| | | | |
|---|---|---|---|
| Instituto Superior Santo Domingo | **UNIDAD Nº 2:** <br> **Límite y Continuidad** | **TEMAS:** <br> **Continuidad** | Clase <br> **7** |

**Objetivos:**

- Conocer las condiciones de continuidad en un punto.
- Analizar la continuidad de una función en un punto.
- Encontrar y expresar las zonas de continuidad de una función.

## Introducción

En la clase de hoy vamos a estudiar un concepto matemático bastante intuitivo, como lo es la continuidad. Trataremos de que siga siendo tan sencillo como el concepto que ya tenemos incorporado, ya que no se aleja mucho de eso.

## Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio hasta finalizar la unidad 2
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Realiza la lectura del material, correspondiente al tema indicado.
- Ten en cuenta que la misma noción intuitiva que tenemos de continuidad es la que se refiere a las funciones, pero por supuesto con una definición más estricta.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.

- Comunicarse con el profesor, utilizando el "Campus del Instituto", si no pudiera salir por si solo de la duda que le pudiera surgir, NO DEJE QUE SU DUDA PERDURE.

## Continuidad

Las funciones que hasta ahora se han considerado, y sus gráficas, tienen una característica muy importante, y esta es la continuidad. Intuitivamente una función es **continua**, si es posible dibujar el gráfico correspondiente, sin levantar el lápiz del papel, es decir, el gráfico de la función no tiene cortes ni saltos. La definición rigurosa de continuidad es:

$$\mathbf{f} \text{ es } \mathbf{continua} \text{ en el } \mathbf{punto\ a} \quad \begin{cases} 1)\ \exists \\ 2)\ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ 3)\ \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{cases}$$

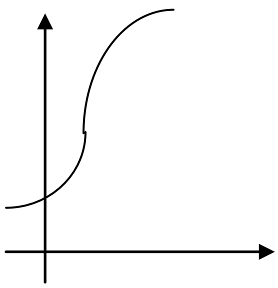
Es suficiente que **una** de las tres condiciones **no** se cumpla, para que la función no sea continua en el punto **a**, se dice entonces que **"f** es **discontinua** en **a"**.

Obsérvese que se habla de continuidad en un punto, si una función es continua en todos los puntos de su dominio se dice que la función es continua; de lo contrario se deben aclarar los intervalos de continuidad o los puntos de discontinuidad.

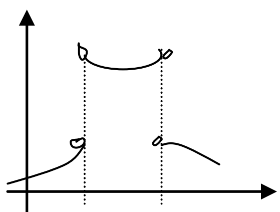
<u>Ejemplo Nº9:</u>

Continuidad en un intervalo.

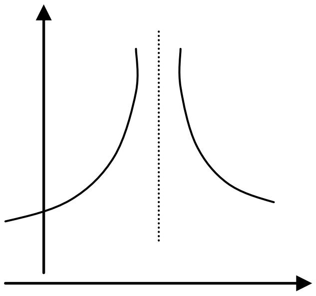
a



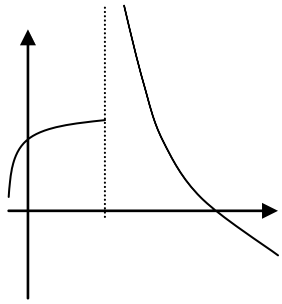
b



a



b



Se dice que una función es **continua en un intervalo [a;b]** cuando lo es en cada de los puntos interiores y además es continua a la derecha de **a** y a la izquierda de **b**.

En símbolos:

$$\mathbf{f} \text{ es } \textbf{continua} \text{ en } \mathbf{[a;b]} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{1)}\ \text{f es continua en (a;b)} \\ \textbf{2)}\ \lim\limits_{x\to a^{+}} f(x) = f(a) \\ \textbf{3)}\ \lim\limits_{x\to b^{+}} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Si no se cumple 2) y 3) se dice que f es continua en (a;b).

Si no se cumple 2) se dice que f es continua en (a;b].

Si no se cumple 3) se dice que f es continua en [a;b).

Ejercicio Nº 3:

Indica en las siguientes funciones, los puntos de discontinuidad.

a) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$  b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$  d) $p(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**Tipos de discontinuidad**

Los distintos tipos de discontinuidad surgen según que condición de la definición de continuidad no se cumpla.

1) **Discontinuidad evitable**: Se cumple la segunda condición, pero no se cumple la primera o la tercera. Es el caso del ejercicio Nº 3-d.

