	UNIDAD Nº 1:	TEMAS:	Clase
Instituto Superior Santo Domingo	Funciones	Funciones Polinómicas, lineal y cuadrática. Función exponencial y logarítmica	3

Objetivos:

- Diferenciar las funciones lineales y cuadráticas.
- Representar rectas y parábolas
- Aplicar las funciones polinómicas a situaciones concretas
- Conocer y representar las funciones exponencial y logarítmica.

Introducción

Para poder comprender con más facilidad las funciones por más complejas que sean, es de mucha utilidad el estudio previo de las funciones elementales, ya que son la base de la formación de las demás.

En la clase de hoy comenzaremos con las polinómicas de grado 1 y 2, analizando el significado de sus parámetros para su representación gráfica y aplicación. Continuaremos luego con las funciones de tipo exponencial y logarítmica.

Actividades

- Realiza la lectura del material, correspondiente al tema indicado, trata de hacerlo desde el inicio del tema, no está de más afianzar los conceptos.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Es de suma importancia, sobre todo en la función cuadrática, hacer un análisis previo de los parámetros a, b y c para tener una noción de cómo sería su gráfica, de modo que al hacerlo en forma precisa coincidan las curvas.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.

- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.
- Comunicarse con el profesor, utilizando el "Campus del Instituto", si no pudiera salir por si solo de la duda que le pudiera surgir, NO DEJE QUE SU DUDA PERDURE.

Funciones Elementales

Todas las funciones que nos podemos imaginar, que vinculan o relacionan magnitudes, por más complejas que parezcan, son el resultado de realizar operaciones entre funciones mucho más sencillas. A estas funciones más sencillas las llamaremos funciones elementales. Su estudio resulta de importancia debido a que en los temas posteriores será imprescindible su manejo. Las funciones elementales que repasaremos a continuación son: Polinómicas (lineal y cuadrática), exponencial, logarítmica y trigonométricas.

Glosario

Rectas Paralelas: Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales:

R_1: $y = a_1 x + b_1$

R_2: $y = a_2 x + b_2$

$$R_1 \parallel R_2 \iff a_1 = a_2$$

Rectas Perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes cumplen que:

$$a_1 = -1/a_2$$

Función lineal

La función lineal corresponde a una expresión polinómica de grado 1, es decir f es una función lineal si

$$f: R \to R \;/\; f(x) = a\,x + b$$

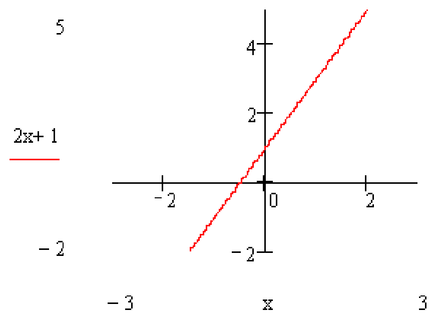
En la cual **a** es el coeficiente principal del polinomio y **b** su término independiente.

La representación gráfica de esta función es una recta, cuya inclinación recibe el nombre de **pendiente** y está dada por el número **a**, por lo que **a** representa la pendiente de la recta. Esta recta seguro debe cortar al eje "y" en algún punto, y ese punto está dado por el número **b**, por lo que **b** es la **ordenada al origen**.

Ejemplo 1

y = 2 x + 1

a = 2 y b = 1 significa que debe cortar al eje “y” en el 1 y la pendiente es 2



¿Qué significa la pendiente?

La pendiente a se define como el cociente entre la variación de y la variación de x, esto es, al variar las x se produce una variación en las imágenes, la razón entre ellas nos da la pendiente. Dicho de otro modo, la pendiente nos indica cuánto baja o cuánto sube la recta al avanzar una unidad en x. Por ejemplo en la función anterior en la que a = 2, sería

$$a = 2 \;\Rightarrow\; 2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{por lo que si } \Delta x = 1 \;\Rightarrow\; \Delta y = 2$$

Cuando la a > 0 la función es creciente, significa que la recta sube hacia la derecha, y si a < 0 la función es decreciente.

¿Cómo se puede graficar una función lineal?

