Instituto Superior Santo Domingo	**UNIDAD Nº 3:** Derivadas	**TEMAS:** Reglas de derivación Interpretación geométrica	Clase 9

Objetivos:

- Conocer las derivadas sucesivas
- Interpretar el significado geométrico de la derivada
- Conocer las reglas de derivación
- Derivar utilizando la las reglas de derivación

Introducción

Como lo pudimos ver en la clase anterior la derivada de una función la podemos hacer mediante su definición, pero para agilizar los cálculos, aprenderemos a utilizar algunas reglas y también las tablas de derivadas elementales.

Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio correspondiente al tema, preferentemente desde el inicio de la unidad y hasta la interpretación geométrica.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Realiza la lectura del material, correspondiente al tema indicado, repasando los conceptos previos.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Si bien no aplicarás en otras ocasiones la definición para derivar, es interesante que al menos un par de veces derives de esa manera.

- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.
- Comunicarse con el profesor, utilizando el “Campus del Instituto”.

Continuidad de una función derivable

Relación entre la derivada y la continuidad de una función:

Así como vimos que no todas las funciones son continuas, al menos no lo son en algún número de puntos, también existen funciones que NO tienen derivada en algunos valores de su dominio.

La propiedad de una función, de ser derivable es más fuerte o tiene más peso que la de ser continua. Esto significa que la derivabilidad de una función en un punto asegura la continuidad en el mismo, pero la recíproca no siempre se cumple, ya que si una función es continua en x_0 ello no nos asegura que exista la derivada en x_0.

Hay un teorema del análisis que afirma y demuestra:

Si una función tiene derivada finita en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Las derivadas de dos funciones básicas

Según los siguientes teoremas podemos conocer la derivada de las funciones constante e identidad:

Teorema:

Si una función f es constante, entonces f es derivable en todo R, y su derivada vale cero para todo punto.

Esto es obvio, ya que si se trata de una función constante $f(x + \Delta x) = f(x)$ por lo tanto

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \text{ entonces}$$

$$\underline{Lim \qquad f(x + \Delta x)} - f(x) \qquad = \quad 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \qquad \Delta x$$

Teorema:

Si la función f es identidad, entonces f es derivable en todo R, y su derivada vale uno para todo punto.

Si f(x) = x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - (x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = 1$$

Comentario

Es probable que estos dos teoremas en algunos textos, estén presentados como dos propiedades.

Tabla de derivadas elementales

Como se ha hecho en los ejemplos anteriores, toda función puede derivarse utilizando su definición. Pero personas dedicadas al estudio de la matemática nos han simplificado la tarea y determinaron las funciones derivadas de las funciones elementales. Con ellas se puede escribir una tabla como la que se detalla a continuación, pero también puede utilizar cualquier otra que sea más completa que ésta:

f(x)	f ´(x)
K	0
x^n	$n\ x^{n-}$
ln x	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\ .\log_a e$
e^x	e^x
a^x	$a^x\ .\ \ln a$
sen x	cos x
cos x	- sen x
tg x	$\sec^2 x$

Derivadas Sucesivas

En muchas ocasiones tendremos que analizar funciones derivadas de otras, para lo cual tendremos que derivarlas. Es por esta razón que a una función se la puede derivar, y a su resultado también, y a este último nuevamente, y así sucesivamente. A este proceso se lo llama encontrar las derivadas sucesivas de la función original.

Un ejemplo de ello sería:

Sea $f(x) = 3\ x^4 + 2x$

La derivada primera es: $f´(x) = 3.4\ x^3 + 2 = 12\ x^3 + 2$

La derivada segunda es: $f´´(x) = 12.\ 3\ x^2 + 0 = 36\ x^2$

La derivada tercera es: $f´´´(x) = 36\ .2\ x = 72\ x$

Y así se podría seguir encontrando las derivadas sucesivas de la función f(x)

Reglas para derivar funciones

Como ya lo dije antes, para encontrar la derivada de una función, siempre es posible hacerlo utilizando su definición, pero ese trámite resulta sumamente complicado y extenso cuando la función no es simple. Es por ello que existen algunas reglas, como las que detallaré a continuación, que nos permitirán derivar las funciones de una manera más rápida y sencilla.