2) **Discontinuidad esencial**: Es el caso en que no se cumpla la segunda condición, pero puede no cumplirse de dos maneras, dando lugar a:

a) **Discontinuidad esencial de 1º especie**: Existen los límites laterales pero no son iguales, y por lo tanto no se cumple la segunda condición. Es el caso del ejemplo Nº 9, segundo gráfico.

b) **Discontinuidad esencial de 2º especie**: Por lo menos uno de los límites laterales no existe. Es le caso del ejercicio Nº 3-a.

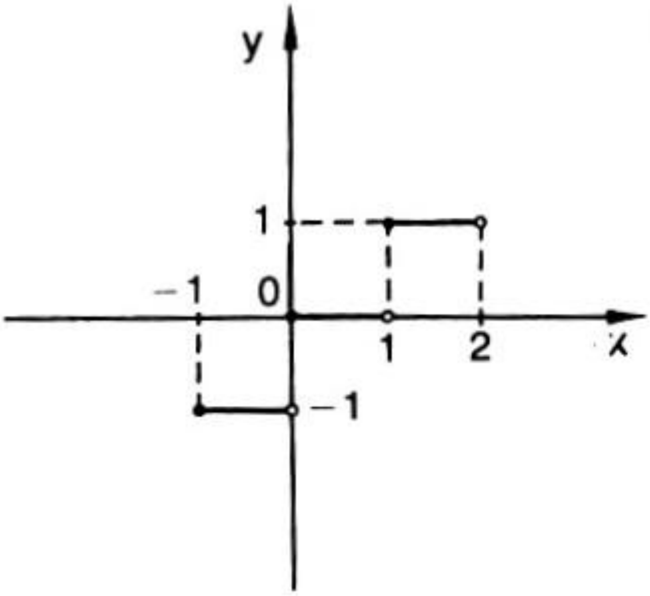
En resumen:

Discontinuidad en a

- **Evitable**
  $\exists \lim f(x) = L$
  - $L \neq f(a)$
  - $\nexists f(a)$
- **Esencial**
  $\nexists \lim f(x)$
  - 1º especie
    $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to b^+} f(x)$
  - 2º especie
    $\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y/o $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Un ejemplo de discontinuidad esencial lo mostramos a continuación en el gráfico de la función Parte entera de x, es decir:

**y = [ent x]**




**Relación**

Sería de muchísima utilidad realizar un repaso de las funciones elementales estudiadas en la unidad anterior para la mejor comprensión de nuevos temas y facilitar la resolución de los nuevos ejercicios.

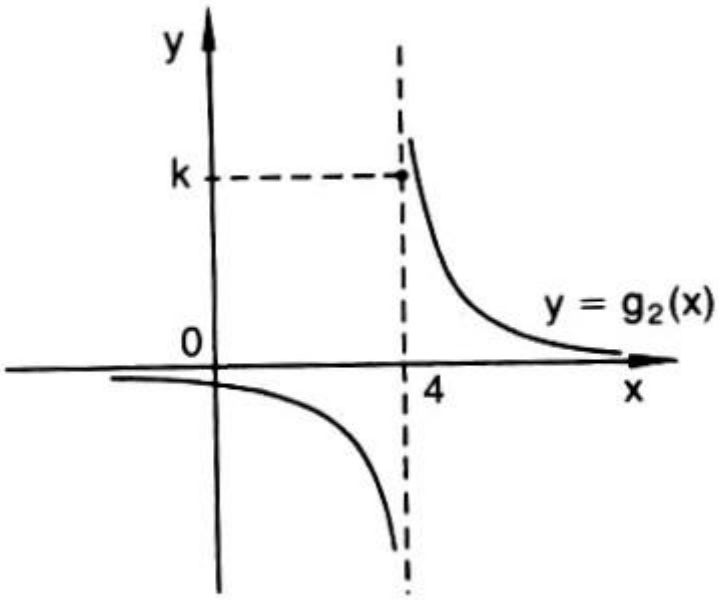
Podría decirse que la función es continua a la derecha de 0 ya que:

$$\lim_{0+} (\text{ent } x) = f(0) = 0$$

A este tipo de discontinuidades se las llama **discontinuidad esencial.**

Otro ejemplo de discontinuidad esencial lo presenta la función g(x) en el punto 4, como se representa gráficamente a continuación.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x=1 \end{cases}$$




Ejemplo:

Consideremos la función definida por partes:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+4} & \text{si } x \neq 4 \\ k & \text{si } x=4 \end{cases}$$

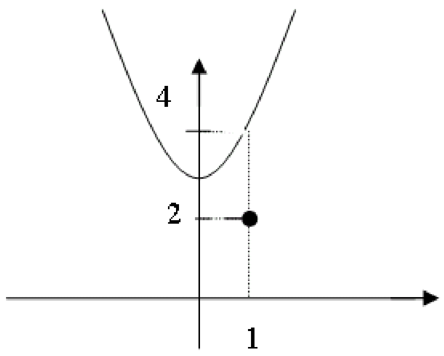
¿Es continua la función en el punto de empalme?

