

Tabla de Contenidos

Introducción	3
1. Universo e Individuos	4
2. Propiedades	4
3. Relaciones	6
Dirección de las relaciones	6
4. Relaciones Complejas	6
5. Parámetros	7
6. Representando Relaciones	8
7. Relaciones Múltiples	8
8. Todos	8
9. Nadie	9
10. Alguien	9
11. Todos los	9
12. Algún	10
El lenguaje de la Lógica de Predicados	11
1. Predicados, Variables y Constantes	11
2. Cuantificadores	12
3. Fórmulas	12
4. Ámbito de los cuantificadores	13
5. El significado de los cuantificadores	14
La formalización	14
1. Cómo formalizar	14
2. Formalización de frases con significado existencial o universal	16
Matices de significado	18
3. Formalización de frases complejas	19
La Deducción Natural	22
1. Reglas	22
Regla 10: eliminación del cuantificador universal (\forall)	24
Regla 11: introducción del cuantificador universal (\forall)	25
Regla 12: eliminación del cuantificador existencial (\exists)	26
Regla 13: introducción del cuantificador existencial (\exists)	28
2. Restricciones Adicionales	28

3. Ejemplos	29
4. Reglas derivadas y equivalencias deductivas	31
Verdad y falsedad en la lógica de predicados	32
1. El concepto de interpretación en la lógica de predicados	32
2. Paso de fórmulas a enunciados	33
3. Refutación de razonamientos	35

Introducción

La maquinaria de la lógica proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de enunciados. Sin embargo, existen enunciados intuitivamente válidos que no pueden ser probados por dicha lógica. Por ejemplo, considérese el siguiente razonamiento:

Todos los perros son animales.

Tadeo es un perro.

Por lo tanto, Tadeo es un animal.

En este caso no existe ninguna de las conectivas estudiadas en la lógica proposicional. Su formalización es la siguiente:

p

q

Por lo tanto, r

Suena lógico, ¿verdad? Pareciera que esto debería ser cierto, que el razonamiento y las premisas desde las cual partimos, son verdaderas.

Intentemos formalizar el razonamiento. Cada oración es independiente, y no contiene conectivas. Cada una es una única proposición. Por lo tanto, tenemos:

p = Todos los perros son animales

q = Tadeo es un perro

r = Tadeo es un animal

Donde p y q son nuestras premisas y r sería la conclusión.

Quedando:

$p, q \vdash r$

Como ya vimos, como la conclusión es independiente de las premisas, esta puede ser *VERDADERO* o *FALSO*, y por tanto, el razonamiento es inválido.

¿Cuál es el problema en nuestro razonamiento? ¿Será que el razonamiento es realmente inválido y que nuestra intuición nos miente?

La problemática radica en que las proposiciones hablan de una condición que se da en el universo, pero no dicen nada acerca de la estructura interna de esa condición.

En este caso, parte de las cosas que dice p se usa en q y otra parte en r , el mismo individuo (Tadeo) es mencionado tanto en q como en r , y sin embargo la lógica proposicional no dice nada acerca de estos hechos.

Por eso, necesitamos un nuevo tipo de lógica, **la lógica de predicados, o también llamada lógica de orden uno o lógica de primer orden**.

La lógica de primer orden nos va a permitir formalizar oraciones que hablan sobre individuos, sobre las propiedades de esos individuos, y sobre como esos individuos se relacionan entre sí.

La lógica de orden uno engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional se puede formalizar en lógica de predicados, pero no al revés.

1. Universo e Individuos

La lógica de predicados va a hablar sobre **individuos**. Un individuo es un elemento único e irrepetible del universo. Por ejemplo, una persona (Juan, Luis, María, etc.) un animal (Tadeo, Michifus, etc.), o un elemento más abstracto (un número, un color, etc.)

Lo importante para que algo sea un individuo es que sea identificable de forma inequívoca. Por ejemplo, si hablamos de “Juan”, solo hay un “Juan”, podemos saber quién es y señalarlo con el dedo. Si hubiera dos personas con el nombre “Juan” deberíamos desambiguar para saber claramente sobre quien estamos hablando.

Como llamamos a nuestros individuos va a depender del contexto. Es decir, depende de lo que estemos hablando. Por ejemplo, si estamos hablando de un grupo de amigos, “Juan” será un individuo puntual al cual podremos identificar.

Sin embargo, si estamos hablando de todos los alumnos de la universidad, deberemos ser mucho más específicos acerca de qué “Juan” se trata.

Pero “Juan” es solo el nombre, y uno no es solo su nombre, uno es lo que es. Lo que importa no es el nombre sino el individuo en sí.

Los números, por ejemplo, son elementos que son únicos e irrepetibles. Cinco es cinco, siempre.

Sin embargo, podemos decir “cinco”, pero si habláramos en otro idioma diríamos por ejemplo “cinq”, “cinque”, “five”, “fem”, etc.

Incluso en nuestro lenguaje cotidiano, sin hablar otro idioma, tenemos símbolos que representan al mismo individuo como “5”, o “V” (en números romanos). Más aún, si escribimos “3+2” o “4+1”, ¿Qué representan? Podríamos decir que es otra forma de escribir cinco.

Lo que importa no es como lo escribimos, sino lo que estamos queriendo representar, el individuo en sí. Suena filosófico, pero es así...al fin de cuentas, la lógica nace en la filosofía.

2. Propiedades

Nos va a interesar hablar de ciertas cosas de esos individuos. Por ejemplo, vamos a querer decir cosas como “Juan es grande”, “Firulais es un perro”, o “Cinco es un número primo”.

Vamos a decir entonces que los individuos tienen propiedades.

Una propiedad es una cualidad o atributo que puede o no aplicarse a un individuo.

La idea es que vamos a pensar en una propiedad como algo que, dado un individuo, la misma puede o no aplicar a ese individuo. Si aplicamos la propiedad al individuo, la podemos tratar como una proposición. Es decir, es algo de lo que vamos a decir que es VERDADERO o FALSO.

Por ejemplo, si la propiedad es “Ser grande”, vamos a aplicar a “Juan” esa propiedad para obtener “Juan es grande”. Esto como vemos es una proposición tradicional, es algo de lo que podemos decir que es VERDADERO o FALSO.

Si en cambio aplicamos a “Luis” la misma propiedad, obtenemos la proposición “Luis es grande” la cual tiene también un valor de verdad, no necesariamente igual a aplicar la propiedad a Juan.

Ejemplo:

Con la lógica de predicados vamos a intentar describir el universo. Mejor dicho, vamos a describir una parte puntual y significativa del universo.

Supongamos entonces que queremos hablar de una escuela a la que solo asisten cuatro alumnos, dos chicos (Juan y Luis), y dos chicas (María y Ana).

Juan, Luis, María y Ana van a ser los individuos sobre los que vamos a hablar. Una posible propiedad sobre ellos será “Es hombre”.

Podemos representar las propiedades como una tabla de doble entrada, con los individuos como filas y las propiedades como columnas.

	Es hombre
Juan	
Luis	
María	
Ana	

La tabla podremos completarla con **VERDADERO** o **FALSO**, dependiendo del valor que toma la propiedad de la columna aplicada al individuo en esa fila.

	Es hombre
Juan	V
Luis	V
María	F
Ana	F

Vemos entonces como la propiedad “Es hombre” se aplica a “Juan”, quedando “Juan es hombre” y teniendo esa proposición el valor de verdad VERDADERO. Lo mismo sucede en el caso de Luis. Por otro lado, cuando aplicamos la propiedad a “María” y a “Ana”, la proposición tiene valor FALSO.

Agreguemos ahora una segunda propiedad a nuestro ejemplo, la propiedad “Es mujer”.

Sabemos (intuitivamente) que la propiedad “Es mujer” se aplica a “Juan”, quedando “Juan es mujer” y teniendo esa proposición el valor de verdad FALSO. Lo mismo ocurre con Luis.

También sabemos que para los casos de “María” y de “Ana”, la propiedad aplicada a ellas tiene valor VERDADERO. Veamos ambas propiedades en la tabla.

	Es hombre	Es mujer
Juan	V	F
Luis	V	F
María	F	V
Ana	F	V

Si bien podemos tratar a ambas propiedades como independientes, hay una clara relación entre “Es hombre” y “Es mujer”.

En particular, si alguien es hombre, entonces seguro no es mujer. Y si es mujer, entonces seguro no es hombre. Es decir, ambas son complementarias.

Ya conocemos una conectiva que representa el concepto de complemento, la negación. Podemos reformular la propiedad “Es mujer” en términos de “Es hombre”.

$$\text{Es mujer} = \neg \text{Es hombre}$$

Así, vemos cómo podemos tener propiedades que son dependientes de otras propiedades.

Asumamos ahora que conocemos dos nuevas propiedades que aplican en nuestro ejemplo, “Usa zapatos” y “Usa corbata”.

Podemos crear nuevas propiedades a partir de las que conocemos. Podemos decir, por ejemplo, que, si un hombre usa zapatos y corbata, entonces es elegante.

$$\text{Es elegante} = \text{Es hombre} \wedge \text{Usa zapatos} \wedge \text{Usa corbata}$$

¿Qué significa entonces aplicar la propiedad “Es elegante” a “Juan”?

Significa que Juan debe cumplir con ser hombre, con usar zapatos y con usar corbata. Es decir que debemos aplicar a Juan cada una de las propiedades que componen a ser elegante, y que en todos los casos el resultado debe ser VERDADERO.