Al ser su representación gráfica una recta, con obtener dos puntos de ella ya es suficiente para trazarla, por lo que el problema se limita a la obtención de esos dos puntos. Ello quedará a criterio del estudiante como desee hacerlo.

Algunas ideas para encontrar esos dos puntos:

Uno podría ser **b,** por lo que ya dijimos, otro lo podríamos obtener valuando la función para algún x = n. Entonces los dos puntos serían (0, b) y (n, f(n)). También podríamos obtener el segundo punto determinando la raíz x_0 donde se corta el eje "x", entonces los dos puntos serían (0, b) y (x_0, 0). Y otra posibilidad sería utilizar la pendiente para encontrar el segundo punto, esto es, a partir de la ordenada al origen avanzamos el Δx y de ahí subimos o bajamos el Δy según la pendiente sea positiva o negativa respectivamente.

<u>Ejemplo 2</u>

Graficar la función $y = 4 - ½\,x$

Acá tendríamos que hacer

$$a = -½ \quad y \quad b = 4$$

Entonces un punto es **(0, 4)** y el otro lo obtenemos por ejemplo con la raíz.

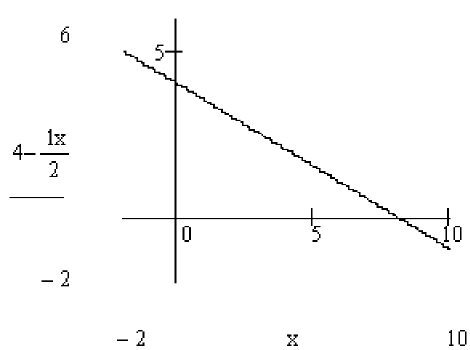
Raíz: $y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 4 - ½\,x$

$$½\,x = 4$$

$$x = 8$$

Entonces el segundo punto es (8, 0)

El gráfico quedará:



Función cuadrática

La función cuadrática corresponde a una expresión polinómica de grado 2, es decir f es una función cuadrática sí:

$$f: R \rightarrow R \;/\; f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

En la cual **a** es el coeficiente principal del polinomio, **b** su coeficiente lineal y **c** su término independiente. La representación gráfica de esta función es una curva simétrica respecto a un eje vertical llamada **parábola**. Cada uno de los valores de constantes a, b y c tienen su influencia sobre la curva, veamos que nos indican:

a:

Si $a > 0$ las ramas de la parábola son hacia arriba

Si $a < 0$ las ramas de la parábola son hacia abajo.

Si $|a| > 1$ las ramas son más cerradas, se acercan al eje "y"

Si $|a| < 1$ las ramas son más abiertas, se alejan del eje "y"

b: este parámetro influye sobre el desplazamiento horizontal del eje de la parábola, mayor será, mientras mayor sea el valor absoluto de b, y hacia dónde se desplaza está dado tanto por su signo como por el signo de a:

Si el $sg(b) = sg(a)$ el eje se desplaza hacia la izquierda.

Si el $sg(b) \neq sg(a)$ el eje se desplaza hacia la derecha.

c: esta constante representa lo mismo que la ordenada al origen de la función lineal, es decir nos indica en qué punto la curva (parábola) corta al eje "y".

Con esta información, se puede hacer un gráfico aproximado de la curva correspondiente a una función cuadrática. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3

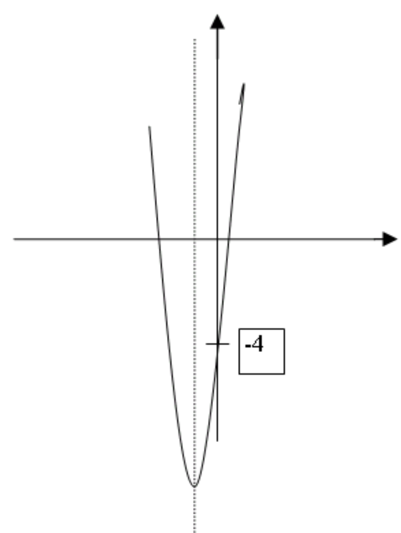
Graficar aproximadamente la función $y = 3x^2 + 4x - 4$

$a = 3 \Rightarrow$ las ramas son hacia arriba y además son cerradas.