1º Sí existe f(1) pues f(1) = 2

2º Sí existe $\lim_2 f(x)$ y es 4

3º No se cumple que $\lim_2 f(x) = f(1)$ ya que $2 \neq 4$

El gráfico de esta función es:




**Álgebra de funciones continuas.**

Si revisamos las propiedades de los límites finitos, y teniendo en cuenta que la definición de continuidad parte del límite, podemos darnos cuenta que las propiedades son similares.

Sean f y g dos funciones continuas para el mismo conjunto, y continuas en $x_0$, entonces se cumple que:

a) La suma de funciones continuas es continua. f + g es continua en $x = x_0$.
b) El producto de funciones continuas es continua. f. g es continua en $x = x_0$
c) El cociente de funciones continuas es continua. f: g es continua en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$.
d) Para la composición de funciones: Si g es continua en $x_0$ y f es continua en $g(x_0)$ entonces se cumple: f(g(x)) es continua en $x = x_0$

<u>Ejemplo:</u>

La función f(x) = x. sen(x) es continua ya que como las vimos en la unidad 1, ambas son funciones continuas por lo tanto su producto también lo es.

La función $g(x) = \text{sen}(x^2 + 4)$ es continua ya que es la composición de dos funciones continuas, la función seno y la función cuadrática.

La función $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{x+2}$ es continua, ya que las dos son funciones continuas, salvo en el punto x = -2, pues es ahí donde se anula el denominador.

**Continuidad en un intervalo cerrado**

Diremos que la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b] si es continua a derecha de a, a izquierda de b, y además en cada punto comprendido entre a y b.

**Algunas propiedades:**

1- Si una función continua en [a,b] toma valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, entonces alcanza también todos los valores comprendidos entre esos dos números reales.
2- Si una función f es continua en [a,b] y k es un valor comprendido entre f(a) y f(b), entonces debe existir un punto p, interior al intervalo [a,b], tal que f(p) = k.
3- Si una función es continua en [a,b] y f(a) < 0 y f(b) > 0 o viceversa, entonces debe existir un punto del intervalo donde el valor de la función sea nulo.
   Otro modo de decirlo es: Si una función f es continua en [a,b] y f(a) . f(b) < 0 , entonces debe existir un punto p del intervalo, que cumpla que f(p) = 0.

**¿Cómo estudiar la continuidad de funciones?**

Se nos pueden presentar distintas preguntas:

¿Es continua la función f en $x = x_0$?

¿Dónde la función f no es continua?

¿Cuáles son los intervalos de continuidad de la función f?

Situaciones relacionadas a la primer pregunta ya hemos resuelto, veamos ahora mediante ejemplos, las relacionadas con las dos últimas.

Ejemplo:

¿Dónde la función $f(x) = \dfrac{4x}{2(x^2-9)}$ es discontinua?

Responder esta pregunta implica encontrar los puntos x en donde f no sea continua, es decir puntos que no cumplan alguna de las tres condiciones de la definición de continuidad. Ya que la primer condición pide que la función exista en el punto, busquemos los valores de x que no se encuentren en el dominio de la función. Serían los valores anulan el denominador:

$$2(x^2 - 9) = 0$$

$$(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ \text{ y } \ x = -3$$

Estos serían puntos fuera del dominio, entonces valores que no cumplen la primer condición de continuidad.

Por ser la función f un cociente funciones continuas, será continua en cualquier otro punto distinto a los encontrados arriba.

La respuesta sería entonces: “los puntos de discontinuidad de f son 3 y – 3”.

Ejemplo:

¿Cuáles son las zonas de continuidad de la función g(x) = $\sqrt{2x+6}$?

Para responder a esta pregunta el camino a seguir es básicamente el mismo anterior, ya que si conocemos los puntos de discontinuidad, se los “quitamos” al conjunto R, y el resultado de la diferencia me indicará donde la función sí es continua.