Juan es elegante = Juan es hombre \wedge Juan usa zapatos \wedge Juan usa corbata

3. Relaciones

Pensemos ahora en una frase un poco más compleja, y tratemos de formalizarla: “Juan está enamorado de María”.

Sencillo, podríamos tener una propiedad que sea “Estar enamorado de María”, y nos basta con aplicar la propiedad a Juan para obtener la oración anterior.

Pero ¿Qué pasa si ahora queremos escribir “Ana está enamorada de Luis”?

Necesitamos otra propiedad “Estar enamorada de Luis” y aplicar la misma a Ana.

Sin embargo, vemos que hay una relación entre ambas frases, ambas hablan de lo mismo, de estar enamorado de alguien más.

Cuando vemos que en nuestra propiedad estamos mencionando a un individuo (Por ejemplo, a Juan en “Estar enamorado de María”), lo que queremos en realidad es expresar una relación entre dos individuos (en este caso, Juan a quien será aplicada la propiedad y María, que forma parte de la propiedad). Lo que buscamos es una relación.

Una relación es similar a una propiedad, en el sentido que se aplica sobre individuos, pero en lugar de aplicar sobre un solo individuo, aplica sobre dos.

Así, nuestra relación será “Está enamorado de”, y si lo aplicamos a “Juan” y a “María” obtenemos la frase “Juan está enamorado de María”.

Una relación vincula dos individuos a través de una característica.

Dirección de las relaciones

El hecho de que Juan esté enamorado de María no hace que María necesariamente le corresponda. Por lo que las relaciones son dirigidas.

Es decir, aplicar “Está enamorado de” a “Juan” y luego a “María” representa “Juan está enamorado de María”. Pero aplicar “Está enamorado de” primero a “María” y en segundo lugar a “Juan” nos dará “María está enamorada de Juan”.

El valor de verdad de ambas proposiciones formadas no es necesariamente idéntico.

El orden en el que aplicamos la relación a los distintos individuos da como resultado diferentes proposiciones con diferente valor de verdad.

4. Relaciones Complejas

De forma similar a lo que ocurre con las propiedades, las relaciones pueden estar dadas en términos de otras relaciones.

Por ejemplo, podríamos decir que estar enamorado requiere de dos cosas, atracción física y atracción intelectual. Así:

Está enamorado de = Siente atracción física \wedge Siente atracción intelectual

La frase Siente atracción física nos resulta un poco obvia en su aplicación.

Por ejemplo, apliquemos “Está enamorado de” a “Juan” y a “María”.

Cómo sabemos que la equivalencia es: Juan siente atracción física por María \wedge Juan siente atracción intelectual por María.

Pensemos ahora en la relación “es amado por”. Podríamos definir “es amado por” en términos de “está enamorado de”. Por ejemplo:

María es amada por Juan = Juan está enamorado de María.

Pero si definimos:

Es amado por = Esta enamorado de

No resulta evidente que el orden de mis individuos cambia en la equivalencia.

5. Parámetros

Para solucionar el problema anterior, tenemos que introducir un nuevo elemento. Los parámetros.

Un parámetro no es más que un nombre que va a representar a un individuo, pero que al momento de la definición, no sabemos quién es.

Vamos a usar los parámetros en nuestras propiedades y relaciones. Así por ejemplo en lugar de decir que la propiedad es “Es hombre” vamos a decir “x es hombre”.

¿Quién es x? La respuesta es x va a ser reemplazado en el texto por un individuo cuando apliquemos la propiedad al mismo. Por ejemplo, si aplicamos ahora “x es hombre” a “Juan”, lo que hacemos es reemplazar la x por “Juan” y quedarnos con la oración formada “Juan es hombre”.

Esto aplica también a las relaciones, ahora que tenemos más de un individuo, necesitamos más de un parámetro.

Volvamos a nuestra relación “Es amado por”. Si lo replanteamos usando parámetros podemos escribir “x es amado por y”. Si aplicamos entonces ahora a “María” y “Juan”, obtenemos “María es amada por Juan”.

Ahora, si miramos la definición de es amado por, podemos dejar más claro que el orden de los individuos se invierte.

x es amado por y = y está enamorado de x

Luego veremos que llamarlos x e y es arbitrario, pero de momento vamos a decir que x representa al individuo que aplicamos la relación primero e y al segundo.

No solo es el caso en donde se invierte el orden de los parámetros en donde sirve, sino donde el individuo se repite en la frase equivalente.

Pensemos en la relación “Se casará con”. Una persona se va a casar con otra si están enamorados mutuamente. Tratemos de plantearlo en términos de nuestra otra relación:

Se casará con = Está enamorado de \wedge Está enamorado de

El segundo “Está enamorado de” debería indicar de alguna forma que ya no es el primer individuo del segundo, sino el segundo del primero. Sin embargo, lo que escribimos no dice nada de eso.

Replanteemos la relación utilizando parámetros. Es decir, pensemos ahora que significa “x se casará con y”.

x se casará con $y = x$ está enamorado de $y \wedge y$ está enamorado de x

Queda de esta forma claramente expresado cuales son las relaciones que se deben cumplir.

6. Representando Relaciones

Podemos representar una relación de forma similar a las propiedades, es decir, mediante una tabla de doble entrada.

A diferencia de la tabla sencilla de las propiedades, en la cual podíamos representar más de una propiedad en la misma tabla, aquí toda la tabla representa una sola relación. Las filas representarán el individuo al que aplicamos primero la relación (x) y las columnas al que aplicamos segundo (y).

Veamos la tabla de nuestro ejemplo:

x está enamorado de y	Juan	Luis	María	Ana
Juan	F	F	V	F
Luis	F	V	F	F
María	V	V	F	F
Ana	F	V	F	F

En la tabla se ve como Juan está enamorado de María, y María está enamorada de él, por lo que van a casarse. Ana está enamorada de Luis, pero Luis solo está enamorado de sí mismo.

7. Relaciones Múltiples

Podemos tener relaciones que tienen más de dos individuos como elementos.

Por ejemplo, la relación “x conoce a y gracias a z”. Podríamos decir entonces “Ana conoce a Luis gracias a María”.

Para obtener esa proposición basta aplicar la relación primero a Ana, luego a Luis y por último a María.

Este tipo de relaciones ya no se pueden interpretar utilizando una tabla, por lo que hay que aplicar nuestra mejor capacidad mental y de abstracción para comprender plenamente estas relaciones.

8. Todos

Veamos otro ejemplo, la escuela y sus chicos. ¿Qué significaría la frase “Todos son inteligentes”?

Pensémoslo en términos de nuestra tabla de propiedades:

	x es inteligente
Juan	
Luis	
María	
Ana	

¿Cómo deberíamos completar los espacios en blanco?

Podemos pensar la frase “Todos son inteligentes” como una propiedad que depende de otras propiedades. En particular:

Todos son inteligentes = Juan es inteligente \wedge Luis es inteligente \wedge María es inteligente \wedge Ana es inteligente

Es decir, la idea de que todos son inteligentes nos dice que cada uno de los chicos es inteligente.

La palabra “Todos” nos indica que la propiedad aplica a cada uno de los individuos de nuestro universo.

Si vamos al caso del ejemplo anterior, nuestra tabla para interpretar el universo quedaría así:

	x es inteligente
Juan	VERDADERO
Luis	VERDADERO
María	VERDADERO
Ana	VERDADERO

9. Nadie

¿Y qué pasa si decimos “Nadie se porta mal”?

Nadie es lo mismo que decir que, ni Juan, ni Luis, ni María, ni Ana se portan mal. Podemos pensarlo como una dependencia de otras propiedades.

Nadie se porta mal = $(\neg \text{Juan se porta mal}) \wedge (\neg \text{Luis se porta mal}) \wedge (\neg \text{María se porta mal}) \wedge (\neg \text{Ana se porta mal})$

Como ya sabemos, la negación implica que la propiedad sea falsa.

Es decir que, en nuestra tabla, esto estaría representado de la siguiente forma:

	x es inteligente	x se porta mal
Juan	VERDADERO	FALSO
Luis	VERDADERO	FALSO
María	VERDADERO	FALSO
Ana	VERDADERO	FALSO

10. Alguien

Hay otro tipo de oraciones que nos brindan información lógica acerca del universo. Pensemos en el siguiente ejemplo “Alguien juega a la pelota”. Podemos pensar en términos de nuestra tabla.

	x juega a la pelota
Juan	
Luis	
María	
Ana	

¿Cómo completamos la tabla?

La realidad es que la frase no nos dice mucho. Solo nos dice que hay alguien que juega a la pelota, pero bien podría ser que haya más de una persona que lo haga.

Es decir, solo sabemos que alguno de los casos es VERDADERO, pero el resto podrían ser FALSO o VERDADERO.

Es decir, hablar de alguno, es hablar de disyunciones entre los individuos.

Alguien juega a la pelota = Juan juega a la pelota \vee Luis juega a la pelota \vee María juega a la pelota \vee Ana juega a la pelota Para que la disyunción sea verdadera, alguno de los términos de la disyunción debe ser verdadera, pero no sabemos cuál. Si combinamos esa información con otra, tal vez podamos deducir.

11. Todos los ...

Otro tipo de oración que solemos utilizar cuando hablamos, involucran hablar de un subgrupo de elementos.

Por ejemplo, la oración “Todos los hombres se escaparon de la escuela”

¿Qué significa esto en nuestro ejemplo? Juan y Luis, ambos son hombres, y por tanto se escaparon.

¿Qué pasa con las chicas? La respuesta es, no sabemos. La frase no dice nada acerca de si María o Ana se escaparon o no de la escuela.

