TP Nª 4 – Derivadas parciales

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. Garcia y la JTP Ing. Erika A. Sacchi, bajo la supervisión del Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro

1. Temario

- Derivación parcial de funciones de dos y tres variables. Definición.
- Interpretación geométrica de la derivada parcial de funciones de dos variables.
- Derivadas parciales de orden superior
- Teorema de Claireaut (ó Lema de Schwartz)
- Ecuaciones diferenciales parciales

2. Resumen teórico

Derivadas parciales

Sea f una función de dos variables. Las primeras derivadas parciales de f con respecto a x y a y son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

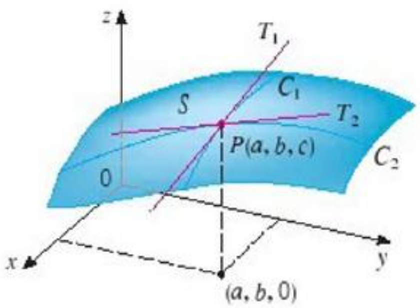
Regla para determinar las derivadas parciales de $f(x,y)$:

1. Para determinar $f_x(x,y)$ conservar a y constante y derivar $f(x,y)$ con respecto a x.
2. Para determinar $f_y(x,y)$ conservar a x constante y derivar $f(x,y)$ con respecto a y.

Notaciones

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Interpretación de la derivada parcial



Sea S la superficie correspondiente a la gráfica de $f(x,y)$. Sea (a,b) un punto en el dominio de f y sea $c = f(a,b)$. El punto $P(a,b,c)$ está ubicado sobre S. Sea C_1 la curva intersección de S con el plano vertical $y = b$ y sea C_2 la curva intersección de S con el plano vertical $x = a$.

La derivada parcial $f_x(a,b)$ se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente T_1 a la curva C_1 en el punto $P(a,b,c)$.

Análogamente la derivada parcial $f_y(a,b)$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente T_2 a la curva C_2 en el punto $P(a,b,c)$.

Derivadas de orden superior

Derivadas segundas

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Analogamente para las derivadas terceras, etc.

Teorema de Clairaut (o lema de Schwartz)

Sea f una función de dos variables *x e y.* Si f, f_x , f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en una región abierta *R*, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en *R*.

Funciones de 3 variables

Sea f una función de tres variables. Las primeras derivadas parciales de f con respecto a *x,* a *y*, y a *z* son las funciones f_x , f_y y f_z definidas por:

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_y(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_z(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

Ecuaciones diferenciales parciales

Son ecuaciones diferenciales en las que aparecen derivadas parciales. Involucran entonces funciones de varias variables. Por ejemplo la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

3. Ejercicios resueltos

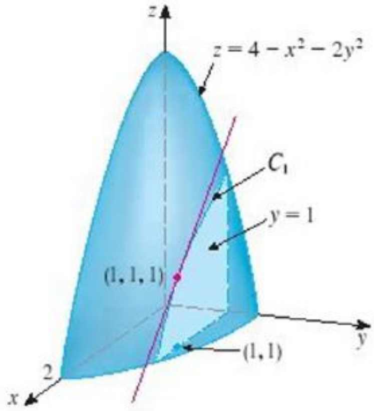
1) **Sea $f(x,y)=3x^2+\ x^2y^3-2y^2$, determine $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$**

Considerando a y como constante, y derivando respecto de x, se obtiene:
$f_x(x,y)=6x+2\text{x}y^3$, luego $f_x(2,1)=6.2+2.2.1^3=12+4=16$

Considerando a x como constante, y derivando respecto de y, se obtiene:
$f_y(x,y)=3x^2y^2-4\text{y}$, luego $f_y(2,1)=3.2^2 1^2-4.1=1244=8$

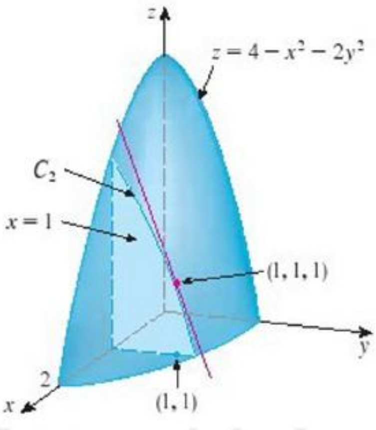
2) **Sea $f(x,y)=4-\ x^2-\ 2y^2$, determine $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$ e interprete esos números como pendientes.**

Tenemos:
$f_x(x,y)=\ -2x$
$f_y(x,y)=\ -4y$
$f_x(1,1)=\ -2$
$f_y(1,1)-4$



La gráfica de la función es el paraboloide $z=4-\ x^2-\ 2y^2$.
El plano vertical $y=1$ lo intersecta en la parábola $z=2-x^2, y=1$, dando lugar a la curva C_1 en el gráfico.

