Lógica Proposicional Conectivas

Docente: Anabel N. Ruiz

Repaso de Conectivas

p	¬ p
0	1
1	0

Negación

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjunción

p	q	**p ∨ q**
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Disyunción

Repaso de Conectivas

p	q	**p ⟶ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

Condicional o Implicación

p	q	**p ⟷ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Bicondicional o Equivalencia

p	q	**p ⊻ q**
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Disyunción Excluyente

Jerarquía de Conectivas

$\neg$

$\wedge$

$\vee \;\oplus$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

Fórmulas Bien Formadas (FBF)

- Una FBF sólo puede contener símbolos del siguiente conjunto:
  - letras minúsculas que representen variables proposicionales
  - los conectivos lógicos (en nuestro caso: ¬, ∧, ∨, ⟶, ⟷, $\underline{\vee}$)
  - y los símbolos auxiliares de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves, izquierdos y derechos)

Fórmulas Bien Formadas (FBF)

Las siguientes reglas permiten construir una fórmula bien formada (FBF):

1. Una variable proposicional es una fórmula bien formada, también llamada fórmula atómica.
2. Si P es una fórmula bien formada, $\neg$ P también es una fórmula bien formada.
3. Si P y Q son FBF, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \veebar Q)$, $(P \longrightarrow Q)$ y $(P \longleftrightarrow Q)$ son fórmulas bien formadas.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

Ejemplos

- P es FBF?
- $((P \longrightarrow Q) \longrightarrow R)$ es FBF?
- $(P \longrightarrow Q \longrightarrow R)$ es FBF?
- $(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$ es FBF?
- $\neg A$ es FBF?
- $(\neg P \land \neg Q)$ es FBF?
- $(P \neg\land Q)$ es FBF?
- $\neg [(P \longrightarrow Q) \longrightarrow R]$ es FBF?

Clasificación: Tautología

- Una FBF es una tautología si es **verdadera** para todas sus posibles interpretaciones. Una tautología también se conoce como una fórmula válida.

- **Ejemplo 1:** $p \lor \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
0	1	1
1	0	1

Clasificación: Contradicción

- Una FBF es una contradicción si es **falsa** para todas sus posibles interpretaciones. Una contradicción también se conoce como una fórmula inconsistente o una fórmula insatisfactible.

- **Ejemplo 1:** $p \wedge \neg p$

p	**¬ p**	**p ∧ ¬ p**
0	1	0
1	0	0

Clasificación: Consistente

- Una FBF que **al menos tiene una interpretación verdadera** se conoce como una fórmula consistente o satisfactible. Es decir, si para al menos una de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables proposicionales la fórmula se evalúa con el valor de verdad Verdadero

- **Ejemplo:** p ⩗ q

p	q	p ⩗ p
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Clasificación: Contingencia

- Una FBF es una contingencia si alguna de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables se evalúa como verdadero y alguna de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables se evalúa como falso.

- **Ejemplo:** $p \longrightarrow \neg (p \vee q)$

p	q	$p \vee p$	$\neg (p \vee q)$	$p \longrightarrow \neg (p \vee q)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	1	1

Implicación Lógica y Equivalencia Lógica

- Sean p y q dos fórmulas bien formuladas, diremos que:
  - **"p implica lógicamente a q"** o que "q es consecuencia lógica de p" (lo denotaremos con $\mathbf{p \Rightarrow q}$) si la forma enunciativa $p \longrightarrow q$ es una tautología.
  - **"p es lógicamente equivalente a q"** (lo denotaremos con $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ o bien $\mathbf{p \equiv q}$) si la forma enunciativa $p \longleftrightarrow q$ es una tautología.

