando un hombre intentó agredir con un matafuegos a empleados de dicha oficina. Aparentemente al sujeto le estaban cobrando una multa por exceso de velocidad en la ruta y él reclamaba que siempre respeta los carteles de velocidad máxima permitida apostados en la calle.

Como no tenía cómo argumentar su defensa, entró en crisis y comenzó la agresión. El hombre inmediatamente fue reducido por la policía y detenido en la comisaría más cercana.

El abogado del Sr. Pérez, protagonista del escándalo de la noticia, se dirigió a la Oficina de Tránsito de la ciudad para solicitar las pruebas por las que se le había puesto la multa por exceso de velocidad.
El Sr. Pérez se dirige todas las mañanas hasta su trabajo tomando un camino recto por una ruta. Según un oficial de tránsito la infracción se cometió en el Km 12 de dicha ruta cuando el Sr. Pérez alcanzó una velocidad de 65 km/h, siendo 60 la máxima permitida.

Además de la hora y el lugar en donde se cometió la infracción, el abogado recolectó por los videos de las cámaras de seguridad, los diferentes lugares por los que pasó el vehículo y la hora exacta en cada momento.

El Sr. Pérez sale a las 8:00 a.m. desde el Km 0 de la ruta y el abogado anotó:

A las 8:02, estaba en el km 4;

A las 8:05, en el km 8;

A las 8:10, en el km 12;

A las 8:15, en el km 18;

A las 8:20, en el km 21;

A las 8:25, en el km 27;

A las 8:31, en el km 30,5

A las 8:36, en el km 34.

A las 8:40 hs llega al trabajo en el kilómetro 38.

a) Representen gráficamente la posición del Sr. Pérez, desde que sale de su casa, en función del tiempo transcurrido. La gráfica que realizaron, ¿es única? Justifiquen su respuesta.

b) Si entre los km 12 y 27 hay carteles indicadores de velocidad máxima permitida de 60 km/h, ¿los ha respetado el Sr. Pérez en ese intervalo?

c) ¿Cuántos km ha recorrido a los 5 minutos desde la salida?

d) ¿Cuánto demoró en llegar al km 21?

Se sabe que en las rutas existen carteles indicadores sobre velocidades máximas permitidas. Suponga que entre el km 12 y el 18 hay un cartel indicador de velocidad máxima de 60 km/h.

e) ¿Ha respetado el Sr. Pérez la velocidad máxima en este trayecto? ¿Se puede responder esta pregunta con certeza?

De la información suministrada se sabe que luego de 15 minutos, el móvil está en el km 18 y luego de 20 minutos en el km 21.

Podemos con estos datos, dar una velocidad media (promedio) del automóvil en el intervalo $[15,20]$

$$\text{Velocidad media} = \frac{(21\text{-}18)\ \text{km}}{(20-15)\ \text{min}} = \frac{3\ \text{km}}{5\ \text{min}} = 36\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Llamando Δy a la variación de la posición del auto en el intervalo de tiempo Δt, podemos decir que la velocidad media del móvil en este intervalo es:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\Delta \text{y}}{\Delta \text{t}}$$

f) Marque en el gráfico que realizó, Δy y Δt para el intervalo de tiempo $[15,20]$.

Ahora, cuando se calculó la velocidad media en [15,20] se determinó un promedio de la velocidad que mantuvo el móvil en ese intervalo de tiempo. Pero no significa que esa haya sido la velocidad en cada uno de los instantes del intervalo [15,20].

g) ¿Cómo debería ser el gráfico de la función para que la velocidad en el [15,20] sea constante?

h) Estime con su gráfico, las velocidades medias en los intervalos de tiempo [10,15], [10,14], [10;12] y [10;10,5]

i) ¿Cómo haría para determinar la velocidad del Sr. Pérez a las 8:10hs, es decir en el km12?

j) ¿Y al final, tenía razón el Sr. Pérez?

Tasa de Variación promedio

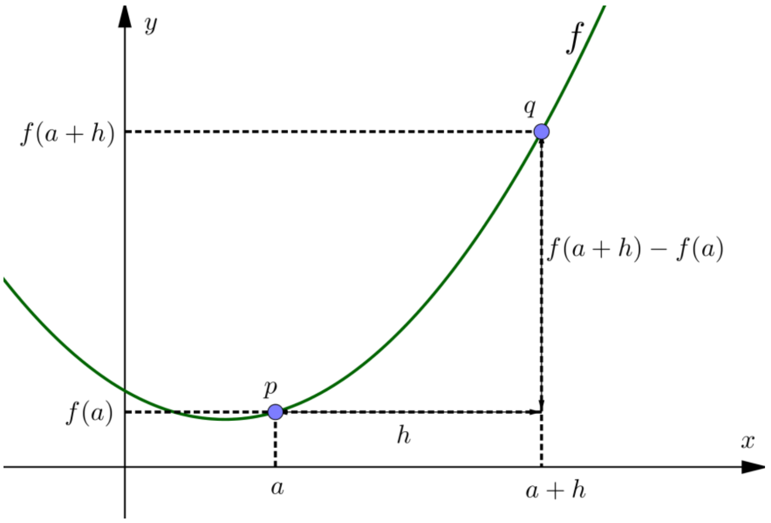
En general, dada una función $f(x)$, se define la **tasa de variación media** o **promedio** de la función, en el intervalo $[a, a+h]$, mediante:

$$\overline{V}_{[a,a+h]} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

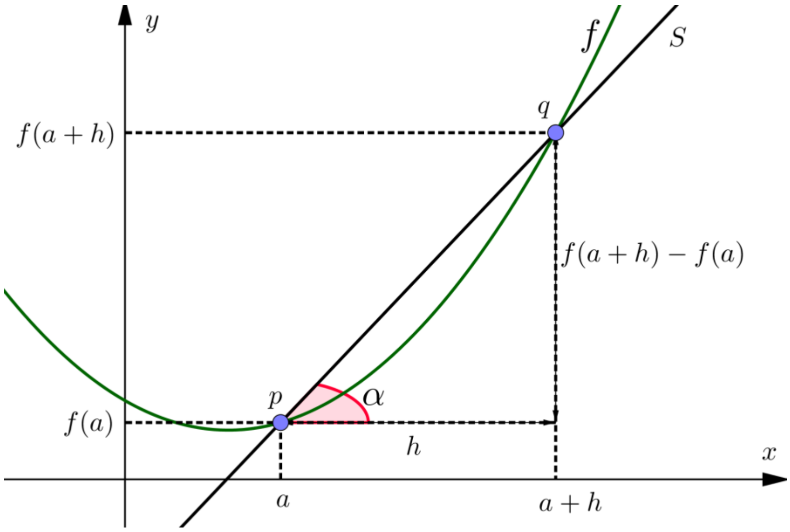
A este cociente se lo conoce también como *cociente incremental*, ya que devuelve la tasa de variación promedio de una función en un intervalo de su dominio cuyo extremo izquierdo es un valor de la variable independiente y el derecho un "incremento" de dicho valor.

