	UNIDAD Nº 3:	TEMAS:	Clase
Instituto Superior Santo Domingo	Derivadas	Aplicaciones de la derivada Regla de L`Hopital	10

Objetivos:

- Conocer algunas aplicaciones de las derivadas.
- Utilizar la Regla de L´Hopital.
- Salvar indeterminaciones de todo tipo.

Introducción

Ya sabemos derivar, ahora veremos algunas de la gran cantidad de aplicaciones de las derivadas. En la clase de hoy, para el cálculo de límites indeterminados, conoceremos la regla de L´Hopital.

Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio correspondiente al tema.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Es de suma utilidad el conocimiento de las reglas de derivación, es por ello que necesitas recordarlas siempre. No así la tabla ya que ella podrás tenerla siempre a mano.
- ¡OJO! Ten presente que la regla se utiliza solo en las indeterminaciones de tipo 0/0 ó ∞/∞, y para las otras formas deberás ingeniártelas para escribirlas de esa forma.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.

- Comunicarse con el profesor, utilizando el “Campus del Instituto”, si no pudiera salir por si solo de la duda que le pudiera surgir, NO DEJE QUE SU DUDA PERDURE.

Aplicaciones de la derivada

De aquí en adelante lo que desarrollaremos, serán algunas de las aplicaciones que tiene la derivada, como lo es por ejemplo la resolución de límites indeterminados o el análisis detallado de una función para su posterior representación gráfica.

Advertencia

Antes de aplicar la regla asegúrese que el límite sea indeterminado de la forma que indica la misma.

Regla de L´Hopital

Como ya vimos en la unidad 2, en muchas ocasiones el límite de funciones puede resultar indeterminado, es decir de la forma 0/0, ∞/∞ , 0.∞ , 1^{∞}, de los cuales solo los dos primeros pudimos resolver. A partir del enunciado de la regla de L´Hopital podremos resolver cualquier forma que presente la indeterminada.

Advertencia

Aplicar la regla de L´Hopital no es aplicar la derivada de un cociente, sino derivar por separado la función numerador y la función denominador

Si $\lim_a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ y existen f´(x) y g´(x) entonces se cumple que:

$$\lim_a \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_a \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Ejemplo:</u>

Calcular $\lim_0 \frac{senx}{x}$

$$\lim_0 \frac{senx}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_0 \frac{senx}{x} = \lim_0 \frac{(senx)'}{x'} = \lim_0 \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Por lo tanto $\lim_0 \frac{senx}{x} = 1$

¿Qué sucede con otro tipo de indeterminación?

Como la regla de L´Hopital está dada para las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ al resultar un límite indeterminado de otro tipo, simplemente mediante algún artificio habrá que transformar esa indeterminada en una como $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Veamos ahora algunos casos.

Si la indeterminación es de la forma 0. ∞

Si la indeterminación es de esta forma es por que existe un producto de funciones, una de las cuales tiende a 0 y la otra a infinito. En estas circunstancias basta con escribir el producto como un cociente, así:

$$f(x) \,.\, g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{ó} \qquad f(x) \,.\, g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

La elección de cual función escribir en el denominador dependerá de las características de las dos funciones. Por lo tanto el paso a realizar sería:

$$\lim_a f(x) \,.\, g(x) = 0 \,.\, \infty \Rightarrow \lim_a f(x) \,.\, g(x) = \lim_a \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

Y entonces ahora si se puede aplicar la regla de L´Hopital, considerando por supuesto, en este caso, a las funciones f(x) y $\frac{1}{g(x)}$, por lo que quedaría:

$$\lim_a f(x) \,.\, g(x) = \lim_a \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} = \lim_a \frac{f´(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)´}$$

Comentario

Si al hacer la elección de la función para escribir como fracción, no llega a un buen resultado, haga la otra elección y comience de nuevo.