En este caso hay efectivamente una relación entre la propiedad de ser hombre y la propiedad de escaparse de la escuela. Podemos ponerlo de esta forma:

Todos los hombres se escaparon de la escuela = x es hombre $\rightarrow x$ se escapó de la escuela

¿Quién es x en este caso? El individuo puntual al que aplicamos nuestra propiedad, pero, en este caso, debemos aplicarlo a cada uno de los individuos de nuestro universo, pues tenemos la palabra “Todos” adelante.

Apliquemos a “Juan” nuestra propiedad. Como “Juan es hombre” es VERDADERO, para que la implicación sea verdadera entonces “Juan se escapó de la escuela” debe necesariamente ser VERDADERO.

Apliquemos ahora a “María”. Como “María es hombre” es FALSO, la implicación ya es verdadera, independientemente del valor de “María se escapó de la escuela”.

Es decir, sabiendo que “Todos los hombres se escaparon de la escuela”, podemos completar la tabla de la siguiente forma.

	x es hombre	x se escapó de la escuela
Juan	VERDADERO	VERDADERO
Luis	VERDADERO	VERDADERO
María	FALSO	¿?
Ana	FALSO	¿?

En los lugares en donde hay un signo de pregunta, no podemos completar nada, pues la frase no contiene información sobre esos casos.

12. Algún ...

De forma similar a “todos los ...” podemos decir frases con la forma “Alguna mujer se escapó de la escuela”.

Es decir, que puede haber dos casos, o bien María se escapó de la escuela o bien Ana se escapó de la escuela. Podríamos decir que:

Alguna mujer se escapó de la escuela = (María se escapó de la escuela) \vee (Ana se escapó de la escuela)

Pero ¿Por qué agregamos solo a María y Ana a nuestra fórmula equivalente? Sencillamente porque son las únicas mujeres. Pero cuando decíamos “alguno”, vimos que debíamos hacer una disyunción con todos los elementos del universo. Debemos entonces buscar una fórmula equivalente, en donde los casos de aquellos que son hombres, seguro den FALSO.

Así, la idea es que necesitamos realizar una conjunción de disyunciones.

Alguna mujer se escapó de la escuela = (Juan es mujer \wedge Juan se escapó de la escuela) \vee

(Luis es mujer \wedge Luis se escapó de la escuela) \vee

(María es mujer \wedge María se escapó de la escuela) \vee

(Ana es mujer \wedge Ana se escapó de la escuela)

Si analizamos esa fórmula, en el caso de Juan y Luis, la conjunción dará FALSO pues no es cierto que sean mujeres. Mientras que en el caso de María dará VERDADERO solo si María se escapó de la escuela. Lo mismo ocurre para Ana.

El lenguaje de la Lógica de Predicados

1. Predicados, Variables y Constantes

Un predicado es una aplicación definida en un dominio que adquiere valores en el conjunto de enunciados. Formalmente se expresa de la manera siguiente:

Informalmente, un predicado es un enunciado parametrizado (con variables).

$$P(x): D \rightarrow \text{enunciados.}$$

Representaremos un predicado utilizando una letra mayúscula del alfabeto latino, con los parámetros, preferentemente representados por letras minúsculas del mismo alfabeto a partir de x , entre paréntesis y separados por comas.

Por ejemplo, el predicado $P(x)$ podría ser la formalización de “ x es un estudiante”.

Notar que el predicado $P(x)$ no es un enunciado. $P(x)$ se puede convertir en un enunciado sustituyendo la variable x (el parámetro) por algún elemento de su dominio. Si el dominio de x es el conjunto de las personas, entonces $P(\text{Juan})$ sí es un enunciado (y se corresponde con “Juan es un estudiante”).

Por regla general, no se habla de parámetros, sino de variables. Así lo haremos a partir de este momento:

Un predicado puede tener cualquier número ($n \geq 0$) de variables. Según este número, los predicados se clasifican de la manera siguiente:

- 1) Los predicados con $n = 0$ variables son los enunciados.
- 2) Los predicados con $n = 1$ variables se denominan propiedades o predicados unarios.
- 3) Los predicados con $n = 2$ variables se denominan relaciones o predicados binarios.
- 4) A partir de $n = 3$ no existen nombres específicos. Un predicado con tres variables se puede denominar relación ternaria; uno con cuatro, relación cuaternaria, etc.

Ejemplos de predicados con diferente número de variables

a) Ejemplos de propiedades o predicados unarios:

- $P(x)$: “ x es una persona”.
- $Q(x)$: “ x es de color rojo”.

b) Ejemplos de relaciones o predicados binarios:

- $P(x,y)$: “ x come y ”.
- $Q(x,y)$: “El cuadrado de x es y ”.

c) Ejemplos de relaciones ternarias:

- $R(x,y,z)$: “ x saluda a y en la calle z ”.
- $S(x,y,z)$: “La suma de x y de y es z ”.

El **dominio de una variable** es todo el conjunto de objetos que la pueden sustituir.

En referencia al dominio de una variable, deberás tener presente los siguientes aspectos:

1. Todo dominio se supone no vacío.
2. Los predicados no pueden ser elementos de ningún dominio. Así pues, ninguna variable puede ser sustituida por ningún predicado.

Una constante es la representación de un elemento de un dominio.

Las constantes se representan mediante letras minúsculas del alfabeto latino. Se eligen, preferentemente, a partir de la letra a, para evitar confusiones con las letras que representan las variables.

Cuando todas las variables de un predicado son sustituidas por constantes, entonces éste se convierte en un enunciado. Así:

- a) $P(x,y,z)$ es un predicado, pero no un enunciado.
- b) $P(a,b,c)$ y $P(a,a,d)$ son enunciados.
- c) $P(a,y,z)$ y $P(x,e,a)$ son una relación y una propiedad, respectivamente.

Las variables y las constantes se denominan **términos** cuando la distinción no es importante.

2. Cuantificadores

Los cuantificadores son los dos operadores que el lenguaje de la lógica de predicados añade a las conectivas, ya conocidas, del lenguaje de enunciados. Los dos operadores específicos del lenguaje de la lógica de predicados se corresponden, aproximadamente, con aquellas construcciones del lenguaje natural que tienen un significado de 'todos los.../todas las...' y de 'algún o algunos/alguna o algunas...'. Se representan con los símbolos \forall y \exists , respectivamente. Son unarios, tienen prioridad máxima y afectan a las variables.

A continuación, presentamos la tabla resumen de los cuantificadores:

Cuantificadores			
Símbolo	Nombre	Significado	Correspondencia (aproximadamente)
\forall	Cuantificador Universal	"para (todo)"	todos los... todas las... cada...
\exists	Cuantificador Existencial	"existe (alguno)"	hay un... existe un... algún o algunos...

Ejemplos con cuantificadores

Si $P(x)$ quiere decir "x es un estudiante", entonces:

- $\exists x P(x)$ significa 'hay estudiantes', 'existen estudiantes', 'algunos son estudiantes', 'alguno es un estudiante', etc.
- $\forall x P(x)$ significa 'todos son estudiantes', 'todo el mundo es estudiante', etc.

3. Fórmulas

El lenguaje de la lógica de predicados se denomina **lenguaje de fórmulas**.

Este lenguaje utiliza como alfabeto las cuatro conectivas del lenguaje de enunciados, los dos cuantificadores, los símbolos de predicados, los símbolos de constantes, los símbolos de variables y los paréntesis de apertura y de cierre.

Alfabeto == $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, P, Q, R, \dots, \underbrace{a, b, c, \dots}_{\text{Constantes}}, \underbrace{x, y, z, \dots}_{\text{Variables}}, (,)\}$

Términos

Las reglas siguientes definen cómo hay que construir fórmulas correctamente a partir de los elementos básicos:

1. Si P es un símbolo de predicado y t_1, \dots, t_n ($n \geq 0$) son símbolos de términos, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula. Estas fórmulas también se denominan átomos o fórmulas atómicas.
2. Si B y A son fórmulas, entonces $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ y $(A \rightarrow B)$ también son fórmulas.
3. Si A es una fórmula y x es una variable, entonces $(\forall x A)$ y $(\exists x A)$ también son fórmulas.
4. A excepción de los casos expuestos anteriormente, no hay ninguna otra fórmula.

Observa que a partir del alfabeto y de las reglas de construcción, el lenguaje de enunciados es un subconjunto del lenguaje de fórmulas.

4. Ámbito de los cuantificadores

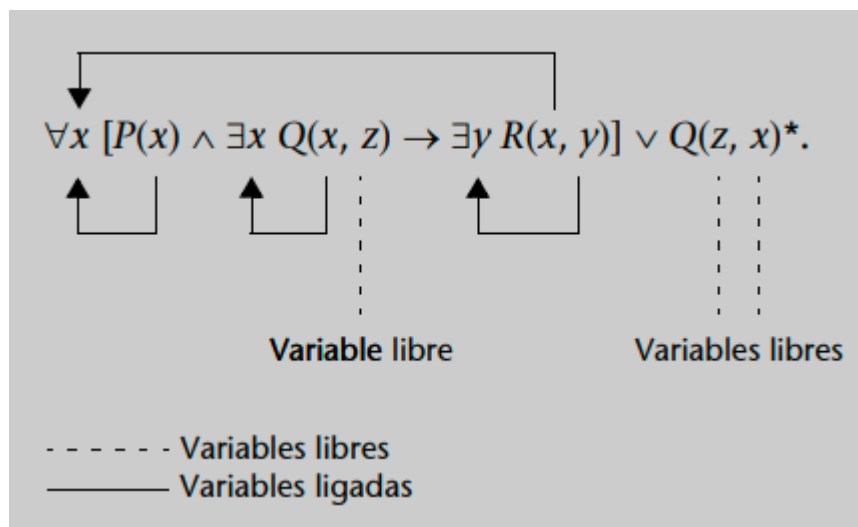
Se denomina ámbito de un cuantificador a aquella zona de una fórmula que está dentro de su campo de acción, es decir, bajo sus efectos.

