Analista Universitario en Sistemas Informáticos
Análisis Matemático y Numérico
Problemas Extra

1) En un escenario del juego *Fortnite*, una bala perdida produce un orificio en la base de un tanque de agua con 500 litros de capacidad. El agua se drena por el orificio a razón de 20 litros minutos. Suponiendo que en el momento del disparo el tanque tenía 400 litros y que aún vive para contarlo:

a) Escriba la fórmula que modela la cantidad de agua que queda en el tanque en función de los minutos transcurridos desde que se produce el orificio.

b) ¿Cuál es el significado en el contexto de los parámetros de esta función?

c) Determine la intersección de la gráfica de la función con los ejes coordenados e indique qué significan esos valores en este contexto.

d) Indique el Dominio y la Imagen de f teniendo en cuenta el contexto.

e) Un jugador cobarde utiliza la estrategia de ocultarse para sobrevivir y espera hasta que la *"tormenta"* se cierre (momento en que finaliza la partida). Si a lo sumo, la partida finaliza a los 26 minutos, ¿se podrá ver el momento en que ya no se fuga el agua en el tanque?

f) Calcule la función derivada de la que propuso en a) e indique qué está representando con ella.

2) Un andinista asciende un tramo de una montaña con una rapidez de 37 metros por hora. Después de 4 horas ha llegado a una altura de 1122 metros.

a) Escriba la fórmula que modela la altura del andinista en función del tiempo transcurrido.

b) ¿Cuál es el significado de la pendiente y de la ordenada al origen en esta situación?.

c) Calcule el tiempo necesario para que alcance una altura de 1200m.

3) ¿Para qué valores de b la función $f(x) = x^2 - 2bx + 7$ toma el valor mínimo 6? (Piénselo con sus conocimientos de función cuadrática y luego realícelo con sus conocimientos de Derivada)

4) El rendimiento de nafta R (en km por litro) de un auto, está relacionado con la velocidad (en kilómetros por hora) por la función $R(v) = -\frac{1}{3}v^2 + 60v$, donde $0 < v < 180$

a) Halle la velocidad para el cual el rendimiento es máximo y dicho rendimiento máximo.

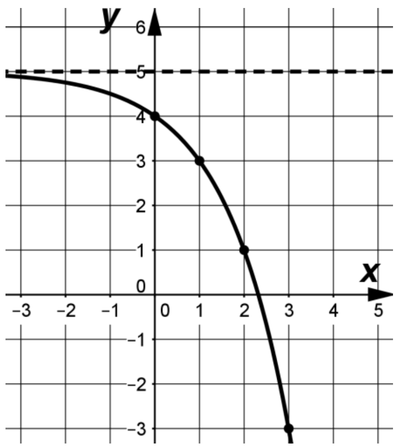
b) Determine el dominio y la imagen de la función teniendo en cuenta el contexto de la situación.

c) A partir de qué velocidades el rendimiento es nulo?

d) ¿En qué intervalo del dominio la derivada de la función rendimiento es positiva? ¿Y negativa? Justifique.

e) El rendimiento varía más rápido para una velocidad de 60 km/h o de 120 km/h. Justifique

5) La fórmula de la función representada gráficamente es $f(x) = c - a^{2x+b}$. Sabiendo que pasa por los puntos señalados:



a) Determine los valores de a, b y c, justificando.

b) Transforme la función a una de la forma $y = m + p \cdot q^x$ y encuentre su función derivada.