Ejemplo de Equivalencia Lógica

Demostraremos la equivalencia $\neg$ (p $\vee$ q) es lógicamente equivalente a ($\neg$ p) $\wedge$ ($\neg$ q), para ello analizaremos la fórmula enunciativa: **$\neg$ (p $\vee$ q) $\leftrightarrow$ ($\neg$ p) $\wedge$ ($\neg$ q)**, que debería ser una tautología.

p	q	p $\vee$ p	$\neg$ (p $\vee$ q)	$\neg$ p	$\neg$ q	($\neg$ p) $\wedge$ ($\neg$ q)	$\neg$ (p $\vee$ q) $\leftrightarrow$ ($\neg$ p) $\wedge$ ($\neg$ q)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Fórmulas Equivalentes

- Al evaluar 2 fórmulas, y se observa que todas sus interpretaciones son iguales, se dice que ambas fórmulas son equivalentes.

- Ejemplo:

$\boldsymbol{\neg (p \leftrightarrow q)}$ es equivalente con $\boldsymbol{p \veebar q}$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\boldsymbol{\neg (p \leftrightarrow q)}$
1	1	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	0	**1**
0	0	1	**0**

p	q	$\boldsymbol{p \veebar q}$
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Leyes de la Lógica Proposicional

Ley de Doble Negación	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Ley Conmutativa de la Conjunción	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Ley Conmutativa de la Disyunción	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Ley Asociativa de la Conjunción	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Ley Asociativa de la Disyunción	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
Ley Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leyes de la Lógica Proposicional

Ley de Doble Negación	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Leyes de Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$
Leyes de Absorción	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
Leyes de los Neutros	$p \wedge V \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$
Leyes de Dominación	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee V \Leftrightarrow V$
Leyes de los Inversos	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow V$

Leyes de la Lógica Proposicional

Ley de la Disyunción excluyente	$p \veebar q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
Ley asociativa de la disyunción excluyente	$(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$
Ley del condicional	$p \longrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
Ley del contrarecíproco del condicional	$p \longrightarrow q \Leftrightarrow \neg q \longrightarrow \neg p$
Ley de la negación del condicional	$\neg(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
Ley del bicondicional	$p \longleftrightarrow q \Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
Ley de la negación del bicondicional	$\neg(p \longleftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

Uso de las Leyes Lógicas

La Leyes lógicas se usan para:

- Demostrar otras equivalencias, especialmente donde intervienen muchas variables proposicionales.
- Encontrar frases equivalentes, que transmitan el mismo mensaje y, por supuesto, conserven el valor de verdad.
- Demostrar la validez de un razonamiento

Formas Normales

Forma enunciativa restringida a una forma enunciativa en la que solamente figuran las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Una fórmula está en **Forma Normal Disyuntiva** FND si es una disyunción de conjunciones de literales.

$(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Una fórmula está en **Forma Normal Conjuntiva** FNC si es una conjunción de disyunciones de literales.

Conjuntos adecuados de conectivas

- Un conjunto adecuado de conectivas es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa en la que solo aparezcan conectivas de dicho conjunto.
- Los pares $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas.

Reducción de Conectivas

Si consideramos que el $\longleftrightarrow$ es la conjunción del $\longrightarrow$ en una dirección con el mismo $\longrightarrow$ en la otra, con las 4 conectivas restantes, haciendo uso de "conjunto adecuando de conectivas" podemos definir el resto.

	Negación y Conjunción $\{\neg, \wedge\}$	**Negación y Disyunción** $\{\neg, \vee\}$	**Negación y Condicional** $\{\neg, \rightarrow\}$
Conjunción	-	$\neg(\neg x \vee \neg y)$	$\neg(x \longrightarrow \neg y)$
Disyunción	$\neg(\neg x \wedge \neg y)$	-	$\neg x \longrightarrow y$
Condicional	$\neg(x \wedge \neg y)$	$\neg x \vee y$	-

Nor

- Se denota con $\downarrow$ y no es más que la negación de la disyunción, es decir $\neg$ (p $\vee$ q). Su tabla de verdad es por lo tanto la siguiente:

p	q	p $\downarrow$ p
1	1	**0**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Nand

- Se denota con | y no es más que la negación de la conjunción, es decir $\neg$ (p $\wedge$ q). Su tabla de verdad es por lo tanto:

p	q	p | q
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**1**