ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO MANUEL BELGRANO

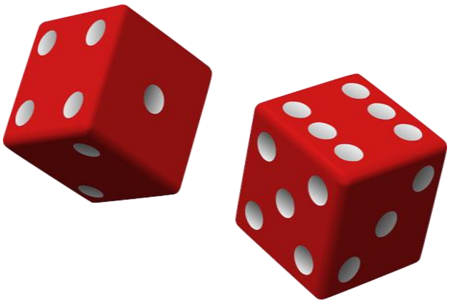
NIVEL PREGRADO

ANALISTA UNIVERSITARIO

DE SISTEMAS INFORMÁTICOS

APLICACIONES CUÁNTICAS PARA LA GESTIÓN DE LAS ORGANIZACIONES II

UNIDAD I: CONCEPTOS BÁSICOS de MATEMÁTICA, PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA



2020 - Cra. Carola Garbino

Índice

1. Conocimientos básicos de matemática

1.1. Vectores

1.1.1. Definición

Sean $p_1, p_2, \ldots p_n$, *n* números reales, un vector fila o renglón se define como un conjunto ordenado de dichos números escritos de la siguiente manera:

$$P = [p_1 \;\; p_2 \;\ldots\ldots\; p_n]$$

Entonces P se llama vector fila y la componente i-ésima es p_i

Análogamente, un vector columna se define como un conjunto de *n* números reales escritos de la siguiente manera:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{pmatrix}$$

1.1.2. Dimensión de un vector

Es el número de componentes que tiene el vector

1.1.3. Vector unidad

Es un vector cuya i-ésima componente es igual a la unidad y todos los demás elementos son nulos. Ejemplo:

$$[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$$

1.1.4. Vector nulo

Es aquel vector cuyas componentes son todas iguales a cero. Ejemplo:

$$\emptyset = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$

1.1.5. Igualdad de vectores

Dos vectores V y P son iguales, y se escribe V=P, si todas sus componentes correspondientes son iguales.

$$V = P \quad \Rightarrow \quad v_i = p_i \quad \forall i$$

Dos vectores no pueden ser iguales a menos que tengan el mismo número de componentes.
Notar que si V = P $\Rightarrow$ P = V

1.1.6. Producto interno de vectores

El producto interno de vectores X e Y, se define como la suma de los productos de los elementos del primer vector por los elementos correspondientes del segundo vector.

$$X\ Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = escalar$$

Ejemplo:

$X = [1\ \ -2\ \ 0\ \ 2]$ $\qquad Y = [-1\ \ 3\ \ 2\ \ 6]$

$X.Y = 1(-1)+(-2)3+0(2)+ 2(6) = 5$

Notar que el resultado es un número real.

1.1.7. Propiedades del producto interno de vectores

1. Conmutativa X Y = Y X
2. Asociativa (αX) Y = α (X Y)
3. Distributiva (X + Y) Z = X Z + Y Z
4. El producto escalar de un vector no nulo siempre es positivo X X ≥ 0
   X X = 0 ⇔ X = ∅

1.1.8. Suma o adición de vectores

Sean $P = [p_1\ \ p_2\ ..\ ..\ \ p_n]$ y $Q = [q_1\ \ q_2\ ..\ ..\ \ q_n]$ dos vectores en el espacio n-dimensional. La suma de P y Q, que escribimos P + Q se describe como el vector

$$P + Q = [(p_1 + q_1)\ (p_2 + q_2)\ ..\ ..\ (p_n + q_n)]$$

Es un vector del mismo número de elementos que se obtiene sumando los elementos correspondientes de los vectores dados.
Notar que para que esta operación sea posible es necesario que los vectores tengan el mismo número de componentes.

1.1.9. Propiedades de la suma o adición de vectores

1. Conmutativa P + Q = Q + P
2. Asociativa P + (Q + S) = (P + Q) + S
3. Elemento opuesto P + (-P) = ∅

1.1.10. Producto de un vector por un número real (escalar)

Dado un vector $P = [p_1 \ p_2 \ .. \ .. \ p_n]$ y dado un escalar c, el producto del escalar c por el vector P será igual a un vector del mismo orden (número de componentes) que el dado en el que cada una de sus componentes se obtiene multiplicando cada p_i por c.

$$Q = cP = [cp_1 \ cp_2 \ .. \ .. \ cp_n]$$

1.1.11. Propiedades del producto de un vector por un número real (escalar)

1. Distributiva del producto respecto de la suma de vectores $c(P + S) = cP + cS$
2. Distributiva del producto respecto de la suma de números reales
   $(c+d)P = cP + dP$
3. Asociativa $c(dP) = (cd)\,P$
4. Elemento neutro $1P = P$
5. Elemento nulo $0P = \emptyset$

1.1.12. Combinación lineal de vectores

Sean $V_1, V_2, ..., V_n$ un conjunto de vectores y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ un conjunto de escalares. Se dice que el vector V que resulta de la suma de los productos de cada escalar por un vector, definido de la siguiente manera

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$$

es una combinación lineal de los vectores $V_1, V_2, ..., V_n$ siendo los α_i los coeficientes de esa combinación lineal.

