Tabla de Contenidos

Introducción 3

1 – Los Signos 4

2 – Comunicación, Lenguaje y Metalenguaje 5

3 – Lenguaje Natural 5

1. Elementos del lenguaje Natural 5
2. ¿Qué es una oración? 5
3. ¿Qué es una oración enunciativa o enunciado? 5
4. Insuficiencias del Lenguaje Natural 6

4 – Lenguaje Artificial 6

5. Elementos que integran un lenguaje artificial 6

5 – Lenguaje Formal 7

¿Qué significa que los signos de un Lenguaje Formal carecen de significado? 7

¿Qué significa que las reglas de un Lenguaje Formal poseen la eficacia de un cálculo? 7

6 – La Lógica como Lenguaje Formal 7

1. ¿Qué es un Razonamiento? 7
2. Condiciones que debe rendir un razonamiento para ser formalmente válido 8

7 – Lógica Proposicional o Lógica de Enunciados 9

1. Los Signos de la Lógica Proposicional 10

a) Variables proposicionales: 10

b) Símbolos auxiliares 10

c) Conectivas o constantes lógicas 10

Conectivas 11

1. Conectiva Negación (¬ ~ -) 11
2. Conectiva Conjunción (∧ & *) 12
3. Conector Disyunción (∨ +) 13
4. Conector Condicional (⟶) 14
5. Conector Bicondicional (⟷) 15
6. ¿Cómo formalizar en la Lógica Proposicional cualquier expresión del Lenguaje Natural? 15
7. Conector Disyunción Excluyente (⊻ ⊕) 17
8. Jerarquía de Conectivas 17
9. Fórmulas Bien Formadas (FBF) 18
10. Tablas de Verdad de cualquier Fórmula 19

Clasificación de Fórmulas 21
1. Tautología 21
2. Contradicción 21
3. Consistente 22
4. Contingencia 22
5. Implicación Lógica y Equivalencia Lógica 22
6. Leyes de la Lógica Proposicional 23
PRINCIPIOS 23
LEYES 23
Formas Normales 24
Proposición 24
Corolario 24
Corolario 25
Conjuntos adecuados de conectivas 25
Reducción de Conectivas 26
¿Existen conjuntos unitarios adecuados de conectivas, es decir con una sola conectiva? 26
Nor 26
Nand 26
Razonamientos o Argumentos 27
1. Forma argumentativa o argumentación 27
2. Cálculo de Deducción Natural (CDN) 29
Regla de la Eliminación del Negador ($E_{\neg}$) 30
Regla de la Introducción del Negador ($I_{\neg}$) 30
Regla de la Eliminación del Conjuntor ($E_{\wedge}$) 30
Regla de la Introducción del Conjuntor ($I_{\wedge}$) 30
Regla de la Eliminación del Disyuntor ($E_{\vee}$) 31
Regla de la Introducción del Disyuntor ($I_{\vee}$) 31
Regla de la Eliminación del Condicional o Implicación ($E_{\rightarrow}$) 31
Regla de la Introducción del Condicional o Implicación ($I_{\rightarrow}$) 31
Regla de la Eliminación del Bicondicional ($E_{\leftrightarrow}$) 31
Regla de la Introducción del Bicondicional ($I_{\leftrightarrow}$) 32
Regla de Modus Tollendo Tollens 32
Regla del Silogismo Disyuntivo 32
Regla de Transitividad del Condicional 33
Regla de Contraposición del Condicional 33

Conmutatividad de la Conjunción 34
Conmutatividad de la Disyunción 34
Asociatividad de la Conjunción 34
Asociatividad de la Diyunción 34
Regla de Ex contradictione quodlibet 35
Leyes de De Morgan 35
Tipos de demostraciones para validar un razonamiento 35
1. Método Directo 35
2. Métodos Indirectos 37
i. Método por contraposición o contrarecíproco 37
ii. Método por Reducción al Absurdo (o Contradicción) 38

Introducción

Lo más importante en matemáticas y computación es conocer la veracidad de una aseveración.

La palabra lógica viene del griego y significa, razón, tratado o ciencia. Y en computación es la ciencia que estudia la forma de razonar correctamente, la que nos indica la forma correcta de obtener conclusiones y los métodos conocidos para lograrlo.

La lógica como cualquier ciencia y como la filosofía busca la verdad y es la que establece las reglas para hacer un razonamiento correcto. Aquí debemos distinguir entre pensamiento correcto y verdadero, la lógica proporciona una herramienta para saber si un desarrollo es correcto, pero la veracidad del mismo dependerá de las premisas o sea las condiciones de las que se parte.

Por ejemplo, si el maestro dice que todos los alumnos que traigan la tarea tendrán un punto extra en el examen. Si Juan me dice que llevó la tarea se puede concluir correctamente que obtuvo un punto más. Este es un razonamiento correcto, sin embargo, la veracidad de la conclusión depende de la veracidad de las dos premisas. Si por ejemplo Juan me dijo mentiras y no entregó la tarea, ya no podemos estar seguros de que la conclusión es verdad. Lo mismo sucede si el maestro no cumple su promesa y cambia de opinión acerca de subir un punto, o si el maestro no ha estudiado lógica.

Resumiendo: Si las condiciones dadas (premisas) son verdaderas, la lógica nos enseña métodos de razonamiento o inferencia correctos para saber en qué casos la conclusión es también verdadera.

La Lógica es importante para los estudiantes de computación primeramente porque proporciona una forma de saber si un desarrollo es correcto, tanto en matemáticas como en otras materias de ciencias; pero también es importante porque nos presenta el lenguaje de expresiones booleanas que utilizamos en los diferentes lenguajes de Programación, en Bases de Datos, y cualquier otra materia de computación que utilice conceptos lógicos.

1 – Los Signos

Cualquier realidad que representa o evoca, para alguien, otra cosa distinta de sí misma la consideramos un signo.

Ejemplos: las señales de tráfico, las palabras, la danza de las abejas, el vuelo de las aves, el humo, los sueños…

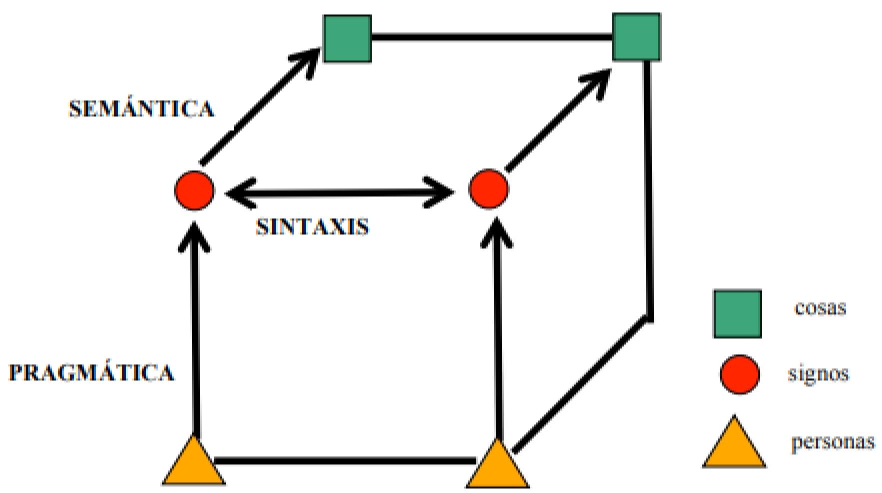
Por tanto, para que algo pueda ser considerado signo es necesario, en primer lugar, que tenga algún significado para alguien.

Una primera aproximación a los signos distingue entre aquellos que poseen un solo significado (son llamados **señales**), y aquellos que poseen significaciones múltiples (**símbolos**). Ahora bien, si tenemos en cuenta **el tipo de relación que los signos mantienen con su significado**, éstos se clasifican en:

- **Vestigios o índices**: La relación que este tipo de signos mantiene con su significado es de carácter natural. Por ejemplo: el humo es «índice» o «vestigio» del fuego, una huella en la arena lo es del animal correspondiente, etc.
- **Imágenes o iconos**: La relación que este tipo de signos mantiene con su significado es una relación de semejanza o parecido. Por ejemplo: algunas señales de tráfico, las fotografías, las pinturas realistas, los emoticonos, etc.
- **Símbolos**: son aquel tipo de signos que mantienen con su significado una relación puramente arbitraria o convencional. Por ejemplo: las palabras del lenguaje natural humano, los números, las pinturas abstractas, las banderas o los signos de la lógica…

La ciencia que estudia los signos se llama SEMIÓTICA. Ésta, a su vez, se divide en tres partes, que constituyen tres maneras de estudiar los signos:

1. **Sintaxis**: estudia los signos teniendo únicamente en cuenta las diversas relaciones que se establecen entre ellos con independencia de su significado. Este es el tipo de estudio que realizan todas las Gramáticas.
2. **Semántica**: estudia los signos teniendo en cuenta la relación que mantienen con su significado o referencia, es decir, con las cosas de la realidad representada por ellos. Este es el tipo de estudio que hacen los Diccionarios o las Etimologías.
3. **Pragmática**: estudia los signos teniendo en cuenta la relación que existe entre ellos y las personas que los utilizan para comunicarse o representar algo. Este es el tipo de estudio que realizan los investigadores de las jergas o argots profesionales, étnicos, regionales, de pandillas…



2 – Comunicación, Lenguaje y Metalenguaje

La comunicación es un fenómeno natural basado en la capacidad que poseen todas las especies animales de transmitirse información mediante signos de muy diverso tipo: sonoros, visuales, olfativos, etc.

Esta capacidad la encontramos especialmente desarrollada en el lenguaje humano.

Pues, aunque los animales pueden transmitir información mediante signos unívocos (señales: así, por ejemplo, que un perro gruña y te enseñe los dientes es señal indudable de que te puede morder), el lenguaje humano está compuesto principalmente de signos multívocos (símbolos), y además posee la capacidad referirse a sí mismo. Es decir, puede convertirse en un Metalenguaje: es el lenguaje usado para hablar del propio lenguaje, es decir, de sí mismo. [La capacidad autorreferencial del lenguaje humano es el origen de buena parte de las paradojas lógicas].

Ejemplo: La frase «“Gato” tiene cuatro letras» es una frase en la que el lenguaje habla de sí mismo y, por tanto, pertenece al «metalenguaje». A diferencia de la frase «El gato de mi casa es gris», en la cual el lenguaje sirve para referirse a la realidad extralingüística.

3 – Lenguaje Natural

Se entiende por Lenguaje Natural al lenguaje (=conjunto de símbolos) utilizado por una sociedad para comunicarse. Precisemos que tal lenguaje no es ‘natural’ en sentido estricto, sino que lo aprendemos en la sociedad, la cual lo ha ido creando a lo largo del tiempo, siendo por ello artificial (=algo construido por el hombre) a diferencia de lo que ocurre con los demás animales cuyo lenguaje sí es totalmente natural o innato, pues lo expresan de modo espontáneo, incluso si no están en contacto con otros individuos de su misma especie.

