Instituto Superior Santo Domingo	**UNIDAD Nº 2:** **Límite y Continuidad**	**TEMAS:** **Límite de funciones**	**Clase** **5**

Objetivos:

- Conocer el concepto de límite de funciones
- Interpretar el significado de límites laterales
- Aplicar límites laterales en el cálculo de límites.
- Conocer las propiedades de los límites

Introducción

Hoy daremos inicio al análisis matemático propiamente dicho, ¡Si, así es! Hasta ahora hemos estudiado las funciones en general, pero a partir de la clase de hoy comenzaremos su análisis más profundo. Es de suma importancia que logres comprender muy bien la definición del concepto de límite, ya que ello te ayudará en la comprensión de muchas ideas posteriores.

Actividades

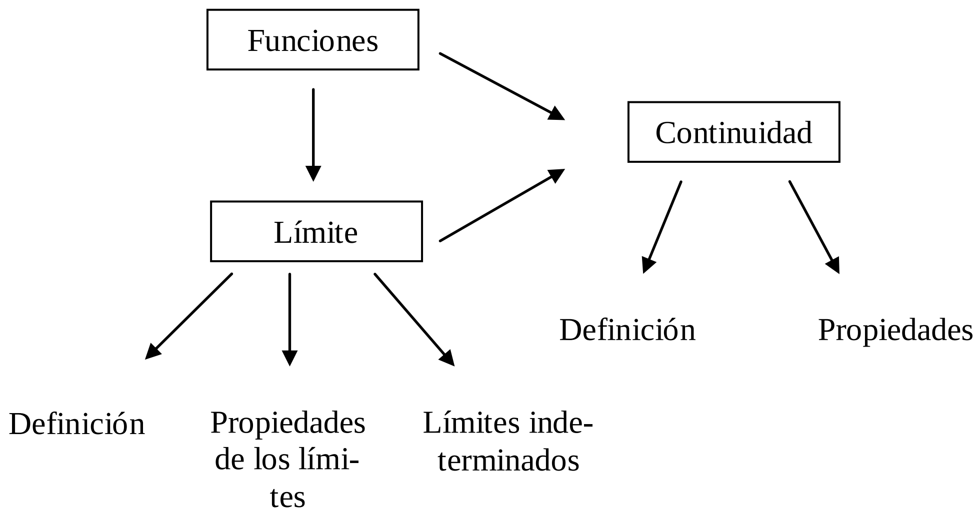
- Realiza la lectura del material, correspondiente al tema indicado, trata de hacerlo desde el inicio del tema, no está de más afianzar los conceptos.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Es de suma importancia, sobre todo en la función cuadrática, hacer un análisis previo de los parámetros a, b y c para tener una noción de cómo sería su gráfica, de modo que al hacerlo en forma precisa coincidan las curvas.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.

- Comunicarse con el profesor, utilizando el “Campus del Instituto”, si no pudiera salir por si solo de la duda que le pudiera surgir, NO DEJE QUE SU DUDA PERDURE.

Límite y Continuidad

Límite

En la unidad 1 hemos realizado un estudio de las funciones en general y de las funciones particulares. En esta unidad continuaremos estudiando las funciones, pero nos centraremos en un concepto de gran importancia del análisis matemático: el Límite. Es de suma importancia la comprensión de esta unidad, ya que es la base para comprender el concepto de derivada, que veremos próximamente.



Introducción

La idea del límite aparece en muchas situaciones, aunque quizás de forma muy intuitiva. Por ejemplo, en la física se define la velocidad instantánea de un móvil como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado tienda a cero. En geometría la longitud de una circunferencia se toma como el límite del perímetro de los polígonos inscriptos en ella para cuando el número de lados tiende a infinito, que es lo mismo que decir que el largo de cada lado tiende a cero.

¿Cuál es la idea del límite?

La idea del estudio del límite de una función, es la de observar su comportamiento a medida que los valores de "x" se acerquen cada vez más a algún valor predeterminado. Es decir miramos si las imágenes tienen alguna tendencia en particular (a un número real) cuando las preimágenes se acercan a un valor de "x", que puede o no pertenecer al dominio de la función.

