Instituto Superior Santo Domingo	**UNIDAD Nº 1:** Funciones	**TEMAS:** Función. Dominio e Imagen	Clase 1

Objetivos:

- Conocer la definición de función.
- Valorar la importancia de la utilización de funciones.
- Diferenciar los elementos que intervienen en las funciones.
- Poder determinar el dominio de una función y su imagen.

Introducción

Si bien el tema de funciones ha sido estudiado por todos los alumnos en su formación académica de la escuela secundaria, no está nada de más hacer un repaso de los principales conceptos relacionados con ellas.

Tampoco es un repaso que hacemos por hacer nada más, sino que todo el Análisis I y gran parte del II, trata del estudio de las funciones, para su posterior aplicación a la resolución de situaciones problemáticas concretas.

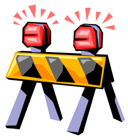
En muchas ocasiones, al analizar una función es de gran utilidad conocer cuáles son los valores que puede tomar la variable independiente, y en la clase de hoy uno de los temas que veremos es justamente como encontrar el dominio de una función, y así también determinaremos el conjunto imagen, es decir los valores que puede tomar la variable dependiente.

Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio, desde el inicio hasta el concepto de dominio.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Buscar ejemplos de relaciones funcionales que se den en la vida cotidiana.

Funciones

A nuestro alrededor suceden infinidad de eventos que en la mayoría de los casos nos pasan desapercibidos. Si nos detenemos unos instantes para reflexionar sobre alguno de ellos, podremos observar que su realización depende de uno o muchos factores. Tomemos un ejemplo: En el mes de septiembre del año 2003, en la ciudad de Córdoba (Argentina), se ha dado un fenómeno interesante, que ha sido tratado incluso en los noticieros radiales y televisivos. Gran cantidad de personas había notado con asombro que se cargaba electrostáticamente con mucha más frecuencia de lo habitual. Entre las causas de este fenómeno se encuentra la falta de precipitaciones que había sufrido la ciudad por varios meses. Esto quiere decir que un cuerpo queda cargado electroestáticamente con más facilidad cuando es menor la humedad del ambiente en el que se encuentra. Este es un ejemplo concreto que nos muestra la relación permanente entre todo lo que nos rodea; e indica que algunos fenómenos están en función de la ocurrencia de otros.



¡Cuidado!

Debe tener siempre presente que si una función es una relación entre dos variables, al escribir la igualdad que aparezcan las dos, ya que si solo hay una sola, estaría representando una ecuación.

Desde la Matemática se estudian las funciones en general, de modo tal que otras disciplinas puedan hacer uso de esas herramientas para aplicarlas en su campo en particular. En este curso solo veremos funciones entre dos variables, es decir entre dos conjuntos.

De las relaciones, interesan especialmente aquellas que hacen corresponder a cada elemento del primer conjunto (conjunto de partida o alcance) un único elemento del segundo conjunto (conjunto de llegada o rango). A estas relaciones se les llama en particular relación funcional o tan solo ***función***. Por lo tanto: Una función entre dos variables es ***una relación que a cada valor de la variable independiente (x) le hace corresponder un único valor de la variable dependiente (y).***

Lo escribimos simbólicamente de la siguiente forma:

$$y = f(x)$$

Y lo leemos: “y” igual a f de x. (y es una función de x ó y está en función de x)
A la variable independiente x también suele llamársela “preimagen” y a la variable dependiente (y) se la llama imagen.

Ejemplo 1:

Si la relación funcional entre las variables es: “y es el doble de x”
En símbolos lo escribimos

$$y = 2.x$$

Para el valor de x = 3 la variable y = 6, entonces 3 sería la preimagen de 6 ó de otra forma, 6 sería la imagen de 3, y de ambas formas estaríamos diciendo lo mismo. Con este ejemplo podemos observar que encontrar el valor de una función para un número x_0, resulta de reemplazar en la fórmula de la función, la variable x por ese valor de x_0. También suele decirse valuar la función en x_0.

Conjunto Dominio e Imagen

Como ya se dijo anteriormente una función es una relación entre dos conjuntos, uno de partida o alcance y otro de llegada o rango. En todas las funciones que estudiaremos estos dos conjuntos coincidirán con el conjunto de números reales (R). Pero no en todas las funciones interviene la totalidad de números reales, es por ello que se definen dos conjuntos más:

Dominio: es el conjunto formado por todos los elementos del alcance que tienen una imagen. Se escribe Dom(f)

Imagen: es el conjunto formado por todos los elementos del rango que son imagen de algún valor de x. Se escribe Im(x)

En ocasiones resulta de gran utilidad conocer estos dos conjuntos, es decir determinarlos. ¿Pero cómo se hace? Para la determinación del dominio se deben tener en cuenta las operaciones que intervienen en la fórmula de la función, ya que pueden presentarse tres inconvenientes con ellas, en los que la operación no existe en el campo de los números reales. Esos tres problemas se presentan cuando:

- En una división el divisor es cero.
- En una raíz de índice par el radicando es negativo.
- En un logaritmo el argumento no es positivo.