No obstante, llamaremos Lenguaje Cotidiano, Ordinario, o incluso también Lenguaje Natural, al que aprendemos en sociedad sin apenas darnos cuenta y que sirve para comunicarnos y referirnos a la realidad que nos rodea.

1. Elementos del lenguaje Natural

El Lenguaje Natural humano consta de un conjunto finito de símbolos (palabras que forman el Vocabulario) y un número finito también de reglas (constituyen la Sintaxis), las cuales determinan cómo combinar correctamente los símbolos del vocabulario, es decir, establecen cómo formar correctamente oraciones en ese lenguaje.

2. ¿Qué es una oración?

Es una expresión lingüística sintácticamente correcta (=está bien construida de acuerdo con las reglas) y que posee sentido completo. Llamamos «expresión lingüística» a cualquier combinación de símbolos de un lenguaje. Ejemplos: “El cuarzo es un mineral”, “¿Qué hora es?”, “Cierra la puerta”, etc.

Por el contrario, expresiones como “Vivir con cuándo”, “Lloviendo noche estaba aquella”, etc. no son oraciones porque o bien no tienen sentido completo o son sintácticamente defectuosas.

3. ¿Qué es una oración enunciativa o enunciado?

Es una expresión lingüística que tiene sentido completo y que puede ser verdadera o falsa. De los anteriores ejemplos de oraciones, sólo el primero (“El cuarzo es un mineral”) es un enunciado, pues dice algo que puede ser verdadero o falso, mientras que los otros dos ejemplos (“¿Qué hora es?”, “¡Cierra la puerta!”) no lo son porque no cabe preguntarse si es verdadero o falso lo que ‘dicen o expresan’.

Desde Aristóteles se denomina "uso apofántico" del lenguaje a la utilización de éste para formular oraciones cuyo contenido puede ser verdadero o falso; estas oraciones reciben el nombre de enunciados. Son oraciones que se refieren a algún hecho de la realidad y que, por tanto, si lo 'expresan' bien, son verdaderas, y si no, falsas.

4. Insuficiencias del Lenguaje Natural

Dada la multivocidad (=riqueza significativa) que lo caracteriza, el Lenguaje Natural resulta insuficiente para las exigencias de exactitud de la ciencia o para la formulación precisa de razonamientos complejos (aunque esa riqueza expresiva lo convierta en el mejor aliado del poeta, el novelista o el orador). Las insuficiencias del Lenguaje Natural

con respecto a la precisión de sus expresiones son consecuencia de:

a) Ambigüedades semánticas: en el Lenguaje Natural hay muchas palabras y expresiones cuyo significado no es preciso, sino ambiguo; rebosa de términos polisémicos (es decir, palabras que tienen más de un significado). Ejemplo: "Pedro alquiló una casa" (no sabemos si la casa que Pedro alquila es de su propiedad y se la alquila a otra persona, o si Pedro la alquiló para habitarla él), "Llevaba el gato en el coche", "Te sigo",…
b) Deficiencias sintácticas: las reglas sintácticas que determinan cómo combinar correctamente las palabras del lenguaje natural carecen de criterios rigurosos que permitan evitar oraciones sin sentido. Ejemplos: "Los martillos cerrados paladean locamente", "Allí donde los libros bordean las ásperas playas se alza el fondo de planicie más elevado",…

4 – Lenguaje Artificial

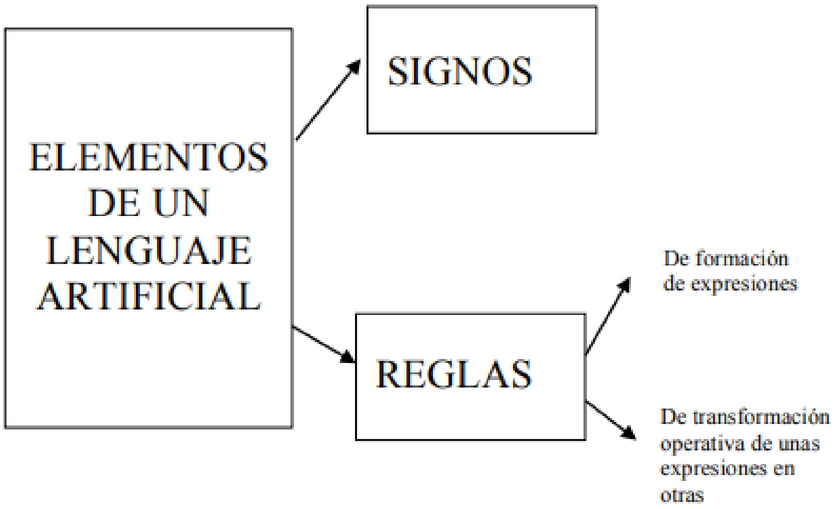
Tratando de superar las citadas limitaciones del Lenguaje Natural, con el objetivo de proporcionar a las ciencias un lenguaje exacto y riguroso, se han ido construyendo los Lenguajes Artificiales, esto es, lenguajes bien definidos que poseen una estructura sintáctica clara y una operativa eficaz.

En líneas generales puede decirse que todas las ciencias, en especial las ciencias de la naturaleza, emplean Lenguajes Artificiales y que ésta ha sido una de las condiciones para su progreso. Por ejemplo, los símbolos de la Química, la Física, la Biología, pero también los de la Economía, la Lingüística, etc., constituyen tipos de lenguaje artificial.

5. Elementos que integran un lenguaje artificial

Básicamente consta de los mismos elementos que cualquier lenguaje natural (un conjunto se signos y una serie de reglas sintácticas –para combinar dichos signos-), pero se le exige, además:

a) Que los signos estén bien definidos, para que no quepan ambigüedades;
b) Que el conjunto de las reglas para la formación de expresiones, impida la construcción de expresiones carentes de sentido y permita saber, en cualquier momento, si una determinada combinación de signos es una expresión bien formada del Lenguaje;
c) Y que posea, además, un conjunto de reglas operativas o de transformación de expresiones, que permita deducir a partir de unas expresiones correctas del Lenguaje otras que también lo sean, para de ese modo construir rigurosas y complejas cadenas deductivas.



La Lógica y las Matemáticas son ejemplos de Lenguajes Artificiales.

5 – Lenguaje Formal

Se denomina Lenguaje Formal a un Lenguaje Artificial cuyos signos son formales (es decir, carecen de significado) y cuya sintaxis permite operar con dichos signos como en un cálculo.

La Lógica y las Matemáticas son Lenguajes Artificiales y, además, Formales.

¿Qué significa que los signos de un Lenguaje Formal carecen de significado?

Pues que tales signos no se refieren en absoluto a la realidad. Así, por ejemplo, el signo matemático ‘2’ no se refiere a dos cosas concretas, como dos manzanas o dos peras; y lo mismo le ocurre, como veremos inmediatamente, a los signos lógicos ‘p’, ‘q’, ‘r’, que no se refieren a ninguna proposición determinada, pudiendo representar a cualquiera.

¿Qué significa que las reglas de un Lenguaje Formal poseen la eficacia de un cálculo?

- Que mediante tales reglas siempre podremos saber si una expresión (es decir, unconjunto de signos) está bien formada en ese lenguaje.
- Y que mediante la aplicación de dichas reglas podremos transformar expresiones bien formadas en dicho lenguaje en otras expresiones que también estén bien formadas (expresiones que por algún motivo nos interesa deducir).

6 – La Lógica como Lenguaje Formal

La Lógica puede definirse como aquella ciencia o reflexión sistemática que estudia las condiciones o leyes que debe cumplir todo razonamiento para ser formalmente válido.

1. ¿Qué es un Razonamiento?

Un razonamiento es un proceso mental que se caracteriza porque en él se produce el paso de ciertas afirmaciones (las PREMISAS) a otra afirmación (la CONCLUSIÓN) que se deriva, deduce o infiere de aquéllas.

{Una pequeña aclaración: todo razonamiento es pensamiento (es decir, es una actividad mental), pero no todo pensamiento es razonamiento, pues podemos pensar (en un árbol, en una isla o en un triangulo, por ejemplo), sin pretender sacar conclusión alguna acerca de lo pensado, es decir, sin integrarlo en un razonamiento.}

2. Condiciones que debe rendir un razonamiento para ser formalmente válido

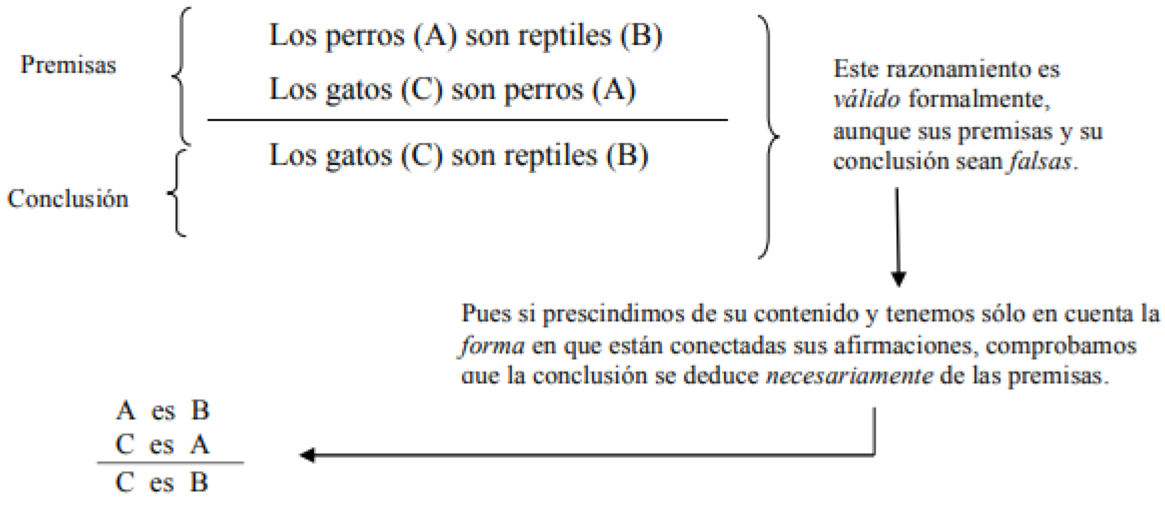
Un razonamiento es formalmente «válido», es decir, posee una estructura lógica correcta, cuando existe una conexión entre sus afirmaciones tal que la conclusión se deduce necesariamente de las premisas.