$b = 4 \Rightarrow$ sg(b) = sg(a) la parábola está desplazada hacia la izquierda.

$4 = 4 \Rightarrow$ la parábola corta al eje "y" en el 4.

Entonces el gráfico aproximado de la curva sería:



El gráfico de la parábola más preciso

Para realizar la gráfica de la parábola de un modo más exacto, lo que se debe hacer es encontrar más puntos del plano por donde pasa. Esto podríamos hacerlo valuando la función en diferentes valores de x, pero esa no sería quizás la manera más conveniente. Lo más adecuado es encontrar la ubicación de puntos claves de la parábola, tales como los cortes con los ejes y su vértice (su punto más bajo o más alto, por donde pasa el eje de simetría).

Para encontrar los cortes con los ejes:

Con el eje “y” ya lo sabemos pues es el valor de “c”. Con el eje “x” debemos encontrar las raíces, y para ello debemos resolver la ecuación de segundo grado 0 = a x^2 + b x + c cuya solución se obtiene aplicando

$$x_{1,2} = \frac{-b + -\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recordemos que al resolver esta ecuación podemos obtener 2, 1 ó ningún valor de x que la satisfaga, dependiendo del radicando de la expresión. Si son dos los valores significa que la curva corta al eje “x” en dos puntos, si solo es uno quiere decir que la corta en un punto y si no se obtiene ningún x será que la parábola no corta al eje x.

Para encontrar el vértice, debemos determinar sus dos coordenadas (x_v , y_v). La coordenada x la obtenemos haciendo

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Y la coordenada y basta con reemplazar el valor de x_v en la función original, así:

$$y_v = a\,x_v^2 + b\,x_v + c$$

<u>Ejemplo 4</u>

Consideremos la misma función del ejemplo 11 y grafiquémosla de forma más precisa

$$y = 3x^2 + 4x - 4$$

Busquemos los puntos clave:

Cortes con ejes: con “y” en el punto 4

Con “x” resolvemos $0 = 3x^2 + 4x - 4$

$$x_{1,2} = \frac{-4 + -\sqrt{4^2 - 4.3.(-4)}}{2.3}$$

$x_1 = \dfrac{-4+\sqrt{64}}{6}$ $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{64}}{6}$

$x_1 = \dfrac{2}{3}$ $x_2 = -2$

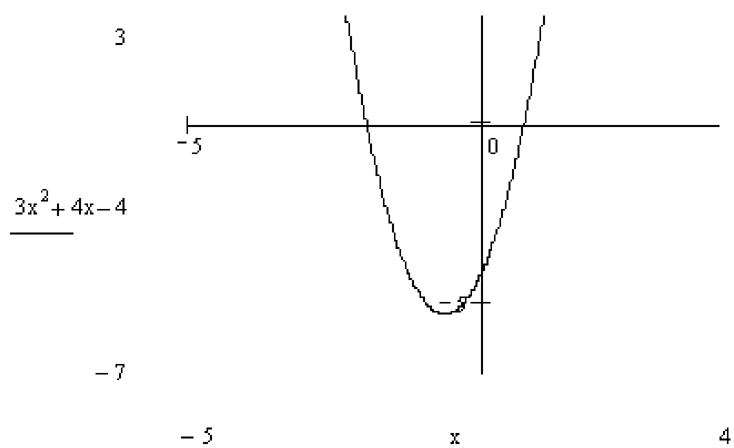
Significa que corta al eje “x” en los puntos – 2 y 2/3

El vértice: (x_v, y_v)

$x_v = \dfrac{-b}{2a}$ $x_v = \dfrac{-4}{2.3}$ $\boxed{\mathbf{x_v} = \dfrac{-2}{3}}$

$y_v = a\,x_v^2 + b\,x_v + c$ $y_v = 3.(-2/3)^2 + 4.(-2/3) - 4$ $\boxed{\mathbf{y_v} = \dfrac{-16}{3}}$

Entonces el vértice está en el punto (-2/3 , -16/3); por lo que el gráfico de la función $y = 3x^2 + 4x - 4$ quedaría de la siguiente forma:



Función exponencial

Las dos funciones anteriores presentan a la variable x afectada de una potencia, por el contrario en esta función exponencial la variable aparece como exponente de un número real positivo. La función exponencial es:

$$f: R \rightarrow R \;/\; f(x) = a^x \qquad \text{siendo } a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$$

Al número real a se le llama base, por lo que a esta función se la llamaría **función exponencial de base a.**

Debe tenerse en cuenta que para esta función exponencial, si bien el rango es el conjunto de números reales, el conjunto imagen está formado solo por los reales positivos, ya que un número real positivo (a) elevado a cualquier exponente real, siempre será positivo.

Su gráfica

Si tenemos en cuenta la definición de la función, y además que todo número elevado a la 0 es 1, y todo número elevado a la 1 da el mismo número, la curva siempre pasa por dos puntos clave, ellos son (0, 1) y (1, a).

Para determinar más puntos de la curva exponencial deberemos tener en cuenta dos posibilidades una cuando a >1 y la otra para a<1.

Para a > 1 la función es creciente y su gráfico sería algo como el de la figura 1.

Para a < 1 la función es decreciente y su gráfico sería algo como el de la figura 2.

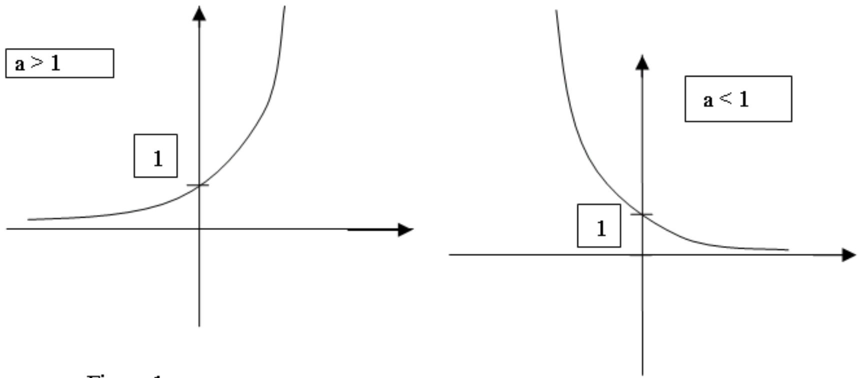


Figura 1

Comentario

Al graficar funciones como las que aquí se muestran, es conveniente hacerlo sobre el dibujo de la función pura, para que se visualicen los cambios que se han producido.

Algunas características de estas curvas

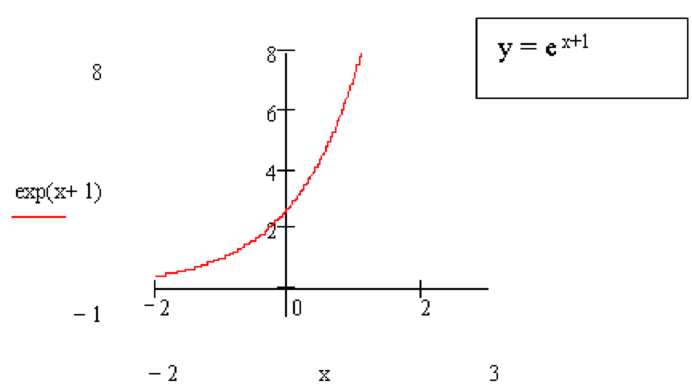
Siempre se encuentran por sobre el eje "x" quiere decir no lo corta.

Cortan al eje "y" en el 1.

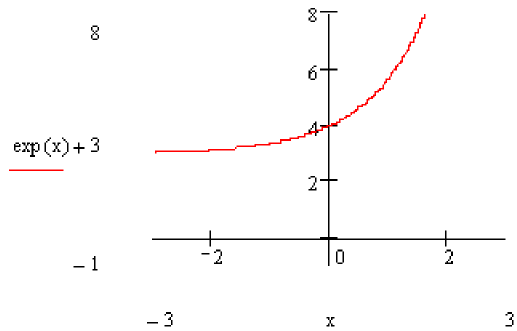
Para a >1, se aproxima al eje "x" para valores que tienden a -∞.