Las variables que están afectadas por la acción de algún cuantificador se denominan **variables ligadas**. Las no afectadas por ningún cuantificador se denominan **variables libres**.

Las fórmulas sin ninguna variable libre se denominan **fórmulas cerradas**. Las que tienen alguna variable libre, **fórmulas abiertas**.

Ejemplo de variables libres y de variables ligadas

Mostramos un ejemplo de variables libres y de variables que están bajo la influencia de algún cuantificador:



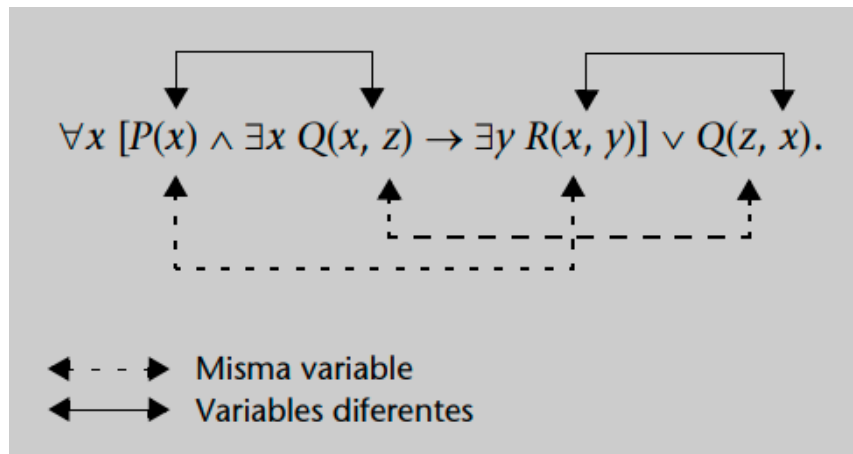
Notar que la parentización tiene efectos sobre el ámbito de los cuantificadores.

Cuando dos variables están designadas por el mismo símbolo (misma letra) decimos que:

1. Son la misma variable si están bajo el alcance del mismo cuantificador, o si las dos son libres.

2. Son variables diferentes si están bajo el alcance de cuantificadores distintos, o si una es libre y la otra no.

Ejemplos de variables diferentes y de variables que son la misma



Evitar confusiones innecesarias dando nombres diferentes a variables diferentes.

Así, el ejemplo que acabamos de ver también se podría haber escrito de la manera siguiente: $\forall u [P(u) \wedge \exists t Q(t, z) \rightarrow \exists y R(u, y)] \vee Q(z, x)$.

5. El significado de los cuantificadores

Cuando todas las variables que aparecen en una fórmula están cuantificadas, la fórmula es un enunciado. Los cuantificadores representan la sustitución de las variables cuantificadas por elementos del dominio.

Cuando el dominio de las variables es finito, se puede entender la cuantificación universal como una forma abreviada de la conjunción, y la cuantificación existencial como una forma abreviada de la disyunción.

Ejemplo de sustitución de cuantificadores por conectivas

Si el dominio de la variable x es el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

- La fórmula $\forall x P(x)$ se puede entender como $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.
- La fórmula $\exists x P(x)$ se puede entender como $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.

Si el dominio tiene cardinalidad infinita, estas sustituciones no se pueden hacer. Incluso en el caso de dominios de cardinalidad finita, las sustituciones de las variables por todas las constantes no se llevan nunca a la práctica. Se trata, más que nada, de una forma de entender el significado de los cuantificadores.

La formalización

1. Cómo formalizar

La formalización de frases y/o de razonamientos en el lenguaje de la lógica de predicados es una actividad parecida a la que se hace cuando se utiliza el lenguaje de la lógica de enunciados.

De manera general, los pasos que habrá que seguir son los siguientes:

- Determinar el dominio. Se entenderá por dominio el conjunto de todos los objetos de los cuales se hablará. Los predicados serán unos u otros según cuál sea el dominio. Para determinar el dominio, habrá que

responder a la pregunta “¿de qué se habla?”. Cuando no es fácil responder a esta pregunta o el dominio no admite una definición simple, puede decirse que el dominio es un conjunto cualquiera no vacío.

2. Determinar los predicados atómicos. En este caso, habrá que preguntarse:
 - ¿Qué subconjuntos se consideran dentro del dominio (que no se quiera o no sea necesario definir en término de subconjuntos más simples)?
 - ¿Qué se dice de los objetos del dominio? ¿Cuáles son sus propiedades? ¿Cómo se relacionan entre sí?
3. Determinar si hay elementos concretos del dominio que son identificables del resto. A cada uno le corresponderá una constante.
4. Formalizar cada frase simple en términos de los predicados atómicos y las constantes identificadas en los dos puntos anteriores. El resultado debe ser una fórmula sin variables libres para cada frase. Para decidir la cuantificación adecuada para cada fórmula se prestará atención al sentido general (cuantificación universal: \forall) o particular (cuantificador existencial: \exists) de la frase.

El Dominio

A efectos prácticos, decir que el dominio es un conjunto cualquiera no vacío es lo mismo que decir que cualquier objeto imaginable pertenece o puede pertenecer al dominio.

Fórmulas con Variables Libres

Si una fórmula que formaliza una frase contiene variables libres, ¡seguro que no es correcta!

A continuación, proponemos algunos ejemplos de formalización.

Ejemplo 1 “Las setas son apreciadas por su sabor. Todo lo que es apreciado por su sabor o por sus propiedades curativas es caro. Los níscales son setas. Así pues, los níscales son caros.”

Como dominio para formalizar este razonamiento se considerará un conjunto no vacío cualquiera, porque la pregunta “¿de qué se habla?” no puede responderse de manera precisa (se habla de setas, de níscales, de cosas apreciadas por su sabor, de cosas apreciadas por sus propiedades curativas y de cosas caras. Lo máximo que podríamos precisar sería algo como por ejemplo “el conjunto de todas estas cosas”).

Atención

Prestar atención a la elección del dominio y la elección de predicados atómicos en estos ejemplos.

Se asignan los significados siguientes a predicados atómicos: $B(x)$: “x es una seta”; $S(x)$: “x es apreciado por su sabor”; $P(x)$: “x es apreciado por sus propiedades curativas”; $R(x)$: “x es un níscolo”; $C(x)$: “x es caro”.

La formalización del razonamiento sería, pues:

$$\forall x (B(x) \rightarrow S(x)), \forall x (S(x) \vee P(x) \rightarrow C(x)), \forall x (R(x) \rightarrow B(x)) \therefore \forall x (R(x) \rightarrow C(x))$$

Ejemplo 2 “Hay personas honradas y hay personas sensatas. Las personas honradas siempre son sensatas. Podemos concluir que hay personas que son honradas y sensatas.”

En este razonamiento sólo se hace referencia a personas, por lo cual podemos decidir que el dominio será un conjunto de personas no vacío (o el conjunto de todas las personas). Como predicados atómicos se utilizarán: $H(x)$: “x es honrado y $A(x)$: “x es sensato”. Observar que, dado que el dominio sólo contiene personas, esto es exactamente lo mismo que $H(x)$: “x es una persona honrada” y $A(x)$: “x es una persona sensata”.

La formalización del razonamiento es:

$$\exists x H(x) \wedge \exists y A(y), \forall x (H(x) \rightarrow A(x)) \therefore \exists x (H(x) \wedge A(x))$$

Observar que la primera premisa es la conjunción de dos fórmulas cuantificadas.

Si el dominio elegido hubiese sido un conjunto no vacío cualquiera, entonces se habría podido hacer la siguiente asignación de significado a predicados atómicos: $P(x)$: “x es una persona”; $H(x)$: “x es honrado”; $A(x)$: “x es sensato”; y la formalización sería:

$$\exists x (P(x) \wedge H(x)) \wedge \exists y (P(y) \wedge A(y)), \forall x (P(x) \wedge H(x) \rightarrow A(x)) \therefore \exists x (P(x) \wedge H(x) \wedge A(x))$$

Ejemplo 3 “Los que están tristes rinden por debajo de sus posibilidades. Hay quienes no están tristes y que tienen dificultades. Relámpago no está triste, pero rinde por debajo de sus posibilidades. Entonces es que Relámpago tiene dificultades.”

Como dominio, consideraremos un conjunto cualquiera no vacío, que contiene un elemento singular (Relámpago). Lo que hace que sea singular es que nos referimos a él por el nombre.

Asignaremos los significados a los predicados atómicos siguientes: $T(x)$: “x está triste”; $R(x)$: “x rinde por debajo de sus posibilidades”; $D(x)$: “x tiene dificultades”.

Para designar a Relámpago se utilizará una constante, a: “Relámpago”.

La formalización del razonamiento será:

$$\forall x (T(x) \rightarrow R(x)), \exists x (\neg T(x) \wedge D(x)), \neg T(a) \wedge R(a) \therefore D(a)$$

2. Formalización de frases con significado existencial o universal

Las frases de la forma “hay ...”, “hay quien...”, “algunos...” tienen un sentido existencial. Esto, en el contexto de la lógica de predicados, quiere decir que se refieren a algunos elementos de un subconjunto del dominio.

