Instituto Superior Santo Domingo	**UNIDAD Nº 3:** Derivadas	**TEMAS:** Gráfico de curvas	Clase 12

Objetivos:

- Aplicar los conceptos de análisis de funciones y derivadas para el gráfico preciso de curvas.
- Conocer los conceptos de punto de inflexión y concavidad de curvas.
- Determinar asíntotas, horizontales y oblicuas.

Introducción

¡Qué bueno! ¡No! No es porque terminamos, está bueno porque esta última clase es muy linda. Hoy veremos como realizar un estudio detallado de una función para poder realizar un gráfico que la represente, utilizando la derivada y veremos un concepto nuevo como el de asíntota.

Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio correspondiente al tema.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Realiza la lectura del material, correspondiente al tema indicado y en lo posible repasa los temas anteriores
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Es de suma utilidad el conocimiento de las reglas de derivación, es por ello que necesitas recordarlas siempre. No así la tabla ya que ella podrás tenerla siempre a mano.
- Es de suma utilidad al hacer estudio completo de una función, conocer el dominio y la paridad de la misma, ya que eso puede aliviarnos la tarea, porque si la curva es simétrica solo analizamos de un lado del eje y.

- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.
- Comunicarse con el profesor, utilizando el "Campus del Instituto", si no pudiera salir por si solo de la duda.

Concavidad de las curvas

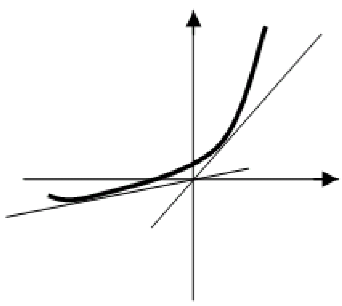
Toda superficie que no es plana, presenta algún tipo de curvatura, así por ejemplo los espejos que aumentan o disminuyen los tamaños de los objetos se denominan espejos cóncavos y espejos convexos. Las curvas que se representan en el plano también pueden clasificarse de estas dos formas, dependiendo de cómo sea su curvatura.

El signo de la derivada primera de una función nos indica si ella es creciente o decreciente, y el signo de la derivada segunda nos informará de la concavidad.

<u>Curva cóncava:</u>

Se dice que la curva correspondiente a una función es cóncava (o cóncava hacia arriba) en un intervalo, si toda recta tangente a ella queda por debajo de la curva. Analíticamente diremos que la curva de la función f(x) es cóncava si la derivada segunda de la función es positiva:

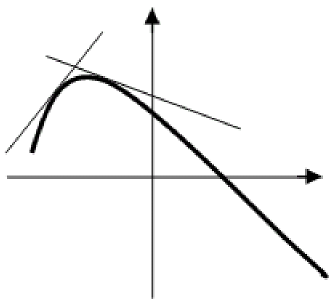
$$f(x) \text{ es cóncava en } (a, b) \iff f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$$



<u>Curva convexa:</u>

Se dice que la curva correspondiente a una función es convexa (o cóncava hacia abajo) en un intervalo, si toda recta tangente a ella queda por encima de la curva. Analíticamente diremos que la curva de la función f(x) es cóncava si la derivada segunda de la función es negativa:

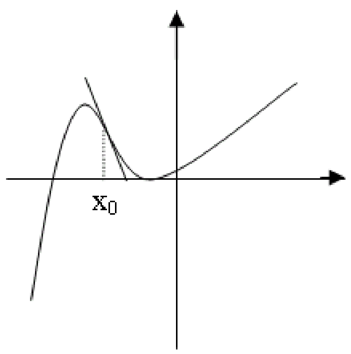
$$f(x) \text{ es convexa en } (a, b) \Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$$



<u>Punto de inflexión</u>

Un punto de la curva correspondiente a la función f(x), por ejemplo (x_0, $f(x_0)$) es un punto de inflexión si en él cambia la curvatura de la curva, es decir pasa de cóncava a convexa o viceversa. Analíticamente diremos que x_0 es un punto de inflexión si la derivada segunda en x_0 es nula y además la derivada tercera valuada en x_0 es distinta de cero:

$$f''(x_0) = 0 \;\text{ y }\; f'''(x) \neq 0$$



<u>Ejemplo:</u>

Determinar las zonas de concavidad y puntos de inflexión de $y = 1/3x^3 - 4x + 2$.