Analice a continuación el significado geométrico de este valor. Suponga que se traza la gráfica de una función f cualquiera y se destacan sobre ella los puntos p y q cuyas abscisas son respectivamente a y $a+h$.

Observando la figura, ¿a qué le remite el cociente entre $f(a+h) - f(a)$ y h, es decir el valor de la tasa de variación promedio?



Si se traza la recta que pasa por los puntos p y q, puede verse que la tasa de variación promedio coincide con su pendiente, ya que resulta ser la tangente de su ángulo de inclinación respecto de la horizontal.



De esta manera, la interpretación geométrica de la tasa de variación media de una función en un intervalo de su dominio es la **pendiente de la recta secante a la gráfica de** f, que pasa por los puntos p y q.

Tasa de variación instantánea de una función

En el problema del Sr. Pérez de la actividad 1 se vio que la velocidad media informa sobre un promedio de la velocidad del móvil en un intervalo de tiempo, sin embargo cuando se quiso saber acerca de si el móvil había respetado o no el cartel de velocidad máxima, no se pudo dar respuesta ya que no se conocía la velocidad en cada instante del intervalo.

Actividad 2

Si se deja caer una piedra hacia la tierra desde una altura de 40 metros, los experimentos de la física han llevado a obtener como modelo la fórmula:

$$y(t) = 40 - \frac{1}{2} g t^2$$

Donde $g = 9{,}8 \frac{m}{seg^2}$ es la aceleración de la gravedad, aproximadamente.

Luego: $y(t) = 40 - 4{,}9t^2$

a) Complete:
En $t = 0$, la piedra está a **..................** metros del suelo.
En $t = 1$, la piedra está a **...................** metros del suelo.
En $t = 2$, la piedra está a **..................** metros del suelo.
En $t = 2{,}5$, la piedra está a **.....................** metros del suelo.

b) Calcule la velocidad media de la piedra para los intervalos de tiempo $[0{,}1]$ y $[1{,}2]$.

c) ¿La piedra tiene siempre la misma velocidad al caer? ¿Por qué?

Si se quiere calcular en forma aproximada, la velocidad instantánea de la piedra en $t = 1$, podrían tomarse Δt cada vez más pequeños.

d) Complete:
Para el intervalo [1 ; 2] la velocidad media de la piedra al caer es: ....
Para el intervalo [1 ; 1,5] es: ....
Para el intervalo [1 ; 1,1] es: ....
Para el intervalo [1 ; 1,01] es: ....
Para el intervalo [1 ; 1,001] es: ....

Y de esta manera, tomando Δt cada vez más pequeños, la velocidad media se aproximará cada vez más a la velocidad real en el instante t=1.

e) ¿A qué valor se aproxima la velocidad en el instante t=1?

Para evitar seguir tomando Δt cada vez más pequeños, si tomáramos un Δt variable, para tratar de calcular la velocidad instantánea en $t = 1$, se tendrá entonces:

$$\Delta y = y(1+\Delta t) - y(1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = 40 - 4{,}9(1+\Delta t)^2 - 35{,}1$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = -9{,}8\Delta t - 4{,}9(\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \Delta t.(-9{,}8 - 4{,}9\Delta t)$$

De esta manera, la velocidad media en $[1;1+\Delta t]$ es: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(-9{,}8-4{,}9\Delta t)}{\Delta t}$

Y entonces: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = -9{,}8 - 4{,}9\Delta t$

f) Tome $\Delta t = 0{,}1;\quad \Delta t = 0{,}01;\quad \Delta t = 0{,}001$ y calcule las velocidades medias. ¿A qué valor se aproximan?

Este valor obtenido es la velocidad instantánea en $t = 1$. En símbolos:

$$v(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(-9{,}8 - 4{,}9\Delta t) \quad \Rightarrow \quad v(1) = -9{,}8$$

Si se quisiera ahora calcular la velocidad instantánea en $t = 2$ o en $t = 2{,}5$, ¿se debería realizar todo el mismo proceso para cada tiempo? La respuesta es no. Se puede trabajar con un t genérico y obtener una fórmula para la velocidad instantánea en cualquier t.

$$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = 40 - 4,9(t+\Delta t)^2 - (40 - 4,9t^2)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = 40 - 4,9(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 40 + 4,9t^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \Delta t(-9,8t - 4,9\Delta t)$$

La velocidad media en $[t;t+\Delta t]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-9{,}8t - 4{,}9\Delta t)}{\Delta t}$$

Y la velocidad instantánea en t es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (-9{,}8t - 4{,}9\Delta t)$$
$$\Rightarrow \quad v(t) = -9{,}8t$$

Si se quiere saber la velocidad instantánea en $t = 2$, se tendrá $v(2) = -19{,}6\,\frac{m}{s}$ y en $t = \frac{1}{2}$, $v\left(\frac{1}{2}\right) = -4{,}9\,\frac{m}{s}$.

Se dice que en el movimiento de caída libre, la velocidad instantánea es ***variable***.
Si se observa la fórmula obtenida se puede verificar que el módulo de la ***velocidad aumenta*** a medida que la piedra se acerca al suelo.

Definición:
En general, dada una función $f(x)$, la **tasa de variación instantánea** de la función en $x = a$ se denota mediante $f'(a)$ y se define como:

$$f'(a) = \underset{\Delta x \to 0}{Lím} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Siempre que este límite exista.
La tasa de variación instantánea de una función en un punto, se conoce también como **derivada** de dicha función en ese punto.

También suele denotarse de la siguiente manera:

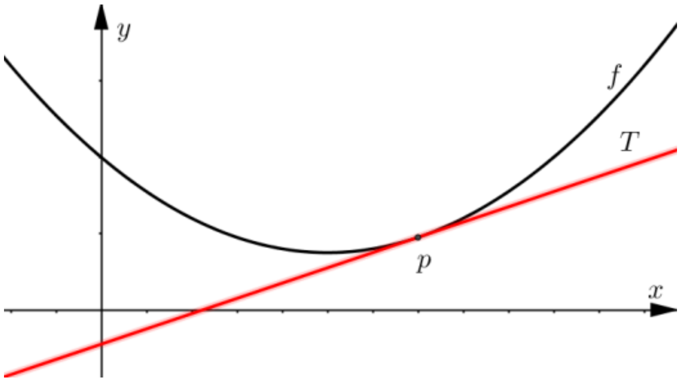
$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

y se lee: "derivada de f con respecto a x en $x = a$"

La Derivada y su interpretación geométrica

Dada la ecuación de una curva $y = f(x)$, se trata de determinar la ecuación de la recta tangente a la misma en el punto a.