Las frases de la forma “todos los...”, “los...”, “todo el mundo que...” tienen un sentido universal. En el contexto de la lógica de predicados, esto significa que se refieren a todos los elementos de un subconjunto del dominio.

Para formalizar frases con cualquiera de estos dos significados, es útil hacerse las preguntas siguientes:

1. ¿A qué subconjunto del dominio se hace referencia? Este subconjunto se denominará selección.
2. ¿Qué se dice de este subconjunto del dominio? ¿Qué propiedad o propiedades tienen sus elementos? Denominaremos a esto propiedades de la selección.

Las frases con sentido existencial se formalizan según el patrón siguiente:

$$\exists x (\text{Selección}(x) \wedge \text{Propiedades_de_la_selección}(x))$$

Asimismo, frases con sentido universal se formalizan según el patrón siguiente:

$$\forall x (\text{Selección}(x) \rightarrow \text{Propiedades_de_la_selección}(x))$$

Si con $P(x)$: “x es un programa”; $A(x)$: “x es antiguo”; $V(x)$: “x tiene un valor considerable”; $C(x)$: “El mantenimiento de x es complicado”, formalizamos las frases “Algunos programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado” y “Todos los programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado” obtendremos, respectivamente:

$$\exists x (\underbrace{P(x) \wedge A(x)}_{\text{Selección}} \wedge \underbrace{V(x) \wedge C(x)}_{\text{Propiedades de la selección}})$$

Observación

Observar que, en la formalización de una frase con sentido existencial, las dos partes –selección y propiedades de ésta– se unen con una conjunción, mientras que si el sentido es universal, lo hacen con una implicación.

$$\forall x \underbrace{(P(x) \wedge A(x))}_{\text{Selección}} \rightarrow \underbrace{V(x) \wedge C(x)}_{\text{Propiedades de la selección}}$$

A continuación, presentamos algunos ejemplos de formalización.

Ejemplo 1

Formalizar la frase “Hay programas correctos que no satisfacen al usuario” con las asignaciones $P(x)$: “x es un programa”; $C(x)$: “x es correcto”; $S(x)$: “x satisface al usuario”:

- Sentido: existencial.
- Selección: la frase hace referencia a aquellos elementos del dominio que son simultáneamente “programas” y “correctos”.
- Propiedades de la selección: de los elementos seleccionados (algunos), dice que no satisfacen al usuario:

$$\exists x (P(x) \wedge C(x) \wedge \neg S(x))$$

Ejemplo 2

Formalizar la frase “Todos los directivos importantes llevan corbata” con $D(x)$: “x es un directivo”; $I(x)$: “x es importante”; $C(x)$: “x lleva corbata”:

- Sentido: universal.
- Selección: elementos del dominio que son al mismo tiempo “directivos” e “importantes”.
- Propiedades de la selección: los elementos seleccionados llevan corbata:

$$\forall x (D(x) \wedge I(x) \rightarrow C(x))$$

Ejemplo 3

Formalizar “Los ordenadores viejos y los que no han sido actualizados, ni funcionan correctamente ni se pueden mantener” con $O(x)$: “x es un ordenador”; $V(x)$: “x es viejo”; $A(x)$: “x ha sido actualizado”; $F(x)$: “x funciona correctamente”; $M(x)$: “x puede mantenerse”:

- Sentido: universal.
- Selección: elementos del dominio que son ordenadores viejos o que son ordenadores que no han sido actualizados.
- Propiedades de la selección: los elementos seleccionados no funcionan correctamente y no se pueden mantener:

$$\forall x (O(x) \wedge (V(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow \neg F(x) \wedge \neg M(x))$$

Ejemplo 4

Formalizamos la frase “Algunos navegantes se marean cuando se acercan a puerto” con $N(x)$: “x es un navegante”; $P(x)$: “x se acerca a puerto”; $M(x)$: “x se marean”:

- Sentido: existencial.
- Selección: elementos del dominio que son navegantes.
- Propiedades de la selección: los elementos seleccionados (algunos) se marean cuando se acercan a puerto:

$$\exists x (N(x) \wedge (P(x) \rightarrow M(x)))$$

Selección

Propiedades de la selección

Ejemplo 5

Formalizamos “Todo es gris y de aspecto descuidado” con $G(x)$: “x es gris” y $D(x)$: “x tiene el aspecto descuidado”:

- Sentido: universal.
- Selección: todo el dominio (no se concreta de qué se habla).
- Propiedades de la selección: todos los elementos seleccionados (todo el dominio) son grises y de aspecto descuidado.

$$\forall x (G(x) \wedge D(x))$$

Propiedades de la selección

Ejemplo 6

Formalizamos la proposición siguiente, “Hay quienes vuelan”, con la asignación $V(x)$: “x vuela”:

- Sentido: existencial.
- Selección: todo el dominio (no se concreta de qué se habla).
- Propiedades de la selección: de entre los elementos seleccionados (todo el dominio), hay quienes vuelan.

$$\exists x V(x)$$

Propiedades de la selección

Matrices de significado

Observa el significado de las fórmulas siguientes ($P(x)$: “x es un programa”; $C(x)$: “x es caro”):

- $\forall x (P(x) \rightarrow C(x))$: “Los programas (todos, en general) son caros”. No se afirma la existencia de nada que sea un programa, ni de nada que sea caro.
- $\forall x (P(x) \wedge C(x))$: “Todo son programas y todo es caro (todo son programas caros)”. Se afirma que en el dominio no hay otra cosa que programas caros. No es equivalente a la anterior. Es equivalente a $\forall x P(x) \wedge \forall x C(x)$.
- $\exists x (P(x) \wedge C(x))$: “Hay programas caros”. Se afirma la existencia de, como mínimo, un programa caro.
- $\exists x P(x) \wedge \exists x C(x)$: “Hay un programa y hay algo que es caro”. Sin embargo, el programa y lo que es caro no tienen por qué ser la misma cosa, de modo que no se afirma la existencia de ningún programa caro. No es equivalente a la anterior.
- $\exists x (P(x) \rightarrow C(x))$: “Hay algo que, si fuese un programa, sería caro”. No se afirma la existencia de nada que sea un programa ni de nada que sea caro. No es equivalente a ninguna de las dos anteriores.

3. Formalización de frases complejas

Con frecuencia, para formalizar con el lenguaje de la lógica de predicados es conveniente reducir un problema complejo a una colección de problemas más simples, de manera parecida a como se hace en la formalización al lenguaje de la lógica de enunciados. Un buen ejemplo son aquellas frases que requieren el uso de más de un cuantificador para su formalización. Los ejemplos siguientes os ayudarán a verlo.

Ejemplo 1

Formalizar “Los programadores que tienen asignado un despacho rinden por encima de la media” con $P(x)$: “x es un programador”; $D(x)$: “x es un despacho”; $R(x)$: “x rinde por encima de la media”; $A(x,y)$: “x tiene y asignado” (“y está asignado a x”).

- Sentido: universal.
- Selección: subconjunto de los programadores que tienen asignado un despacho.
- Propiedades de la selección: los elementos del subconjunto rinden por encima de la media. Esquemáticamente la formalización será:

$$\forall x (P(x) \wedge \text{“x tiene asignado un despacho”} \rightarrow R(x))$$

Ahora queda por resolver el problema de formalizar la frase “x tiene asignado un despacho”. Para formalizarla, se procederá como hasta ahora: preguntarse si su sentido es universal o existencial, preguntarse de qué habla (selección) y preguntarse qué afirma de aquello de lo que habla (propiedades de la selección). Dado que la respuesta a la pregunta “¿de qué habla la frase?” no puede ser “habla de x” (porque x ya está afectado por un cuantificador), leeremos la frase como “hay un despacho que está asignado a x”.

- Sentido: existencial.
- Selección: subconjunto de despachos.
- Propiedades de la selección: los elementos de la selección (algunos) están asignados a x.

La formalización será: $\exists y (D(y) \wedge A(x,y))$. Finalmente, la formalización de toda la frase es:

$$\forall x (P(x) \wedge \exists y (D(y) \wedge A(x,y)) \rightarrow R(x))$$

Ejemplo 2

Formalizar “Hay excursionistas que conocen todas las rutas y que no han paseado por ningún bosque umbrío” con $E(x)$: “x es un excursionista”; $R(x)$: “x es una ruta”; $B(x)$: “x es un bosque umbrío”; $C(x,y)$: “x conoce y”; $P(x,y)$: “x pasea (ha paseado) por y”.

- Sentido: existencial.
- Selección: subconjunto de los excursionistas.
- Propiedades de la selección: los elementos de la selección (algunos) conocen todas las rutas y nunca han paseado por ningún bosque umbrío.

