Instituto Superior Santo Domingo	**UNIDAD Nº 2:** **Derivadas**	**TEMAS:** **Definición de la derivada**	**Clase** **8**

Objetivos:

- Conocer la definición de derivada a partir del cociente incremental
- Interpretar el significado de la definición
- Calcular derivadas mediante la definición.

Introducción

¡Ahora si se pone bien interesante esta materia! Hoy comenzaremos con la unidad 3, y en ella aplicaremos todo lo aprendido hasta ahora e incorporaremos nuevos conceptos que nos permitirán realizar un análisis detallado de las funciones. En esta clase veremos la definición de la derivada, concepto que utilizaremos desde ahora y hasta el Análisis II.

Actividades

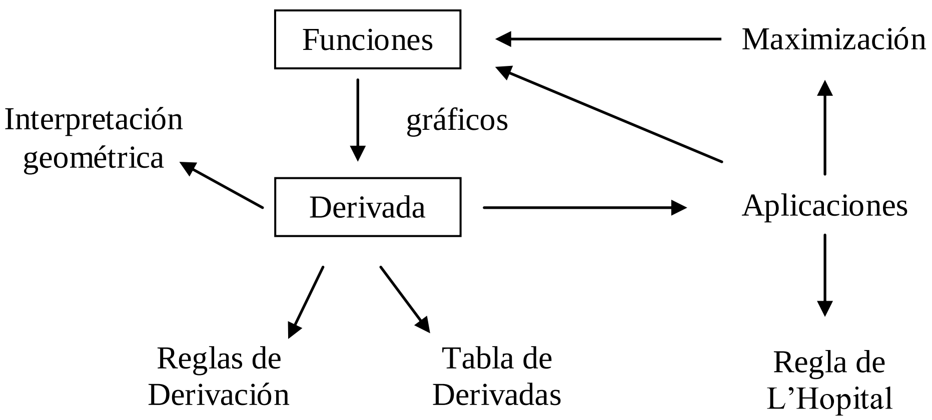
- Lee detenidamente el material de estudio correspondiente al tema, al inicio de la unidad 3
- Toma nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Observa que en la definición aparece el intervalo Δx que corresponde a una variación positiva de las preimágenes, que se convierten en dx (diferencial de x) cuando tiende a 0 (cero).
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.
- Comunicarse con el profesor, utilizando el “Campus del Instituto”.

Derivadas

Derivadas de funciones

Como una aplicación de límite visto en la unidad anterior, comenzaremos con el estudio del concepto de derivada, para poderlo aplicarlo inmediatamente en la resolución de situaciones problemáticas concretas.

En el siguiente esquema se puede observar los conceptos que tocaremos en esta unidad.



Introducción

En telecomunicaciones, es fundamental la comprensión de las ondas en general, y las ondas electromagnéticas en particular, puesto que en ellas se basa este proceso de la comunicación.

La ecuación unidimensional de onda es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Esta corresponde a una ecuación hiperbólica que surge al describir fenómenos relativos a la propagación de onda en un medio continuo. Los estudios de ondas acústicas, ondas de agua, ondas electromagnéticas y vibraciones mecánicas están basados en esta ecuación.

En concreto, en este tema se supondrá que la ecuación representa el movimiento de una cuerda elástica de longitud *l* sujeta por los extremos, eligiendo el eje X para representar la posición horizontal de la cuerda. Se supone que dicha cuerda se pone en movimiento mediante alguna fuerza externa, de forma que empieza a vibrar en el plano horizontal.

Denotando por:

$$\mathbf{u = u(x,t)}$$

Al desplazamiento vertical de la cuerda en cada punto x y en cada instante t, la ecuación que verifica tal desplazamiento es precisamente la ecuación de onda escrita más arriba.

¡PERO NO SE ASUSTE! Esto es solo una introducción. Simplemente se desea hacer notar que es de suma importancia el estudio de los cambios o variaciones que sufre una variable en función de otra u otras, como lo es el caso de la posición de un punto del espacio que ha sido alcanzado por una onda. En ese ejemplo de la ecuación de onda, lo que se quiere mostrar son los cambios de los desplazamientos horizontales o verticales que sufre un punto respecto la posición x y al instante de tiempo t. Esos cambios o variaciones la ecuación los representa con el símbolo ∂.