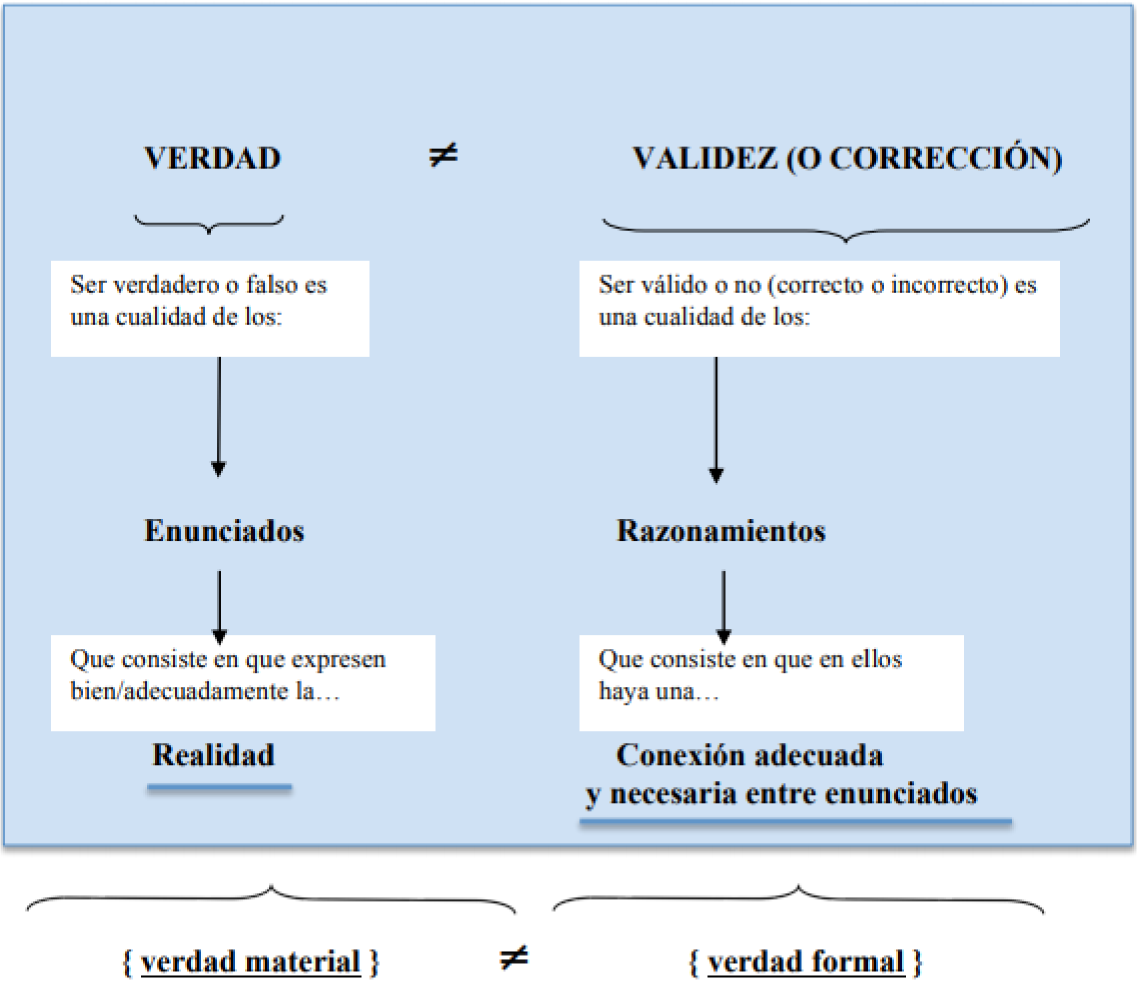
Hemos de distinguir entre verdad y validez:

- La verdad es una propiedad de los enunciados. Un enunciado será verdadero o falso si lo que él afirma ocurre o no en la realidad. Por ejemplo, “los gatos son animales con alas” o “está lloviendo”, son enunciados verdaderos si lo que afirman puede ser observado en la realidad. (A este tipo de verdad se le denomina también VERDAD MATERIAL)
- Los razonamientos, sin embargo, son válidos no porque los enunciados que lo integren sean verdaderos, pues es posible construir razonamientos perfectamente válidos con enunciados falsos, sino que un razonamiento es válido únicamente si la conclusión se deduce necesariamente de las premisas. (Esto es lo que se denomina también VERDAD FORMAL).

Lo que sí sabemos es que si un razonamiento es válido y las premisas son verdaderas, entonces la conclusión será necesariamente verdadera. De la «validez» del razonamiento se ocupa la Lógica (que es una ciencia formal), mientras que la «verdad» de las proposiciones es un asunto de las ciencias empíricas.

Veamos el siguiente ejemplo que nos permite distinguir verdad de validez:





7 – Lógica Proposicional o Lógica de Enunciados

La Lógica proposicional o de enunciados es el apartado más elemental y básico de la Lógica. Es el más elemental porque es el más sencillo. Es básico, porque sirve de base al resto del edificio de la Lógica.

La tarea de la Lógica proposicional consiste en ocuparse de estudiar la validez formal de los razonamientos tomando en bloque las proposiciones que los forman, es decir, sin hacer un análisis de tales proposiciones.

Una proposición es tomada en bloque cuando no se tienen en cuenta los elementos que la integran, pasando a ser considerada como un todo o unidad lingüística básica.

Así, por ejemplo, una proposición como "Los gatos son mamíferos" puede ser simbolizada en Lógica de varios modos, algunos de los cuales son los siguientes:

- En Lógica Proposicional: **p [Se lee «p»]**

  (toma la proposición en bloque sin analizarla)

- En Lógica Silogística: **S -A- P [Se lee «Todos los S son P»]**

  (analiza la proposición y tiene en cuenta cuál es el sujeto y el predicado de la misma, además analiza si el predicado se dice de todos, algunos o ningún sujeto)

- En Lógica de Predicados: **Λx (Gx → Mx) [Se lee «Para todo 'x', si 'x' es 'G', entonces 'x' es 'M'»]**

  (el análisis destaca el tipo de relación que se da entre las propiedades atribuidas al sujeto de la proposición)

En la LÓGICA PROPOSICIONAL una proposición es simple si no puede descomponerse en partes que a su vez sean proposiciones. También se la denomina proposición atómica. Ejemplos: "Los gatos son mamíferos", "Pedro viene con Luis". Mientras que una proposición será compleja si está compuesta por varias proposiciones simples unidas de algún modo. También es llamada proposición molecular. Ejemplos: "Los gatos son mamíferos, pero a mí me gustan más los pájaros exóticos", "Si Pedro viene con Luis y trae comida, nos iremos todos al campo".

1. Los Signos de la Lógica Proposicional

a) Variables proposicionales:

Para simbolizar las proposiciones simples se utilizan las letras minúsculas del alfabeto a partir de la "p" (p, q, r, s, t, u, a, b, c…). Estas letras se denominan variables proposicionales porque se utilizan para representar a cualquier proposición del Lenguaje Natural. Por ejemplo: la proposición simple "Los gatos son mamíferos" la simbolizamos con una "p". Y la proposición compleja "Los gatos son mamíferos y les gusta cazar ratones" la simbolizamos como 'p y q'.

Admitimos que cualquier proposición simple es o bien verdadera o bien falsa, pero no ambas cosas a la vez. Éste es el Principio de Bivalencia: las proposiciones simples sólo pueden tener dos valores de verdad: o son verdaderas o son falsas.

P	→	Cualquier proposición
1	→	Verdadera
0	→	Falsa

b) Símbolos auxiliares

En lógica se utilizan paréntesis, corchetes y llaves para agrupar ordenadamente las proposiciones. ( ) , [ ] , { }

c) Conectivas o constantes lógicas

Se denominan conectivas a aquellos signos lógicos que sirven para unir a las proposiciones entre sí. Las conectivas que manejaremos son las siguientes:

Conectiva	Representación	Ejemplo de frases en las que aparece
Negación	$\neg p$	no p es falso p no es cierto p
Conjunción	$p \wedge q$	p y q p pero q ambos, p y q p sin embargo q p no obstante q p a pesar de q

Disyunción	$p \vee q$	p o q bien p o q o p o q o ambos al menos p o q como mínimo p o q
Condicional (Implicación)	$p \rightarrow q$	si p entonces q p sólo si q q si p q cuando p q es necesario para p para p es necesario q p es suficiente para q para q es suficiente p no p a menos que q
Bicondicional (Equivalencia)	$p \leftrightarrow q$	p es necesario y suficiente para q p si y sólo si q p únicamente q
Disyunción excluyente	$p \veebar q$	o p o q p o q, pero no ambos O bien p, o bien q

Conectivas

1. Conectiva Negación (¬ ~ -)

La Negación es aquella conectiva que al aplicarse a una proposición cualquiera, sea simple o compleja, la convierte en falsa si es verdadera y en verdadera si es falsa.

¬ …se lee “no”

¬ p …se lee “ no-p”

¬ q …se lee “no-q”

Las expresiones siguientes: “No podremos ir de excursión a la Sierra de Gredos”, “Pedro ni siquiera me escuchó”, las simbolizamos ‘¬ p’.

Tabla de Verdad de la Negación

p	**¬ p**
0	**1**
1	**0**

Aclaración: la Negación es llamada «conectiva monádica» porque afecta sólo a una proposición, bien sea simple, **¬ p**, que se lee «**no-p**», o, como veremos enseguida, bien sea compleja, **¬ (p ∧ q)**, que se lee «**no es cierto que p y q**». Todas las demás conectivas son «diádicas» porque siempre afectan a dos proposiciones, sean simples o complejas.

2. Conectiva Conjunción (∧ & *)

La Conjunción es aquella conectiva que sólo es verdadera si las dos proposiciones que une son ambas verdaderas, y que es falsa en los demás casos.

∧ …se lee “y”

p ∧ q …se lee “p y q”

Las expresiones siguientes: “Hoy estamos alegres y nos iremos a bailar”, “Pedro es buena persona, aunque debería ducharse más”, “El sol se nubló, pero seguimos caminando”, las simbolizamos en lógica proposicional ‘p ∧ q’.

Tabla de Verdad de la Conjunción

Las combinaciones posibles de los valores de verdad de 2 proposiciones (p, q), cada una de las cuales puede ser verdadera o falsa, son cuatro: que las dos sean verdaderas, que una sea verdadera y la otra falsa, que una sea falsa y la otra verdadera, y que las dos sean falsas.

Para un número ‘n’ de proposiciones las combinaciones de sus valores de verdad serán 2^n.

p	q	**p ∧ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

p	q	r	p ∧ q	**(p ∧ q) ∧ r**
1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	0	0	**0**

Ejemplo 1: ¬ p ∧ q … se lee “no-p y q”, y su tabla de verdad sería:

p	q	¬p	**¬p ∧ q**
1	1	0	**0**
1	0	0	**0**
0	1	1	**1**
0	0	1	**0**

Ejemplo 2: p ∧ ¬ q … se lee “p y no-q”, y su tabla de verdad es:

p	q	¬q	**¬p ∧ q**
1	1	0	**0**
1	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	0	1	**0**

Ejemplo 3: ¬ (p ∧ q) … se lee “no es cierto que p y q”, y su tabla de verdad es:

p	q	p∧q	¬(p ∧ q)
1	1	1	**0**
1	0	0	**1**
0	1	0	**1**
0	0	0	**1**

Ejemplo 4: ¬ p ∧ ¬ q… se lee “no-p y no-q”, y su tabla de verdad es

p	q	¬p	¬q	¬p ∧ ¬q
1	1	0	0	**0**
1	0	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**

3. Conector Disyunción (∨ +)

La Disyunción es aquella conectiva que sólo es falsa si las dos proposiciones que une son ambas falsas, y verdadera en los demás casos.