Ejemplo:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \alpha_1 = 2 \ \text{ y } \ \alpha_2 = -1$$

El vector V será:

$$V = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

1. El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores. Para ello es suficiente con elegir los escalares todos iguales a cero

$$\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{es suficiente con que } \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

2. Todo vector es combinación lineal de sí mismo y en general de todo conjunto que lo contiene.

a) Dado V, su combinación lineal sería $V = 1V$ donde $\alpha_1 = 1$
En todos los casos podemos expresar a un vector como combinación lineal de sí mismo.

b) Dado un conjunto de vectores, cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del conjunto que lo contiene.
Dados $V_1, V_2, ..., V_n$
En general:

$$V_1 = 1V_1 + 0V_2 + ... + 0V_n$$

1.1.13. Combinación lineal convexa de vectores

Sean $V_1, V_2, ..., V_n$ un conjunto de vectores y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ un conjunto de escalares que cumplen con las siguientes condiciones:

$$\alpha_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

El vector W que resulta de la suma de productos de los escalares con los vectores:

$$W = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$$

se dice que es una combinación lineal convexa de los vectores $V_1, V_2, ..., V_n$.

1.1.14. Independencia lineal de vectores

Los vectores de un conjunto, todos de la misma dimensión, son linealmente independientes si ninguno de ellos puede ser expresado como combinación lineal de los restantes.
Una condición necesaria y suficiente para que los vectores $V_1, V_2, ..., V_n$ sean linealmente independiente es que la igualdad

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n = \emptyset$$

se cumpla únicamente para todos los $\alpha_i = 0$
O sea, tiene que cumplirse

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = \emptyset$$

De esta manera, ningún vector podrá ser expresado en función de los restantes.

1.1.15. Dependencia lineal de vectores

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente, cuando por lo menos uno de los vectores que lo componen, puede ser expresado como combinación lineal de los restantes.
Para que un conjunto de vectores sea linealmente dependiente, la condición necesaria y suficiente es que la igualdad

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_n V_n = \emptyset$$

se verifique para al menos un escalar α_i no nulo.

Observaciones:

1. Cualquier vector puede expresarse de una única forma como combinación lineal de k vectores linealmente independientes.

2. Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es linealmente dependiente.
3. Un conjunto que contiene un solo vector es linealmente dependiente si se trata del vector nulo y linealmente independiente en cualquier otro caso.
4. El conjunto formado por los vectores unidad, en todos los casos, es linealmente independiente.

1.2. Matrices

1.2.1. Definición

Una matriz A es un conjunto de números reales dispuestos en forma rectangular. Si el arreglo tiene *m* renglones y *n* columnas entonces se llama matriz *mxn.* Se dice que el tamaño o dimensión es *m* por *n.*
Se indica como a_{ij} al elemento que aparece en el renglón i-ésimo y la columna j-ésima.

Ejemplo de matriz de 2x3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Matriz cuadrada

Una matriz que tiene *m* filas y *m* columnas se llama matriz cuadrada.

1.2.3. Algunos conceptos

Diagonal principal

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal*:* todas sus componentes distintas de cero están en la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior*:* todas las componentes que se encuentran debajo de los elementos de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior*:* todas las componentes que se encuentran arriba de los elementos de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o forma canónica: los elementos de la diagonal principal son todos iguales a la unidad y los restantes son iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: si todos los elementos son iguales a cero, se simboliza como ∅

$$\emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.4. Suma de matrices

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices *mxn*. La suma A+B de las dos matrices es la matriz *mxn:*

$$A+B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esta definición es aplicable para la suma de A y B sólo si son del mismo orden.
En definitiva, la suma de dos matrices del mismo tamaño se obtiene sumando los componentes correspondientes de las matrices.