Para indicar el límite de una función f(x) cuando x tiende a un número n escribimos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to n} f(x)$$

<u>Ejemplo 1:</u>

Consideremos la función f(x) = 2 x + 2, y observemos lo que sucede con las imágenes a medida que nos acerquemos a x = 2

x : 1, 9 1, 99 1, 999

↓ ↓ ↓

y : 5,8 5, 98 5, 998

Valores de f para x que se acercan al 2 por la izquierda

x: 2, 1 2, 01 2,001

↓ ↓ ↓

y: 6, 2 6,02 6,002

Valores de f para x que se acercan al 2 por la derecha

Comentario

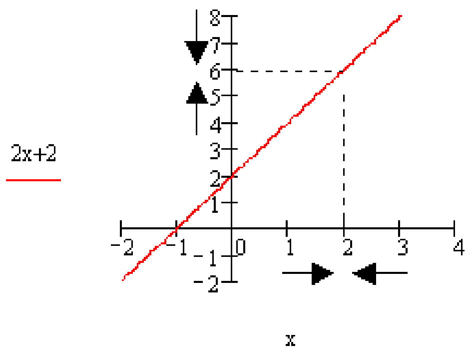
Recuerde que determinar el valor de una función, o valuar una función, consiste en reemplazar la variable x por el valor que deseamos, como por ejemplo, para este caso 1,9; 1,99…

Como puede notarse en este ejemplo a medida que más nos acercamos al valor 2 de "x", las imágenes más se acercan al número 6. Podríamos decir entonces que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 6$$

Considerando el ejemplo anterior, podemos hacer que f(x) se aproxime tanto al 6 como queramos, tomando valores de x lo suficientemente cercanos a 2.

Esto significa que la distancia entre f(x) y 6 puede ser tan pequeña como se quiera, para lo cual la distancia entre x y 2 también debe ser lo suficientemente pequeña.



Definición

Se dice que L es el límite de la función f(x) cuando x tiende a x_0, si y solo si, para todo entorno de centro L y radio ε ($N_{(L,\varepsilon)}$) en el eje "y", tan pequeño como se quiera, existe un entorno de centro x_0 y radio δ, en el eje "x", tal que para todo punto x que pertenezca este entorno su imagen pertenece al entorno en el eje "y".

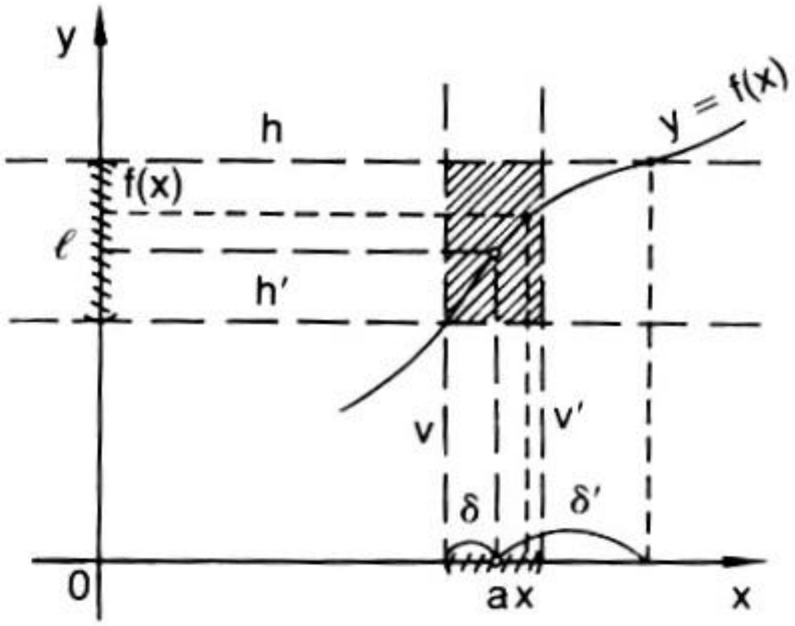
Gráficamente, el límite en un punto es "L", si para cualquier radio que tomemos (ε) a su alrededor, podemos encontrar un radio alrededor de "x_0" (δ) tal que todas las imágenes de los puntos del entorno reducido estén en el entorno de centro "L".