Para a <1, se aproxima al eje "x" para valores que tienden a ∞.

Debe tenerse en cuenta que las características mencionadas corresponden a la función exponencial pura, esta es la más sencillas de la funciones exponencial. Si se opera con alguna otra función el gráfico podrá ser similar pero seguro cambia. Observe los siguientes ejemplos:



$y = e^x + 3$



Función Logarítmica

Se define a la función logarítmica de base **a**, a la función inversa de la función exponencial de base **a**.

Es decir que y = f(x) es función logarítmica:

$$f: R \to R \,/\, y = \log_a x \iff a^y = x \qquad \text{siendo } x > 0 \,,\, a > 0 \;\wedge\; a \neq 1$$

A esta función se la llama **función logarítmica de base a.**

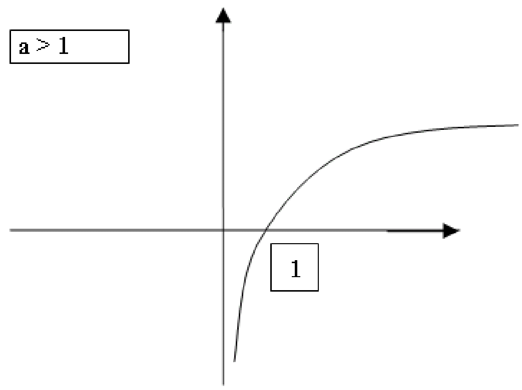
Debe tenerse en cuenta que si bien el alcance y el rango son los números reales, por ser el logaritmo inverso de la exponencial, de partir de un dominio igual a la imagen de la función exponencial. Por ello entonces el conjunto Dominio de la función logarítmica es el conjunto de reales positivos; y el conjunto Imagen son todos los reales.

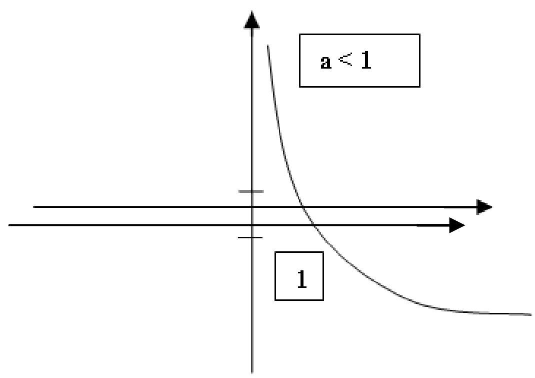
Su gráfica

En esta función también tenemos dos puntos característicos, importante y a tener en cuenta. Ellos son (1, 0) y (a, 1), puesto que $\log_a 1 = 0$ y que $\log_a a = 1$.

Para encontrar más puntos de la curva también debemos tomar las dos consideraciones para **a,** si $a > 1$ o sí $a < 1$.

Cuando $a > 1$ la función es creciente y para $a < 1$ es decreciente y sus gráficos son algo parecidos a los que se muestran aquí:



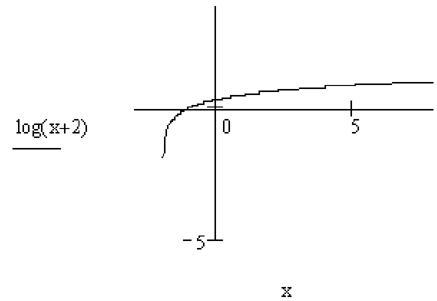


Estas curvas también presentan características similares:

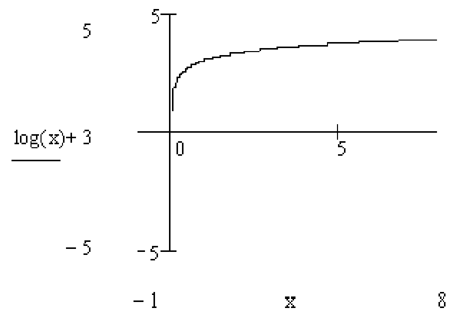
- Cortan al eje “x” en el 1.
- No cortan al eje “y” se encuentran a su derecha.
- Para $a > 1$ la curva tiende al $-\infty$ cuando x tiende al 0.
- Para $a < 1$ la curva tiende al ∞ cuando x tiende al 0.