1.2.5. Propiedades de la suma de matrices

1. Elemento nulo $A + \emptyset = A$
2. Conmutativa $A + B = B + A$
3. Asociativa $A + (B + C) = (A + B) + C$

1.2.6. Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea α un escalar y A una matriz *mxn,* el producto αA se obtiene a partir de A multiplicando cada una de las componentes de A por el escalar α.

1.2.7. Propiedades de la multiplicación de una matriz por un escalar

Sean A y B dos matrices *mxn* y α y β escalares, entonces:

1. Distributiva del producto respecto de la suma de matrices   α (A + B) = αA + αB
2. Distributiva del producto respecto de la suma de números reales   (α + β) A = αA + βA
3. Asociativa   α (βA) = (αβ) A
4. Elemento neutro   1A = A
5. Elemento nulo   0A = Ø

1.2.8. Multiplicación de matrices

Sean A una matriz de orden *mxr* y B una matriz de orden *rxn.* El producto AB en la matriz *mxn* cuya componente ij-ésima es el producto interno del renglón i-ésimo de A y la columna j-ésima de B.
Para que puedan multiplicarse deben ser compatibles, es decir: el número de columnas en la primera matriz debe ser igual al número de renglones en la segunda matriz.

$$A_{mr}\ B_{rn} = C_{mn}$$

=

1.2.9. Propiedades de la multiplicación de matrices

1) Asociativa: dadas las matrices $A_{mn}\ B_{np}\ C_{pr}$

   $(AB)\ C = A\ (BC)$

2) Distributiva con respecto a la suma: si A, B y C son de tamaños apropiados

   $A\ (B+C) = AB + AC$

   $(B+C)\ A = BA + CA$

3) No es conmutativa

   $A_{mn}\ B_{np}$ $AB = C_{mp}$

   BA no se puede

   $A_{mn}\ B_{nm}$ $AB = C_{mm}$

   $BA = D_{nn}$

   $A_{mm}\ B_{mm}$ $AB \neq BA$ en general

Si I es una matriz identidad y $A_{mn} \Rightarrow I_m A = A$ y $A I_m = A$

2. Conocimientos básicos de probabilidad y estadística

La estadística es una disciplina metodológica que ofrece a otras áreas del saber un conjunto coherente de ideas y herramientas a través de la aplicación científica de principios matemáticos a situaciones sujetas a variabilidad e incerteza, particularmente recolección y análisis de datos.

Se habla de variabilidad porque una serie de datos estadísticos surge de mediciones efectuadas a ciertos elementos y los resultados varían de acuerdo a cada uno de esos elementos.

Se habla de incertidumbre porque generalmente se trabaja con una parte del total de elementos o individuos que están bajo consideración en una investigación.

Su objetivo puede ser comprender ciertos aspectos de la realidad o apoyar la toma de decisiones en presencia de incertidumbre.

2.1. Variables aleatorias

Una **variable aleatoria** es cierto fenómeno de interés cuyas respuestas o resultados pueden expresarse numéricamente. Puede decirse que implica un valor numérico afectado por el azar.

2.2. Variables aleatorias discretas

Será **variable aleatoria discreta** si el número de valores que puede asumir es contable, ya sea finito o infinito numerable. Los datos contables surgen de un proceso de conteo.

2.3. Variables aleatorias continuas

Será **variable aleatoria continua** si puede adoptar cualquier valor dentro de un rango definido de valores. Los datos continuos surgen de un proceso de medición.

2.4. Trabajo con variables aleatorias

Para trabajar de manera sólido con variables aleatorias en general es necesario considerar un gran número de experimentos aleatorios, para su tratamiento estadístico, cuantificar los resultados de manera que se asigne un número real a cada uno de los resultados posibles del experimento. De este modo se establece una relación funcional entre los elementos del espacio muestral asociado al experimento y números reales.

2.5. Población

Población es la totalidad de elementos que presentan la característica a estudiar: personas, objetos, hechos; sobre los cuáles se desea reunir información y estudiar un tema en particular y fundamentalmente efectuar inferencias a partir de una muestra estadística.

2.6. Muestra

Se define como el subconjunto de una cierta población. Pero no es un subconjunto cualquiera ya que de acuerdo con la forma en que haya sido extraída de la población, posibilitará o no la realización de inferencias estadísticas válidas.

2.7. Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, junto con una estructura sobre el mismo.

2.8. Distribución de frecuencias

Una distribución de frecuencias es una tabla resumen en la que se disponen los datos de manera ordenada y el número de ocurrencias de cada valor, porcentajes, etc.

