TP Nª 2 – Funciones de varias variables

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. Garcia y la JTP Ing. Erika A. Sacchi, bajo la supervisión del Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro

1. Temario

- Dominio de funciones de varias variables
- Superficies
- Curvas de nivel
- Superficies de nivel

2. Resumen teórico

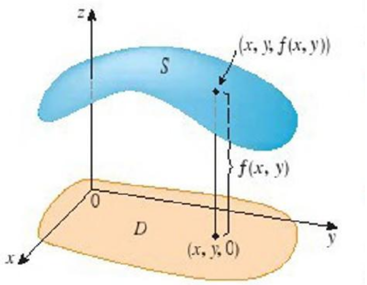
Función de 2 variables

Sea $D \subset R^2$. Una función de dos variables es una correspondencia que asocia a cada par $(x, y) \in D$ un único número real $f(x, y)$. D es el dominio de f.

Notación: $f: D \to R$, dada por $z = f(x, y)$

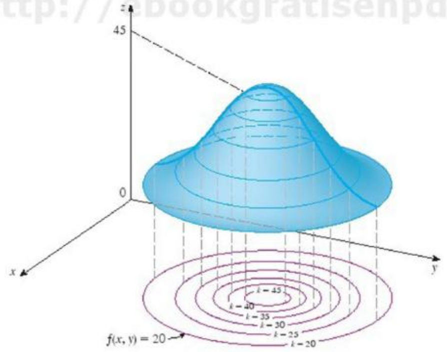
Gráfica de una función de dos variables, es una superficie en R^3 dada por

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in R^3 / \ (x, y) \in D\}$$



Curva de nivel k es el conjunto de todos los puntos del dominio de f para los cuales f toma el valor k.

$$C_k = \{(x, y) \in D \ / \ f(x, y) = k\}$$



Función de 3 variables

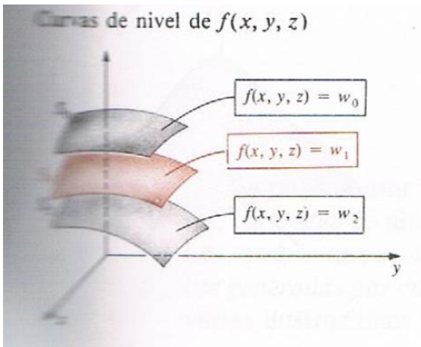
Sea $D \subset R^3$. Una función de dos variables es una correspondencia que asocia a cada terna$(x, y, z) \in D$ un único número real$f(x, y, z)$. D es el dominio de f.

Notación:

$$f: D \to R, \text{ dada por } w = f(x, y, z)$$

Superficie de nivel k es el conjunto de todos los puntos del dominio de f para los cuales f toma el valor k.

$$S_k = \{(x, y, z) \in D \; / \; f(x, y) = k\}$$



Función de n variables

Sea $D \subset R^n$. Una función de n variables es una correspondencia que asocia a cada n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ un único número real $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. D es el dominio de f.

Notación: $f: D \to R$, dada por $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

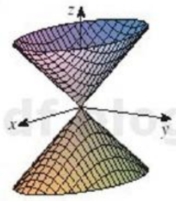
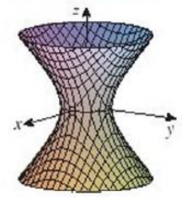
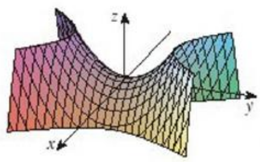
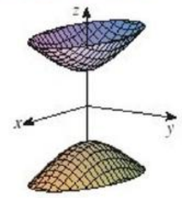
Repasar

Curvas Cónicas

Curva		Parábola	Elipse	Hipérbola
Parámetros		$p \to$ Dist. vértice al foco $\to$ Dist. vértice a directriz	$2a \to$ Long. eje mayor $2b \to$ Long. eje menor $2c \to$ Dist. entre focos $c^2 = a^2 - b^2$	$2a \to$ Long. eje transverso $2b \to$ Long. eje conjugado $2c \to$ Dist. entre focos $c^2 = a^2 + b^2$
Ec. Ord. con centro en el origen	El eje focal es el eje x	$y^2 = 4px$ Directriz: $x + p = 0$, Foco: $F(p, 0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F(c, 0), F'(-c, 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F(c, 0), F'(-c, 0)$
Ec. Ord. con centro en el origen	El eje focal es el eje y	$x^2 = 4py$ Directriz: $y + p = 0$, Foco: $F(0, p)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Focos: $F(0, c), F'(0, -c)$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F(0, c), F'(0, -c)$
Ec. Ord. con centro fuera del origen	Eje focal paralelo al eje x	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Ec. Ord. con centro fuera del origen	Eje focal paralelo al eje y	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Longitud del lado recto		$4p$	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Excentricidad		$e = 1$	$e = c/a < 1$	$e = c/a > 1$

Supericies Cuádricas.

TABLA 1 Gráficas de superficies cuádricas

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todas las trazas son elipses. Si $a=b=c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x=k$ y $y=k$ son hipérbolas si $k\neq 0$ pero son pares de rectas si $k=0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas Se ilustra el caso donde $c<0$.	Hiperboloide de dos hojas 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas horizontales en $z=k$ son elipses si $k>c$ o $k<-c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

3. *Ejercicios resueltos*

Dado que el contenido fundamental de este trabajo práctico se feriere a representación de superficies en el espacio, no se incluyen ejercicios resueltos sino que se dejan los mismos para su discusión en la clase práctica.

4. *Ejercicios propuestos*

1. Determinar y graficar el dominio de las siguientes funciones. Describir el recorrido de las mismas.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

b) $f(x,y) = ln\,(4 - x - y)$

c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

d) $f(x,y) = \frac{2}{x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = \frac{1}{ln\,(6x+4y-3)}$

f) $f(x,y) = arc\ sin\,(5x - 3y)$

g) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

2. Representar gráficamente las siguientes superficies

a) $6x + 3y + 4z = 24$

b) $6x + 4z = 24$

c) $4z = 12 - 3y^2$

d) $x^2 + (z-2)^2 = 4$

e) $4x^2 + 6y^2 = 1$

f) $z = e^x$

g) $z = y - x^2$

3. Describir y graficar las curvas de nivel de la función para el valor indicado

a) $z = xy$ para $z = 1, z = -1, z = 2, z = -2, z = 3, z = -3$

b) $z = y - x^2$ para $z = -1,0,1,2,3$

c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ para $K = -1, K = 1$

d) $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$; $z = 0, 2, 4, 6\ y\ 8$

e) Sea $f(x,y) = y.arctg\ x$, encuentre una ecuación para la curva de nivel de f que pasa por el punto $P(1,4)$

4. Dibujar la superficie de nivel para el valor indicado

a) $w = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ para $w = 1, 2, 3$

b) $f(x,y) = ln\,(x^2 + y^2 + z^2)$ para $w = 1$

c) $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$; $w = -1, 0, 1, 2$

d) Sea $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - z^2$, encuentre una ecuación para la superficie de nivel de f que pasa por el punto $P(2, -1,3)$

5. Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.