Tengan en cuenta que estas características son para las funciones logarítmicas puras, ya que si la misma se opera con otra función su gráfica se modificaría, como lo muestran los siguientes ejemplos:

$y = \log(x+2)$



$Y = 3 + \log x$



Trabajo Práctico

Ejercicio 14

Graficar las siguientes funciones lineales:

a- $y = 2 - 2x$

b- $y = 3x$

c- $y = -4 + \frac{1}{2}x$

d- $y = 12x - 6$

Comentario

Como ya se dijo en las funciones exponenciales, al graficar funciones como las que aquí se muestran, es conveniente hacerlo sobre el dibujo de la función pura, para que se visualicen los cambios que se han producido.

Ejercicio 15

Determine la ecuación de la recta y luego grafíquela teniendo en cuenta los siguientes datos:

a- Recta que corte al eje “y” en 2 y tenga pendiente – 3 b- Recta que pase por el punto (1, 2) y su pendiente sea – 1

c- Recta que pase por los puntos (-3, -2) y (1, 4)

d- Recta que pase por (-2, 3) y sea paralela a $y = -2x - 1$

Ejercicio 16

Explique el significado de cada uno de los parámetros a, b y c de cada una de las siguientes funciones cuadráticas y realice el gráfico aproximado de ellas.

a- $y = x + 2 - x^2$

b- $y = 3x^2 + x$

c- $y = 10 - x^2 - 12x$

d- $y = 4 + x^2$

e- $y = 1 + ½\, x^2 + 5x$

f- $y = 4x^2 - 1/3x - 7$

Ejercicio 17

Realice un estudio más preciso de las funciones a, c y e del ejercicio 16, encontrando las raíces y el vértice de la parábola.

Ejercicio 18

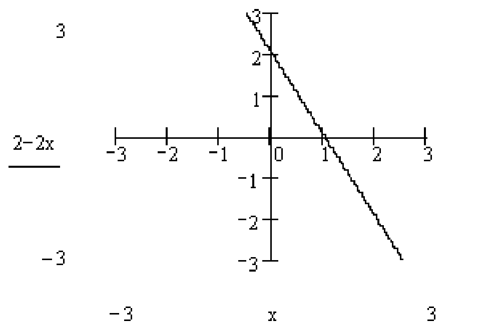
Utilizando un sistema de coordenadas para el punto a y otro para el punto b, represente en él las funciones f, g y h.

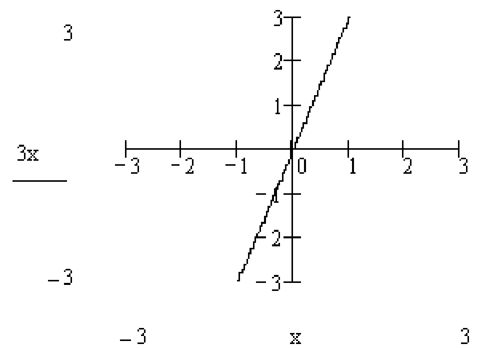
a- $f(x) = 2^x$ $g(x) = 2 + 2^x$ $h(x) = 2^{x+2}$

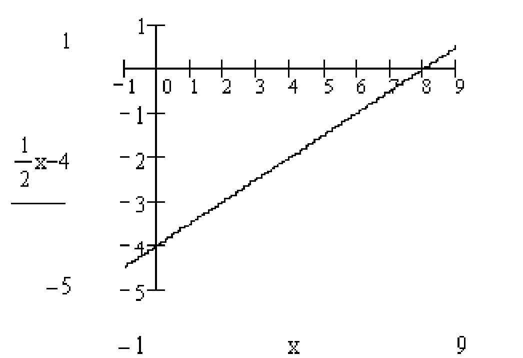
b- $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = 2 + \log_2 x$ $h(x) = \log_2 (x + 2)$