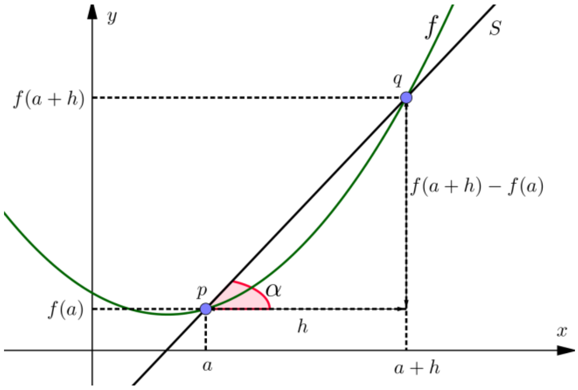
¿Cómo se define la recta tangente a una curva en un punto?



Se considera primeramente la secante S que pasa por los puntos p y q. Puede escribirse su pendiente de la siguiente manera:

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a+h]$)

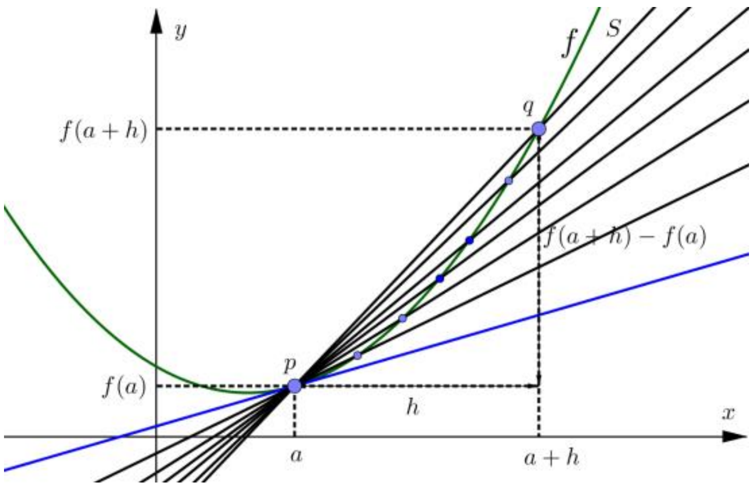


Si se quiere la recta tangente en a, se toman h cada vez más pequeños, de manera que la recta secante S tiende a la tangente de la curva en $x = a$.

A medida que h tiende a cero, el punto q tiende a aproximarse al punto p, mientras que la secante S se aproxima cada vez más a la recta tangente a la curva en el punto $x = a$.

Cuando h tiende a cero las pendientes de las rectas secantes dadas por $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (tasas de variaciones medias de f con h cada vez más pequeños), tienden a $f'(a)$.

De este modo, cuando h tiende a cero, tomando el límite, se tendrá la recta tangente a la curva en el punto $x = a$, con pendiente $f'(a)$.



La derivada de una función f en $x=a$ es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$

Observe que si las **pendientes** de las rectas tangentes a una función f en cada punto de un intervalo (a,b) son **positivas**, entonces la función es **creciente** en dicho intervalo. Si las pendientes de las rectas tangentes a f en todo punto de (a,b) son **negativas**, la función es **decreciente** en dicho intervalo.

¿Qué puede decir de la función en los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es nula?

Actividad 3

- Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3x^2$ en el punto $(-1, f(-1))$
- Determine el o los valores de x donde la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f, es nula. ¿Qué sucede en ese valor de x? Explique.

Complete:

Dada una función definida en **D** y derivable en todos los puntos pertenecientes a **D**:

- Si en $x=a$, $a \in D$, la función pasa de creciente a decreciente, entonces en $x=a$ la función adopta ……………………………………………………………………………………………………
- Si en $x=a$, $a \in D$, la función pasa de decreciente a creciente, entonces en $x=a$ la función adopta…………………………………………………………………………………………………….
- Si en $x=a$, $a \in D$, la función adopta un valor máximo o mínimo, entonces $f'(a)=$…….

Función derivada

A la función que le asigna a cada x_0 el valor de la derivada de f en $x=x_0$, es decir a cada $x=x_0$ le corresponde $y_0=f'(x_0)$, se la conoce como **función derivada** de f y su dominio será el conjunto de valores de x en el que f sea derivable.

Es decir:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Más adelante se obtendrá la función derivada de algunas funciones importantes.

Derivada de $f(x) = x^n$

En muchas aplicaciones se necesita la derivada de funciones más complicadas que las que se han visto, como por ejemplo: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ o $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$.

A continuación se deducirá una fórmula útil que permitirá realizar un cálculo directo de la derivada sin necesidad de efectuar el cálculo de las variaciones medias, el límite, etc.

Abra un archivo nuevo de Geogebra:

- Inserte un deslizador, llámelo *n* y establezca sus límites entre 0 y 10 con un incremento de 1 unidad. Para insertarlo deberá buscarlo en la barra de herramientas y seleccionar la opción "inserta deslizador", luego hacer click en el sector de la vista gráfica en donde quiere que aparezca.
- Represente gráficamente la función $f(x) = x^n$ ingresando su fórmula en el campo de entrada.
- Inserte un deslizador *a*, cuyos límites sean -10 y 10, y su incremento de 0.01.
- Inserte un punto, ingresando las coordenadas (a , f(a)) en el campo de entrada. Aparecerá un punto sobre la gráfica de la función. Llámelo p.
- En el campo de entrada ingresar Tangente[p,f] para trazar la recta tangente a la gráfica en el punto que apareció. Llámela T
- Luego, ingrese en el campo de entrada pendiente[T], y aparecerá la pendiente de la recta tangente trazada. A dicho valor llámelo m.
- Ingrese nuevamente en el campo de entrada el punto de coordenadas (a , m). Aparecerá un nuevo punto en la vista gráfica.
- Finalmente active el rastro de este último punto, seleccionando la opción al hacer click con el botón derecho sobre el punto creado en el ítem anterior, y mueva el deslizador a. Se graficará una curva en el plano. ¿De qué curva se trata? ¿Cuál es su ecuación?.

Utilice este recurso que creó en GeoGebra para calcular la derivada de $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$

- ¿Cuál será la derivada de $f(x) = x^n$? (*Sugerencia:* si no lo ha descubierto pruebe con $f(x) = x^5$ y si no se convence intente con la de $f(x) = x^6$).

