



# Lógica de Predicados

# Lógica de Predicados: Motivación

Todo natural es entero y 2 es un natural. Luego 2 es entero



$p, q \vdash r$  es claramente un razonamiento válido, pero no es posible demostrarlo desde la Lógica Proposicional

$\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z})$  La validez del razonamiento depende de la estructura interna de las proposiciones y debe expresarse usando **Lógica de Predicados**

$2 \in \mathbb{N}$

$2 \in \mathbb{Z}$

# Lógica de Predicados - Definición

La lógica de predicados estudia las frases declarativas con mayor grado de detalle, considerando la estructura interna de las proposiciones. Se tomarán como elemento básico los **objetos** y las **relaciones** entre dichos objetos. Es decir, distingue:

- **Qué se afirma** (predicado o relación)
- **De quién se afirma** (objeto)

# Universo e Individuos

- La lógica de predicados va a hablar sobre **individuos**.
- Un individuo es un elemento único e irrepetible del universo.
- Por ejemplo:
  - una persona (Juan, Luis, María, etc.)
  - un animal (Tadeo, Michifus, etc.)
  - un elemento más abstracto (un número, un color, etc.)
- El Universo o Dominio son todos los valores de las variables para los cuales el predicado tiene sentido.

# Universo e Individuos

Grupo de Amigos

JUAN

Alumnos de universidad

JUAN

Lo importante es que el individuo sea identificable de forma inequívoca

CINCO

5

V

4+1

CINQUE

FIVE

FEM

Lo importante es lo que queremos representar.

# Propiedades

- Una propiedad es una cualidad o atributo que puede o no aplicarse a un individuo.
- La idea es que vamos a pensar en una propiedad como algo que, dado un individuo, la misma puede o no aplicar a ese individuo. Si aplicamos la propiedad al individuo, la podemos tratar como una proposición. Es decir, es algo de lo que vamos a decir que es VERDADERO o FALSO.
- Por ejemplo: “Juan es grande”, “Firulais es un perro”, o “Cinco es un número primo”.

# Propiedades

**Ejemplo:** Supongamos que queremos hablar de una escuela a la que solo asisten cuatro alumnos, dos chicos (Juan y Luis), y dos chicas (María y Ana). Dos posibles propiedades sobre ellos serán “Es hombre” y “Es mujer”.

Podemos representar las propiedades en una tabla:

	Es hombre	Es mujer
Juan	VERDADERO	FALSO
Luis	VERDADERO	FALSO
María	FALSO	VERDADERO
Ana	FALSO	VERDADERO

Propiedades  
Complementarias

Es mujer =  $\neg$ Es hombre

# Propiedades Dependientes

- Asumamos dos nuevas propiedades que aplican en nuestro ejemplo, “*Usa zapatos*” y “*Usa corbata*”.
- Podemos crear nuevas propiedades a partir de las que conocemos. Por ejemplo, podemos decir: si un hombre usa zapatos y usa corbata, entonces “*Es elegante*”.

**Es elegante = Es hombre  $\wedge$  Usa zapatos  $\wedge$  Usa corbata**

- Apliquemos la propiedad “Es elegante” a “Juan”:

**Juan es elegante = Juan es hombre  $\wedge$  Juan usa zapatos  
 $\wedge$  Juan usa corbata**



# Relaciones

- Pensemos ahora en una frase un poco más compleja, y tratemos de formalizarla: “Juan está enamorado de María”.

*Creamos la propiedad ----> “Estar enamorado de María”  
y la aplicamos a Juan*

- Pero ¿Qué pasa si ahora queremos escribir “Ana está enamorada de Luis”?

*Necesitamos otra propiedad “Estar enamorada de Luis”  
y aplicar la misma a Ana*

# Relaciones Dirigidas

**Una relación vincula dos individuos a través de una característica.**

Así, nuestra relación será “Está enamorado de”, y si lo aplicamos a “Juan” y a “María” obtenemos la frase “Juan está enamorado de María”.