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$

6) Suponga ahora que la gráfica de la función del ejercicio 5) corresponde a la función derivada de una función g. Determine, justificando:

a) La tasa de variación instantánea de f y g en $x = 0$.

b) $g'(1) =$

c) El intervalo del dominio donde g es decreciente.

d) El o los valores del dominio de g, donde esta función se maximiza o minimiza (aclarando si en esos valores g toma un valor máximo o mínimo).

e) $\underset{h \to 0}{Lím} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

7) La cantidad de masa (en gramos) de una sustancia radioactiva que queda después de t años puede modelarse por la función $C(t) = C_0 e^{-kt}$. Sabiendo que el Radio-226 tiene una vida media de 1620 años (tiempo que tarda en reducirse la masa inicial a la mitad):

a) Escriba la fórmula que modela la cantidad de masa de Radio-226 que queda en función de los años transcurridos sabiendo que se tiene una cantidad inicial de 1600 gramos.

b) ¿Cuántos años deberán transcurrir para que la masa inicial se reduzca a la cuarta parte?

c) Vuelva a transformar la función a una de la forma $y = b \cdot a^x$ para responder: ¿a qué tasa se está desintegrando esta sustancia transcurridos 10 años?

8) Dadas la función: $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 4x + 1}$, determine:

a) Las intersecciones de su gráfica con los ejes coordenados.
b) Dominio
c) Calcule los límites adecuados para justificar la existencia de asíntotas horizontales y/o verticales.
d) Si es posible que su función derivada se anule.
e) Represéntela gráficamente.

Respuestas

1) a) $f(x) = 400 - 20x$
b) Ordenada al origen: 400; significa que al momento en que se produce el orificio el tanque tenía 400 litros de agua. Pendiente: -20; significa que el tanque se está vaciando a razón de 20 litros por minuto.
c) $f \cap xx' = \{(20, 0)\}$, significa que transcurridos 20 minutos, el tanque se vacía y $f \cap yy' = \{(0, 400)\}$ cuyo significado ya se analizó en a)
d) $\mathscr{D}_f = [0, 20]$, $\mathscr{I}_f = [0, 400]$
e) Si no lo matan antes, si. Ya que el tanque se vacía a los 20 minutos.
f) $f'(x) = -20$, la tasa de fuga de agua es constante y es de 20 litros por minuto como se mencionó en a).

2) a) $y = 37x + 986$
b) Pendiente: 37, cantidad de metros por hora que sube el alpinista. Ordenada al origen: 986, altura a la que se encuentra el alpinista al empezar a contar el tiempo.
c) 5,78 horas aproximadamente.

3) $b = -1$ o $b = 1$

4) a) El rendimiento se maximiza con una velocidad de 90km/h y ese rendimiento máximo es de 2700km/litro.
b) $\mathscr{D}_f = [0, 180]$, $\mathscr{I}_f = [0, 2700]$
c) A partir de los 180km/h (no lo hagan en sus casas) y cuando el coche está detenido, es decir una velocidad de 0km/h.
d) La derivada será positiva en [0,90] ya que el rendimiento es creciente en ese intervalo y será negativa en [90,180] ya que el rendimiento decrece.
e) El rendimiento a esas velocidades, varía con la misma rapidez, solo que en $v = 60$ está aumentando y en $v = 120$ está disminuyendo.

5) a) $a = \sqrt{2} \approx 1,41$, $b = 0$ y $c = 5$
b) $f(x) = 5 - 2^x$ y $f'(x) = -2^x \cdot ln(2)$
c) $T: \quad y = -2ln(2)x + 3 + 2ln(2)$ o aproximadamente $y = -1,39x + 4,39$

6) a) $f'(0) = ln(2)$ y $g'(0) = 4$

b) $g'(1) = 3$

c) $(2,32; +\infty)$

d) En $x = 2{,}32$ g toma un valor máximo.

e) $f'(2) = -4ln(2)$

7) a) $C(t) = 1600e^{-0{,}00043t}$

b) 400 años

c) -0,69 gramos por año

8) a) $f \cap xx' = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$ y $f \cap yy' = \{(0, -1)\}$

b) $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}, -1\right\}$

c) A.H: $y = \dfrac{2}{3}$ y A.V: $x = -\dfrac{1}{3}$

d) No es posible, porque $f'(x) = 0$ no tiene solución.

e) Gráfica