Generalizando:

Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) =$ …………….. donde $n \in \mathbb{R} - \{0\}$

- ¿Por qué $n \neq 0$?

La regla de derivación que ha escrito, puede ser demostrada, pero se omitirá, pues para ello se necesita realizar una transformación de tipo exponencial que no ha sido trabajada por el momento.

Actividad 4

Calcule las siguientes derivadas, utilizando la regla que se dedujo anteriormente:

Recuerde que:

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \forall a \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Utilizando GeoGebra puede obtenerse de manera más sencilla la gráfica y la fórmula de la función derivada. En el campo de entrada ingrese la función que desea analizar (el software la llamará f, salvo que se le indique otro nombre). Luego en el campo de entrada ingrese:

Derivada(f)

y aparecerá la gráfica de la derivada de f en la vista gráfica y su fórmula en la vista algebraica. El software la rotulará f´.

Además de esta regla, existen algunas propiedades que también son útiles para el cálculo de las derivadas.

Propiedades de la derivada

Propiedad 1

Sea f una función derivable, c una constante y g la función definida por $g(x) = c \cdot f(x)$. Entonces $g'(x) = c \cdot f'(x)$. Es decir, **la derivada del producto de una constante por una función derivable es igual a la constante por la derivada de la función**.

Demostración:

Sea f una función derivable en un intervalo de su dominio $I \subset D(f)$. Sea $g(x) = c \cdot f(x)$, por definición de derivada se tiene que:

$$\forall x \in I : g'(x) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Por definición de la función g :

$$g'(x) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h}$$

Aplicando propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en $\mathbb{R}$ para poner en evidencia a c como factor común:

$$g'(x) = \underset{h \to 0}{Lím} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

Como el límite de una constante por una función es igual al producto entre la constante y el límite de la función:

$$g'(x) = c \cdot \underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Finalmente, por definición de derivada:

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Luego, $\forall x \in I : g'(x) = c \cdot f'(x)$, que es lo que se quería demostrar.

Actividad 5

Calcule las derivadas de las siguientes funciones, utilizando la propiedad 1.

a) $y = 6x^4$

b) $y = 3x^{-2}$

Propiedad 2

Sean f y g funciones derivables en un intervalo de su dominio, y h la función definida por $h(x) = f(x) \pm g(x)$. Entonces $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$. Es decir, **la derivada de la suma (diferencia) de dos funciones derivables es igual a la suma (diferencia) de las derivadas de dichas funciones**.

<u>Demostración</u>:

Se demuestra para el caso de la suma ya que para la diferencia la demostración es análoga.

Sean f y g funciones derivables en un intervalo de su dominio $I \subset D(f)$ e $I \subset D(g)$. Sea $h(x) = f(x) \pm g(x)$, por definición de derivada se tiene que:

$$\forall x \in I : h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{h(x+k) - h(x)}{k}$$

Por definición de la función h:

$$h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{f(x+k) + g(x+k) - f(x) - g(x)}{k}$$

Aplicando propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = \underset{k\to 0}{Lím}\left[\frac{f(x+k)-f(x)}{k} + \frac{g(x+k)-g(x)}{k}\right]$$

Como el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de dichas funciones:

$$h'(x) = \underset{k\to 0}{Lím}\frac{f(x+k)-f(x)}{k} + \underset{k\to 0}{Lím}\frac{g(x+k)-g(x)}{k}$$

Finalmente, por definición de derivada:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Luego, $\forall x \in I : h'(x) = f'(x) + g'(x)$, que es lo que se quería demostrar.

Actividad 6

Calcule las derivadas de las siguientes funciones, utilizando las propiedades 1 y 2:

a) $y = x^3 + x^4$

b) $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$

c) $y = x^3 - 2x$

Ya se ha visto que la derivada de $y = x^5$ es ....

Ahora, escriba a la función anterior como el producto de dos funciones ....

¿Será la derivada del producto de dos funciones derivables el producto de sus derivadas?..

Propiedad 3

Sean f y g funciones derivables en un intervalo de su dominio, y h la función definida por $h(x) = f(x)\cdot g(x)$. Entonces $h'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$. Es decir, **la derivada del producto de dos funciones derivables es igual a la suma entre el producto de la derivada de la primer función por la segunda sin derivar y el producto de la primera sin derivar por la derivada de la segunda función.**

<u>Demostración</u>:

Sean f y g funciones derivables en un intervalo de su dominio $I \subset D(f)$ e $I \subset D(g)$. Sea $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, por definición de derivada se tiene que:

$$\forall x \in I : h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{h(x+k) - h(x)}{k}$$

Por definición de la función h:

$$h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{f(x+k) \cdot g(x+k) - f(x) \cdot g(x)}{k}$$

Sumando y restando $f(x+k) \cdot g(x)$ en el numerador de la expresión anterior:

$$h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{f(x+k) \cdot g(x+k) - f(x+k) \cdot g(x) + f(x+k) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{k}$$

Aplicando propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en $\mathbb{R}$ para poner evidencia factores comunes:

$$h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{f(x+k) \cdot [g(x+k) - g(x)] + [f(x+k) - f(x)] \cdot g(x)}{k}$$

Como el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de dichas funciones:

$$h'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{f(x+k) \cdot [g(x+k) - g(x)]}{k} + \underset{k \to 0}{Lím} \frac{[f(x+k) - f(x)] \cdot g(x)}{k}$$

Finalmente, por cálculo de límites y definición de derivada:

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) g(x)$$

Aplicando propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Luego, $\forall x \in I : h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, que es lo que se quería demostrar.

Actividad 7

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 \cdot x^2$ (Si se aplica la propiedad 3, ¿coincide con la derivada de $y = x^5$?)
b) $y = x^3.(\sqrt{x} + 2)$

Propiedad 4

Sean f y g funciones derivables en un intervalo de su dominio, $g(x) \neq 0$ en toda x de dicho intervalo y h la función definida por $h(x) = f(x) / g(x)$. Entonces:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Es decir, **la derivada del producto de dos funciones derivables es igual al cociente entre, la diferencia entre el producto de la derivada de la primer función por la**

segunda sin derivar y el producto de la primera sin derivar por la derivada de la segunda función, y el cuadrado de la segunda función sin derivar.

Demostración:

Sean f y g funciones derivables en un intervalo de su dominio $I \subset D(f)$ e $I \subset D(g)$, con $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$.