Esquemáticamente:

$$\exists x (E(x) \wedge \text{“x conoce todas las rutas”} \wedge \text{“x no ha paseado por ningún bosque umbrío”})$$

Para formalizar “x conoce todas las rutas”, hacemos la lectura “Todas las rutas son conocidas por x” (se quiere evitar que la respuesta a la pregunta “¿de qué habla frase?” sea x, porque x ya está cuantificado) y obtenemos:

$$\forall y (R(y) \rightarrow C(x,y)).$$

La frase “x no ha paseado por ningún bosque umbrío” se formalizará como la negación de la frase “x ha paseado por algún bosque umbrío”. De esta última frase, hacemos la lectura “hay algún bosque umbrío por el cual x ha paseado” y obtenemos la formalización $\exists z (B(z) \wedge P(x,z))$. La negación de esta fórmula es:

$$\neg \exists z (B(z) \wedge P(x,z))$$

Finalmente, la formalización de toda la frase es:

$$\exists x [E(x) \wedge \forall y (R(y) \rightarrow C(x,y)) \wedge \neg \exists z (B(z) \wedge P(x,z))]$$

Ejemplo 3

Formalizar “Cuando todos los conductores noveles respetan las señales, los agentes sólo sancionan a los infractores reincidentes” con $C(x)$: “x es un conductor novel”; $S(x)$: “x es una señal”; $R(x,y)$: “x respeta a y”; $A(x)$: “x es un agente”; $F(x,y)$: “x sanciona a y”; $I(x)$: “x es un infractor reincidente”.

Globalmente, la frase expresa una condición suficiente porque:

- “Todos los conductores noveles respetan las señales” es la condición suficiente para:
- “Los agentes sólo sancionan a los infractores reincidentes”

En lo que respecta a la formalización de “Todos los conductores noveles respetan las señales”:

- Sentido: universal.
- Selección: subconjunto de los conductores noveles.
- Propiedades de la selección: los elementos seleccionados respetan las señales.

Esquemáticamente:

$$\forall x (C(x) \rightarrow \text{“Las señales son respetadas por x”}).$$

La frase “Las señales son respetadas por x” tiene sentido universal (todas las señales, las señales en general), la selección es el subconjunto de las señales y de esta selección se dice que x la respeta: $\forall y (S(y) \rightarrow R(x,y))$. De este modo, la formalización del antecedente de la implicación es: $\forall x (C(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow R(x,y)))$.

En lo que respecta a la formalización de la frase “Los agentes sólo sancionan a los infractores reincidentes”:

- Sentido: universal (todos los agentes, los agentes en general).

Esquemáticamente:

$$\forall x (A(x) \rightarrow \text{“x sólo sanciona a infractores reincidentes”})$$

La frase “x sólo sanciona a infractores reincidentes” expresa una condición necesaria porque:

- “Ser un infractor reincidente” es necesario para:
- “Ser sancionado por x”.

La lectura “Todo lo que no es un infractor reincidente no es sancionado por x” nos lleva a la formalización: $\forall y (\neg I(y) \rightarrow \neg F(x,y))$, que equivale a $\forall y (F(x,y) \rightarrow I(y))$. De este modo, la formalización resultante es:

$$\forall x (A(x) \rightarrow \forall y (\neg I(y) \rightarrow \neg F(x,y))).$$

Y la formalización de toda la frase es:

$$\forall x [C(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow R(x,y))] \rightarrow \forall x [A(x) \rightarrow \forall y (\neg I(y) \rightarrow \neg F(x,y))].$$

Ejemplo 4

Formalizamos “No hay ninguna persona que no conozca algún lugar habitado por mamíferos” con $P(x)$: “x es una persona”; $I(x)$: “x es un lugar”; $M(x)$: “x es un mamífero”; $H(x,y)$: “x habita y (y es habitado por x)”; $C(x,y)$: “x conoce y”.

La frase que se quiere formalizar es la negación de “Hay personas que no conocen ningún lugar habitado por mamíferos”. Para esta frase encontramos lo siguiente.

- Sentido: existencial.
- Selección: subconjunto de las personas.
- Propiedades de la selección: los (algunos) elementos de la selección no conocen ningún lugar habitado por mamíferos.

Esquemáticamente:

$$\exists x (P(x) \wedge \neg \text{“}x \text{ no conoce ningún lugar habitado por mamíferos”}).$$

La frase “x no conoce ningún lugar habitado por mamíferos” es la negación de “x conoce algún lugar habitado por mamíferos”, que podemos leer como “Hay lugares habitados por mamíferos que son conocidos por x”. Para esta última frase:

- Sentido: existencial.
- Selección: el subconjunto de los lugares habitados por mamíferos.
- Propiedades: los elementos de la selección (algunos) son conocidos por x.

Esquemáticamente:

$$\exists y (I(y) \wedge \text{“}y \text{ es habitado por mamíferos”} \wedge C(x,y))$$

La frase “y es habitado por mamíferos” se formaliza como “Hay mamíferos que habitan y”: $\exists z (M(z) \wedge H(z,y))$. Finalmente, la formalización de la frase “x no conoce ...” será:

$$\neg \exists y [I(y) \wedge \exists z (M(z) \wedge H(z,y)) \wedge C(x,y)]$$

Con esto, la formalización de “No hay ninguna persona ...” será:

$$\neg \exists x \{P(x) \wedge \neg \exists y [I(y) \wedge \exists z (M(z) \wedge H(z,y)) \wedge C(x,y)]\}$$

Ejemplo 5

Formalizamos “Sólo si hubiese un inversor que tuviera todas las acciones emitidas por compañías solventes, ningún inversor compraría bonos emitidos por estados en vías de desarrollo” con $I(x)$: “x es un inversor”; $A(x)$: “x es una acción”; $S(x)$: “x es una compañía solvente”; $B(x)$: “x es un bono”; $D(x)$: “x es un estado en vías de desarrollo”; $E(x,y)$: “x emite y” (“y es emitido por x”); $T(x,y)$: “x tiene y” (“x es el propietario de y”); $C(x,y)$: “x compra y”.

Globalmente, la frase expresa una condición necesaria porque:

- “Hay un inversor que tiene todas las acciones emitidas por compañías solventes” es necesario para:
- “Ningún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo”.

En lo que respecta a la formalización de “Hay un inversor que tiene todas las acciones emitidas por compañías solventes”, esquemáticamente es:

$$\exists x (I(x) \wedge \text{“}Todas \text{ las acciones emitidas por compañías solventes son de } x\text{”})$$

Respecto a la formalización de “Todas las acciones emitidas por compañías solventes son de x”:

- Sentido: universal.
- Selección: acciones emitidas por compañías solventes.
- Propiedades de la selección: los elementos de la selección son propiedad de x.

Esquemáticamente:

$$\forall y (A(y) \wedge \text{"y ha sido emitida por una compañía solvente"} \rightarrow T(x,y))$$

La formalización de "y ha sido emitida por una compañía solvente" es la de "Una compañía solvente ha emitido y": $\exists z (S(z) \wedge E(z,y))$.

La formalización de toda la frase "Hay un inversor..." es:

$$\exists x \{ I(x) \wedge \forall y [A(y) \wedge \exists z (S(z) \wedge E(z,y)) \rightarrow T(x,y)] \}$$

En lo que respecta a la formalización de "Ningún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo", su formalización es la negación de la de "Algún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo".

Respecto a la formalización de "Algún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo", esquemáticamente es:

$$\exists x (I(x) \wedge \text{"x compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo"})$$

La formalización de "x compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo" es la de "Hay bonos emitidos por estados en vías de desarrollo que son comprados por x". Esta formalización es:

$$\exists y (B(y) \wedge \exists z (D(z) \wedge E(z,y)) \wedge C(x,y))$$

La formalización de toda la frase "Ningún inversor compra bonos emitidos por estados en vías de desarrollo" es:

$$\neg \exists x \{ I(x) \wedge \exists y [B(y) \wedge \exists z (D(z) \wedge E(z,y)) \wedge C(x,y)] \}$$

Y con esto, la formalización de toda la frase que expresa una condición necesaria es:

$$\neg \exists x \{ I(x) \wedge \exists y [B(y) \wedge \exists z (D(z) \wedge E(z,y)) \wedge C(x,y)] \} \rightarrow \\ \rightarrow \exists x \{ I(x) \wedge \forall y [A(y) \wedge \exists z (S(z) \wedge E(z,y)) \rightarrow T(x,y)] \}$$

La Deducción Natural

1. Reglas

La deducción natural de la lógica de predicados mantiene las ocho reglas básicas de la lógica de enunciados (sin considerar las 2 reglas del bicondicional), más la Regla de Identidad o iteración y añade cuatro más: dos para cada cuantificador, una para eliminarlo y una para introducirlo.

Recordemos las 9 Reglas Básicas de la Lógica Proposicional:

REGLAS BÁSICAS de Lógica Proposicional

Reglas de la Negación

Eliminación del Negador	E_{\neg} EN	Regla de la Doble Negación	$\frac{\neg \neg A}{A}$
Introducción del Negador	I_{\neg} IN	Regla de Reducción al Absurdo	$\begin{array}{c c} A & \\ \hline \dots & \\ B & \\ \hline \dots & \\ \neg B & \\ \hline \neg A \end{array}$
Reglas de la Conjunción			
Eliminación del Conjuntor	E_{\wedge} IC	Regla de la Simplificación	$\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}$
Introducción del Conjuntor	I_{\wedge} EC	Regla del Producto	$\frac{A}{\frac{B}{A \wedge B}} \quad \frac{A}{\frac{B}{B \wedge A}}$
Reglas de la Disyunción			
Eliminación del Disyuntor	E_{\vee} ED	Regla de los Caos	$\begin{array}{c c} A \vee B & \\ \hline A & \\ \hline C & \\ \hline B & \\ \hline C & \\ \hline C \end{array}$
Introducción del Disyuntor	I_{\vee} ID	Regla de la Adición	$\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{A}{B \vee A}$
Reglas del Condicional o Implicación Material			
Eliminación del Condicional	E_{\rightarrow} EI	Regla del Modus Ponendo Ponens	$\frac{A \rightarrow B}{\frac{A}{B}}$

Introducción del Condicional	$I \rightarrow II$	Teorema de la Deducción	$\frac{\begin{array}{ l} A \\ \hline \dots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$
------------------------------	--------------------	-------------------------	--

Regla Identidad o Iteración (It)

Cualquier enunciado que aparece en una deducción puede volver a ser escrito al final de la lista de enunciados, siempre que la repetición se produzca en el mismo ámbito en el que aparece el enunciado o en el de una subdeducción interna a éste.

$$\frac{A}{A}$$

Regla 10: eliminación del cuantificador universal ($E\forall$)

Cuando una fórmula está cuantificada universalmente, la variable cuantificada puede ser sustituida por cualquier término y el cuantificador se puede eliminar:

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

Donde t es un término cualquiera (una constante o una variable, según convenga).