Comentario

Para simplificar la explicación se han empleado dos funciones, pero debes entender que puedes sumar o multiplicar más de dos. Debes tener mucho cuidado al hacerlo

Derivada de una suma de funciones

La derivada de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las derivadas de cada una de ellas

En símbolos:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivada de la multiplicación de funciones

La derivada de un producto de funciones es igual a la suma de los productos entre la derivada de la primera por la segunda sin derivar y la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

En símbolos:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Glosario

Como consecuencia del primer teorema y de la regla del producto, podemos decir que:
La derivada de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función.
$(c.f(x))' = c.\ f'(x)$.

Derivada de la división de funciones

Expresar coloquialmente esta regla resulta demasiado engorroso, es por ello que es preferible escribirla directamente en símbolos:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Derivada de una composición de funciones

La derivada de una composición de funciones es igual al producto de la derivada de la función exterior valuada en la función interior y la derivada de la función interior.

En símbolos:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$$

A esta regla también se la conoce como **regla de la cadena.** Con estas reglas de la derivación y con la ayuda de la tabla de derivadas de funciones elementales, podremos derivar funciones, por complejas que parezcan.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $g(x) = 2.\, e^x + \text{sen } x$.

Lo primero que debemos tener en cuenta es determinar las operaciones involucradas, para poder aplicar las propiedades en el orden correspondiente, esto hasta llegar a la derivada de funciones elementales que aparecen en las tablas.

Entonces:

$$(g(x))' = (2 \,.\, e^x + \text{sen } x)'$$

Por la derivada de la suma

$$(g(x))' = (2.\, e^x)' + (\text{sen } x)'$$

Por la derivada de la constante por una función

$$(g(x))' = 2 \,.\, (e^x)' + (\text{sen } x)'$$

Ahora utilizando la tabla, quedaría

$$\boxed{(g(x))' = 2.\, e^x + \cos x}$$

Ejemplo:

Derivar la función $h(x) = 4x^3 .\cos x$

$$(h(x))' = (4x^3 .\cos x)'$$

Por la derivada de un producto

$$(h(x))' = (4x^3)'.\cos x + 4x^3.(\cos x)'$$

Por la constante por la función

$$(h(x))' = 4.(x^3)'.\cos x + 4x^3 .(\cos x)'$$

Ahora utilizamos la tabla

$$(h(x))' = 4.\ 3x^2 .\cos x + 4x^3 . (-\text{sen } x)$$

$$\boxed{(h(x))' = 12x^2 .\cos x - 4x^3 . \text{sen } x}$$

Advertencia

Por favor no se equivoque al derivar un cociente o un producto de funciones. No es el cociente ni el producto de las derivadas.

Ejemplo:

$f(x) = \text{sen } (x^3)$

En este caso estamos en presencia de una composición de funciones, por lo que tendremos que aplicar la última de las reglas o regla de la cadena, en la cual la función principal es $y = \text{sen } x$ y la función interior es $y = x^3$.

Por lo tanto:

Si $g(x) = \text{sen } x \quad \rightarrow g'(x) = \cos x$

Si $h(x) = x^3 \quad \rightarrow h'(x) = 3\, x^2$

$$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) . h'(x)$$

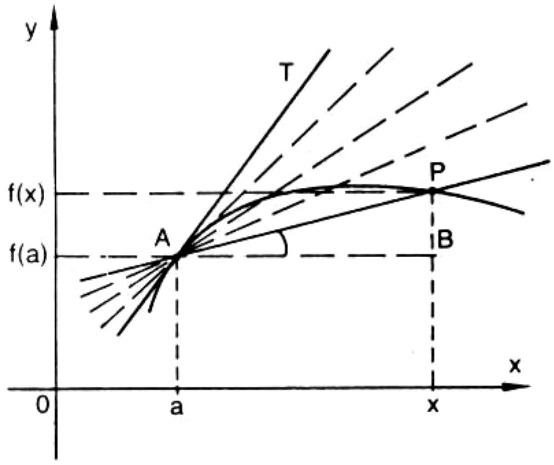
$$f'(x) = \cos (h(x)) . 3.x^2$$

$$f'(x) = \cos (x^3) . 3.x^2$$

Entonces quedaría expresado: $\boxed{f'(x) = 3.x^2. \cos (x^3)}$

La interpretación geométrica de la derivada

Observemos atentamente el gráfico que a continuación se muestra, para poder comprender el razonamiento



Considerando los puntos A y P pertenecientes a la curva correspondiente a la función f(x), cuyas coordenadas son (a, f(a)) y (x, f(x)) respectivamente, queda definida una recta que pasa por ellos. La pendiente de esa recta secante a la curva sería:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si ahora hacemos que el punto P se vaya acercando al punto A, podríamos definir las otras rectas secantes a la curva como las que se muestran, cuyas pendientes se obtendrían de igual manera. De esta forma estaríamos haciendo que el punto P tienda al punto A, por lo que "x" tiende a "**a".**