$f_x(1,1)=\ -2$ es la pendiente de la recta tangente a esa parábola en el punto $(1,1,f(1,1))=(1,1,1)$



Del mismo modo el plano vertical $x=1$intersecta al paraboloide en la parábola z = 3 – 2 y^2, $\text{x}=1$, dando lugar a la curva C_2 en el gráfico.

$y(1,1)=\ -4$ es la pendiente de la recta tangente a esa parábola en el punto $(1,1,f(1,1))=(1,1,1)$

3) **Sea $f(x,y) = \sin\frac{x}{1+y}$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$.**

Aplicando regla de la cadena para funciones de una variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) . \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) . \left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) . \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) . \left(\frac{-1}{(1+y)^2}\right)$$

4) **Sea $f(x,y) = y\, e^{xy}\ \ln z$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\, e^{xy}\ \ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy}\ \ln z + xye^{xy}\ \ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y\, e^{xy}}{z}$$

5) **Sea $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, calcule las derivadas segundas.**

Primero calculamos las derivadas primeras

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y$$

y a continuación calculamos las derivadas segundas

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 6xy^2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 4$$

Se verifica que $f_{xy} = f_{yx}$. Esto no es coincidencia ya que al ser f, f_x , f_y, f_{xy} y f_{yx} continuas en $\mathbb{R}^2$ se aplica el Teorema de Claireaut y las derivadas segundas cruzadas son iguales en $\mathbb{R}^2$.

6) **Sea $f(x,y) = \sin(3x + yz)$, calcule f_{xxyz}**

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$
$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$
$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$
$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

7) **Verifique que $f(x,y) = e^x \sin y$ es una solución de la ecuación de Laplace**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Calculamos las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

8) **Verifique que $u(x,t) = \sin(x - at)$, $a \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos(x - at)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -a\cos(x - at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x - at)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\sin(x - at) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

De este modo $u(x,t)$satisface la ecucion diferencial en derivadas parciales.

4. *Ejercicios propuestos*

1) Encontrar las primeras derivadas parciales respecto de cada una de sus variables:

a) $f(x,y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$ utilizando la definición y evaluar en el punto $(2,-1)$

b) $f(x,y) = 2x^4 y^3 - xy^2 + 3y + tg\, y$

c) $f(t,v) = ln \sqrt{\frac{t+v}{t-v}}$

d) $f(u,w) = arc\ tg\ \frac{u}{w}$

e) $f(x,y) = e^x\ ln\, xy$

f) $z = \frac{x^2}{x+y}$

g) $w = x^2 y^3 . \sin z + e^{xz}$

h) $f(r,s,v) = (2r + 3s)^{\cos v}$

i) Hallar las derivadas cruzadas de las funciones anteriores.

j) Calcular las derivadas segundas de las funciones anteriores.

k) ¿Qué conclusión puede obtener de las derivas cruzadas?

l) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva intersección el plano $x = 3$ con la superficie $36\,z = 4x^2 + 9y^2$ en el punto $(3,2,2)$

m) Sea $w = e^{-c^2\,t}\, sin\; cx$, demuestre que $w_{xx} = w_t$ para todo número real c.

n) Sea $w = tg\; uv + 2\ln(u+v)$ verificar que w_{uvv} = w_{vuv}= w_{vvu}

2) Analizar las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

i. Verificar que f no es continua en (0,0)

ii. Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

i. Hallar $f_x(x,y)$y $f_y(x,y)$ para (x,y) ≠ (0,0)

ii. Hallar $\mathrm{f_x}(0,0)$ y $\mathrm{f_y}(0,0)$

iii. Hallar $\mathrm{f_{xy}}(0,0)$ y $\mathrm{f_{yx}}(0,0)$. ¿Qué se puede decir con respecto a la continuidad?

1) Determinar si las siguientes funciones son armónicas (satisfacen la ecuación diferencial de Laplace):

a) $f(x,y) = ln\,(\sqrt{x^2 + y^2})$

b) $f(x,y) = cos\; x\; sinh\; y + sin\; x\; cosh\; y$

2) Demuestre que las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

a) $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

b) $u(x,y) = e^x\; cos\,y \;\; , v(x,y) = e^x\; sin\,y$

Obs: Ecuaciones de Cauchy – Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

5. Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.