La regla $E\forall$ puede ser entendida de la manera siguiente: si algo (A) puede decirse de todo el dominio ($\forall x A(x)$), entonces puede decirse de cualquiera de sus elementos ($A(t)$, donde t es un término cualquiera). Si se quiere decir de un elemento conocido o de un elemento al que se da un nombre, sustituiremos la variable cuantificada universalmente por la constante que designa este elemento (por ejemplo, $A(b)$). Si se quiere decir de un elemento cualquiera sin precisar más, la sustituiremos por una variable cualquiera (por ejemplo, $A(u)$).

Ejemplo de utilización correcta de la regla $E\forall$

Como ejemplo de utilización correcta de esta regla, se validará el razonamiento:

“Los isleños son agradables. Juan es isleño. Luego, Juan es agradable.”

Se hace la siguiente asignación de significados a predicados atómicos: $I(x)$: “x es isleño”; $A(x)$: “x es agradable”; a (constante): “Juan”. El razonamiento se formaliza:

$$\forall x (I(x) \rightarrow A(x)), I(a) \therefore A(a)$$

- | | | |
|---|-------------------------------------|--|
| 1 | $\forall x (I(x) \rightarrow A(x))$ | Premisa |
| 2 | $I(a)$ | Premisa |
| 3 | $I(a) \rightarrow A(a)$ | $E\forall$ 1 (x sustituida por la constante a) |
| 4 | $A(a)$ | $E\rightarrow$ 2,3 |

Observar que en el paso 3 se pasa de “Todos los isleños son agradables” a “Si Juan es isleño, entonces es agradable”. La constante *a* ha sido elegida para sustituir *x* porque cualquier otro término no habría permitido la eliminación de la implicación y la validación del razonamiento.

Regla 11: introducción del cuantificador universal (\forall)

Cuando se dispone de una fórmula que contiene una variable libre, esta variable puede cuantificarse universalmente:

$$\frac{A(u)}{\forall x A(x)}$$

Para que la aplicación de la regla sea correcta, son necesarias las condiciones siguientes:

- La variable *u* debe ser arbitraria. Esto quiere decir que:
 - Cuando se ha deducido *A(u)*, donde hay *u*, podría haberse puesto cualquier otro término.
 - No aparece en el encabezamiento (hipótesis) de la subdeducción donde la regla se aplica.
- La introducción del cuantificador universal no debe provocar capturas involuntarias de variables libres. Esto quiere decir que la variable *x* no aparece libre en la fórmula *A*.
- Todas las ocurrencias de la variable libre *u* en la fórmula *A* deben ser sustituidas por *x*.

La regla \forall puede ser entendida de la forma siguiente: si algo (*A*) puede decirse de *u* (*A(u)*) y se puede garantizar que este *u* podría ser cualquier objeto del dominio (exigencia de arbitrariedad), entonces *A* puede decirse de todos los elementos del dominio ($\forall x A(x)$).

Ejemplo de aplicación correcta de la regla \forall

Como ejemplo de utilización correcta de la regla se validará el razonamiento siguiente: “Todo el mundo es amigo de todo el mundo. Por lo tanto, todo el mundo es amigo de sí mismo”.

El dominio será un conjunto cualquiera, no vacío, de personas, y se utilizará un solo predicado: *A(x,y)*: “*x* es amigo de *y*”.

$$\forall x \forall y A(x,y) \therefore \forall z A(z,z)$$

1	$\forall x \forall y A(x,y)$	Premisa
2	$\forall y A(u,y)$	$E\forall$ 1 (<i>x</i> es sustituida por <i>u</i>)
3	$A(u,u)$	$E\forall$ 2 (<i>y</i> es sustituida por <i>u</i>)
4	$\forall z A(z,z)$	$I\forall$ 3 (<i>u</i> era libre y arbitraria)

Ejemplos de aplicación incorrecta de la regla \forall

Lo siguiente son ejemplos de aplicaciones incorrectas de la regla \forall . En todos los casos se viola alguna de las condiciones que garantizan su uso correcto:

1) Deducción incorrecta porque la variable libre de la fórmula en que se aplica la regla aparece en el encabezamiento de la subdeducción donde se hace la aplicación.

1	$\forall x (S(x) \vee P(x))$	Premisa
2	$\neg \forall x S(x)$	Premisa

3	$S(u) \vee P(u)$	$E\forall 1$
4	$S(u)$	H
5	$\forall x S(x)$	$I\forall 4$ ¡error!
6	$\neg \forall x S(x)$	it 2
7	$\neg S(u)$	$I\neg 4, 5, 6$
8	$P(u)$	SD 3, 7
9	$\forall x P(x)$	$I\forall 8$

Esta deducción da por válido, sin serlo, el razonamiento siguiente:

“Los números enteros son pares o impares. No todos los números enteros son impares. En consecuencia, todos los números enteros son pares.”

2) Esta deducción es incorrecta porque no todas las apariciones de la variable libre se han sustituido en el momento de la introducción del cuantificador:

1	$\forall x P(x,x)$	Premisa
2	$P(u,u)$	$E\forall 1$
3	$\forall y P(u,y)$	$I\forall 2$ ¡error! Lo correcto hubiera sido $\forall y P(y,y)$
4	$\forall x \forall y P(x,y)$	

Esta deducción da por válido, sin serlo, el razonamiento siguiente:

“Todo el mundo habla consigo mismo. Así pues, todo el mundo habla con todo el mundo.”

3) Ejemplo de captura involuntaria de una variable libre: se dispone de la fórmula $A(u) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(u,x))$ donde u es una variable libre y arbitraria. Se elige x para sustituir u e introducir el cuantificador universal y se obtiene $\forall x (A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x,x)))$. Huelga decir que cualquier otro nombre para la variable haría correcta la introducción del cuantificador. Por ejemplo: $\forall y (A(y) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(y,x)))$.

Regla 12: eliminación del cuantificador existencial ($E\exists$)

Cuando una fórmula está cuantificada existencialmente, la variable cuantificada puede ser sustituida por una constante nueva y el cuantificador se puede eliminar:

$$\frac{\exists x A(x)}{A(a)}$$

Para que la aplicación de la regla sea correcta, es necesario garantizar que la constante utilizada es nueva, es decir, que no haya aparecido nunca antes.

La regla $E\exists$ puede entenderse de la forma siguiente: si se sabe que hay un elemento del dominio que cumple una determinada propiedad (A), nos podemos referir al mismo con una constante (a), siempre y cuando la misma constante no se utilice también para referirse a cualquier otro elemento del dominio.

La regla original de eliminación del cuantificador existencial

La regla de eliminación del cuantificador existencial que acabamos de ver no es la que habitualmente se considera. La regla original es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ \hline \begin{array}{c} A(a) \\ \dots \\ B \end{array} \\ \hline B \end{array}$$

Para aplicarla correctamente es necesario que la constante a no aparezca ni en la fórmula A ni en la fórmula B , así como tampoco en ninguna hipótesis de ninguna subdeducción que todavía esté abierta.

La regla de eliminación del cuantificador existencial que se estudia en este módulo es equivalente a la original, pero más simple e intuitiva.

Ejemplo de aplicación correcta de la regla $E\exists$

Como ejemplo de aplicación correcta de la regla $E\exists$ se validará el razonamiento siguiente: “Si todos los programas han sido verificados, todos los resultados son correctos. Sin embargo, hay un resultado que no es correcto. Esto quiere decir que no todos los programas han sido verificados.”

Se utilizará los predicados atómicos: $P(x)$: “ x es un programa”; $V(x)$: “ x ha sido verificado”; $R(x)$: “ x es un resultado”; $C(x)$: “ x es correcto”.

$$\forall x (P(x) \rightarrow V(x)) \rightarrow \forall y (R(y) \rightarrow C(y)), \exists x (R(x) \wedge \neg C(x)) \therefore \neg \forall x (P(x) \rightarrow V(x))$$

1	$\forall x (P(x) \rightarrow V(x)) \rightarrow \forall y (R(y) \rightarrow C(y))$	Premisa
2	$\exists x (R(x) \wedge \neg C(x))$	Premisa
3	$\forall x (P(x) \rightarrow V(x))$	H
4	$\forall y (R(y) \rightarrow C(y))$	$E \rightarrow 1, 3$
5	$R(a) \wedge \neg C(a)$	$E\exists 2$
6	$R(a) \rightarrow C(a)$	$E\forall 4$
7	$R(a)$	$E\wedge 5$
8	$C(a)$	$E \rightarrow 6, 7$
9	$\neg C(a)$	$E\wedge 5$
10	$\neg \forall x (P(x) \rightarrow V(x))$	$I \neg 3, 8, 9$

Ejemplo de aplicación incorrecta de la regla $E\exists$

La regla $E\exists$ se aplica mal cuando se utiliza una constante que ya ha sido utilizada antes, ya sea en alguna de las premisas o en una aplicación anterior de esta misma regla o de la regla $E\forall$:

1	$\forall x [C(x) \rightarrow \exists y (B(y) \wedge P(x,y))]$	Premisa
2	$C(a)$	Premisa
3	$C(a) \rightarrow \exists y (B(y) \wedge P(a,y))$	$E\forall 1$
4	$\exists y (B(y) \wedge P(a,y))$	$E \rightarrow 2, 3$
5	$B(a) \wedge P(a,a)$	$E\exists 4$ ¡error! Lo correcto habría sido $B(b) \wedge P(a,b)$
6	$B(a)$	$E\wedge 5$

Esta deducción da por válido, sin serlo, el razonamiento siguiente:

“Todos los cow-boys llevan sombrero. Johnny es un cow-boy. En consecuencia, Johnny es un sombrero.”