- El hecho de que Juan esté enamorado de María no hace que María necesariamente le corresponda. Por lo que las relaciones son dirigidas.
- El orden en el que aplicamos la relación a los distintos individuos da como resultado diferentes proposiciones con diferente valor de verdad

# Relaciones Complejas

- De forma similar a lo que ocurre con las propiedades, las relaciones pueden estar dadas en términos de otras relaciones. Por ejemplo, podríamos decir que:

**Está enamorado de = Siente atracción física  $\wedge$  Siente atracción intelectual**

- Pensemos ahora en la relación equivalente “es amado por”. Podríamos definir “es amado por” en términos de “está enamorado de”. Por ejemplo:

**María es amada por Juan = Juan está enamorado de María**

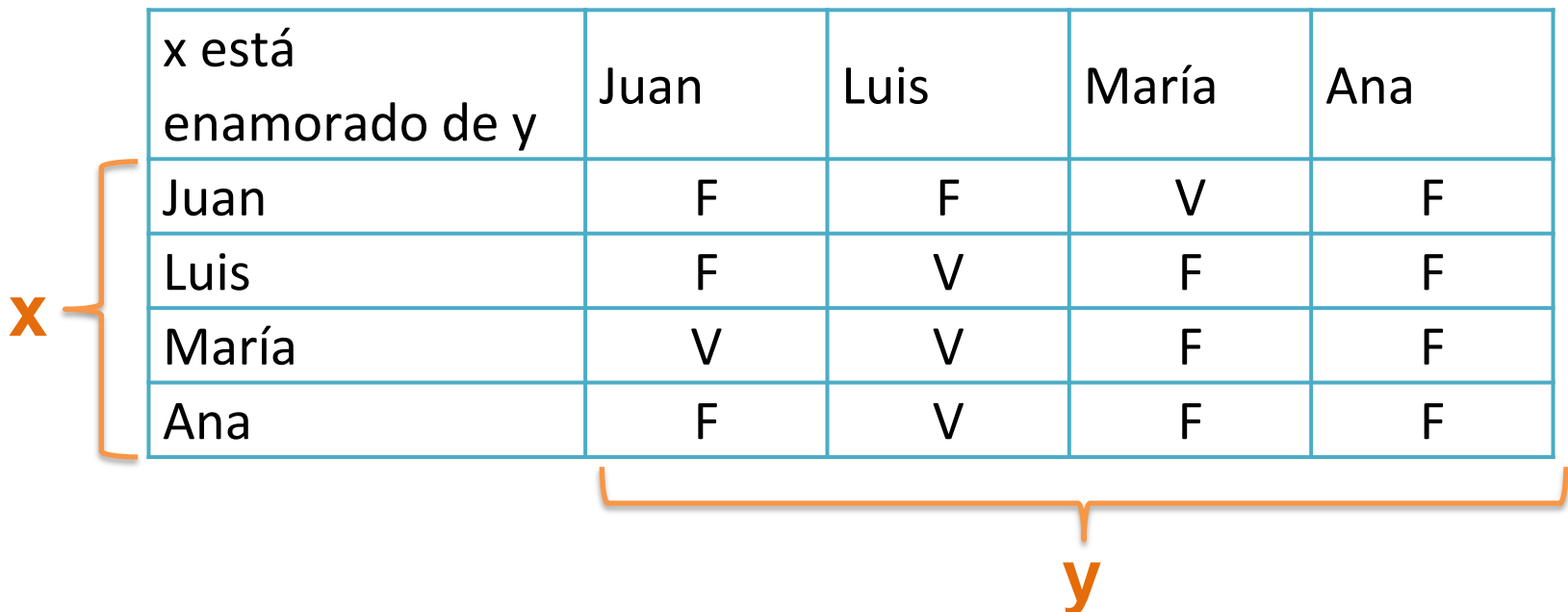
**Es amado por = Esta enamorado de**

# Parámetros

- Un parámetro no es más que un nombre que va a representar a un individuo, pero que al momento de la definición, no sabemos quién es.
- Vamos a usar los parámetros en nuestras propiedades y relaciones. Así por ejemplo:
  - en lugar de decir que la propiedad es “Es hombre” vamos a decir “x es hombre”
  - Si lo replanteamos la relación “Es amado por” usando parámetros podemos escribir “x es amado por y”

# Representando relaciones

- A diferencia de la tabla sencilla de las propiedades, en la cual podíamos representar más de una propiedad en la misma tabla, aquí toda la tabla representa una sola relación.