Primero se determina la derivada de la función $p(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

Por definición de derivada se tiene que:

$$\forall x \in I : p'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{p(x+k) - p(x)}{k}$$

Por definición de la función p se tiene que:

$$p'(x) = \underset{k \to 0}{Lím} \frac{\dfrac{1}{g(x+k)} - \dfrac{1}{g(x)}}{k}$$

Resolviendo la resta planteada en el numerador de la expresión:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \underset{k \to 0}{Lím} \frac{\dfrac{g(x) - g(x+k)}{g(x+k) \cdot g(x)}}{k} \\ &= \underset{k \to 0}{Lím} \left[\frac{g(x) - g(x+k)}{k} \cdot \frac{1}{g(x+k) \cdot g(x)} \right] \end{aligned}$$

Como el límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites de dichas funciones:

$$p'(x) = \left[\underset{k \to 0}{Lím} \frac{g(x) - g(x+k)}{k} \right] \cdot \left[\underset{k \to 0}{Lím} \frac{1}{g(x+k) \cdot g(x)} \right]$$

Finalmente, por cálculo de límites y definición de derivada:

$$p'(x) = -g'(x) \cdot \frac{1}{[g(x)]^2}$$

Es decir:

$$p'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Luego, $\forall x \in I : p'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

Sea $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Si se la reescribe así:

$$h(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

y se aplica la propiedad de la derivada de un producto:

$$\forall x \in I : h'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)} \right) \right]$$

Sustituyendo según lo determinado con anterioridad y resolviendo los cálculos planteados:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

Luego, $\forall x \in I : h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, que es lo que se quería demostrar.

Actividad 8

Calcule la derivada de la función: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Actividad 9

Complete el siguiente cuadro con las propiedades anteriores y ayudándose con Geogebra:
Si f, g y h son derivables:

$f(x) =$	$f'(x) =$
x^n	
$c, \quad c \in \mathbb{R}$	
$g(x) \pm h(x)$	
$g(x) \cdot h(x)$	
$\dfrac{g(x)}{h(x)}, \quad h(x) \neq 0$	
$c \cdot g(x), \quad c \in \mathbb{R}$	
e^x	
$\ln x$	
a^x	
$\log_a x$	

Ejercicios y problemas

1) Determine la tasa de variación media de cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

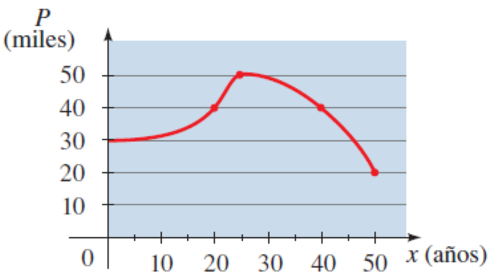
a) $f(x)=3x-2,\quad [2\,,3]$

b) $g(x)=x^2+2x,\quad [-1\,,4]$

c) $h(x)=\dfrac{1}{x},\quad [1\,,a]$

d) $f(t)=\dfrac{2}{t+2},\quad [a\,,a+h]$

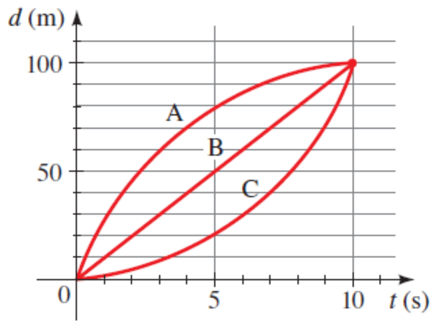
2) La siguiente gráfica muestra la población P en una pequeña ciudad industrial, desde 1950 hasta el 2000. La variable x representa los años transcurridos desde el 1950.



a) ¿Cuál fue la variación media de la población en el intervalo [20,40]?

b) ¿Cuál es el significado del valor encontrado en a)

3) Una carrera de 100 metros termina en un empate triple para el primer lugar. La siguiente gráfica muestra la distancia en función del tiempo para cada uno de los tres ganadores:



a) Encuentre la rapidez media para cada corredor en los primeros diez segundos.

b) ¿Fue igual la velocidad de cada corredor a lo largo de la carrera?

c) Describa la carrera de los tres corredores.

4) Demuestre que la tasa de variación media de una función lineal en cualquier intervalo es igual a su pendiente. ¿Sucede lo mismo en una función cuadrática, exponencial y logarítmica?

5) Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) ¿Cuál será la tasa de variación media entre a y $a+h$?

b) Determine la función derivada de f, para cualquier x de su dominio, utilizando la definición de derivada.

c) Calcule $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\quad f'(2)$, $\quad f'(3)$ y $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$

d) La función f ¿varía más rápido en $x=\dfrac{1}{2}$ o en $x=1$?

6) Suponga que el siguiente gráfico representa la posición de un móvil (que se desplaza en línea recta, en metros) al pasar el tiempo (en segundos):

a) Determine la velocidad media entre

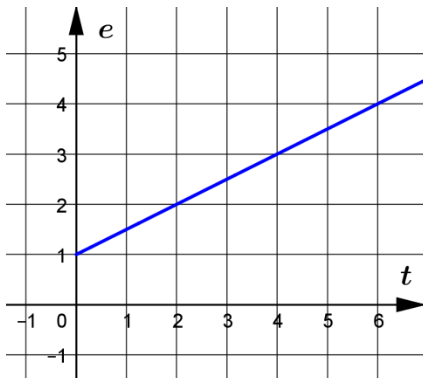
$t=1$ y $t=1{,}5$

$t=2$ y $t=2{,}5$

$t=2$ y $t=2{,}1$

b) Calcule la velocidad instantánea en $t=2$ y en $t=1$

c) ¿Qué conclusiones puede extraer respecto a las velocidades medias e instantáneas en distintos tiempos?



7) Suponga que ahora la posición del móvil (en metros) está dada por $e(t)=t^2+1$. Responda los incisos a), b) y c) del problema anterior.

8) **(Nivel Dios)** Considere una comunidad "cerrada", esto significa sin emigraciones ni inmigraciones. Cuando una enfermedad se expande en este tipo de comunidades a través del contacto entre personas infectadas y sanas, se está en presencia de una **epidemia**.

En este caso, se trabaja con una epidemia en que los individuos y enfermos pueden curarse y tornarse inmunes a la enfermedad o morir.

Sea $S=S(t)$ la cantidad de personas sanas en el instante t, **susceptibles a la epidemia**, que pueden infectarse entrando en contacto con las personas infectadas.

$I=I(t)$ la cantidad de personas infectadas en el instante t que pueden transmitir enfermedad.

$R=R(t)$ la cantidad de personas muertas o curadas (inmunes) en el instante t.

Suponga que en el instante $t=0$ existía una cantidad I_0 de personas infectadas. Esto es, $I(0)=I_0$.