El concepto matemático que estudia las variaciones de las funciones es el de **derivadas**.

Para comprender el concepto de la derivada de una función, vamos a analizar previamente una situación problemática concreta relacionada con la Física: supongamos que se desea conocer la velocidad a la que viajó un auto que fue de Córdoba a Buenos Aires. Básicamente indicar la velocidad es decir que distancia recorre por unidad de tiempo, por ejemplo 100 km/h (recorre 100km en una hora). Para obtener dicho valor podemos pensar en la distancia que se cubrió de Córdoba a Buenos Aires y dividirla por el tiempo (en horas) que se empleó. Este resultado recibe el nombre de velocidad media, ya que en realidad no podría haber hecho todo el trayecto a la misma velocidad, sino que por momentos habría viajado más rápido y en otros más lento.

Si quisiéramos obtener información más detallada acerca de la velocidad desarrollada por al auto tendríamos que considerar intervalos de tiempo más cortos, y determinar la distancia

Glosario

La letra griega Δ (delta, mayúscula) se emplea para representar una diferencia o una variación, y recibe el nombre de *incremento*.

recorrida en él, para luego hacer el cociente. Mientras más corto sea el intervalo de tiempo más precisa será la velocidad calculada en ese intervalo. Si hacemos que ese intervalo se haga tan pequeño como deseemos, estaríamos en condiciones de calcular la llamada velocidad instantánea, es decir la velocidad en cada instante de tiempo. Al hacer el intervalo de tiempo tan pequeño como queramos, lo que realizamos, es hacer tender el tiempo a cero, por lo que estamos en presencia de un límite de la función velocidad. La velocidad instantánea se la define como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

En resumen: en algo que se desplaza, la distancia que se recorre depende del tiempo considerado, la variación de una variable implica una variación en la otra, la velocidad es la función que relaciona esas dos variables. Si a esa variación de la distancia la determinamos para un intervalo de tiempo que tiende a cero decimos que la velocidad es

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

A este límite se lo llama **derivada de la función "d" respecto a "t".**

Definición

Sea y = f(x) una función definida en un intervalo, se llama derivada de la función f y se designa y´ al:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$

Al incremento "Δx" cuando tiende a cero se lo llama diferencial y puede escribírselo "dx". Por esta razón la notación para la derivada de una función en un punto x puede ser cualquiera de estas:

Si y = f(x)

$$\text{Derivada de } f = f'(x) = y' = D_x f = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

La derivada de una función es otra función que puede o no existir para todo valor de x.

Para determinar el valor de la derivada de la función en un punto x_0, puede calcularse el límite valuando la x en ese punto x_0, o calcular el límite para todo x y luego valuar la función derivada en ese x_0.

Ejemplo

Sea $f(x) = 3x^2 + 5$ ¿Cuál es el valor de la derivada en $x_0 = 1$?

Para ello encontremos primero la función derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 + 5 - (3x^2 + 5)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x^2 + 2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2) + 5 - 3x^2 - 5}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6\,x\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 + 5 - 3x^2 - 5}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(6\,x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (6\,x + \Delta x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = 6x}$$

Por lo tanto si la función derivada es 6x, para encontrar el valor de la derivada de la función en x = 1, solo debemos valuar f´en 1:

$$f'(1) = 6.1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(1) = 6}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 1:

Comente dos ejemplos de situaciones en las que se manifieste la importancia de conocer las variaciones de una magnitud en relación a las variaciones de otra.

Ejercicio 2:

Teniendo en cuenta la función $f(x) = (3.x - 2).\sqrt{x}$

a- Obtenga f(4)
b- Obtenga f(2 + h)
c- Obtenga f(x + h)

Relación

Recuerde el modo de resolver las indeterminaciones vistas en la unidad anterior.

Ejercicio 3:

Utilizando la definición de la derivada de una función, encuentre las funciones derivadas de:

a) $y = 3.x + 2$

b) $y = \frac{2}{x}$

c) $y = \frac{1}{x+2}$

d) $y = x^2 - x$