∨ …se lee “o”

p ∨ q …se lee “p o q”

Las expresiones siguientes: “Pedro vendrá el lunes o el martes”, “O bien me quedo en casa o bien voy al cine”, “Tal vez mire esa película o tal vez compre ese CD, las simbolizamos ‘p ∨ q’.

La Tabla de Verdad de la Disyunción

p	q	**p ∨ q**
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Ejemplo 1: ¬ p ∨ q … se lee “no-p o q”, y su tabla de verdad sería:

p	q	¬p	**¬p ∨ q**
1	1	0	**1**
1	0	0	**0**
0	1	1	**1**
0	0	1	**1**

Ejemplo 2: ¬ (¬ p ∨ q) … se lee “no es cierto que no-p o q”, y su tabla de verdad es

p	q	¬p	¬p ∨ q	**¬(p ∨ q)**
1	1	0	1	**0**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	1	**0**
0	0	1	1	**0**

Ejemplo 3: ¬ (p ∧ q) ∨ ¬p … se lee “no es cierto que p y q, o no-p”, y su tabla de verdad es

p	q	p ∧ q	¬ (p ∧ q)	¬p	**¬ (p ∧ q) ∨ ¬p**
1	1	1	0	0	**0**
1	0	0	1	0	**1**
0	1	0	1	1	**1**
0	0	0	1	1	**1**

Ejemplo 4: p ∨ (¬ q ∧ ¬ p) … se lee "o bien p o bien no-q y no-p"; más sencillamente también puede leerse "p, o, no-q y no-p"; y su tabla de verdad, haciendo una presentación abreviada, es:

p	q			
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Primero asignamos los valores a las proposiciones simples 'p', 'q', 'r'..., y después vamos obteniendo el valor correspondiente de las conectivas que los unen o afectan, hasta obtener el valor de la "conectiva dominante" en la fórmula, es decir, la conectiva que afecta a toda la fórmula.

4. Conector Condicional (⟶)

El condicional o implicación es aquella conectiva que sólo es falsa cuando, siendo el antecedente verdadero, el consecuente sea falso, y verdadera en los demás casos.

Llamamos "**antecedente**" del condicional a la proposición que se halla a su izquierda, y "**consecuente**" a la que está a su derecha.

⟶ …se lee "Si ___, entonces ___"

p ⟶ q … se lee "Si p, entonces q"

p es el antecedente

q es el consecuente

Las expresiones "Si llueve, las calles se mojan", "Si vienes mañana, iremos a casa de Luis", "Si supieras lo que me ha dicho Pedro, quedarías perplejo", las simbolizamos como "**p ⟶ q**".

La Tabla de Verdad del Condicional

p	q	**p ⟶ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

Ejemplo 1: ¬ p ⟶ q … se lee "Si no-p, entonces q", y su tabla de verdad es:

p	¬p	q	**p ⟶ q**
1	0	1	**1**
1	0	0	**1**
0	1	1	**1**
0	1	0	**0**

Ejemplo 2: ¬ (p ⟶ ¬ q) … se lee "No es cierto que si p, entonces no-q", y su tabla de verdad es:

p	q	¬q	p ⟶ ¬ q	**¬(p ⟶ ¬q)**
1	1	0	0	**1**
1	0	1	1	**0**
0	1	0	1	**0**
0	0	1	1	**0**

5. Conector Bicondicional (⟷)

El Bicondicional o equivalencia es aquella conectiva que sólo es verdadera si las dos proposiciones unidas por ella tienen ambas el mismo valor de verdad, es decir, son ambas verdaderas o falsas a la vez.

⟷ …se lee "solo si …"

p ⟷ q …se lee "p solo si q" ó "Sólo si p, entonces q"

Las expresiones "Sólo si llueve, me quedaré en casa", "Sólo en el caso de que sepas la primera pregunta, deberás responder también a la segunda", "Te contestaré sólo si tu respuesta me satisface", las simbolizamos "p ⟷ q".

La Tabla de Verdad de la Disyunción

p	q	**p ⟷ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Ejemplo: p ⟷ ¬ q … se lee "Solo si p, entonces no-q" p también "p solo si no-q", y su tabla de verdad sería:

p	q	¬q	**p ⟷ ¬ q**
1	1	0	**0**
1	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	0	1	**0**

6. ¿Cómo formalizar en la Lógica Proposicional cualquier expresión del Lenguaje Natural?

Formalizar una expresión del lenguaje natural consiste en destacar la «forma» en que se relacionan las proposiciones de esa expresión, prescindiendo del contenido o significado de éstas. Dicho de otro modo: consiste en "traducir" al lenguaje artificial y formal de la lógica las expresiones del lenguaje natural.

Ejemplos:

Enunciado	**Convenciones Simbólicas**	**Formalización**
La comida no le supo bien	p: la comida supo bien	¬ p
Mañana es sábado y nos iremos a la playa	p: mañana es sábado q: nos iremos a la playa	p ∧ q
Aunque tú no me quieras, yo te amo	p: tú me quieres q: yo te amo	¬ p ∧ q
O bien te lo comes o no verás la tele	p: te lo comes q: verás la tele	p ∨ ¬ q

Lógica Proposicional o Lógica de Enunciados

O lo recoges todo o no vas de excursión y no te regalo el vestido	p: recoges todo q: vas de excursión r: te regalo el vestido	$p \lor (\neg q \land \neg r)$
Si vienes, no te lo olvides en casa	p: vienes q: olvídalo en cas	$p \longrightarrow \neg q$
Si no estuvo aquí el asesino, entonces no llegó a verle o lo supo demasiado tarde	p: estuvo aquí el asesino q: llegó a verle r: lo supo demasiado tarde	$\neg p \longrightarrow (\neg q \lor r)$
No por mucho madrugar amanece más temprano	p: por mucho madrugar q: amanece más temprano	$\neg (p \longrightarrow q)$
Sólo si baja la Bolsa 15 puntos, deberás vender el 10% de las acciones de la empresa y no comunicarlo al Consejo	p: la bolsa baja 15 puntos q: deberás vender el 10% de las acciones de la empresa r: comunicarlo al Consejo	$p \longleftrightarrow (q \land \neg r)$
Sólo en el caso de que no sepas hacer el dibujo y haya dos preguntas en la 2ª casilla del examen, deberás contestar únicamente a la primera de ellas	p: sepas hacer el dibujo q: haya 2 preguntas en la 2° casilla del examen r: contestar únicamente la 1° de ellas	$(\neg p \land q) \longleftrightarrow r$
Si Pedro sabe hablar inglés, entonces no habla francés, aunque si no supiese hablar inglés, tampoco hablaría francés	p: Pedro sabe hablar inglés q: Pedro habla francés	$(p \longrightarrow \neg q) \land (\neg p \longrightarrow \neg q)$
Si llegas después de las 10, te encontrarás con la puerta cerrada y no podrás cenar	p: llegas después de las 10 q: la puerta está cerrada r: podrás cenar	$p \longrightarrow (q \land \neg r)$
Juan abrirá la puerta y saldrá a la calle, sólo en el caso de que, si viene María con el coche, no venga con ella Pedro	p: Juan abrirá la puerta q: Juan saldrá a la calle r: viene María con el coche s: María viene con Pedro	$(p \land q) \longleftrightarrow (r \longrightarrow \neg s)$
No es verdad que si Antonio estudia, entonces María no trabaje	p: Antonio estudia q: María trabaja	$\neg (p \longrightarrow \neg q)$
Sólo si tú no lo has matado, te dejaremos libre	p: tú lo has matado q: te dejaremos libre	$\neg p \longleftrightarrow q$
Si no crees que lo que te digo ni lo que te dice Juan, nunca sabrás lo que pasó	p: tú crees lo que te digo q: tú crees lo que te dice Juan r: sabrás lo que pasó	$(\neg p \lor \neg q) \longrightarrow \neg r$
No es cierto que Fernando esté en Madrid y Juan no esté en Ávila	p: Fernando está en Madrid q: Juan está en Ávila	$\neg (p \land \neg q)$
Si eres licenciado, no puede ser cierto que no sepas leer ni escribir	p: eres licenciado q: sabes leer r: sabes escribir	$p \longrightarrow \neg (\neg q \land \neg r)$
Sólo si conoces Oviedo, podrás disfrutar a fondo leyendo La Regenta y no perderte entre sus tumultuosas páginas	p: conoces a Oviedo q: disfrutas a fondo leyendo La Regenta r: te perderás entre las tumultuosas páginas	$p \longleftrightarrow (q \land \neg r)$

7. Conector Disyunción Excluyente (⊻ ⊕)

La Disyunción Excluyente aquella conectiva que sólo es verdadera si sólo una de las proposiciones que componen la proposición compuesta es verdadera, y es falsa cuando ambas proposiciones poseen el mismo valor de verdad.

⊻ …se lee "o bien …, o bien …"

p ⊻ q …se lee "o bien p, o bien q"

Las expresiones siguientes: "O bien estudiaré música, o bien estudiaré canto", "O bien me quedo en casa o bien voy al cine", "O estás equivocado o es falsa la noticia que has leído", "Perú está en América o Europa", "O la ingeniería es una ciencia o es una técnica" las simbolizamos 'p ⊻ q'.

La Tabla de Verdad de la Disyunción

p	q	**p ⊻ q**
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

8. Jerarquía de Conectivas

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, es necesario conocer cuáles son las reglas que se aplican para determinar si la proposición completa es verdadera o falsa.

Asimismo, al tener fórmulas (enunciados) con dos o más conectivas, se deben conocer las reglas de precedencia y asociatividad de las conectivas para asegurar que la evaluación es correcta.

Para determinar la jerarquía de conectivas, se utilizará el siguiente orden:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee\ \oplus\ ,\ \longrightarrow,\ \longleftrightarrow$$

donde ¬ (negación) es el operador con mayor jerarquía en la secuencia y ⟷ (bicondicional) es el operador con el menor peso.

Nota: Para cambiar la precedencia que tiene asignada por defecto debemos utilizar paréntesis.

Ejemplo:

Dada la siguiente fórmula: ¬ p ∨ q ∧ r

El orden de evaluación es primero ¬P, posteriormente q ∧ r y finalmente se aplica ∨ al resultado de ambas evaluaciones.

Utilizando paréntesis sería: ((¬ p) ∨ (q ∧ r))

Al tener una fórmula con la presencia de *dos o más conectivas iguales*, el orden de asociatividad siempre es de *izquierda a derecha*.

Ejemplo:

- El orden de evaluación de P ⟶ Q ⟶ R es ((P ⟶ Q) ⟶ R) .
- El orden de evaluación de ¬(P ∨ Q) es primero P ∨ Q y luego la negación.

