	UNIDAD Nº 2:	TEMAS:	Clase
Instituto Superior Santo Domingo	Límite y continuidad	Límites indeterminados	6

Objetivos:

- Conocer límites indeterminados
- Diferenciar los distintos tipos de indeterminaciones
- Salvar las indeterminaciones más simples

Introducción

En gran cantidad de situaciones en las que debamos calcular limites, aplicando las propiedades estudiadas, es posible que se nos presenten resultados que en realidad no sean un resultado concreto, como lo podría ser ∞, ó 5 ó √2; sino son de la forma 0/0, u otras, a las que llamamos indeterminaciones. Hoy daremos algunas herramientas para poder solucionar algunos tipos de indeterminaciones simples, y en la unidad 3 completaremos todos los tipos.

Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio desde el inicio de la unidad 2 y hasta los límites indeterminados inclusive.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Para el factoreo de polinomios puedes leer el apéndice que trata de ello.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.

- Comunicarse con el profesor, utilizando el “Campus del Instituto”, si no pudiera salir por si solo de la duda que le pudiera surgir, NO DEJE QUE SU DUDA PERDURE.

Límites indeterminados

Cuando se realiza la operación de paso al límite de una función, puede presentarse algunas de las siguientes expresiones (carentes de sentido aritmético) a las que se denominará **formas indeterminadas**:

$$\frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \infty - \infty \;;\; \infty \,.\, 0 \;;\; 1^{\infty} \;;\; \infty^{0} \;;\; 0^{0}$$

En un gran número de casos, es posible determinar el valor verdadero de cada una de las formas indeterminadas, recurriendo a procedimientos algebraicos, a transformaciones trigonométricas o a otros tipos de procedimientos analíticos.

En esta unidad sólo se verán las formas de "**levantar indeterminadas"** para algunos casos, a través de ejemplos. Se analizarán todas las formas indeterminadas en Matemática III.

1) Indeterminada de la forma 0/0 de un cociente de polinomios cuando $x \to 0$.

Ejemplo Nº6:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^5 + 3x^3 + 2x}{7x^4 - 5x^2} = \frac{0}{0}$$

Para resolver esta forma indeterminada a través de un procedimiento algebraico, se divide al numerador y al denominador por la variable elevada al **"menor"** exponente con que figure. Resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^4 + 3x^2 + 2}{7x^3 - 5x} = \frac{2}{0} = \infty$$

Cuanto más pequeño sea el denominador (**x** tiende a cero), más grande se hace el cociente, pues en este caso el numerador tiende a una constante no nula. El verdadero valor de esta función no existe ya que el límite da **infinito.** Obsérvese que en este caso la variable independiente tiende a **cero**.

2) Indeterminada de la forma ∞/∞ de un cociente de polinomios cuando x → ∞.

<u>Ejemplo Nº7:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 + 6x + 1}{9x^4 + 3x^3 + 2x + 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para resolver esta forma indeterminada, se divide numerador y denominador por la variable elevada al **mayor** exponente con que figure. Resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{9 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}} \quad \frac{0}{9} = 0$$

El denominador tiende a una constante no nula, el numerador se hace cada vez más pequeño, entonces el cociente es cada vez más pequeño. El verdadero valor es **cero**. Obsérvese que en este caso la variable independiente tiende a **infinito**.

3) Indeterminadas de la forma 0/0 ó ∞/∞ en general cuando x →a.

Un método un poco más amplio para levantar indeterminadas consiste en aplicar procedimientos algebraicos tales como la factorización, para simplificar la expresión dada; la racionalización de denominadores; cualquiera sea el **valor** al que tiende **x**.

Ejemplo Nº8

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0}$$

Factoreando:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3).(x+3)}{x.(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to 3} \frac{x + 3}{x} = 2$$

Trabajo Práctico

Ejercicio Nº 2:

Calcula los siguientes límites y, observando los resultados y el grado de los polinomios, deduce una "regla" para determinarlos.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{4x\beta) + x - 2x^2}{3x^2 + 2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - 1}{2x + 5} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3x}{5x^2 - x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x^4}{x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - 3x^2 - 2x}{4 + x^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + x}{x^2 + 2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5x^4 + \frac{1}{2} x^3}{5x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x^4 - 3x}{4x - 8 + 2x^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3x^8 - x^4 + 6x^3}{x^2 - 7x^8}$$