Por lo tanto todos aquellos valores de x para los que sí se puedan realizar las operaciones formarán el conjunto dominio.

Ejemplo 2:

Sea la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$ ¿cuál es su dominio?

De las tres dificultades que se nos pueden presentar con las operaciones, en ésta la que aparece es la primera, puesto que en la división el divisor podría anularse, por ello es que planteamos

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ \wedge \ x = -3$$

Esto quiere decir que para los valores 3 y –3 el denominador se anula, con lo que podría llevarse a cabo la operación. Con cualquier otro valor no se tendría problema, entonces el dominio de la función estaría formado por todos los números reales salvo el 3 y el –3. Eso puede escribirse:

$$\text{Dom}(f) = R - \{3, -3\}$$

O también

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

Ejemplo 3:

Sea la función $m(x) = \log(2x + 1)$ ¿cuál es su dominio?

En este caso la dificultad que se presenta es la tercera, ya que el argumento del logaritmo podría ser no positivo. Entonces planteamos:

$$2x + 1 > 0$$
$$2x > -1$$
$$x > -½$$

Por lo tanto tendríamos que los valores de x para los que sí se podría realizar la operación son todos aquellos mayores a ½.

Lo escribimos $Dom(m) = (-½, \infty)$

Obsérvese que en los ejemplos se ha procedido de modo diferente, ya que en el primero se buscaron los puntos que no están en el dominio y luego se le restó al conjunto de números reales, en cambio en el segundo, directamente se encontró el conjunto de números para los que sí se puede operar. Es indistinto el trabajar de un modo o del otro y quedará a criterio del estudiante el planteo que desee realizar.

Para la determinación del conjunto Imagen lo primero que debemos realizar es escribir la variable x en función de la variable y, que es lo mismo que decir despejar x de la fórmula de la función. Una vez hecho eso, el procedimiento es el mismo que hicimos en el dominio, teniendo en cuenta las tres dificultades con operaciones.

Ejemplo 4:

Sea la función $g(x) = 2x^2 - 8$ ¿cuál es el conjunto imagen?

Primero escribimos x en función de y

$$y = 2x^2 - 6$$
$$y + 6 = 2x^2$$
$$(y + 6): 2 = x^2$$

Por lo tanto $x = \sqrt{\frac{y}{2} + 3}$

Y ahora si observamos como quedó la fórmula, vemos que se nos presenta la segunda dificultad, respecto a la raíz, por lo que deberíamos plantear

$$y/2 + 3 \geq 0$$

$$y/2 \geq -3$$

$$y \geq -3 \,.2$$

Entonces el conjunto imagen sería: $\mathrm{Im}(g) = [-6, \infty)$

Trabajo Práctico

Ejercicio 1:

De las siguientes relaciones entre los reales, diga cuáles son funciones y cuáles no, justificando cada respuesta.

a- $R_1 : R \rightarrow R$ / R_1: x es la mitad de y

b- $R_2 : R \rightarrow R$ / R_2: x es menor que y

c- $R_3 : R \rightarrow R$ / R_3: x es el triple de y

d- $R_4 : R \rightarrow R$ / R_4: x es mayor o igual que y

Ejercicio 2:

Escriba las “funciones” del ejercicio anterior mediante una fórmula.

Ejercicio 3:

Dada la función $y = f(x)$ / $y = 2\,(x^2 - 3)$

a- ¿Cuál es la imagen de 1?

b- ¿Cuánto vale f(x) para x = 2?

c- ¿Cuál es la preimagen de 12?

d- Si y = 2 ¿cuál es el valor de x?

Ejercicio 4:

Determine el dominio de las siguientes funciones:

a- $y = (3x - 1)^2$

b- $y = 5 + x - \dfrac{3}{x-1}$

c- $y = \dfrac{4-x}{\sqrt{x+4}}$

d- $y = 2 - \log(5 + x)$

e- $y = 1 - \dfrac{24}{x^2+1} - \sqrt{\dfrac{-4}{2+x}}$

f- $y = x^3 + 15x - x^{-1}$

Ejercicio 5:

Encuentre el conjunto imagen de la función del punto a del ejercicio anterior.