Buscamos entonces los puntos de discontinuidad, para ello planteamos los que no cumplen la primer condición:

$$2x + 6 < 0$$

$$2x < -6$$

$$x < -6 / 2 \quad \Rightarrow \quad x < -3$$

Los puntos que no están en el dominio son los x < – 3 por lo tanto la función no es continua en dichos puntos; entonces la función g(x) es continua en x > – 3. ¿Qué sucede en el punto – 3? En ese punto que sí está en el dominio se presenta el problema de no poder acercarnos a él por la izquierda, por lo que NO existe límite lateral izquierdo en – 3, como consecuencia de ello no existe el límite en – 3 y por lo tanto no es continua en – 3.

La respuesta sería:

La zona de continuidad de g(x) = $\{x / x \in R \wedge x > -3\} = (-3, \infty)$

## Función por partes

Si la función a estudiar es una función definida por partes, el procedimiento es similar. Se hace lo mismo que en los casos anteriores para cada una de las partes de la función, teniendo bien en cuenta el intervalo de actuación correspondiente a cada una. Una vez hecho eso debe estudiarse en forma particular la continuidad en cada uno de los puntos de empalme que haya. Y por último se arman los intervalos de continuidad.

**Advertencia**

En las funciones por partes debe tenerse en cuenta que en todos los puntos de empalme que haya, es necesario analizar las tres condiciones, y para la segunda aplicar los límites laterales.

Ejemplo:

Encuentre los intervalos de continuidad de la función h(x)

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{2-x}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ 2^x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Analizamos entonces cada parte:

Los puntos de discontinuidad de la primera parte serían los que anulan el denominador, es decir: $x = 1$ y $x = -1$, pero el 1 no corresponde a la región de la definición ya que $1 > 0$, por lo que el único punto de discontinuidad de la primera parte es $x = -1$.

La segunda parte es una resta de funciones continuas, por lo que no tiene entonces puntos de discontinuidad.

Hasta ahora tenemos un solo valor de discontinuidad para las dos partes, lo que queda por hacer es analizar el punto de empalme $x = 0$.

Para ello analicemos las tres condiciones:

1º- Sí existe $h(0) = 2^0 - 2 \Rightarrow h(0) = -1$

2º- ¿Existe el $\text{Lim}_0\, h(x)$?

Para respondernos deberemos tomar los límite laterales:

$\text{Lim}_{0^-} h(x) = \text{Lim}_{0^-} \frac{2-x}{x^2-1} = -2$

$\text{Lim}_{0^+} h(x) = \text{Lim}_{0^+} 2x - 2 = -1$

Como los límites laterales son distintos, el límite total en x = 0 no existe. Esto significa que no se cumple la segunda condición de continuidad en el 0. La función h es discontinua también en el punto de empalme.

**Respuesta:**

La función h(x) es continua en:

$$R - \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$$

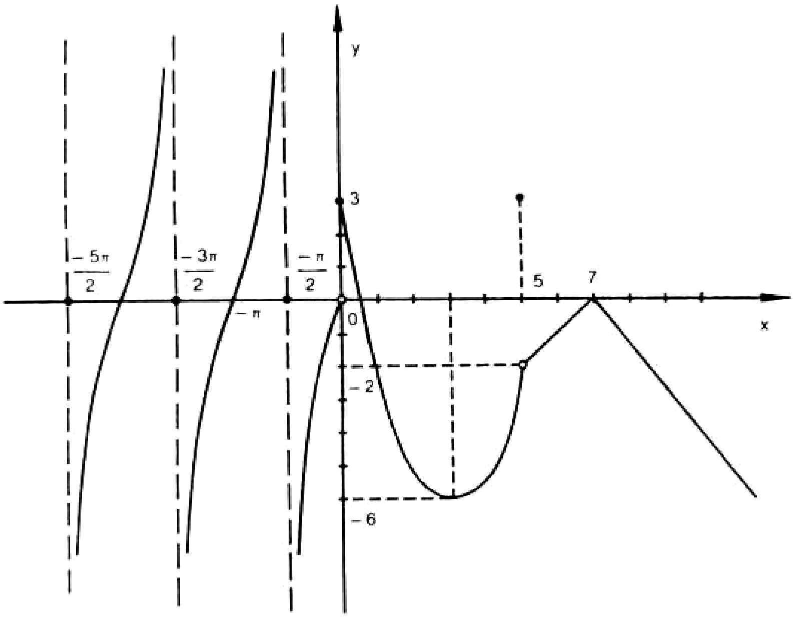
<u>Ejemplo:</u>

Consideremos la función por partes

$$f(x) = \begin{cases} -| \ x - 7 & \text{si } x > \\ 3 & \text{si } x = 5 \\ x^2 - 6x + 3 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ \text{tg } x & \text{si } x < 0 \text{ y } x \ne (1-2n).\pi/2 \\ 0 & \text{si } x = (1-2n).\ \pi/2 \ \ n \in N \end{cases}$$

Realizando un estudio de cada parte y de los puntos de empalme, llegamos a determinar que el dominio de f es todo R, pero f es discontinua en los puntos 5, 0 y (1 – 2n) $\pi/2$ con n $\in$N.