Ejemplo:

Calcular $\lim_0 \left(x^2.\ln(x)\right)$

Tendríamos que

$$\lim_0 x^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_0 \ln(x) = -\infty$$

Entonces quedará:

$$\lim_0 \left(x^2.\ln(x)\right) = 0\,.(-\infty)$$

Podríamos escribir el producto

$$x^2.\ln(x) \text{ como } \frac{x^2}{\frac{1}{\ln(x)}} \text{ o como } \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}}$$

Elijamos esta última forma

$$\lim_0 \left(x^2.\ln(x)\right) = \lim_0 \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_0 \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_0 \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_0 \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \Rightarrow$$

$$\lim_0 \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_0 \frac{x^2}{-2} = 0$$

Por lo tanto: **$\lim_0$** $\left(x^2.\ln(x)\right)$ **= 0**

<u>Si la indeterminación es de la forma $\infty - \infty$</u>

Al tener como resultado de un límite la indeterminación de diferencia de infinitos, lo que se debe tratar de hacer, antes de calcular el límite es realizar la resta de la funciones, para escribirla de otra forma.

<u>Ejemplo:</u>

$$\text{Lim}_2 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)} = \infty - \infty$$

$$\text{Lim}_2 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)} = \lim_2 \frac{\ln(x-1)-(x-2)}{(x-2).\ln(x-1)} = \frac{0}{0}$$

Ahora si se puede aplicar la regla de L´Hopital, entonces será:

$$\lim_2 \frac{\ln(x-1)-(x-2)}{(x-2).\ln(x-1)} = \lim_2 \frac{\frac{1}{x-1}-1}{\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}} = \frac{0}{0}$$

Podemos aplicar nuevamente la regla de L´Hopital, en este último límite:

$$\lim_2 \frac{\frac{1}{x-1}-1}{\ln(x-1)+\frac{x-2}{x-1}} = \lim_2 \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}} = -\frac{1}{2}$$

El resultado finalmente sería:

$$\mathbf{Lim_2}\ \frac{1}{x-2}-\frac{1}{\ln(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

Si la indeterminación es de la forma 1^{∞} ó ∞^0 ó 0^0

En este caso la dificultad se presenta en el exponente de la función, y para poder resolverlo debemos bajar ese exponente, para lo cual aplicamos el logaritmo natural a la función, y a ese resultado le calculamos el límite. Al calcular ese límite, no estamos calculando el límite de la función original, sino del logaritmo de ella, por lo que al determinarlo, deberemos hacer un paso más, y es sacar el antilogaritmo de ese límite. Lo entenderemos mejor si vemos un ejemplo.

Ejemplo:

Calcular $\lim_0 x^x$

$$\lim_0 x^x = 0^0$$

Entonces a la función x^x le aplicamos el logaritmo natural

$$\ln x^x = x \,.\, \ln(x)$$

Y a esta función le calculamos el límite

$$\lim_0 \ln x^x = \lim_0 x \,.\, \ln(x) = 0.(-\infty)$$

En este caso recurrimos al primer artificio, por lo tanto

$$\lim_0 x \,.\, \ln(x) = \lim_0 \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Ahora aplicamos la regla de L´Hopital

$$\lim_0 \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_0 \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_0 (-x) = 0$$

Entonces, 0 es el límite del logaritmo de la función o es lo mismo que decir el logaritmo del límite, por lo que ahora deberemos sacar el antilogaritmo de 0, esto sería:

$$\text{Lim}_0 (\ln(x^x) = 0 \text{ entonces } \ln(\lim_0 x^x) = 0 \Rightarrow \lim_0 x^x = e^0 \Rightarrow \mathbf{\lim_0 x^x = 1}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 16:

Aplicando la Regla de L´Hopital, calcule los siguientes límites.

a - $\lim_\infty \left(\frac{5x^2+6}{4-x^2}\right)$

b - $\lim_0 \left(\frac{1}{x} - \text{cosec } x\right)$

c - $\lim_0 \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$

d - $\lim_1 \left(\frac{x^2-1}{\ln x}\right)$

e - $\lim_\infty \left(\frac{e^x}{4-x^2}\right)$

f - $\lim_\infty \left(x. \text{ sen } \frac{1}{x}\right)$

g - $\lim_0 (x . \ln x)$

h - $\lim_0 (x^x)$

i - $\lim_\infty (1 - \frac{2}{x})^x$

j - $\lim_0 (\ln x)^x$

k - $\lim_\infty (3 + x)^{\frac{2}{x}}$