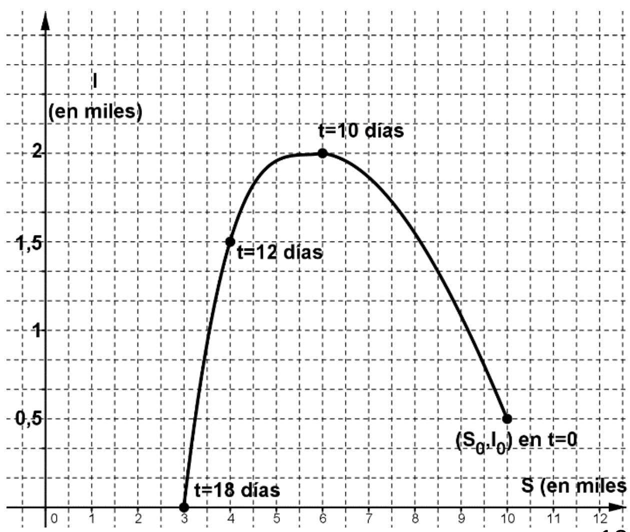
a) ¿Qué significado tiene en el problema $S'(t)$?

b) Si se supone que en todo instante en que se encuentran personas sanas e infectadas, una proporción de las primeras adquieren la enfermedad, ¿cuál será el signo de $S'(t)$ para cualquier $t>0$? ¿Qué información sobre $S(t)$ brinda el signo de su derivada?

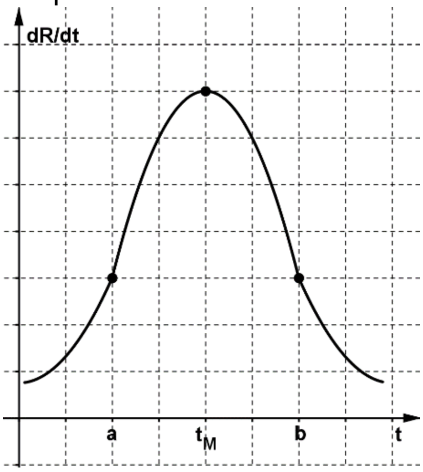
El gráfico que se presenta brinda un ejemplo de la relación existente entre la cantidad de personas sanas y la cantidad de infectadas en cada instante.

S_0 es la cantidad de personas en $t=0$. I_0 es la cantidad de infectados en $t=0$.

Observe que en este gráfico el tiempo no figura en los ejes y está indicado sobre la curva.



c) ¿Qué sucedió luego de 10 días de iniciada la epidemia?
d) ¿Luego de cuántos días finalizó la epidemia? ¿Cuántas personas sanas quedaron?
e) Dar un gráfico aproximado de la cantidad de infectados en función del tiempo para $0 \leq t \leq 18$.
f) En el gráfico se observa que después del día 10, la cantidad de personas sanas disminuye pero **no** aumentan los infectados. ¿Es lógico que esto suceda?



Al comienzo del problema se ha dicho que $R(t)$ representa, en cada instante, la cantidad de personas muertas o curadas (inmunes). La siguiente curva, llamada curva epidémica, representa la tasa de variación instantánea de $R(t)$ en función del tiempo.

t_M es el tiempo en que $R'(t)$ es máxima

g) ¿Es $R(t)$ una curva creciente o decreciente? ¿Por qué?
h) El hecho de ser $R'(a) = R'(b)$. ¿Implica $R(a) = R(b)$? Justifique.
i) ¿Puede haber dos instantes t_1 y t_2 en que $R(t_1) = R(t_2)$?

9) Verifique si los siguientes resultados son correctos para la curva $f(x) = 3x^2$

a) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 1$ es $y = 6x - 3$
b) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = -2$ es $y = -12x - 12$
c) La recta tangente a la gráfica de f para $x = 0$ es el eje de las abscisas.

10) Halle la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^2 + 2x$ en $x = -1$.

11) Halle la ecuación de la recta tangente a $y = -7x + 6$ en $x = 1$.

12) Demuestre que la recta tangente a una función lineal en cualquier punto es ella misma.

13) Una partícula se mueve de manera tal que su velocidad (en metros por segundo) está dada por la fórmula $y = t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la aceleración de la partícula en $t = 1$.

Observación: la tasa de variación instantánea de la velocidad en un instante determinado se conoce como *aceleración*. Como la velocidad es la derivada de la función de posición y la aceleración la derivada de la función velocidad, se dice que la aceleración es la *derivada segunda* de la función de posición. En símbolos:

$$a(t) = x''(t)$$
$$= \frac{dx^2}{dt^2}(t)$$

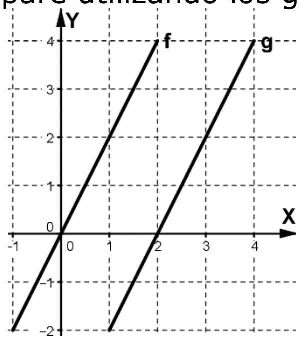
El último miembro se lee: "derivada segunda de la función $x(t)$ con respecto a t dos veces.

14) En el gráfico de la derecha se representa la velocidad de propagación de una enfermedad en función del tiempo.

a) Determine el intervalo de tiempo en que la cantidad de enfermos aumentó.
b) ¿En qué instante se detuvo la enfermedad?
c) ¿Qué significa $v(3) < 0$?
d) Suponiendo que en $t = 0$ no había personas enfermas, construya un gráfico aproximado de la cantidad de enfermos en función del tiempo.

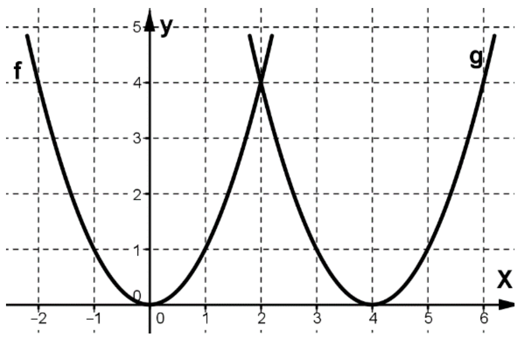
15) Compare utilizando los gráficos, y responda con >, < o =:

a)



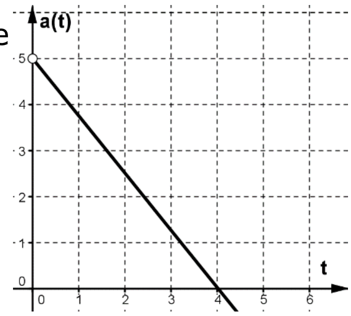
$f'(1)$.........$g'(3)$

b)



