UNC Universidad Nacional de Córdoba

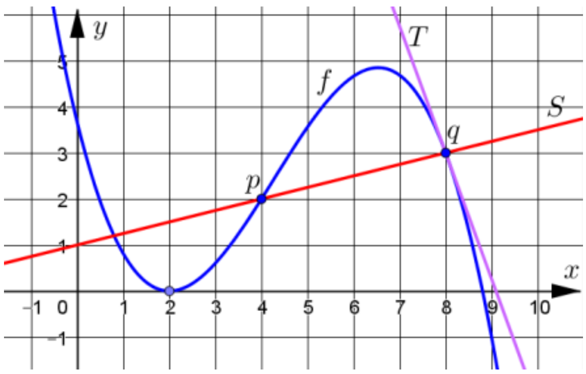
ESCMB Escuela Superior de Comercio Manuel Belgrano

Pensando escuela. Construimos experiencia

Analista Universitario en Sistemas Informáticos
Análisis Matemático y Numérico - Segundo Parcial - 2° año

En todos los ejercicios, deje asentados los cálculos que permiten dar respuesta a las consignas. Cuando se solicite, justifique claramente su respuesta.

1) La siguiente gráfica corresponde a la de la función f. En ella se destacaron los puntos p y q, la recta S que pasa por ellos y la recta $T:\ y = -2,75x + 25$ que es tangente a la gráfica de f en el punto q. Determine (justificando):



a) La tasa de variación media de f en $[4, 8]$

Geométricamente, la Tasa de Variación Media de f es $[4, 8]$ es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 4$ y $x = 8$ (p y q), es decir:

$$\overline{V}_{[4,8]} = \frac{1}{4}$$

Analíticamente:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{[4,8]} &= \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} \\ &= \frac{3 - 2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

b) La tasa de variación instantánea de f en $x = 8$

La tasa de variación instantánea de f en $x = 8$, es $f'(8)$
Analíticamente no puede obtenerse, puesto que no se conoce la fórmula de f

Geométricamente, $f'(8)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 8$. Ese dato se conoce, ya que dicha tangente es la recta T de la que se conoce la ecuación. Luego:

$$f'(8) = -2,75$$

c) $\underset{h\to 0}{Lím}\, \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} =$

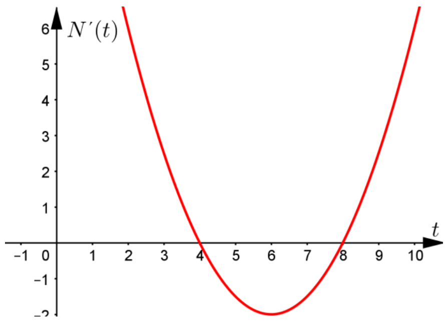
Este límite es igual a $f'(2)$. Si se traza una recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$, se observa que es una recta horizontal, por lo tanto su pendiente es 0. Luego,

$$f(2) = 0$$

d) La derivada de f en $x = 5$, ¿es positiva o negativa?
Si ahora se traza una recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 5$, se observa que su pendiente es positiva:

$$f'(5) > 0$$

2) Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios, entonces al cabo de t años, N miles de personas adultas recibirían beneficios directos. Responda las siguientes preguntas, justificando su respuesta, en base a la gráfica de $N'(t)$ que se presenta:



a) ¿Durante qué años el número de beneficiarios está decreciendo?

$N(t)$ es la función que modela el número de beneficiarios en el tiempo y la gráfica es la de su derivada $N'(t)$.
Sabiendo que si una función es decreciente en un intervalo de su dominio, su derivada es negativa es dicho intervalo: en el gráfico de N' se observa que es negativa en $[4, 8]$, luego el número de beneficiarios N está disminuyendo (decreciendo) entre los 4 y los 8 años.

b) ¿En qué año el número de beneficiarios sería mínimo?

En los valores del dominio de la función en donde esta toma un valor máximo o mínimo, la derivada de la función se anula. Por esto, en los posibles instantes en donde puede haber una cantidad **mínima** de beneficiarios, es en $t = 4$ o $t = 8$.
Por otra parte vimos que la función toma un valor mínimo cuando pasa de ser decreciente a creciente, o equivalentemente cuando su derivada pasa de negativa a positiva. Esto se produce en $t = 8$, que es el año en que el número de beneficiarios es mínimo.

c) El número de beneficiarios, ¿varía más rápido a los 2 o a los 5 años?

Mirando el gráfico de la derivada de N, puede verse que N' toma un valor mayor (en valor absoluto) en $t = 2$ que en $t = 5$, por lo tanto N varía más rápido en $t = 2$.

d) A los 5 años, ¿había el mismo número de beneficiarios que a los 7 años?

En esos años, el número de beneficiarios varía de la misma forma pero esto no implica necesariamente que el número de beneficiarios haya sido el mismo. De hecho en a) se dijo que entre los 4 y los 8 años, el número de beneficiarios estaba decreciendo, por lo que en $t = 7$ hay menos beneficiarios que en $t = 5$.

3) El movimiento de una partícula se define por la relación $x(t) = 8t^2 - 2t^3$ donde x se expresa en metros y t en segundos.

a) Determine la fórmula de la función de velocidad de ésta partícula.

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) \\ &= 8 \cdot 2 \cdot t^{2-1} - 2 \cdot 3 \cdot t^{3-1} \\ &= 16t - 6t^2 \end{aligned} \tag{2}$$

b) Calcule el o los instantes en los que la velocidad es nula e indique en qué posición se encuentra en ese instante.

$$\begin{aligned} v(t) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 16t - 6t^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

- $x(0) = 8 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$
- $x\left(\frac{8}{3}\right) = 8 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 \approx 19$

Es decir, la velocidad se anula en los 0 metros y aprox. 19 metros.

c) ¿Cuál es el valor de la aceleración de la partícula en $t = 2$? (Recuerde que la aceleración instantánea de una partícula es la tasa de variación instantánea de la velocidad)

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= 16 - 12t \end{aligned} \tag{4}$$

Entonces $a(2) = -8m/s^2$

También:

$$a(2) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{v(2+h) - v(2)}{h}$$

Pero es el camino más largo...

4) Calcule la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{e^x}{2x}$ *b)* $g(x) = 1 - 4\sqrt[3]{x} \cdot ln(x)$

a) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{e^2 \cdot 2x - 2e^x}{(2x)^2}$

b) $g(x) = 1 - 4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot ln(x)$

Entonces: $g'(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} ln(x) + x^{\frac{1}{3}} \cdot \dfrac{1}{x} \right)$