Esto lo podemos ver en el siguiente gráfico, en el que se muestra el límite de la función f(x)

Relación

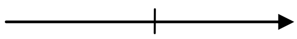
Si no lo recuerda, sería conveniente que repase el tema de entornos desarrollado en el anexo 1 de la unidad anterior.

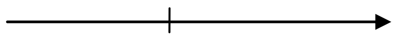
cuando x tiende a “a”, y los dos entornos, en “x” de centro “a” y en el “y” de centro “L”



Límites laterales

Cuando vimos la idea de límite, dijimos que las preimágenes se acercan a un valor conocido (“x_0”), en el eje x. Este acercamiento puede hacerse por la izquierda o por la derecha de “x_0”:





$x \to x_0$ $x_0 \leftarrow x$

Acercamiento por izquierda Acercamiento por derecha

Este estudio de la función al acercarnos por la derecha o la izquierda, da lugar a los llamados **límites laterales.**

Al acercarnos a $x_0^{\,+}$por la derecha para observar el comportamiento de las imágenes, lo llamaremos **Límite Lateral Derecho** y lo escribiremos del siguiente modo:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Al acercarnos a x_0^+ por la izquierda para observar el comportamiento de las imágenes, lo llamaremos **Límite Lateral Izquierdo** y lo escribiremos del siguiente modo:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

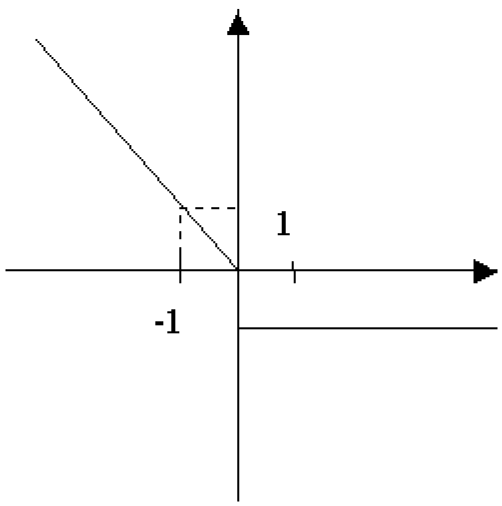
Para que el límite total de la función exista, cuando x tiende a x_0, debe cumplirse que los límites laterales EXISTAN y sean IGUALES. Si esto pasa entonces el límite de la función será justamente el valor de los límites laterales.

Si los límites laterales existieran, pero fuesen distintos, entonces NO existe el límite total.

Si alguno de los límites laterales no existiera, entonces NO existe el límite total.

Ejemplo:

Siendo f(x) la función mostrada en la figura, determinar los límites indicados, cuando x tiende a – 1, a 0 y a 1



Glosario

Cuando de acá en más hablemos de límite, estaremos haciendo referencia al límite total, por supuesto que ese término incluye al de límite lateral

Si nos acercamos a – 1 por la izquierda podemos observar que las imágenes tienden al valor 1, por lo que decimos

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$$

Si nos acercamos a – 1 por la derecha podemos observar que las imágenes también tienden al valor 1, por lo que decimos

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$$

Como los límites laterales existen y son iguales, entonces también existe el límite total, y será:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 1$$

Glosario

Si el límite de una función para x que tiende a x_0, da ∞, también significa que la función No tiene límite.

Veamos lo que sucede en x = 0:

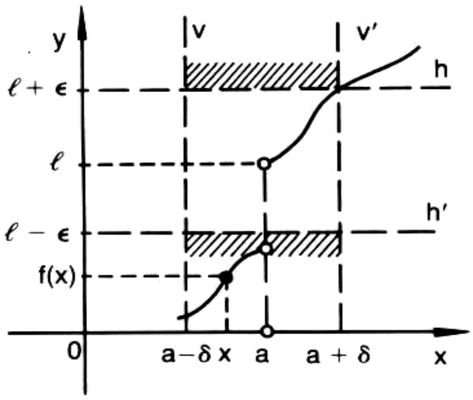
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x \to 0} f(x)$$

Dejamos para el estudiante, el análisis del límite en x = 1

La no existencia del límite

El límite de una función f no existe si no se cumple la definición, esto sería negar toda la expresión: significa que para cualquier número real L que se proponga como posible límite finito de la función en el punto x_o, siempre es posible encontrar un entorno de L tal que, en cualquier entorno reducido del punto x_0, hay por lo menos un x del dominio para el cual f(x) queda fuera del entorno de L.