Entonces si $x - a = \Delta x$ entonces $f(x) = f(a + \Delta x)$, por lo que la pendiente de la recta secante quedaría escrita de la siguiente forma:

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Por lo que si ahora hacemos que el punto P tienda al punto A, o sea que x tienda a "a", estaríamos calculando:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Que no es otra cosa que la derivada de la función f en el punto x = a. Si observamos nuevamente el gráfico, al acercar infinitamente el punto P al punto A, la recta que cortaba a la curva en dos puntos ahora solo lo haría en uno, en el punto A. Esto implica que la recta no es secante a la curva sino tangente.

La conclusión es:

La derivada de la función en un punto, representa la pendiente de la recta tangente a la curva correspondiente, en el punto considerado.

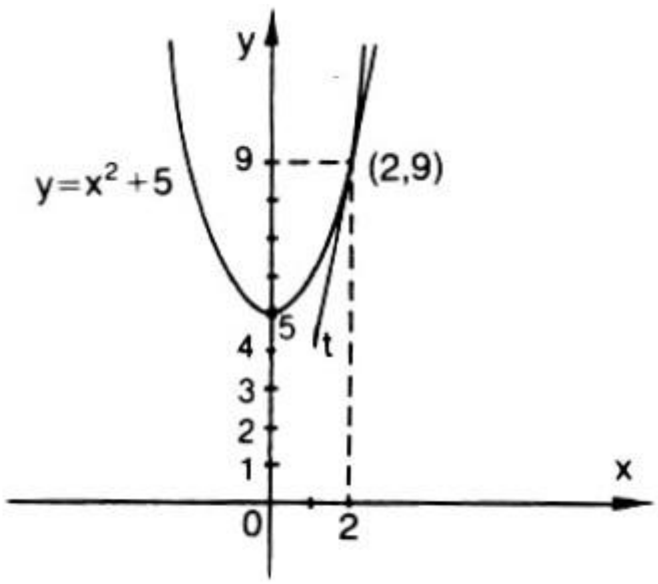
Ejemplo:

Consideremos la función $f(x) = 5 + x^2$, y deseamos determinar la pendiente de la recta tangente a su curva en x = 2, es decir el punto de la curva (2, 9).

Para ello entonces debemos derivar la función valuarla en x = 2

$$F(x) = 5 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (2,9) es "4". Si lo representamos gráficamente tendríamos:



Trabajo Práctico

Ejercicio 4:

Empleando las reglas de la suma y producto de funciones, encuentre las derivadas de:

a- $y = 5x^3 - 4x$
b- $y = x.\ln x$
c- $y = (x + 3)^2$
d- $y = 7x^2 - \text{sen } x$
e- $y = (\cos x).(\text{sen } x)$
f- $y = \log x + 5x^2 - \cos x$

Ejercicio 5:

Empleando las reglas del cociente y de la composición de funciones, encuentre las derivadas de:

a- $y = \frac{2x-1}{x+1}$
b- $y = \cos x^3$
c- $y = \frac{x + senx}{\cos x}$
d- $y = \ln (x^3 + x)$
e- $y = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$
f- $y = \sqrt{senx}$

Ejercicio 6:

Calcule la derivada de las siguientes funciones en el punto indicado:

a- $f(x) = 3e^x . \cos x$ en $x = 0$
b- $g(x) = \frac{x^2 - x}{x+2}$ en $x = 2$
c- $h(x) = 2x^3 + 5x - x^2$ en $x = -1$

Ejercicio 7:

Encuentre la derivada tercera de las siguientes funciones:

a - $y = 3x. \operatorname{sen}x$

b - $y = \frac{2}{x^2}$

Ejercicio 8:

Determine la pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a - $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto (2, ½)

b - $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$ en el punto (2, 3)

Ejercicio 9:

Escriba la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado:

a - $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

b - $y = 3x \cdot (1/2)^x$ en el punto $(1, \frac{3}{2})$

Ejercicio 10:

Determine si las curvas correspondientes a las siguientes funciones tienen alguna recta tangente horizontal. Si la tiene escriba su ecuación, caso contrario justifique:

a - $f(x) = x^3 - 3x$

b – $g(x) = \operatorname{tg} x$

c - h(x) = $\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$