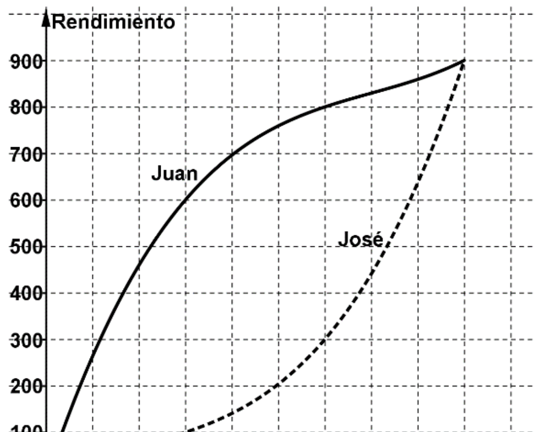
$f'(1)$.........$g'(1)$

c) La velocidad de un proyectil, cuya aceleración se representa en el gráfico, es en $t = 2$ .... que en $t = 5$



16) El siguiente gráfico describe la relación entre el nivel de ingreso de la persona y el rendimiento que la persona obtiene de él.

a) ¿Qué será correcto decir respecto a Juan?
i) El **incremento** de su rendimiento por cada unidad de ingreso crece a medida que su ingreso va creciendo.
ii) El **nivel** de su rendimiento disminuye a medida que aumenta su ingreso.



iii) El **incremento** de su rendimiento por cada unidad de ingreso se mantiene constante, por cada nivel de ingreso.
iv) El **incremento** de su rendimiento por cada unidad de ingreso disminuye, a medida que su ingreso aumenta.

b) ¿Cuál afirmación se deduce del gráfico?
i) La diferencia entre los **niveles** de rendimiento de ambos aumenta en la medida en que su nivel de ingreso aumenta.
ii) La diferencia entre los **niveles** de rendimiento de ambos disminuye en la medida en que su nivel de ingreso aumenta.
iii) Cuando el **nivel** de ingreso de ambos es idéntico, su nivel de rendimiento es idéntico.
iv) En todo ingreso positivo menor de $900, los niveles de rendimiento de ambos son distintos.

c) Los sueldos de José y Juan aumentaron de $300 a $600. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
i) El incremento en unidades de rendimiento que obtuvieron ambos a raíz del alza del sueldo fue idéntico.
ii) El incremento en unidades de rendimiento que obtuvo Juan a raíz del alza de sueldo fue mayor que el rendimiento en unidades de rendimiento que obtuvo José.
iii) El incremento en unidades de rendimiento que obtuvo José a raíz del alza del sueldo fue mayor que el aumento en unidades de rendimiento que obtuvo José.
iv) No se puede saber cuál de los dos obtuvo un incremento mayor de unidades de rendimiento, como resultado del alza del sueldo.

d) Si se unen los puntos de intersección de ambas gráficas obtendremos una línea recta. La misma es la curva de rendimiento de Pedro. ¿Qué se puede decir respecto a Pedro?
i) Él obtiene un **nivel** de rendimiento fijo para cada nivel de ingreso.
ii) El **incremento** del rendimiento que él obtiene de cada unidad de ingreso adicional, disminuye a medida que su ingreso aumenta.
iii) El **incremento** del rendimiento que él obtiene de cada unidad de ingreso adicional, permanece fijo en cada nivel de ingreso.
iv) El **incremento** del rendimiento que él obtiene de cada unidad de ingreso adicional aumenta a medida que su ingreso aumenta.

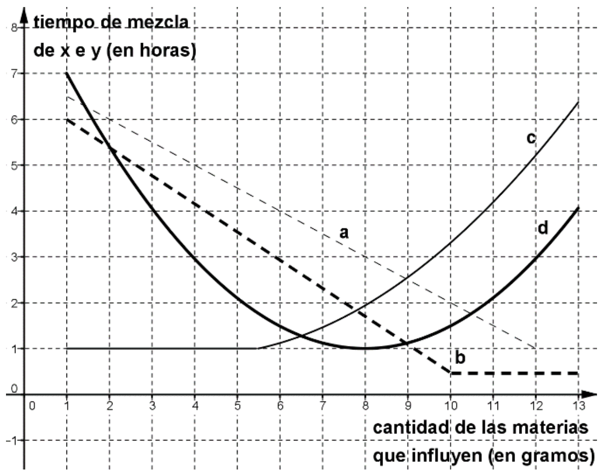
17) Halle las coordenadas de los puntos $p=(x_0,y_0)$ de la curva $y=x^3-3x$ cuya recta tangente en este punto tenga pendiente igual a 9.

18) Determine dos funciones f y g que tengan, en $x=-2$, como recta tangente a $y=-4x+1$.

19) **(Nivel SSJB)** En el siguiente gráfico **x** e **y** son dos materias químicas que se entremezclan en forma lenta. **a**, **b**, **c** y **d** son otras cuatro materias, que influyen en la rapidez con la cual se mezclan **x** e **y**. el siguiente gráfico describe la influencia de **a**, **b**, **c** y **d** en el tiempo que necesitan **x** e **y** para mezclarse (si se parte de la base de que las cantidades de **x** e **y** son constantes.

a) Cierto laboratorio anunció: mientras más materia se agrega, más rápido se efectúa la mezcla. ¿Cuál de las siguientes materias utiliza el laboratorio para acelerar el proceso de mezcla?

- **i)** **c** en una cantidad de 1-5 gramos
- **ii)** **d** en una cantidad de 1-12 gramos
- **iii)** **a** en una cantidad de 1-12 gramos
- **iv)** **b** en una cantidad de 8-13 gramos.



b) Suponga que se agrega, en forma paulatina, de 1 a 5 gramos de las materias que influyen, en una dosis de un gramo cada vez. Esto causará que en cada etapa la reducción del tiempo necesario para la mezcla sea:

- **i)** Idéntica, al utilizar **a** o **b**.
- **ii)** Máxima, si utilizamos **d**.
- **iii)** Equivalente a 0, si utilizamos **c**.
- **iv)** Todas las respuestas anteriores son correctas.

c) Si se supone que la tendencia de la influencia de las distintas materias no cambiará sorpresivamente, se puede suponer que a la cantidad de 15 gramos:

- **i)** **a** y **b** disminuirán el tiempo de mezcla a 0.
- **ii)** **d** será la menos efectiva de todas.
- **iii)** **c** será la menos efectiva de todas.
- **iv)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Nota: ser "más efectivo" se refiere a una acción que conducirá a que el tiempo de mezcla sea menor.