Esta tabla también se conoce como base de datos, y permite mostrar la información de un conjunto de datos de una forma más simple, de tal manera que facilita a quien los lee tener una idea general de su comportamiento, es decir de la forma en que están distribuidos.

Ejemplo: recuento de datos de la variable “cantidad de hijos” para una muestra de 60 personas.

Valores de la Variable	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
0	10	16,67%
1	13	21,67%
2	20	33,33%
3	7	11,67%
4	10	16,67%
Totales	60	100%

La **Frecuencia Absoluta** es el **número** de observaciones que ser registraron para cada valor de la variable. Por ejemplo, 10 personas no tienen hijos, 13 personas tienen un hijo, 20 personas tienen 2 hijos.

La **Frecuencia Porcentual** es el **porcentaje** de observaciones que se registraron para cada valor de la variable. Por ejemplo, el 33,33% de las personas tienen 2 hijos.

Al resumir grandes colecciones de datos es útil trabajar con distribuciones de frecuencias para datos agrupados en intervalos, donde **(a ; b)** es un intervalo al que pertenecen todos los números reales comprendidos entre **a** y **b**, incluyendo a **a** y sin incluir a **b**.

Ejemplo: recuento de datos de la variable "estatura" para una muestra de 30 personas.

Valores de la Variable	Frecuencia Absoluta
(1,50 ; 1,60)	5
(1,60 ; 1;70)	7
(1,70 ; 1,80)	8
(1,80 ; 1,90)	6
(1,90 ; 2,00)	4
Totales	30

Cada intervalo en los que se agrupa a la totalidad de las observaciones realizadas debe tener la misma **amplitud**. Es decir, en todos los intervalos, la diferencia entre sus extremos debe ser la misma.
Cuando los datos no están organizados en una distribución de frecuencias constituyen lo que se llama una **serie de datos simples** o **series simples**.

Ejemplo:

4	0	2	0	0	2	0	0	2	1
2	2	4	4	0	2	0	3	2	1
3	4	4	2	1	0	0	1	0	1
4	1	1	3	2	3	2	4	3	1
2	2	2	2	3	1	2	2	2	1
1	4	3	4	2	1	4	2	2	1

2.9. Función de Probabilidad

La función de probabilidad en el caso discreto se denomina **función de cuantía p(x)** y asocia una probabilidad a cada posible valor de la variable.

Condiciones esenciales que debe cumplir una función de cuantía:

- las probabilidades asociadas a los distintos valores que puede asumir la variable deben ser no negativos:

$$p(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x$$

- la suma de todas esas probabilidades debe dar uno:

$$\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$$

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria es el conjunto de todos los valores que puede tomar la misma y sus respectivas probabilidades.

2.10. Función de Distribución

La función de distribución F(x) de una variable aleatoria *x* acumula probabilidades desde el valor mínimo que asume la variable hasta un valor genérico x_0 perteneciente a su recorrido. Es decir, la función de distribución permite obtener la probabilidad que la variable asuma cualquier valor menor o a lo sumo igual a x_0.

$$F(x_0) = P(x \leq x_0);\ \ x_0 \in R$$

En el caso discreto la función de distribución $F(x_j)$ se calcula a partir de la función de cuantía:

$$F(x_j) = P\ (x \leq x_j) = \sum_{i=1}^{j} p(x_i)$$

2.11. Esperanza Matemática

E(x) es el valor promedio que se presentará si el experimento se repite un número grande de veces.
Para una variable aleatoria discreta *x,* con su respectiva función de cuantía *p(x),* la esperanza matemática será:

$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p(x_i)$ valor esperado o valor medio

2.12. Varianza

La varianza mide la dispersión de los datos en torno a la esperanza matemática si el experimento se repite un número grande de veces. Se define como: *la esperanza de los desvíos al cuadrado de los valores de la variable respecto al valor esperado*, razón por la cual asume siempre valores no negativos.

$V(x) = \sigma^2 = E(x - \mu)^2$ variación de los resultados respecto al valor medio

Para una variable aleatoria discreta *x:*

$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} [x_i - \mu]^2\, p(x_i)$$

2.13. Desviación Estándar

La desviación estándar de una variable aleatoria *x* se define a partir de su varianza como

$$DS(x) = \sigma = \sqrt{V(x)}$$

Esta medida representa el desvío esperado de los valores de la variable respecto a su esperanza.