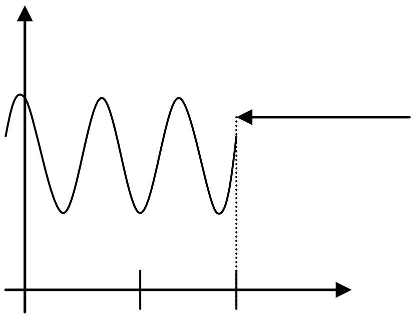
Su gráfico nos muestra lo dicho:



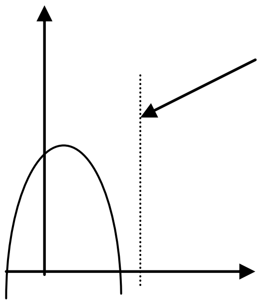

## Trabajo Práctico

1) Determina si las siguientes funciones son o no continuas en los puntos indicados y en caso de no serlo, enunciar la o las condiciones que no se verifican en la definición de continuidad (indica el tipo de discontinuidad)

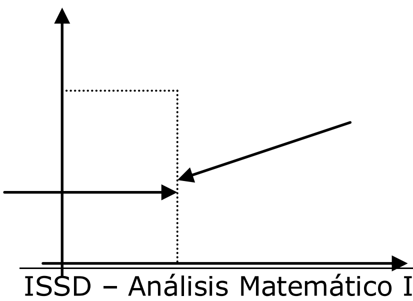
a



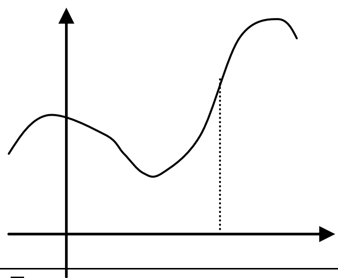
b

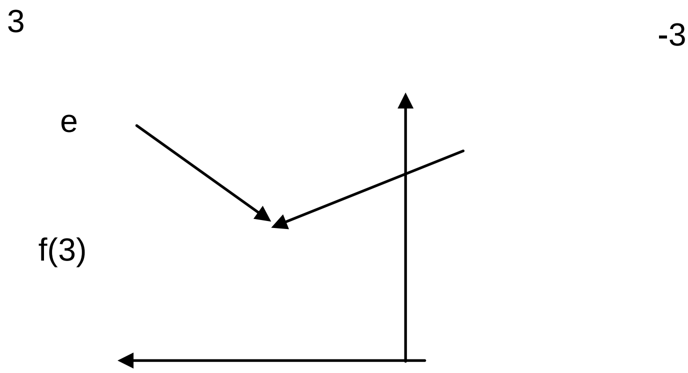


c



d






2) Con las funciones f, g y j del ejercicio 15 y sus gráficas (ejercicio.16), determina que condiciones de la definición de continuidad no se cumplen en el punto de empalme.

3) Determina los puntos donde las funciones dadas no son continuas. Justifica tu respuesta.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $g(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } t > 0 \\ -t + 1 & \text{si } t < 0 \\ 3 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

d) $i(x) = \operatorname{tg}(x)$

4) Determina las regiones de continuidad, indicando los puntos de discontinuidad de:

a) $f(x)=\dfrac{x3+4}{(x2-5).(x+1)}$

b) $g(x)=\dfrac{x+1}{x^3-2x^2+x}$

c) $h(x)\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & si\ x\neq 1\\ 2 & si\ x=1\end{cases}$

d) $j(x)=\begin{cases}e^x & si\ x>0\\ 1+x & si\ x<0\end{cases}$

e) $k(x)\begin{cases}\left\{\dfrac{1}{x}+4\right. & si\ x>2\\ 3x^2-1 & si\ x\leq 2\end{cases}$

f) $l(x)\begin{cases}\left\{\dfrac{x+2}{x^2-1}\right. & si\ x>2\\ \log(1/2-x) & si\ x<1\end{cases}$

5) Aplicando propiedades, decide si son o no continuas las siguientes funciones. Justifica.

a) m(x) = $e^x$ + x

b) $p(x)=\dfrac{2^x+3x}{3^x}$

c) $q(x)=x^2.\left\{\dfrac{1}{2}\right\}^x$;

d) $r(x)=\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$