Ejercicio 6:

De las siguientes funciones por partes, determine su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 + 2^x & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{Log}(x - 1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7:

Realice los cálculos necesarios para encontrar las imágenes de las funciones f y g del punto anterior:

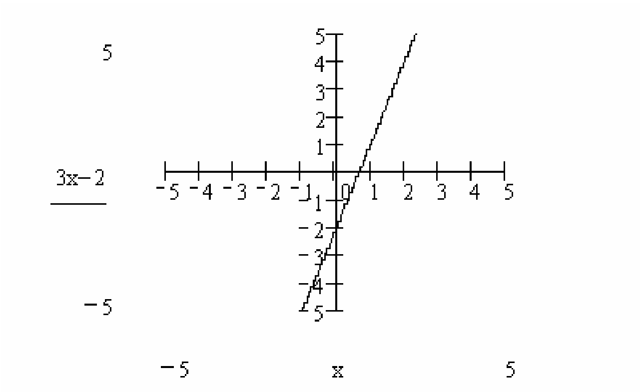
f(2) f(0) f(-3) g(0) g(-2) g(11)

Ejercicio 8:

Represente en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos del plano correspondientes a los pares ordenados de los puntos a, b, c, y d del ejercicio 3.

Ejercicio 9:

Escriba cinco pares ordenados correspondientes a puntos de la curva representada en el sistema de coordenadas.



Respuestas

Ejercicio 1:

a) Sí b) No

c) Sí d) No

Ejercicio 2:

a) $y = 2.x$

b) $y = \frac{x}{3}$

Ejercicio 3:

a) $f(1) = -4$ c) 3 y - 3
b) $f(2) = 2$ d) 2 y -2

Ejercicio 4:

a) R
b) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
c) $(-4, \infty)$
d) $(-5, \infty)$
e) $(-\infty, -2)$
f) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Ejercicio 5:

a) $[0, \infty)$

Ejercicio 6:

a) $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
b) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

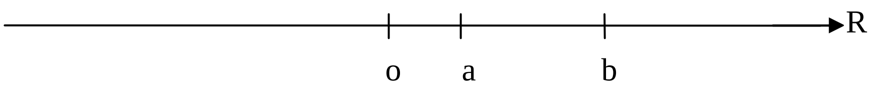
Ejercicio 7:

- 3/5 ; 2 ; 11 ; no existe ; 13/4 ; 1

Anexo

Intervalos y Entornos

En la geometría analítica se establece una relación biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales. Esto significa que a cada número real le corresponde un punto de la recta y que a cada punto de la recta se le puede asignar un número real. Por ello se llama a la recta numérica recta real.



Esta relación o correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, en muchas ocasiones facilita la comprensión e interpretación de conceptos y demostraciones, y por eso veremos algunas definiciones útiles.

Intervalos:

Considerando los números reales **a** y **b** (a los que llamaremos extremos del intervalo) tales que **a < b**, definimos:

- **Intervalo cerrado [a, b]:** es el conjunto formado por todos los números reales que sean mayores o iguales que **a** y a la vez sean menores o iguales que **b.**

$$\mathbf{[a, b]} = \{x/x \in R \ \wedge \ a \leq \ x \leq b\}$$

- **Intervalo abierto (a, b)**: es el conjunto formado por todos los números reales que sean mayores que **a** y a la vez sean menores que **b.**

$$\mathbf{(a, b)} = \{x/x \in R \ \wedge \ a < \ x < b\}$$

- Intervalo semiabierto: es el conjunto de números reales formado por uno de los extremos y todos los puntos comprendidos entre ellos.

$$\mathbf{[a, b)} = \{x/x \in R \ \wedge \ a \leq \ x < b\}$$
$$\mathbf{(a, b]} = \{x/x \in R \ \wedge \ a < \ x \leq b\}$$

Longitud de un intervalo: se llama así a la distancia entre sus extremos

$$\text{long. de } (a, b] = b - a$$

Entornos:

Si x_0 pertenece a un intervalo abierto, se dice que ese intervalo es un entono de x_0. Si además x_0 es el centro del intervalo, a él se lo llama entorno simétrico de x_0. Entonces se define el entorno simétrico de centro x_0 y radio o semiamplitud r, al intervalo abierto de extremos $x_0 - r$, $x_0 + r$.

Entorno simétrico de centro x_0 y radio r: $N_{(xo,\, r)}$

$$\mathbf{N_{(xo,\, r)} = (x_0 - r\, ,\, x_0 + r)}$$

<u>Ejemplos:</u>

$N_{(2,1)} = (2 - 1, 2 + 1) \Rightarrow N_{(2,1)} = (1, 3)$

$N_{(-3,3)} = (-3 - 3, -3 + 3) \Rightarrow N_{(-3,3)} = (-6, 0)$