x está enamorado de y	Juan	Luis	María	Ana
Juan	F	F	V	F
Luis	F	V	F	F
María	V	V	F	F
Ana	F	V	F	F

# Relaciones Múltiples

- Podemos tener relaciones que tienen más de dos individuos como elementos.
- Por ejemplo, la relación “x conoce a y gracias a z”. Podríamos decir entonces “Ana conoce a Luis gracias a María”.
- Para obtener esa proposición basta aplicar la relación primero a Ana, luego a Luis y por último a María.
- Este tipo de relaciones ya no se pueden interpretar utilizando una tabla, por lo que hay que aplicar nuestra mejor capacidad mental y de abstracción para comprender plenamente estas relaciones.

# Todos

- La palabra “Todos” nos indica que la propiedad aplica a cada uno de los individuos de nuestro universo.

Todos son inteligentes = Juan es inteligente  $\wedge$  Luis es inteligente  $\wedge$  María es inteligente  $\wedge$  Ana es inteligente

	x es inteligente
Juan	VERDADERO
Luis	VERDADERO
María	VERDADERO
Ana	VERDADERO

# Nadie

- ¿Y qué pasa si decimos “Nadie se porta mal”? Podemos pensarlo como una dependencia de otras propiedades.

Nadie se porta mal =  $(\neg \text{Juan se porta mal}) \wedge (\neg \text{Luis se porta mal}) \wedge (\neg \text{María se porta mal}) \wedge (\neg \text{Ana se porta mal})$

	x es inteligente	x se porta mal
Juan	VERDADERO	FALSO
Luis	VERDADERO	FALSO
María	VERDADERO	FALSO
Ana	VERDADERO	FALSO



# Alguien

- Hay otro tipo de oraciones que nos brindan información lógica acerca del universo. Pensemos en el siguiente ejemplo “Alguien juega a la pelota”. Podemos pensar en términos de nuestra tabla.

	x juega a la pelota
Juan	
Luis	
María	
Ana	

- Hablar de alguno, es hablar de **disyunciones entre los individuos**. Sabemos que alguno de los casos es VERDADERO, pero el resto podría sea falso o verdadero.

# Todos los ...

- Otro tipo de oración que solemos utilizar cuando hablamos, involucran hablar de un subgrupo de elementos.
- Por ejemplo, la oración “Todos los hombres se escaparon de la escuela”.

Todos los hombres se escaparon de la escuela = x es hombre → x se escapó de la escuela

	x es hombre	x se escapó de la escuela
Juan	VERDADERO	VERDADERO
Luis	VERDADERO	VERDADERO
María	FALSO	¿?
Ana	FALSO	¿?

# Algún ...

- Veamos la frase “Alguna mujer se escapó de la escuela”.

Alguna mujer se escapó de la escuela = (María se escapó de la escuela)  $\vee$  (Ana se escapó de la escuela)

- Pero debemos hacer una disyunción con todos los elementos del universo.

Alguna mujer se escapó de la escuela = (Juan es mujer  $\wedge$  Juan se escapó de la escuela)  $\vee$

(Luis es mujer  $\wedge$  Luis se escapó de la escuela)  $\vee$

(María es mujer  $\wedge$  María se escapó de la escuela)  $\vee$

(Ana es mujer  $\wedge$  Ana se escapó de la escuela)

# Formalización – Lógica de Predicados

# Alfabeto

- El alfabeto de la lógica de predicados está formado por:
  - Constantes
  - Variables
  - Funciones
  - Predicados
  - Conectivas
  - Cuantificadores

# Sintaxis - Constantes

- Las constantes representan a los individuos de nuestro universo. Vamos a tener una constante para cada individuo del universo que podamos (o mejor dicho, que necesitemos) nombrar.
- Se representan con las primeras letras minúsculas del alfabeto. También se utilizan subíndices.
- Ejemplos:
  - $a, b, c, a_1, b_1, a_n, b_n \in C$
  - $C = \{c_1, c_2, \dots\}$

# Sintaxis - Variables

- Las variables representan individuos indeterminados.
- Se representan con las últimas letras minúsculas del alfabeto. También se utilizan subíndices.
- Ejemplos:
  - $x, y, z, x_1, y_1, x_n, y_n \in V$
  - $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