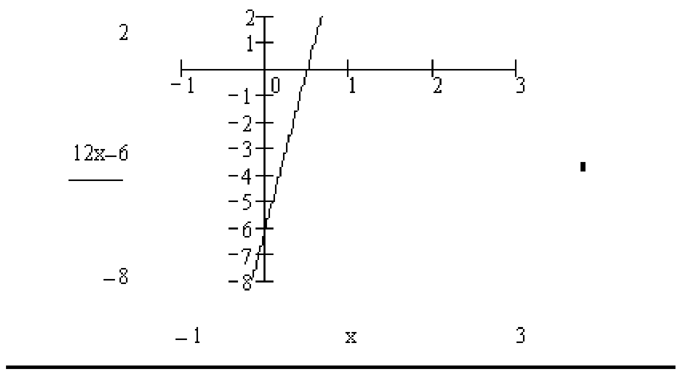
Respuestas

Ejercicio 14:









Ejercicio 15:

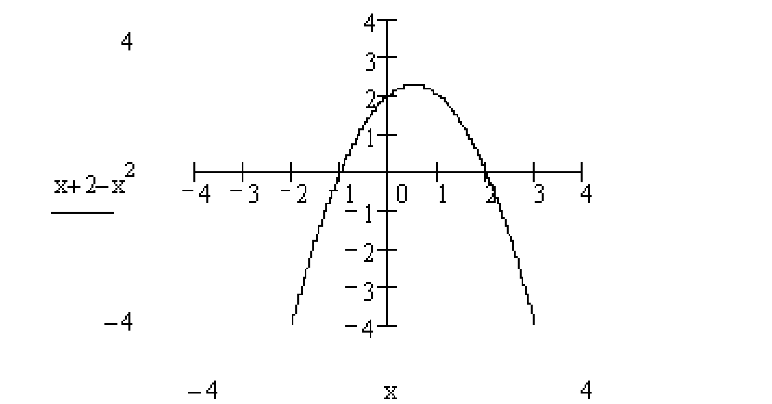
a) y = 2 – 3x

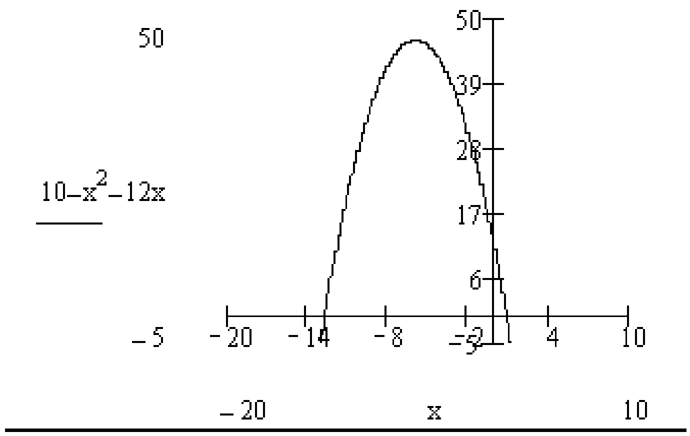
b) y = 3 – x

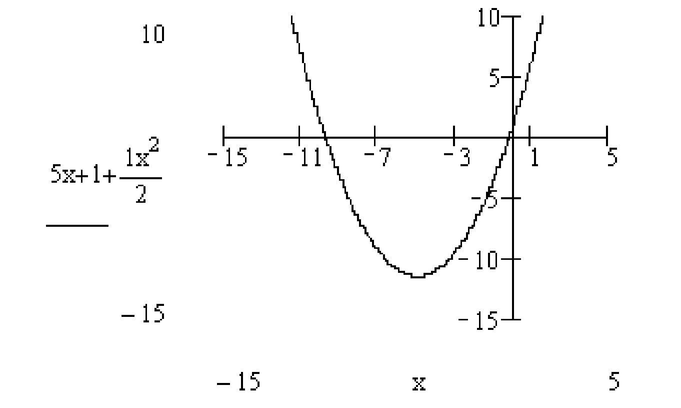
c) y = $\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

d) y = – 2x – 1

Ejercicio 17:




50
10−x^2−12x
−5
−20
x
10


10
5x+1+1x^2/2
−15
−15
x
5