9. Fórmulas Bien Formadas (FBF)

Hasta ahora se ha analizado el significado de las proposiciones compuestas a partir del valor de verdad asociado a cada una de las proposiciones simples que las conforman, dando para ello las tablas de verdad correspondientes a cada uno de los conectivos del lenguaje.

Sin embargo, se debe también analizar formalmente cómo se deben armar correctamente las proposiciones, de manera tal que haya una única manera de interpretarlas. Las reglas necesarias para escribir correctamente una proposición conforman lo que se denomina sintaxis del lenguaje.

Como ya se mencionó, las proposiciones compuestas son agrupaciones de proposiciones simples (también llamadas átomos) unidas por conectivos lógicos. Para construir proposiciones, se requiere entonces de un conjunto de reglas que establecen la manera de escribir una proposición correcta. A las proposiciones obtenidas haciendo uso de estas reglas se las denomina fórmulas bien formadas (FBFs).

Se tiene definido, para escribir una fórmula bien formada, un alfabeto con los símbolos que pueden utilizarse. Una FBF sólo puede contener símbolos del siguiente conjunto: letras minúsculas que representen variables proposicionales, los conectivos lógicos (en nuestro caso: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\veebar$) y los símbolos auxiliares de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves, izquierdos y derechos).

Las siguientes reglas permiten construir una fórmula bien formada (FBF):

1. Una variable proposicional es una fórmula bien formada, también llamada fórmula atómica.
2. Si P es una fórmula bien formada, $\neg$ P también es una fórmula bien formada.
3. Si P y Q son fórmulas bien formadas, (P $\wedge$ Q), (P $\vee$ Q), (P $\veebar$ Q), (P $\longrightarrow$ Q) y (P $\longleftrightarrow$ Q) son fórmulas bien formadas.
4. Todas las fórmulas bien formadas se obtienen aplicando las reglas 1, 2 y 3.

Por lo tanto, para expresar cualquier proposición en Lógica Proposicional, se debe asociar a cada proposición simple distinta que la compone una variable proposicional que la represente y vincular dichas variables proposicionales a través de las reglas que permite incorporar los conectivos correspondientes, de manera tal de armar la fórmula bien formada que la representa.

Cabe aclarar que los paréntesis se utilizan en la escritura de las FBFs para asegurar una interpretación única del significado de las proposiciones. En caso de no usarlos habría que considerar, al interpretar la proposición, otras reglas que establezcan la prioridad o jerarquía de cada uno de los conectivos. Esta jerarquía se debe utilizar cada vez que se quiera evaluar una fórmula.

Utilizando estas reglas es posible, a partir de las fórmulas atómicas y los conectivos, construir proposiciones o fórmulas bien formadas más complejas de cualquier longitud.

Ejemplo:

Dadas las siguientes expresiones, se indica en cada caso cómo se clasifican y por qué:

- A es fórmula bien formada atómica, siendo A variable proposicional
- ((P $\longrightarrow$ Q) $\longrightarrow$ R) es FBF, siendo P, Q y R variables proposicionales
- (P $\longrightarrow$ Q $\longrightarrow$ R) es FBF, siendo P, Q y R variables proposicionales
- (P $\longrightarrow$ (Q $\longrightarrow$ R) no es FBF, a cada "(" le corresponde un ")"
- $\neg$ A es FBF, siendo A variable proposicional
- ($\neg$ P $\wedge\neg$ Q) FBF, siendo P y Q variables proposicionales
- (P $\neg\wedge$ Q) no es FBF, porque no se puede negar un conectivo
- $\neg$ [(P $\longrightarrow$ Q) $\longrightarrow$ R] es FBF, siendo P, Q y R variables proposicionales

10.Tablas de Verdad de cualquier Fórmula

Hemos hablado hasta ahora de cómo se construyen correctamente las FBFs de la Lógica Proposicional. Ahora debemos analizar cómo evaluar el significado de las mismas. Para ello, se puede construir una tabla de verdad para cualquier fórmula bien formada, utilizando las tablas de verdad de los conectivos ya analizadas.

Para hallar la tabla de verdad de cualquier fórmula hay que dar los siguientes pasos:

1) En primer lugar, se asignan los valores 1 y 0 a las proposiciones simples que componen la fórmula, combinando de todos los modos posibles tales valores. Si en la FBF aparecen **n variables proposicionales distintas**, la tabla deberá constar de **2^n entradas o filas**. Por convención, la última columna representa la evaluación de la FBF completa, para todas las posibles combinaciones de valores.

Recordemos que para una fórmula con dos proposiciones distintas, las combinaciones posibles de sus valores de verdad son $2^2 = 4$.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Para una fórmula con tres proposiciones distintas, las combinaciones posibles de sus valores de verdad son $2^3 = 8$. Con cuatro proposiciones son $2^4 = 16$. Etc

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

El modo más fácil de combinar los valores de verdad de las proposiciones que integran cualquier fórmula, consiste en asignarle a la 1ª proposición por orden alfabético la mitad de 1 y la mitad de 0. A la siguiente proposición, la mitad de la mitad de 1, la mitad de la mitad de 0, hasta completar el número de las combinaciones que admita la fórmula… Y a la última proposición de la fórmula siempre se le asignará 1 y 0 alternativamente hasta completar las combinaciones posibles de la fórmula.

2) En segundo lugar, se hallan los valores de verdad de las conectivas existentes en la fórmula, empezando por las menos dominantes (es decir, por las que afectan a menor parte de la fórmula) y terminando por la conectiva dominante (es decir, por aquella que afecta a toda la fórmula y cuya tabla de verdad, por tanto, será la tabla de verdad de la fórmula completa). Cabe destacar que, para evaluar la proposición compuesta, se debe respetar la prioridad de evaluación que establecen los paréntesis y la precedencia o jerarquía de las conectivas.

Ejemplo: Para la siguiente fórmula bien formada, mostraremos paso a paso el avance de su evaluación:

$[\neg(p \lor q) \land (\neg p \rightarrow \neg q)]$

se lee "No es cierto que p o q, y si no-p entonces no-q"

La conectiva dominante es $\land$

Nota: Aunque en el ejemplo se mostrará paso a paso la evaluación de la fórmula, en general se hace sobre una única tabla.

1) Primero se evalúa la fórmula $(p \lor q)$

p	q	$p \lor q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1

0	0	0

2) Luego se evalúa la fórmula $\neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

3) Ahora se evalúa la fórmula $\neg p$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	1	1

4) Luego se evalúa la fórmula $\neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1

5) Posteriormente se evalúa la fórmula $(\neg p \rightarrow \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

6) Finalmente se evalúa la fórmula $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

Clasificación de Fórmulas

Dadas n variables proposicionales, la cantidad de fórmulas bien formadas distintas que se pueden formar es infinita, con lo cual van a existir fórmulas bien formadas que tengan la misma tabla de verdad.

> **Nota:** Se puede demostrar que sólo existen 2^{2^n} tablas de verdad diferentes, para fórmulas bien formadas con n variables proposicionales distintas, aunque existan infinitas FBFs.

1. Tautología

Una FBF es una tautología si es **verdadera** para todas sus posibles interpretaciones. Una tautología también se conoce como una fórmula válida.

Ejemplo 1: p ∨ ¬ p

p	¬ p	**p ∨ ¬ p**
0	1	**1**
1	0	**1**

Ejemplo 2: p ⟶ (p ∨ q)

p	q	p ∨ p	**p ⟶ (p ∨ q)**
1	1	1	**1**
1	0	1	**1**
0	1	1	**1**
0	0	0	**1**

Más ejemplos (queda a cargo de los estudiantes la demostración de las siguientes tautologías**)**

- (p ∨ q) ⟶ (q ∨ p)
- [(p ⟶ q) ∧ ¬ q] ⟶ ¬ p
- (p ∨ q) ⟶ (q ∨ p)
- (p ∧ q) ⟶ (q ∧ p)

2. Contradicción

Una FBF es una contradicción si es **falsa** para todas sus posibles interpretaciones. Una contradicción también se conoce como una fórmula inconsistente o una fórmula insatisfactible.

Ejemplo 1: p ∧ ¬ p

p	¬ p	**p ∧ ¬ p**
0	1	**0**
1	0	**0**

Ejemplo 2: (p ⟶ q) ∧ ¬ (p ⟶ q)

p	q	p ⟶ p	¬ (p ⟶ q)	(p ⟶ q) ∧ ¬ (p ⟶ q)
1	1	1	0	**0**

1	0	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	0	1	0	**0**

3. Consistente

Una FBF que **al menos tiene una interpretación verdadera** se conoce como una fórmula consistente o satisfactible. Es decir, si para al menos una de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables proposicionales la fórmula se evalúa con el valor de verdad Verdadero

Ejemplo: p ⋁ q

p	q	**p ⋁ p**
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

4. Contingencia

Una FBF es una contingencia si no es ni una tautología ni una contradicción. Es decir, si alguna de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables se evalúa como verdadero y alguna de las combinaciones de los valores de verdad de sus variables se evalúa como falso. Es una fórmula cuya tabla de verdad final tiene unos (1) y ceros (0) no importa en qué proporción. Una contingencia también se conoce como una indeterminación.

Ejemplo: p ⟶ ¬ (p ⋁ q)

p	q	p ⋁ p	¬ (p ⋁ q)	**p ⟶ ¬ (p ⋁ q)**
1	1	1	0	**0**
1	0	1	0	**0**
0	1	1	0	**1**
0	0	0	1	**1**

5. Implicación Lógica y Equivalencia Lógica

Sean p y q dos fórmulas bien formuladas, diremos que:

- **"p implica lógicamente a q"** o que "q es consecuencia lógica de p" (lo denotaremos con **p ⇒ q**) si la forma enunciativa p ⟶ q es una tautología.
- **"p es lógicamente equivalente a q"** (lo denotaremos con **p ⇔ q** o bien **p ≡ q**) si la forma enunciativa p ⟷ q es una tautología.

Ejemplo: Demostraremos la equivalencia ¬ (p ⋁ q) es lógicamente equivalente a (¬ p) ⋀ (¬ q), para ello analizaremos la fórmula enunciativa: **¬ (p ⋁ q) ⟷ (¬ p) ⋀ (¬ q)**, que debería ser una tautología.

p	q	p ⋁ p	¬ (p ⋁ q)	¬ p	¬ q	(¬ p) ⋀ (¬ q)	**¬ (p ⋁ q) ⟷ (¬ p) ⋀ (¬ q)**
1	1	1	0	0	0	0	**1**
1	0	1	0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	1	**1**

FÓRMULAS EQUIVALENTES: al evaluar 2 fórmulas, y se observa que todas sus interpretaciones son iguales, se dice que ambas fórmulas son equivalentes.

6. Leyes de la Lógica Proposicional

Las fórmulas que son tautologías constituyen esquemas válidos de inferencia o razonamientos formalmente válidos, y son llamadas por ello leyes lógicas.

Las Equivalencias Lógicas más importantes son la base del Álgebra Proposicional y se denominan Leyes Lógicas. Su estudio es tarea fundamental de la lógica de proposiciones, puesto que ellas constituyen un poderoso instrumento para el análisis de inferencias.