Para encontrar lo solicitado deberemos derivar dos veces la función:

$$y = 1/3x^3 - 4x + 2 \;\Rightarrow\; y' = x^2 - 4 \;\Rightarrow\; y'' = 2x$$

Entonces la función es cóncava si:

$$y'' > 0$$
$$2x > 0$$
$$x > 0$$

Y será convexa si:

$$y'' < 0$$
$$2x < 0$$
$$x < 0$$

Y el punto de inflexión puede estar donde:

$$y'' = 0$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

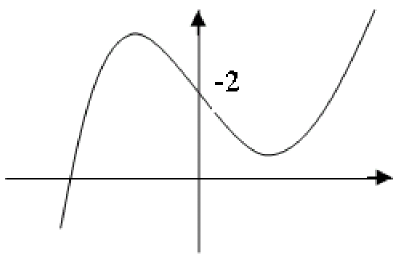
Para asegurarnos que en $x = 0$ hay punto de inflexión, derivamos nuevamente:

$$y'' = 2x \quad \Rightarrow \quad y''' = 2$$

Si valuamos la derivada tercera en $x = 0$ obtendremos $y''' = 2$, como resulta distinto de cero, es efectivamente $x = 0$ un punto de inflexión.

En resumen tendríamos que la función tiene el punto de inflexión en $x = 0$ resultando ser convexa a la izquierda de 0 y cóncava a la derecha del 0.

Su representación gráfica sería aproximadamente:



Estudio detallado de una función

Con toda la información que podemos obtener con la ayuda de la derivada de las funciones, y lo aprendido en las unidades anteriores, es posible hacer un profundo estudio de las mismas, que nos permitirá representar gráficamente con exactitud las curvas correspondientes.

Solo nos restaría por conocer si las curvas tienen o no alguna asíntota. Pero, **¿qué es una asíntota?**

Una asíntota es una recta a la que los puntos de la curva correspondiente a la función se acercan infinitamente sin llegar a cortarla. Por ejemplo, si recordamos la función exponencial pura, la curva se acerca al eje “x”, sin llegar a tocarla, entonces la recta $y = 0$ sería una asíntota de la función exponencial.

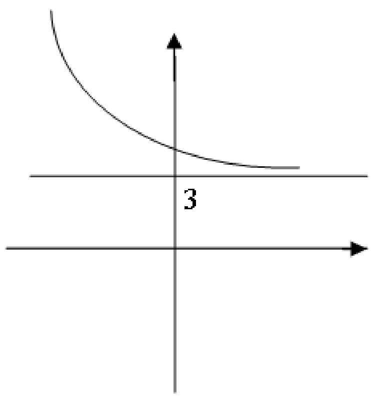
¿Cómo determinar la asíntota?

El primer paso a realizar es calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito:

$$\mathbf{\lim_{\infty} f(x) = L}$$

Si L es un número finito entonces la función tiene una asíntota horizontal, cuya ecuación es $y = L$. Por ejemplo: $f(x) = 3 + (1/2)^x$.

$$\lim_{\infty} f(x) = \lim_{\infty} 3 + (1/2)^x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \text{ es la asíntota de la curva.}$$



Si L fuera infinito, significaría que la curva no tiene asíntota horizontal, y que es posible que tenga una asíntota oblicua. Entonces si ese límite es infinito damos el segundo paso, que es calcular el límite cuando x tiende a infinito, del cociente entre la función y la variable x, es decir:

$$\mathbf{\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x} = L}$$

Si L resultara ser infinito significaría que la curva definitivamente no tiene una asíntota, pero si L fuese un número real “a”, es probable que la función tenga una asíntota oblicua, en la que “a” sería la pendiente de esa recta. Por lo tanto si L = a daremos el tercer paso, que es calcular el siguiente límite:

$$\mathbf{\lim_{\infty} (f(x) - a.\, x) = L}$$

Si L existe y L = b ese número “b” sería la ordenada al origen de la recta asíntota. Por lo que la ecuación de la recta asíntota sería:

y = x

y = a. x + b

<u>Ejemplo:</u>

Si tiene que determinar la ecuación de la recta asíntota a la curva:

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Calculamos el límite de la función para x tendiendo a infinito:

$$\lim_{\infty} \frac{x^2+1}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'H \Rightarrow \lim_{\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