2.14. Ejercicios prácticos

2.14.1. Con el fin de mejorar la calidad en la atención al cliente, desde una empresa de telefonía móvil se realizó una encuesta de satisfacción en cada llamada atendida durante una jornada. Cada cliente debía responder a la pregunta ¿cómo califica usted la atención de nuestro representante?, pudiendo elegir entre las siguientes opciones:

1: Mala
2: Regular
3: Buena
4: Muy buena
5: Excelente

Las siguientes, son las respuestas que se obtuvieron:

4 – 2 – 5 – 2 – 4 – 3 – 3 – 4 – 4 – 4 – 4 – 2 –
4 – 4 – 5 - 4 – 1 – 4 – 2 – 1 – 3 – 2 – 2 – 2 – 5

a) Construya una distribución de frecuencias.
b) ¿Cuál es el significado de la frecuencia porcentual correspondiente al valor "2"?

2.14.2. Se observó las marcas de gaseosas compradas por los clientes durante una mañana, en un local céntrico. El resultado fue:

Pepsi	Sprite	Sprite	Pepsi	Pepsi
Pepsi	Coca Cola	Pepsi	Coca Cola	Coca Cola
Sprite	Fanta	Coca Cola	Coca Cola	Pepsi
Coca Cola	Coca Cola	Pepsi	Coca Cola	Sprite
Paso de los Toros	Fanta	Sprite	Pepsi	Fanta
Coca Cola	Paso de los Toros	Paso de los Toros	Coca Cola	Coca Cola

a) Construya una distribución de frecuencias absolutas y porcentual para organizar los datos.

b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta que le corresponde al valor "Coca Cola"? Indique su significado en el caso.

c) ¿Cuál es la frecuencia porcentual que le corresponde al valor "Pepsi"? Indique su significado en el caso.

2.14.3. Un auditor quiere inspeccionar el comportamiento de las cuentas por cobrar de una empresa a una fecha dada. De los libros auxiliares obtiene los siguientes valores expresados en miles de pesos:

20	40	23	24	25	27	29	27	39	38
40	22	23	31	30	28	26	37	34	33
37	36	33	29	32	37	28	32	31	44
29	34	42	28	48	50	26	28	41	35

a) Construya una distribución de frecuencias agrupando los datos en intervalos de amplitud 5 y como límite inferior del primer intervalo, 20.

b) ¿Cuántas cuentas presentan saldos de $30.000 o más y menores a $40.000?

c) ¿Qué porcentaje de cuentas poseen un saldo inferior a $45.000?

d) ¿Qué porcentaje de cuentas presentan un saldo de por lo menos $32.000?

2.14.4. Sea <u>x</u> una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:

x	**$p(x_i)$**
0	0,10
1	0,20
2	0,10
3	0,40
4	0,10
5	0,10

a) Calcular la función de distribución.

b) Calcular $p(x < 4,5)$

c) Calcular $p(x \geq 3)$

d) Calcular $p(3 \leq x < 4,5)$

2.14.5. De una bolsa que contiene dos bolas negras, tres bolas blancas, cuatro bolas rojas y cinco bolas verdes, se extrae una de ellas al azar. Describa el espacio muestral y calcule la probabilidad de que:

a) la bola extraída sea de color rojo;

b) la bola extraída no sea de color negra;

c) la bola extraída sea blanca o verde.

2.14.6. Si se lanzan al aire tres monedas iguales, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos caras y una cruz?

2.14.7. Se lanza un par de dados. Se define la variable aleatoria $\underline{x}$ como la suma de las puntuaciones obtenidas. Hallar la función de probabilidad, la esperanza matemática y la varianza.

2.14.8. Si una persona compra un billete de lotería con el que puede ganar un primer premio de \$250.000 ó un segundo premio de \$100.000, con probabilidades de 0.1% y 0.3% respectivamente. ¿Cuál sería el precio razonable a pagar por el billete?

Bibliografía

- Alberto, Catalina y Carignano, Claudia. Apoyo cuantitativo a las decisiones. Córdoba: Asociación Cooperadora de la Facultad de Ciencias Económicas UNC, 2013.

- Bacchini, R., Vázquez, L., Bianco, M. y García Fronti, J. Introducción a la Probabilidad y la Estadística. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Facultad de Ciencias Económicas UBA, 2018.

- Herramientas básicas para el aprendizaje en los estudios superiores. Curso de Ingreso Nivel Pregrado. Módulo 1: Matemática y Lógica. Córdoba: Escuela Superior de Comercio "Manuel Belgrano" UNC, 2020.