Lo expresado anteriormente puede representarse gráficamente, considerando $x_0 = a$

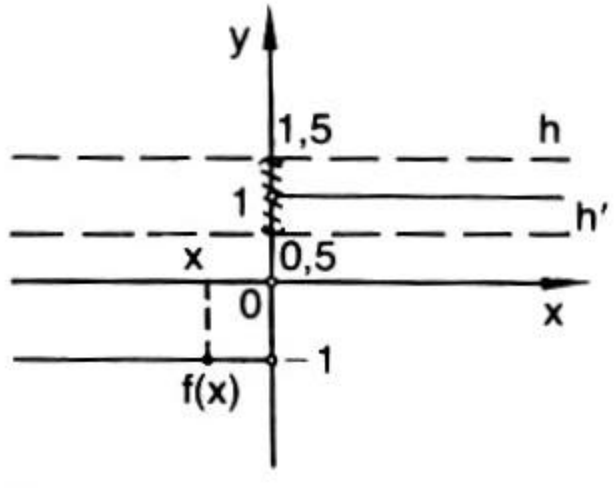


Ejemplo:

Si consideramos la función f(x) = $\frac{|x|}{x}$ y deseamos calcular el límite de f para x = 0. Es fácil ver que ese límite no existe ya que los límites laterales son distintos y además para cualquier L que supongamos el límite, todo entorno del cero tiene algún x cuya imagen no pertenece al entorno de L. El gráfico de ello nos ayuda a entenderlo

Glosario

A la función $\frac{|x|}{x}$ se le suele dar el nombre de función signo, ya que los valores que toma son solo 1 y – 1.



Glosario

Otro modo de escribir un entorno es utilizando el valor absoluto:

$N_{(a,\, r)} = | x - a | < r$

Ejemplo:

$N_{(l,\, \varepsilon)} = | f(x) - l | < \varepsilon$

Algunos límites finitos básicos

Límite de la función constante

Probaremos que:

$$\lim_{x \to x_0} k = k$$

Esto quiere decir que el límite de una constante es una constante. Probar esto significa encontrar para cualquier número positivo ε, un número positivo δ que satisfaga la condición exigida por la definición.

En este caso δ, puede ser cualquier número positivo, pues para cualquier número positivo ε, se cumple:

$$\forall x: (x \in R \ \wedge \ 0 < | x - x_0 | < \delta \ \Rightarrow \ | k - k | = 0 < \varepsilon$$

Se verifica la definición de límite para f(x) = k y para L = k.

Límite de la función identidad

Para la función f(x) = x también es fácil demostrar que el

$$\lim x = x_0$$

$x \to x_0$

Si tomamos cualquier número positivo δ tal que $\delta \leq \varepsilon$, resulta que:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta \leq \varepsilon \,/\, (x \in R \;\wedge\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| = |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon)$$

Estos dos límites resultan de gran importancia para la determinación del límite de cualquier otra función, para lo cual deberemos tener en cuenta además las propiedades de los límites.

Propiedades de los límites

<u>Límite de una suma de funcione</u>

El límite de una suma de funciones es igual a la suma de sus límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

<u>Ejemplo:</u>

$$\lim_{x \to 1} (4 + x) = \lim_{x \to 1} 4 + \lim_{x \to 1} x = 4 + 1 = 5$$

Como se dijo antes, al aplicar la propiedad, hemos obtenido los dos límites básicos, cuyos valores se conocen.

Advertencia

Debe tener en cuenta que si bien en estos ejemplos trabajamos con dos funciones, también es válido para un número mayor de ellas. Es importante dar consejos para entender mejor.