Esto significa que no tiene asíntota horizontal, y que probablemente tenga asíntota oblicua, para lo cual calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'H \Rightarrow \lim_{\infty} 1 = 1$$

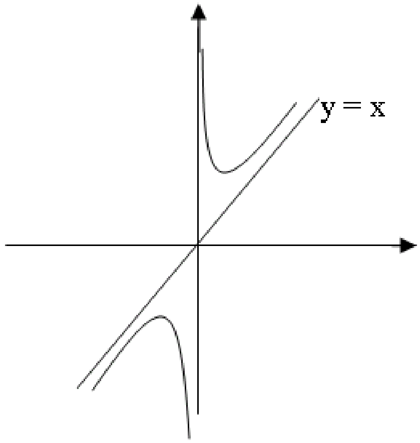
Esto quiere decir que si tiene asíntota oblicua, la pendiente de la recta es a = 1, para terminar veamos si encontramos la ordenada al origen calculando el límite:

$$\lim_{\infty} \frac{x^2+1}{x} - 1.\, x = \lim_{\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{\infty} \frac{1}{x} = 0$$ (0 sería la ordenada al origen)

Por lo tanto la curva correspondiente a la función dada tiene una asíntota oblicua cuya expresión es:

$y = 1.\, x + 0 \quad \Rightarrow \quad$ **y = x**

La representación gráfica aproximada de la curva sería:



<u>Ahora, ¿cómo hacemos un estudio detallado?</u>

Para terminar con el desarrollo de esta unidad y con todo nuestro Análisis Matemático I, daremos un ejemplo de cómo aplicar lo aprendido para llevar adelante el estudio detallado de una función para su posterior representación gráfica.

<u>Ejemplo:</u>

Realizar el estudio detallado y graficar la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 8}$$

<u>Dominio de la función</u>

Por estar definida f como un cociente debemos plantear $x^3 - 8 \neq 0$.

$$\text{Si } x^3 - 8 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq 8 \Rightarrow x \neq 2$$

$$\text{Dom}(f) = R - \{2\} \text{ ó } \text{Dom}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

<u>Paridad de la función</u>

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^3 - 8}$ $\qquad$ $f(-x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$ $\neq f(x) \Rightarrow$ f no es par

$-f(x) = -\dfrac{x}{x^3 - 8}$ $\qquad$ $-f(x) = \dfrac{-x}{x^3 - 8}$ $\neq f(-x) \Rightarrow$ f no es impar

<u>Raíces de la función</u>

Debemos igualar la función a 0: : f(x) = 0 $\Rightarrow \dfrac{x}{x^3-8} = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximos y mínimos relativos

Para encontrar estos puntos debemos derivar e igualar a 0:

$$f(x) = \frac{x}{x^3-8} \Rightarrow f'(x) = \frac{1.(x^3-8) - x.3x^2}{(x^3-8)^2} \quad f'(x) = \frac{-2x^3-8}{(x^3-8)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^3-8}{(x^3-8)^2} = 0 \Rightarrow -2x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4}$$

Hay un solo punto que anula la derivada, veamos de qué se trata encontrando la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{-2x^3-8}{(x^3-8)^2} \Rightarrow$$

Idea

Sería muy bueno que hicieras el trabajo algebraico para llegar a la expresión del numerador de la derivada segunda.

$$f''(x) = \frac{-6x^2.(x^3-8)^2 - (-2x^3-8).2.(x^3-8).3x^2}{(x^3-8)^4}$$

Trabajando algebraicamente llegamos a

$$f''(x) = \frac{6x^2.(x^3+16)}{(x^3-8)^3}$$

Si valuamos f´´ en $x = -\sqrt[3]{4}$ obtenemos que $f''(-\sqrt[3]{4}) < 0$ lo que implica que corresponde a un punto de máximo. Para encontrar el valor máximo de la función solo la valuamos en él.

$$f(-\sqrt[3]{4}) = \frac{-\sqrt[3]{4}}{(-\sqrt[3]{4})^3 - 8} = \frac{-\sqrt[3]{4}}{-12} \Rightarrow f(-\sqrt[3]{4}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{12}$$

El punto Máximo es $\left(-\sqrt[3]{4}, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{12}\right)$

Punto de inflexión

Tendremos que encontrar los valores de x que anulen la derivada segunda.

$$f''(x) = \frac{6x^2.(x^3+16)}{(x^3-8)^3} = 0$$

Esto ocurre para x = 0 y para x = $\sqrt[3]{-16}$ pero si encontramos la derivada tercera y la valuamos en estos dos, para 0 se anulará mientras que para $\sqrt[3]{-16}$ no, lo que significa que este último si corresponde a un punto de inflexión.