Las equivalencias lógicas son utilizadas, entre otras cosas, para poder simplificar proposiciones compuestas y otorgarles un aspecto más amigable.

PRINCIPIOS

A las llamadas leyes lógicas hay que anteponerles tres Principios básicos y fundamentales del pensar humano: los principios de la Lógica.

1º) Principio de identidad: $\mathbf{p \longrightarrow p}$

2º) Principio de no contradicción: $\mathbf{\neg\,(p \wedge \neg p)}$

3º) Principio de tercio excluso (tertium non datur): $\mathbf{p \vee \neg p}$

LEYES

A continuación, se da el listado de las principales leyes lógicas, las cuales se demuestran confeccionando sus tablas de verdad.

Considerando que ***p, q*** y ***r*** son proposiciones simples cualesquiera, ***V*** es un proposición siempre verdadera y ***F*** una proposición siempre falsa, se cumple que:

Ley de Doble Negación	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Ley Conmutativa de la Conjunción	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Ley Conmutativa de la Disyunción	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Ley Asociativa de la Conjunción	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Ley Asociativa de la Disyunción	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
Ley Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leyes de Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$
Leyes de Absorción	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
Leyes de los Neutros	$p \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow p$ $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$

Leyes de Dominación	$p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ $p \vee \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$
Leyes de los Inversos	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{V}$

Las siguientes equivalencias, igualmente importantes, tienen que ver con el comportamiento de los conectivos condicional y bicondicional, ellas son:

Ley de la Disyunción excluyente	$p \veebar q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
Ley asociativa de la disyunción excluyente	$(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$
Ley del condicional	$p \longrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
Ley del contrarecíproco del condicional	$p \longrightarrow q \Leftrightarrow \neg q \longrightarrow \neg p$
Ley de la negación del condicional	$\neg(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
Ley del bicondicional	$p \longleftrightarrow q \Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
Ley de la negación del bicondicional	$\neg(p \longleftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

La Leyes lógicas se usan para:

1) Demostrar otras equivalencias, especialmente donde intervienen muchas variables proposicionales.
2) Encontrar frases equivalentes, que transmitan el mismo mensaje y, por supuesto, conserven el valor de verdad.
3) Demostrar la validez de un razonamiento.

Formas Normales

Hemos visto que a partir de toda forma enunciativa puede construirse una tabla de verdad.

Vamos a formular ahora un resultado en un sentido recíproco:

Proposición

Toda función de verdad es la función de verdad determinada por una forma enunciativa restringida. Llamamos **forma enunciativa restringida** a una forma enunciativa en la que solamente figuran las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Corolario

Toda forma enunciativa, que no es una contradicción, es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma:

$$\bigvee_{i=1\ldots m} \bigwedge_{j=1\ldots n} Q_{ij} \text{, es decir: } (Q_{11} \wedge \ldots \wedge Q_{1n}) \vee \ldots \vee (Q_{m1}, \wedge \ldots \wedge Q_{mn})$$

donde cada Q_{ij} es una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado.

Esta forma se denomina *forma normal disyuntiva (FND)*. **Una fórmula está en FND si es una disyunción de conjunciones de literales**. La demostración de este corolario se realiza a través de dos formas enunciativas son lógicamente equivalentes si y solo si corresponden a la misma función de verdad. Dada una forma enunciativa A, obtenemos su tabla de verdad y la función de verdad que ésta define. Aplicando el método en que se basa la demostración de la proposición anterior se puede obtener una forma enunciativa en la forma deseada, correspondiente a dicha función de verdad.

Ejemplos:

- $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ está en FND
- $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ no está en FND
- Una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Corolario

Toda forma enunciativa, que no es una tautología, es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma:

$$\bigwedge_{i=1\ldots m} \bigvee_{j=1\ldots n} Q_{ij}\text{, es decir: } (Q_{11} \vee \ldots \vee Q_{1n}) \wedge \ldots \wedge (Q_{m1}, \vee \ldots \vee Q_{mn})$$

donde cada Q_{ij} es una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado.

Esta forma se denomina *forma normal conjuntiva (FNC)*. **Una fórmula está en FNC si es una conjunción de disyunciones de literales**. La demostración de este corolario se basa en el anterior, las leyes de Morgan y el hecho de que la negación de una forma enunciativa que no es una tautología no es una contradicción.

Ejemplos:

- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ está en FNC
- $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ no está en FNC
- Una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

Conjuntos adecuados de conectivas

Un conjunto adecuado de conectivas es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa en la que solo aparezcan conectivas de dicho conjunto.

PROPOSICIÓN: Los pares $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas.

Para demostrar que esto es cierto para alguno de los conjuntos dados basta con probar que se pueden obtener las mismas tablas de verdad que la de los conectivos ausentes en el conjunto, con fórmulas equivalentes que sólo usen conectivos del conjunto.

Ejemplo:

Dado que $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivos, cualquier proposición se puede expresar usando solamente sus conectivos, haciendo uso además de las equivalencias lógicas (las que no se hayan mostrado aún en el presente material de estudio, pueden comprobarse haciendo uso de las correspondientes tablas de verdad).

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)] \equiv [(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)] \equiv [\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)]$$

No es posible conseguir un conjunto de menor cardinalidad que los exhibidos como conjuntos adecuados de conectivos, siempre y cuando nos manejemos con los conectivos aquí definidos, dado que, si a alguno de los conjuntos se le trata de eliminar uno de sus conectivos, no se lograran expresar algunas FBFs sólo con el conectivo restante.

Ejemplo:

Si se considera el conjunto $\{\neg, \vee\}$, se puede verificar que sólo con el conectivo del conjunto $\{\neg\}$, no podemos expresar ninguna fórmula que sea equivalente a $(P \vee Q)$, siendo P y Q FBFs cualesquiera. Similarmente, se puede verificar que sólo con el conectivo del conjunto {∨}, no podemos expresar ninguna fórmula que sea equivalente a ¬ P, siendo P una FBF cualquiera.

Reducción de Conectivas

Podemos probar para nuestro cálculo que nos basta exclusivamente con 2 conectivas, pudiendo definir las restantes en función de las 2 elegidas.

Si consideramos que el bicondicional es la conjunción del condicional en una dirección con el mismo condicional en la otra, con las 4 conectivas restantes, haciendo uso de “conjunto adecuando de conectivas” podemos definir el resto, quedando de la siguiente manera:

	***Negación y Conjunción* {¬, ∧}**	***Negación y Disyunción* {¬, ∨}**	***Negación y Condicional* {¬, →}**
Conjunción	-	¬ (¬x ∨ ¬y)	¬ (x ⟶ ¬y)
Disyunción	¬ (¬x ∧ ¬y)	-	¬x ⟶ y
Condicional	¬ (x ∧ ¬y)	¬x ∨ y	-

¿Existen conjuntos unitarios adecuados de conectivas, es decir con una sola conectiva?

Los anteriores son los únicos conjuntos adecuados de conectivas con dos elementos. Las cinco conectivas ¬, ∨, ∧, ⟶, ⟷ que hemos estudiado no constituyen por sí solas un conjunto adecuado. Pero no son las únicas conectivas posibles. De hecho, cada tabla de verdad define una nueva conectiva, pero con significado intuitivo no muy claro.

Se debe a H. Sheffer la introducción de dos nuevas conectivas: Nor y Nand

Nor

Se denota con ↓ y no es más que la negación de la disyunción, es decir ¬ (p ∨ q). Su tabla de verdad es por lo tanto la siguiente:

p	q	**p ↓ p**
1	1	**0**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

Nand

Se denota con | y no es más que la negación de la conjunción, es decir ¬ (p ∧ q). Su tabla de verdad es por lo tanto:

p	q	**p | q**
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**1**

El interés por estas conectivas se aclara en la siguiente proposición. También cabe remarcar que se aplican en el diseño de las computadoras.

PROPOSICIÓN: Los conjuntos unitarios {↓} y {|} son conjuntos adecuados de conectivas: toda función de verdad puede expresarse mediante una forma enunciativa en la que solo aparece la conectiva ↓, o solo aparece la conectiva |.

Razonamientos o Argumentos

Hasta ahora hemos visto los elementos que constituyen el lenguaje de la lógica; pero todavía no sabemos qué podemos hacer con ellos. Si la lógica estudia los principios de la inferencia válida, entonces un cálculo lógico nos podrá decir que esquemas de inferencia son válidos y cuáles no. Entremos ahora en la parte fundamental del cálculo, aquella que constituye un método formal de razonamiento (o de inferencia, deducción o demostración) para decidir que inferencias son válidas y cuales no lo son.

En general hay dos maneras de constituir los cálculos:

Como un sistema de leyes: Consiste en encontrar todas las leyes lógicas que pueden derivarse de un conjunto reducido de leyes, a los que denominaremos axiomas, y que aceptamos como verdaderos sin prueba por su autoevidencia. Estos tipos de sistemas se denominan **sistemas axiomáticos** y en ellos todo lo que se deriva es válido, porque el sistema asegura la calidez de la deducción.

Como un sistema de reglas. Éste exige un razonamiento por objetivos, pues se nos propone un razonamiento y mediante la aplicación de reglas hay que determinar si ese razonamiento propuesto es válido o no lo es. Este tipo de sistemas parecen convenir mejor al modo en que razonamos normalmente, por eso se denominan **sistemas de deducción natural**. En ellos se parte normalmente de enunciados cuyo valor de verdad está indeterminado y el objetivo es determinar si validez o no.

1. Forma argumentativa o argumentación

Una forma argumentativa es una sucesión finita de formas enunciativas, de las cuales la última se considera como la conclusión de las anteriores, conocidas como premisas. La notación es:

$A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore A$ Se lee "$A_1, A_2, \ldots, A_n$ por lo tanto A"

Para que una forma argumentativa sea válida debe representar un razonamiento correcto. Es decir, bajo cualquier asignación de valores de verdad a las variables de enunciado, si las premisas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, toman el valor V, la conclusión A también debe tomar el valor V

FORMA ARGUMENTATIVA VÁLIDA: Una forma argumentativa $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore A$ es inválida si es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tomen el valor V y A tome el valor F. De lo contrario la forma argumentativa es válida.

Ejemplo: analicemos la validez de la siguiente argumentación:

- Si Alexia toma el autobús, entonces Alexia pierde su entrevista si el autobús llega tarde.
- Alexia no vuelve a su casa, si Alexia pierde su entrevista y Alexia se siente deprimida.
- Si Alexia no consigue el trabajo, entonces Alexia se siente deprimida y Alexia no vuelve a su casa.
- Por lo tanto, si Alexia toma el autobús entonces Alexia no consigue el trabajo si el autobús llega tarde.