<u>Límite de un producto de funciones</u>

El límite de un producto de funciones es igual al producto de los dos límites.

lim$\left[f(x).g(x)\right]$ **= _lim_ f(x) . _lim_ g(x)**

x→a x→a x→a

<u>Ejemplo:</u>

lim (5 . x) = *lim* 5 + *lim* x = *5* . 2 = 10

x→2 x→2 x→2

<u>Límite de un cociente de funciones</u>

El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los dos límites, si el límite del denominador es distinto de cero.

lim$\left[f(x):g(x)\right]$ **= _lim_ f(x) : _lim_ g(x) si _lim_ g(x) ≠ 0**

x→a x→a x→a

x→a

<u>Ejemplo:</u>

lim [(5x) : (x + 1)] = *lim* (5 x) : *lim* (x + 1) = 0 : 1 = 0

x→0 x→0 x→0

<u>Límite de una composición de funciones</u>

lim$\left[f(g(x))\right]$ **= f (_lim_ g(x))**

x→a x→a

<u>Ejemplo:</u>

lim [log(5x - 4)] = log (*lim* (5 x - 4)) = log (1) = 0

x→1 x→1

Trabajo Práctico

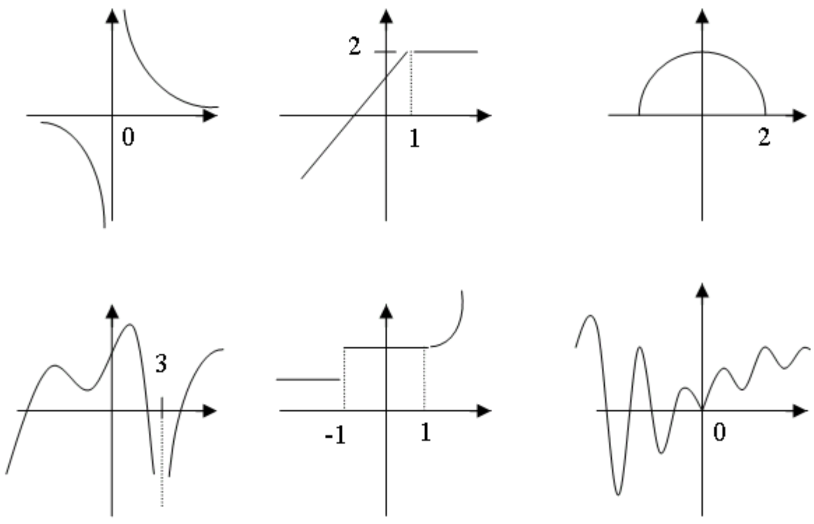
Ejercicio 1:

Considerando la función f(x) = $\dfrac{9-x^2}{3-x}$

a) Determine el dominio de la función.
b) Realice una tabla con no menos de 5 valores de x que se acerquen desde el 2 hacia el 3, y encuentre la imagen de cada uno.
c) Realice una tabla con no menos de 5 valores de x que se acerquen desde el 4 hacia el 3, y encuentre la imagen de cada uno.
d) Teniendo en cuenta las tablas anteriores indique Lim_{3^-} f(x) y el Lim_{3^+} f(x).
e) ¿Cuál es el Lim_3 f(x)

Ejercicio 2:

Teniendo en cuenta los siguientes gráficos, determine en cada punto indicado, los límites laterales y el límite total



Ejercicio 3:

Calcular los siguientes límites dejando especificadas las propiedades que utilice, paso a paso:

a) Lim$_2$ $4x + 2$

b) Lim$_{-1}$ $x^2 - x$

c) Lim$_0$ $\frac{6x-4}{x+3}$

d) Lim$_5$ $\sqrt{4x-20} - \sqrt{9-x}$

e) Lim$_0$ $\frac{3-x}{x^2 + x^3}$

f) Lim$_3$ sen(2x – 6) + x. $\sqrt{x+1}$

g) Lim$_{2^+}$ log(x – 2)

h) Lim_{0^-} tg x

Ejercicio 4:

Teniendo en cuenta los gráficos de las funciones trigonométricas, determine los límites de todas ellas para:

a- $x \to 0$

b- $x \to \pi/2$

c- $x \to \pi$

d- $x \to 3\pi/2$

Ejercicio 5:

Sin la necesidad de expresar las propiedades empleadas, calcule los límites de cada función en los puntos x_0 indicados:

a) $$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad x_0 = -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

b) $$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3 - x & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \qquad x_0 = -2,\ 0,\ 2$$

c) $h(x) = \begin{cases} 4x + \dfrac{x^2+2}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3 \operatorname{Log}(x) - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $x_0 = -1, 0, 1$

d) $j(x) = \begin{cases} 3 \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \cos(x+\pi) & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$ $x0 = 0, \pi/2$