# Sintaxis - Funciones

- Las funciones son una forma de denotar a un individuo sin hacer una referencia directa al mismo.
- Una función debe ser aplicada a uno o más constantes (individuos) y expresará un y solo un individuo.
- Se suelen representar con letras minúsculas  $f$ ,  $g$ ,  $h$ . También se utilizan subíndices.
- Ejemplos:
  - $f, g, h, f_1, g_1 \in F$
  - $F = \{f_1, f_2, \dots\}$



# Sintaxis – Funciones - Aridad

- La aridad es la cantidad de parámetros que espera la función. Si una función espera un solo parámetro, se dice que tiene aridad 1, si espera dos parámetros, se dice que tiene aridad 2, etc.
- Por ejemplo:
  - La función sucesor( $x$ ) tiene aridad 1.
  - La función suma( $x, y$ ) tiene aridad 2.

# Sintaxis - Predicados

- Se denomina Predicado o Función Proposicional a toda frase declarativa que no es una proposición pero que contiene una o más variables, que cuando se reemplazan por valores de un universo dado se convierten en proposición.
- Se denotan con letras mayúsculas  $P$ ,  $Q$ , etc.
- También pueden estar conectadas a través de conectivos de la lógica proposicional. Ejemplo:  $P \rightarrow Q$ ;  $P \vee Q$ , etc.
- Se puede representar la aridad mediante un superíndice.  $P^3 \in P$ , será un predicado con 3 argumentos.

# Sintaxis - Conectivas

- Las conectivas serán las mismas de la Lógica Proposicional:
  - negación  $\neg$
  - conjunción  $\wedge$
  - disyunción  $\vee$
  - implicación  $\rightarrow$
  - doble implicación, bicondicional o equivalencia  $\leftrightarrow$

# Sintaxis - Cuantificadores

- Un cuantificador es una palabra o símbolo que indica la frecuencia con la que un predicado se cumple en un determinado conjunto.
- Algunas de las palabras que cuantifican son:
  - Algunos (alguien, existe o hay)
  - Todo (o siempre o cada)
  - Nadie (ninguno)
- los cuantificadores son de dos tipos:
  - $(\forall \dots)$  cuantificador universal
  - $(\exists \dots)$  cuantificador existencial

# Gramática - Términos

- Un término es una cadena de símbolos utilizada para representar objetos siguiendo las siguientes reglas:
  - Toda variable o constante individual es un término
  - Si  $t_1, t_2, L, t_n$  son términos y  $f^n$  es una función de aridad  $n$ , entonces  $f^n(t_1, t_2, L, t_n)$  es un término
  - Todos los términos posibles se generan aplicando únicamente las 2 reglas anteriores.

# Gramática - Átomo

Un átomo o fórmula atómica es una cadena de símbolos de la forma:

$$P^n(t_1, t_2, L, t_n)$$

donde:

- $P^n$  es un predicado de aridad  $n$
- $t_1, t_2, L, t_n$  son términos

NOTA: un término representa un objeto, mientras que un átomo tomará un valor V o F según la interpretación

# Gramática - FBF

Las fórmulas bien formadas se definen así:

- i. Todo átomo es una FBF.
- ii. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas bien formadas, entonces  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  y  $(A \leftrightarrow B)$  también lo son.
- iii. Si  $A$  es una fórmula bien formada y  $x$  es una variable, entonces  $(\forall x) A$  y  $(\exists x) A$  son fórmulas bien formadas.
- iv. Solo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas i a iii en un número finito de pasos son fórmulas bien formadas.

# Gramática – FBF - Ejemplo

El universo del discurso es el conjunto de todas las personas, y supongamos que  $c_1$  representa al objeto Juan, y  $P^1_1$  y  $P^1_2$  a las propiedades “es mendocino” y “es argentino”, respectivamente. De esta manera podemos formular lo siguiente:

- $(\forall x) (P^1_1(x) \rightarrow P^1_2(x))$ . Todos los mendocinos son argentinos.
- $P^1_1(c_1)$ . Juan es mendocino.
- $P^1_2(c_1)$ . Juan es argentino.