En primer lugar, debemos construir la forma argumentativa correspondiente, traduciendo del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Consideraremos las siguientes variables de enunciado:

p: Alexia toma el autobús

q: Alexia pierde su entrevista

r: el autobús llega tarde

s: Alexia vuelve a su casa

t: Alexia se siente deprimida

u: Alexia consigue el trabajo

Construyamos las **premisas** y la **conclusión** del razonamiento anterior:

A1: $p \to (r \to q)$

A2: $(q \wedge t) \to (\neg s)$ PREMISAS

A3: $(\neg u) \to (t \wedge (\neg s))$

A: $p \to (r \to (\neg u))$ CONCLUSIÓN

Tenemos entonces la forma argumentativa A1, A2, A3 $\therefore$ A. Observemos que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado de modo tal que las premisas tomen el valor V y la conclusión el valor F:

A_1	A_2	A_3	A
$p \to (r \to q)$	$(q \wedge t) \to (\neg s)$	$(\neg u) \to (t \wedge (\neg s))$	$p \to (r \to (\neg u))$
V **V** V V V	V F F **V** F V	F V **V** F F F V	V **F** V F F V

Así, la forma argumentativa es inválida. Si en cambio modificamos la conclusión de la siguiente manera obtenemos una forma argumentativa válida:

Por lo tanto, Alexia consigue el trabajo si Alexia pierde su entrevista y Alexia vuelve a su casa.

Nos queda:

A: $(q \wedge s) \to u$

En este caso es imposible asignar valores de verdad a las variables de enunciado tal que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Independientemente de otras variables de enunciado, sería el caso de asignar el valor F a la variable u (y en consecuencia el valor V a la variable s), para que A sea falsa, pero como vemos en la tabla de abajo, para que A3 sea verdadera con la variable u falsa la variable s debe ser falsa (absurdo):

A_1	A_2	A_3	A
$p \to (r \to q)$	$(q \wedge t) \to (\neg s)$	$(\neg u) \to (t \wedge (\neg s))$	$(q \wedge s) \to u$
V **V** V V V	V F F **V** F V	V F **V** V V V F	V V V **F** F

La variable **s** debe tomar el valor **F** y al mismo tiempo el valor **V** (absurdo)

Es interesante remarcar cómo la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico nos ha permitido desligarnos del significado de las palabras. Intuitivamente hubiésemos pensado que la primera conclusión (si Alexia toma el autobús, entonces Alexia no consigue el trabajo si el autobús llega tarde) era válida, mientras que la segunda (Alexia consigue el trabajo si Alexia pierde su entrevista y Alexia vuelve a su casa) no lo era, debido a nuestra idea acerca de las implicancias de llegar tarde o perder una entrevista de trabajo. La traducción al lenguaje simbólico nos

Proposición: La forma argumentativa $A_1, A_2, \ldots, A_n \therefore A$ es válida si y solo si la forma enunciativa $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$ es una tautología (es decir, si y solo si la conjunción de las premisas implican lógicamente a la conclusión).

permitió analizar matemáticamente la validez del razonamiento, basándonos en su estructura y no en su significado. Enseguida veremos aproximaciones para mecanizar los razonamientos.

Para referirnos a formas argumentativas válidas utilizamos la siguiente notación:

$$\phi \models A$$

que se lee: "ϕ implica lógicamente a A" o "A se deduce de ϕ", siendo ϕ (Phi) un conjunto de premisas.

2. Cálculo de Deducción Natural (CDN)

La Lógica Proposicional puede presentarse en forma de Cálculo, esto es, como un conjunto coherente y sistemático de Reglas de Inferencia, mediante las cuales es posible llegar a deducir ciertas expresiones a partir de otras.

REGLAS BÁSICAS		
Reglas de la Negación		
Eliminación del Negador	$E_{\neg}$ EN	Regla de la Doble Negación
Introducción del Negador	$I_{\neg}$ IN	Regla de Reducción al Absurdo
Reglas de la Conjunción		
Eliminación del Conjuntor	$E_{\wedge}$ IC	Regla de la Simplificación
Introducción del Conjuntor	$I_{\wedge}$ EC	Regla del Producto
Reglas de la Disyunción		
Eliminación del Conjuntor	$E_{\vee}$ ED	Regla de los Caos
Introducción del Conjuntor	$I_{\vee}$ ID	Regla de la Adición
Reglas del Condicional o Implicación Material		
Eliminación del Condicional	$E_{\rightarrow}$ EI	Regla del Modus Ponendo Ponens
Introducción del Condicional	$I_{\rightarrow}$ II	Teorema de la Deducción
Reglas del Bicondicional		
Eliminación del Bicondicional	$E_{\leftrightarrow}$ EB	
Introducción del Bicondicional	$I_{\leftrightarrow}$ IB	
REGLAS DERIVADAS O AUXILIAREAS		
Regla de Modus Tollendo Tollens	MT	
Regla del Silogismo Disyuntivo	SIL DISY	
Regla de Transitividad del Condicional	TTRANS C	
Regla de Contraposición del Condicional	CONT C	
Regla de Identidad	Id	
Conmutatividad de la Conjunción	CONM C	
Conmutatividad de la Disyunción	CONM D	
Asociatividad de la Conjunción	AS C	
Asociatividad de la Diyunción	AS D	
Regla de Ex contradictione quodlibet	ECQ	
Leyes de De Morgan	DM	

Las letras mayúsculas A, B, C, que utilizamos para presentar las reglas, son expresiones metalingüísticas: es decir, representan a cualquier expresión del lenguaje de la Lógica Proposicional.

Regla de la Eliminación del Negador ($E_{\neg}$)

$$\frac{\neg \neg A}{A}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A, doblemente negada, entonces resulta estar afirmada, luego si tenemos una fórmula de esta manera podremos simplificarla eliminando la negación.

A esta regla se la denomina también **Regla de la Doble Negación** (D.N.).

Regla de la Introducción del Negador ($I_{\neg}$)

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Si <u>suponemos</u> una expresión cualquiera A y se dedujera alguna contradicción ($B \wedge \neg B$), entonces cerraremos el supuesto en la mencionada contradicción y concluiremos en la negación de la citada expresión supuesta ($\neg$ A).

A esta regla se la denomina también **Regla de Reducción al Absurdo** (Abs.).

Regla de la Eliminación del Conjuntor ($E_{\wedge}$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Si tenemos una expresión conjuntiva cualquiera $A \wedge B$, entonces sabremos que esa fórmula es lógicamente válida; pero si lo es, los es porque cada una de las fórmulas atómicas que componen la conjunción son igualmente válidas, en consecuencia, podemos asi mismo afirmarlas tanto por separado. Es decir, si sabemos que es verdad $A \wedge B$, también sabemos que podemos afirmar A y que podemos afirmar B.

A esta regla se la denomina también **Regla de la Simplificación** (Simp.).

Regla de la Introducción del Conjuntor ($I_{\wedge}$)

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A y tenemos otra expresión cualquiera B, entonces podemos concluir en la conjunción de ambas ($A \wedge B$).

A esta regla se la denomina también **Regla del Producto** (Prod.).

Regla de la Eliminación del Disyuntor ($E_\vee$)

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \left[\begin{array}{l} A \\ C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} B \\ C \end{array}\right. \\ \hline C \end{array}$$

Si tenemos una expresión disyuntiva cualquiera (A ∨ B), y suponiendo cada una de las dos alternativas de esa disyunción se dedujera la misma expresión C, entonces podríamos concluir en esa expresión C.

A esta regla se la denomina también **Regla de los Casos** (Cas.).

Regla de la Introducción del Disyuntor ($I_\vee$)

$$\begin{array}{c} A \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ \hline A \vee B \end{array}$$

Si tenemos una expresión cualquiera A, entonces podemos concluir en una expresión disyuntiva formada por esa expresión A y cualquier otra expresión B.

A esta regla se la denomina también **Regla de la Adición** (Ad.).

Regla de la Eliminación del Condicional o Implicación ($E_\longrightarrow$)

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Si tenemos una expresión condicional cualquiera A → B y tenemos el antecedente (A) de ese condicional, entonces podemos concluir en el consecuente (B).

A esta regla se la denomina también **Regla del Modus Ponendo Ponens** (M.P.).

Regla de la Introducción del Condicional o Implicación ($I_\longrightarrow$)

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \\ \hline A \longrightarrow B \end{array}$$

Si <u>suponemos</u> una expresión cualquiera A y se dedujera una expresión cualquiera B, entonces una vez "cerrado" el supuesto en la expresión deducida B, concluiremos en el condicional entre A y B, es decir, A ⟶ B.

A esta regla se la denomina también **Teorema de la Deducción** (T.D.)

Regla de la Eliminación del Bicondicional ($E_\longleftrightarrow$)

$$\begin{array}{c} A \longleftrightarrow B \\ \hline (A \longrightarrow B) \wedge B \longrightarrow A \end{array}$$

Si tenemos una expresión bicondicional A ⟷ B, podemos concluir de ella tanto el condicional A ⟶ B, como el condicional B ⟶ A. Esto se debe a que podemos transformar un bicondicional en la conjunción de los condicionales que lo componen.

Regla de la Introducción del Bicondicional (I⟷)

$$\frac{\begin{array}{c}A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A\end{array}}{A \longleftrightarrow B}$$

Si tenemos una expresión condicional A ⟶ B y otra como B ⟶ A, podemos concluir en la expresión bicondicional A ⟷ B.

Regla de Modus Tollendo Tollens

$$\frac{\begin{array}{c}X \longrightarrow Y \\ \neg Y\end{array}}{\neg X}$$

Prueba	
1. X⟶Y	Premisa
2. ¬Y	Premisa
3. X	Supuesto
4. Y	E⟶ 1,3
5. ¬Y⋀Y	I⋁ 2,4
6. ¬X	I¬ 3-5

Explicación:

Esta regla es muy importante, pues es otra forma de eliminar el condicional. Como vemos el cálculo parte de unas premisas que no son dadas y pretende mediante la transformación de estas fórmulas llegar a la conclusión que se propone. Una vez dispuestas las premisas, tenemos que preguntarnos cuál es la conectiva principal y estructura de la fórmula a obtener, indudablemente para conseguir dicha fórmula tendremos que introducir en primer lugar su conectiva principal, en este caso la negación. Haciendo uso de la regla de introducción de la negación, suponemos lo contrario de lo que queremos probar y vemos si esto nos conduce a una contradicción, como es el caso, podemos negar lo contrario de lo que hemos supuesto, lo que coincide con la fórmula a probar. Adviértase que cerramos el supuesto cuando podemos justificar el uso de la regla que lo originó.

De suma importancia es la columna de la derecha donde justificamos lo que escribimos en la derivación, indicando que regla y entre que líneas de la derivación llegamos a lo que escribimos en la línea correspondiente.