Para encontrar el punto de la curva, valuamos la función en $\sqrt[3]{-16}$:

$$f(\sqrt[3]{-16}) = \frac{-\sqrt[3]{16}}{(-\sqrt[3]{16})^3-8} \qquad f(\sqrt[3]{-16}) = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{-24} \qquad f(\sqrt[3]{-16}) = \frac{3\sqrt{2}}{12}$$

Por lo tanto el punto de inflexión es $\left(\sqrt[3]{-16}\,, \frac{3\sqrt{2}}{12}\right)$

Concavidad

Para determinar estas regiones tendremos que analizar el signo de la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{6x^2.(x^3+16)}{(x^3-8)^3}$$

Para los valores de x > 2 se observa que f´´ es positiva pues tanto numerador como denominador lo son, esto significa que:

f es cóncava en $(2, \infty)$

Para los valores de x < $-\sqrt[3]{16}$ la f´´ también es positiva ya que tanto el numerador como el denominador son negativos, esto significa que:

f es cóncava en $(-\infty, \sqrt[3]{-16})$

Para los valores de x comprendidos entre $\sqrt[3]{-16}$ y 2 la f´´ es negativa ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, esto significa que:

f es convexa en $(-\sqrt[3]{16}\,, 2)$

Asíntotas

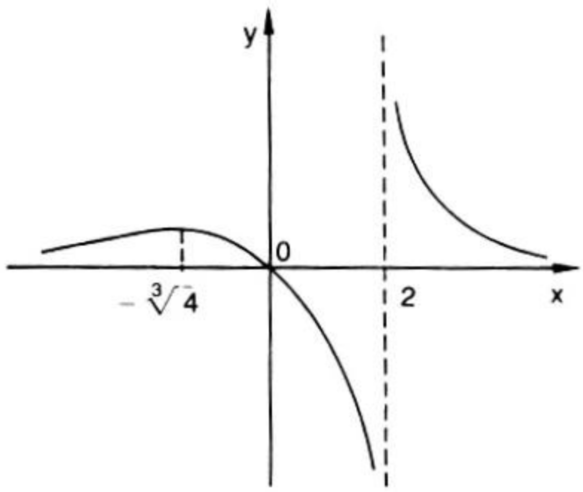
Damos el primer paso, calculando $\lim_\infty f(x)$

$$\lim_\infty f(x) = \lim_\infty \frac{x}{x^3-8} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{L´H} \Rightarrow \lim_\infty f(x) = \frac{1}{3x^2} = 0$$

Esto quiere decir que existe una asíntota horizontal cuya ecuación es $y = 0$.

Gráfico

Si toda la información obtenida la volcamos en el sistema de coordenadas, obtendríamos un gráfico como este:



Trabajo Práctico

Ejercicio 17:

Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a - $y = 4x + 5 - x^2$

b - $y = 9x - x^3 + 5$

Ejercicio 18:

Encuentra las diferentes zonas de concavidad de las funciones:

a - $y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

b - $y = 2x^3 + x^4 - 6$

Ejercicio 19:

Si tiene, escriba la ecuación de la recta asíntota para cada función.

a - f(x) = $\dfrac{x^2 - 2}{1 + x}$

b - g(x) = $\dfrac{2x}{3x + \ln x}$

<u>Ejercicio 20:</u>

Realice un estudio detallado de las siguiente funciones para luego representarlas gráficamente lo más detallado posible.

a) y = $\dfrac{x^2 + 1}{x}$

b) y = $x^2 - 6x + x^3$

c) y = $(1 - x).\ e^{-x}$

d) y = $\dfrac{4x}{x^2 - 1}$

e) y = $x\ .\ \ln x$

f) y = $\dfrac{3x}{4 + x^2}$

g) y = $\dfrac{x^2 - x}{x + 2}$

h) y = $x^2\ .\ e^{-x}$