20) Demuestre que si f es una función derivable en todo su dominio, entonces la derivada de $f^2(x)$ es $2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$

21) Dada la función $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 36x + 12$

a) Indique el intervalo del dominio donde la función es creciente.
b) Indique el intervalo del dominio donde la función es decreciente.
c) Analice la existencia de valores mínimos y máximos de la función.

22) Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ y $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, determine analíticamente si tienen máximos y/o mínimos y en caso afirmativo indique sus coordenadas.

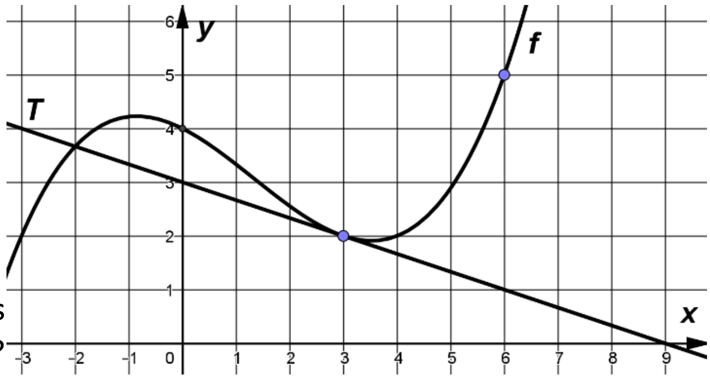
23) Si se quiere construir una caja de base rectangular y sin tapa, cortando cuadrados congruentes en cada una de las esquinas de una hoja rectangular de hojalata de

24cm por 32cm, doblando luego en ángulo recto las pestañas resultantes. ¿De qué dimensiones deben ser los cortes si se quiere que el volumen encerrado por la caja sea el máximo posible?

24) Los márgenes superiores e inferiores de un cartel tienen 6 cm de ancho y los laterales 4 cm. Si la superficie del material impreso del cartel se fija en 384 cm^2, calcula la superficie mínima total del cartel.

25) Un fabricante de comprimidos efervescentes necesita que éstos se disuelvan en el menor tiempo posible. Los comprimidos tienen forma cilíndrica, su disolución se realiza desde la superficie hacia adentro, por lo que la rapidez con que se disuelven es proporcional a la superficie del cilindro. Determina las dimensiones del cilindro de modo que su superficie total sea máxima, sabiendo que el volumen debe ser de 1 cm^3 y que el radio debe ser mayor o igual que 0,5 cm y menor o igual que 1 cm.

26) La siguiente es la gráfica de la función f en la que se trazó la recta tangente a la misma en el punto $(3,2)$.



a) Determine la tasa de variación media de f en el intervalo $[0,6]$

b) ¿Cuál es el significado geométrico del valor encontrado en a)?

c) La derivada de la función es positiva o negativa en $x=2$? Justifique.

d) Determine $f'(3)$ justificando su respuesta.

e) Marque en el gráfico, los valores de x para los cuales $f'(x)=0$

Respuestas a los ejercicios y problemas

1) a) 3 **b)** 5 **c)** $-\frac{1}{a}$ **d)** $-\frac{2}{a^2+4a+ha+2h+4}$

2) aprox. 0,25 e indica que en promedio la población creció en 20 años 250 personas.

3)

a) Es la misma para los tres 10 m/s

b) No, sólo la del segundo corredor

c) El corredor A comenzó corriendo más rápido que los otros hasta ir cada vez más despacio; el corredor B mantuvo se velocidad a lo largo de la carrera y el corredor C comenzó corriendo lentamente y hacia el final aumentó su rapidez.

4) demostración.

5)

a) $\overline{f} = -\dfrac{1}{x.(x+\Delta x)}$

b) $f´(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

c) $-4, \quad -\dfrac{1}{4}, \quad -\dfrac{1}{9}, \quad -16$

d) En $x = \dfrac{1}{2}$

6)

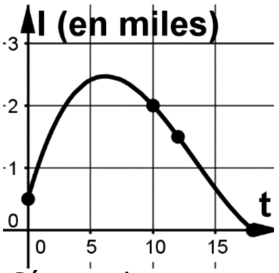
a) 0,5; 0,5; 0,5
b) 0,5; 0,5
c) Es la misma

7)

a) 2,5; 4,5; 4,1
b) 4; 2
c) A medida que t>0 aumenta, también lo hace su variación instantánea. Se aproxima a 0 cuando t tiende a 0.

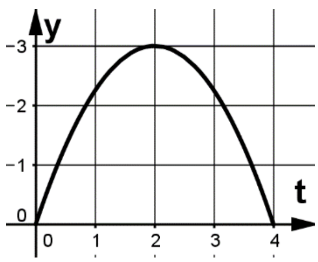
8)

a) La velocidad con que las personas sanas, susceptibles a la enfermedad, pueden infectarse entrando en contacto con las personas infectadas.
b) Negativo. Informa que si la cantidad de personas crece, la derivada será positiva mientras que si la cantidad decrece su derivada será negativa.
c) 6000 personas sanas y 2000 infectadas
d) 18 días. 3000

e) 

f) Sí, puede ser que infectados se curen más rápido que los que se están enfermando.
g) Creciente, pues su derivada es positiva en todo instante que se muestra en el gráfico.
h) No, pues se dijo que la cantidad de muertos o curados es creciente.
i) No, pues R es creciente.

9) **a)** Verdadero **b)** Verdadero **c)** Verdadero
10) $y = -1$
11) $y = -7$
12) Demostración
13) $2m/s^2$
14) **a)** (0 , 2) **b)** 2 **c)** La cantidad de enfermos disminuye **d)**



15) **a)** = **b)** > **c)** <
16) **a)** IV **b)** IV **c)** I **d)** III
17) En (2 ; 2) y en (-2 ; -2)

18) Hay muchas. La más trivial es $f(x) = -4x + 1$, otra podría ser $g(x) = x^2 + 3$

19) **a)** III **b)** II y III **c)** III

20) Demostración

21) f es creciente en $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-\frac{3}{2}, 2)$. En $x = -\frac{3}{2}$ la función adopta el valor máximo $y = 45{,}75$ y en $x = 2$ el valor mínimo $y = -40$.

22) f adopta un máximo en $x = 0$, $(0,0)$ y un mínimo en $x = 2$, $(2,4)$. g adopta un máximo en $x = 0$, $(0,1)$ y un mínimo en $x = 2$, $(2,-3)$.

23) 4,53cm

24) 864 cm^2

25) Radio = 1 cm ; altura = $\frac{1}{\pi}$ cm ≅ 0,32 cm

26) **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** Es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f y que pasa por los puntos: (0,4) y (6,5). **c)** Negativa, **d)** $-\frac{1}{3}$