Regla del Silogismo Disyuntivo

$$\frac{\begin{array}{c}X \vee Y \\ \neg X\end{array}}{Y}$$

Prueba	
1. X⋁Y	Premisa
2. ¬X	Premisa
3. ¬X⟶Y	Reducción ⋁ 1
4. Y	E⟶ 3,2

	Prueba	
X ⩗Y ¬Y ——— X	1. X⩗Y	Premisa
	2. ¬Y	Premisa
	3. ¬X	Supuesto
	4. ¬X⟶Y	Reducción ⩗ 1
	5. Y	E⟶ 4,3
	6. Y ⩘ ¬Y	I⩘ 5,2
	7. ¬¬X	I¬ 3-6
	8. X	E¬ 7

Explicación:

La regla es intuitivamente evidente si tenemos una disyunción y sabemos la invalidez de uno de sus términos, inmediatamente podemos afirmar el otro. La prueba hace uso de la indeterminación de las conectivas (reducción de conectivas), que son definiciones de unas conectivas a partir de otras, son también reglas de inferencia derivadas del sistema. Además, en la aplicación de la regla por la izquierda, procedemos por reducción al absurdo, lo que es habitual cuando la fórmula a probar es una fórmula atómica.

Regla de Transitividad del Condicional

	Prueba	
X ⟶Y Y⟶Z ——— X⟶Z	1. X⟶Y	Premisa
	2. Y⟶Z	Premisa
	3. X	Supuesto
	4. Y	E⟶ 1,3
	5. Z	E⟶ 2,4
	6. X⟶Z	I⟶ 3-5

Explicación:

En este caso puesto que lo que queremos probar es un condicional tendremos que emplear la regla de introducción del condicional. Esta regla nos dice que supongamos el antecedente del condicional a probar y veamos si podemos llegar al consecuente. Así lo hacemos, suponemos X. Ahora necesitamos poder escribir Z. Z podríamos obtenerlo eliminando el condicional en 2. Para ello necesitamos Y. ¿Podemos obtener Y? Podemos hacerlo aplicando la regla de eliminación entre 1 y 3. Después se cierra el supuesto y se introduce el condicional entre X y Z, que era lo que se pedía.

Regla de Contraposición del Condicional

	Prueba	
X ⟶Y ——— ¬Y⟶¬X	1. X⟶Y	Premisa
	2. ¬Y	Supuesto
	3. X	Supuesto
	4. Y	E⟶ 1,3
	5. Y⩘¬Y	I⩘ 4,2
	6. ¬X	I¬ 3-5
	7. ¬Y ⟶ ¬X	I⟶ 2-6

Explicación:

El proceso nos es ya conocido, advirtamos el doble supuesto que nos exige la introducción del condicional en primer lugar, y después como el consecuente del condicional a probar está negado, la necesidad de suponer lo contrario del consecuente como nos indica la regla de introducción de la negación.

A partir de las siguientes reglas, las pruebas de validez quedan a cargo del estudiante, ya que pueden ser un buen ejercicio.

Regla de Identidad

	Prueba	
X ——— X	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Conmutatividad de la Conjunción

	Prueba	
$X \wedge Y$ ═══ $Y \wedge X$	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Conmutatividad de la Disyunción

	Prueba	
$X \vee Y$ ═══ $Y \vee X$	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Asociatividad de la Conjunción

	Prueba	
$X \wedge (Y \wedge Z)$ ═══ $(X \wedge Y) \wedge Z$	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Asociatividad de la Diyunción

	Prueba	
$X \vee (Y \vee Z)$ ═══ $(X \vee Y) \vee Z$	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Regla de Ex contradictione quodlibet

$\dfrac{X \wedge \neg X}{Y}$	Prueba	
	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Leyes de De Morgan

$\dfrac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \vee \neg Y}$	Prueba	
	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

$\dfrac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y}$	Prueba	
	1.	
	2.	
	3.	
	4.	
	5.	

Tipos de demostraciones para validar un razonamiento

Una importante aplicación de los conceptos de equivalencias lógicas y reglas de inferencia se encuentra cuando en Matemática se necesita demostrar teoremas, que son básicamente una implicación lógica del tipo ***p* ⇒ *q***, donde ***p*** es la hipótesis (datos o premisa) y ***q*** es la tesis (o conclusión).

1. Método Directo

Es el método de demostración más empleado y que consiste en demostrar la verdad de una conclusión o tesis, dadas ciertas premisas o hipótesis que se suponen verdades.

En la tabla de verdad de la implicación, en los 1° y 2° renglones se puede observar que bajo el supuesto de que ***p*** sea verdadera la única condición para que la implicación sea verdadera es que ***q*** sea verdadera.

p	q	**p ⟶ q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

En el caso de la demostración de la validez de un razonamiento $p_1, p_2, \ldots, p_n \longrightarrow q$, por este método, se usan reglas de inferencia o leyes lógicas para demostrar que la conclusión se infiere o se deduce de las premisas.

Se puede utilizar el formalismo de la Deducción Natural o Derivación Formal para describir los pasos en la demostración y la justificación de cada uno de ellos.

Procedimiento de Deducción

1. Se determinan cuáles son las premisas y se escribe cada premisa en una línea numerada, comenzando en 1.
2. Se determina cuál es la conclusión, y se la deja aparte, que es lo que se quiere demostrar.
3. Se aplican leyes lógicas o reglas de inferencia sobre las premisas de la cual se derivan nuevas líneas, que se deben seguir numerando a continuación de la última premisa.
4. El proceso termina cuando se llega a una línea que contiene lo que se quiere demostrar (la tesis).

Ejemplo 1:

Para demostrar la validez del siguiente argumento:

$p,\ p \longrightarrow q,\ \neg r \longrightarrow \neg q,\ s \vee \neg r \Rightarrow s$

Es aconsejable seguir el siguiente formado, que se denomina “**Derivación Formal**”.

Pasos	Razones
1) p	premisa 1
2) $p \to q$	premisa 2
3) $\neg r \to \neg q$	premisa 3
4) $s \vee \neg r$	premisa 4
5) q	1 y 2 MP (modus ponens)
6) $\neg(\neg r)$	3 y 5 MT (modus tollens)
7) r	6 DN (doble negación)
8) s	4 y 7 SD, (lo que se quería demostrar)

Ejemplo 2:

Para demostrar que el siguiente razonamiento es válido se utiliza el proceso de derivación formal.

$\neg p \longrightarrow q$

$\neg p \vee r$

$\neg q \longrightarrow r$

Pasos	Razones
1) $\neg p \to q$	premisa 1
2) $\neg p \vee r$	premisa 2
3) $p \to r$	(2) Ley del condicional
4) $\neg q \to p$	(1) Contrarecíproca y Doble negación
5) $\neg q \to r$	(4 y 3) S. H. (conclusión)

Para la aplicación de las reglas lógicas se puede utilizar una o más premisas y las veces que sean necesarias, siempre y cuando se usen las reglas adecuadamente. Debe trabajarse con todas las premisas.

2. Métodos Indirectos

Puede ser que sea dificultoso o imposible realizar la demostración directa de un razonamiento. En tales casos se puede intentar otras estrategias utilizando la equivalencia lógica del contrarecíproco o incorporando la negación de la conclusión, lo cual resultaría en métodos de demostración indirectos.

i. Método por contraposición o contrarecíproco

Las demostraciones por contraposición están basadas en la equivalencia lógica del contrarecíproco, la cual dice que: $p \longrightarrow q \Leftrightarrow \neg q \longrightarrow \neg p$

Es decir, se toma $\neg q$ como válida y se debe deducir $\neg p$. Y a partir de allí, lo que se hace es construir una demostración directa de $\neg q \longrightarrow \neg p$.

Entonces demostrar que $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q$ será equivalente a demostrar que $\neg q \Rightarrow \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$

Procedimiento de Deducción

1. Supones que la conclusión es falsa.
2. Analizar los valores de verdad de las proposiciones que componen las premisas. Se debe trabajar bajo la suposición de que las premisas son verdaderas; hasta que resulten todas verdaderas o hasta que una de ellas resulte forzosamente falsa. Si resultan todas las premisas verdaderas el razonamiento no es válido, mientras que, si alguna premisa es falsa, el razonamiento es válido.

Ejemplo 1:

Si 1Gb es mejor que nada, se comprará una PC nueva. No se comprará una PC nueva. Luego, no es cierto que 1Gb sea mejor que nada.

Se consideran las siguientes proposiciones:

p: “1Gb es mejor que nada”

q: “Se comprará una PC nueva”

Expresado simbólicamente, el razonamiento, quedaría:

p1: $p \longrightarrow q$

p2: $\neg q$

$\therefore \neg p$

Suponiendo que la conclusión ($\neg p$) es falsa, entonces p es verdadera.

En *p1*, el antecedente (p) es verdadero, entonces el consecuente (r) también es verdadero así *p1* resulta verdadero; por lo tanto p2 ($\neg q$) es falta. Lo cual indica que este razonamiento es válido puesto que tiene una premisa falsa.

Ejemplo 2:

Si el razonamiento fuera el siguiente:

p1: $p \longrightarrow q$

p2: $\neg p$

$\therefore q$

Utilizando el método de contrarecíproco, se tendría que suponer que *r* es falso y comenzar por el análisis de *p1*. Como el consecuente (r) es falso, el antecedente (p) debe ser falso, así *p1* es verdadera. Analizando *p2*; como *p* es falso, *¬p* es verdadera. Por lo tanto, el razonamiento no es válido ya que la conclusión es falsa y todas las premisas son verdaderas.

ii. Método por Reducción al Absurdo (o Contradicción)

Existe otra regla de inferencia que dice así:

$\neg p \longrightarrow F$

$\therefore p$

Es decir, si suponer *¬p* te lleva a una contradicción, entonces quien se cumple es *p*.

Aplicando este concepto para la demostración de razonamientos con más de una premisa del tipo $p_1, p_2, \ldots, p_n \Rightarrow q$, para demostrar que es válido se debe probar que suponer la coexistencia de las premisas y de la negación de la conclusión nos llevaría a una contradicción. Esto es, se debe mostrar que: $\mathbf{(p_1, p_2, \ldots, p_n) \land \neg q \Rightarrow F}$

Procedimiento de Deducción

1. Suponer que las premisas son verdaderas y que la conclusión es falsa.
2. Buscar que se produzca una contradicción.
3. Una vez ocurrida la contradicción se concluye que el razonamiento es válido, pues estaría probado que suponer que las premisas son verdadera y simultáneamente la conclusión es falsa es una contradicción.

Ejemplo 1:

Para demostrar que el siguiente razonamiento es válido, se utiliza derivación formal:

$\neg p \longrightarrow q$

$\neg p \lor r$

$\neg q \longrightarrow e$

Pasos	Razones
1. $\neg p \longrightarrow q$	premisa 1
2. $\neg p \lor r$	premisa 2
3. $\neg(\neg q \longrightarrow r)$	premisa 3 (se supone que la conclusión no es verdadera)
4. $\neg q \land \neg r$	negación de la implicación 3
5. $\neg q$	Simplificación conjuntiva en 4
6. $\neg r$	Simplificación conjuntiva en 4
7. p	MT con 1 y 5, y DN (doble negación)
8. $\neg p$	SD con 2 y 6
9. F	Combinación conjuntiva con 7 y 8
10. $\neg q \longrightarrow r$	Queda probada la conclusión por el Método de Contradicción