Regla 13: introducción del cuantificador existencial (\exists)

Las variables libres de una fórmula se pueden cuantificar existencialmente. Las constantes de una fórmula pueden sustituirse por una variable cuantificada existencialmente:

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$$

Donde t es un término cualquiera (si se trata de una variable, debe ser libre).

La regla \exists puede entenderse de la forma siguiente: si algo (A) puede decirse de t ($A(t)$), entonces existe un elemento del dominio del cual puede decirse A ($\exists x A(x)$).

Ejemplo de aplicación correcta de la regla \exists

Como ejemplo de utilización correcta de la regla, se validará el razonamiento siguiente:

“Todos los bancos tienen ordenadores. Hay bancos. En consecuencia, hay ordenadores”.

Se utilizarán los predicados siguientes: $B(x)$: “ x es un banco”; $O(x)$: “ x es un ordenador”; $T(x,y)$: “ x tiene y ”.

$$\forall x [B(x) \rightarrow \exists y (O(y) \wedge T(x,y))], \exists x B(x) \therefore \exists x O(x)$$

1	$\forall x [B(x) \rightarrow \exists y (O(y) \wedge T(x,y))]$	Premisa
2	$\exists x B(x)$	Premisa
3	$B(a)$	$E\exists$ 2
4	$B(a) \rightarrow \exists y (O(y) \wedge T(a,y))$	$E\forall$ 1
5	$\exists y (O(y) \wedge T(a,y))$	$E\rightarrow$ 3, 4
6	$O(b) \wedge T(a,b)$	$E\exists$ 5
7	$O(b)$	$E\wedge$ 6
8	$\exists x O(x)$	$I\exists$ 7

2. Restricciones Adicionales

Como hemos visto, algunas de las reglas referidas a cuantificadores van acompañadas de restricciones que hay que tener en cuenta para garantizar que se apliquen correctamente. A continuación, se presentan dos más, una que afecta a la introducción del cuantificador universal y otra que restringe el uso que puede hacerse de las constantes introducidas al eliminar cuantificadores existenciales:

I) Cuando una fórmula contiene a la vez:

- Una variable libre (u) que proviene de la eliminación de un cuantificador universal, y
- Una constante (a) que proviene de la eliminación de un cuantificador existencial que estaba dentro del alcance del cuantificador universal anterior (aquel cuya eliminación ha dado lugar a la aparición de la variable u),

entonces: no solo se puede aplicar la regla $I\forall$ respecto a la variable libre u .

Por ejemplo, de la fórmula $\forall x \exists y C(x,y)$ no se puede deducir la fórmula $\exists y \forall x C(x,y)$. Observar que el cuantificador existencial se halla dentro del alcance del universal.

1	$\forall x \exists y C(x,y)$	Premisa
2	$\exists y C(u,y)$	$E\forall$ 1
3	$C(u,a)$	$E\exists$ 2
4	$\forall x C(x,a)$	$I\forall$ 3 ¡error! a proviene de un \exists que estaba dentro del alcance del \forall del cual proviene u.

5 $\exists y \forall x C(x,y)$ $I\exists$ 4

Si se otorga a $C(x,y)$ el significado “x conoce y”, la deducción anterior da por válido, incorrectamente, el razonamiento siguiente:

“Todo el mundo conoce a alguien. Por lo tanto, hay alguien que conoce a todo el mundo.”

Sin embargo, no hay ningún problema si el cuantificador existencial no se halla dentro del alcance del universal. De la fórmula $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$, sí que puede deducirse la fórmula $\exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))$.

1	$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$	Premisa
2	$\forall x P(x)$	$E\wedge$ 1
3	$\exists y Q(y)$	$E\wedge$ 1
4	$P(u)$	$E\forall$ 2
5	$Q(a)$	$E\exists$ 3
6	$P(u) \wedge Q(a)$	$I\wedge$ 4, 5
7	$\forall x (P(x) \wedge Q(a))$	$I\forall$ 6
8	$\exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))$	$I\exists$ 7

II) Las constantes introducidas al aplicar la regla $E\exists$ son locales en la (sub)deducción que las ha originado y sólo pueden ser utilizadas en el mismo nivel o en niveles más interiores, pero no pueden subir a niveles superiores.

Un ejemplo de demostración que es incorrecta porque viola esta restricción es el siguiente:

1	$\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(y)$	Premisa
2	$\forall x P(x)$	H
3	$\exists y R(y)$	$E\rightarrow$ 1, 2
4	$R(a)$	$E\exists$ 3
5	$\forall x P(x) \rightarrow R(a)$	$I\rightarrow$ 2, 4 ¡error! (a no puede salir de la subdeducción donde ha sido introducida).

3. Ejemplos

A continuación, exponemos dos ejemplos de aplicación de las reglas de deducción natural:

1) Demostramos la validez del razonamiento siguiente:

$\forall x \forall y [P(x) \rightarrow R(x, y)], \exists x \exists y [Q(y) \wedge \neg R(x, y)], \forall x \exists y [P(x) \vee S(x, y)] \therefore \exists x \exists y S(x, y).$

(1) $\forall x \forall y [P(x) \rightarrow R(x, y)]$	P
(2) $\exists x \exists y [Q(y) \wedge \neg R(x, y)]$	P
(3) $\forall x \exists y [P(x) \vee S(x, y)]$	P
(4) $\exists y [Q(y) \wedge \neg R(a, y)]$	E\exists 2, x sustituida por a^*.
(5) $Q(b) \wedge \neg R(a, b)$	E\exists 4, y sustituida por b^*.
(6) $\forall y (P(a) \rightarrow R(a, y))$	E\forall 1, x sustituida por a.
(7) $P(a) \rightarrow R(a, b)$	E\forall 6, y sustituida por b.
(8) $\neg R(a, b)$	E\wedge 5
(9) $\neg P(a)$	MT 7, 8
(10) $\exists y [P(a) \vee S(a, y)]$	E\forall 3, x sustituida por a.
(11) $P(a) \vee S(a, c)$	E\exists 10, y sustituida por c^*.
(12) $S(a, c)$	SD 9, 11
(13) $\exists y S(a, y)$	I\exists 12
(14) $\exists x \exists y S(x, y)$	I\exists 13

2) Demostramos la validez del razonamiento siguiente:

$\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall y [P(y) \wedge R(y)] \therefore \forall x [R(x) \wedge Q(x)].$

(1) $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$	P
(2) $\forall y [P(y) \wedge R(y)]$	P
(3) $P(w) \rightarrow Q(w)$	E\forall 1, w es arbitraria*.
(4) $P(w) \wedge R(w)$	E\forall 2, w es arbitraria*.
(5) $P(w)$	E\wedge 4
(6) $R(w)$	E\wedge 4
(7) $Q(w)$	E\rightarrow 3, 5
(8) $R(w) \wedge Q(w)$	I\wedge 6, 7
(9) $\forall x [R(x) \wedge Q(x)]$	I\forall 8, w era una variable arbitraria.

4. Reglas derivadas y equivalencias deductivas

En la lógica de predicados, la deducción natural es bastante más compleja que en la lógica de enunciados, y la posibilidad de cometer errores también es mayor. Para reducir tanto como sea posible el riesgo de errores, es interesante utilizar, siempre que sea factible, reglas derivadas y equivalencias deductivas de corrección probada. Las que se exponen a continuación son algunas de las más útiles y las que se utilizan con más frecuencia:

1) Cambio de nombre de la variable cuantificada:

- $\forall x A(x) \dashv\vdash \forall y A(y).$
- $\exists x A(x) \dashv\vdash \exists y A(y).$

2) Paso del cuantificador universal al existencial:

$$\frac{\forall x A(x)}{\exists x A(x)}$$

3) Conmutatividad de los cuantificadores:

- $\forall x \forall y A(x,y) \dashv\vdash \forall y \forall x A(x,y).$
- $\exists x \exists y A(x,y) \dashv\vdash \exists y \exists x A(x,y).$

4) Relación de los cuantificadores con la negación, **leyes de De Morgan**:

$$\neg \forall x A(x) \dashv\vdash \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \dashv\vdash \forall x \neg A(x)$$

Estas leyes también ponen de manifiesto la relación que tienen los cuantificadores entre sí.

5) Relación de los cuantificadores con la conjunción:

a) Para el caso del cuantificador universal, tenemos lo siguiente:

$$\forall x A(x) \wedge \forall y B(y) \dashv\vdash \forall z (A(z) \wedge B(z)).$$

a) Para el caso del cuantificador existencial no se da la equivalencia y sólo tenemos:

$$\frac{\exists z (A(z) \wedge B(z))}{\exists x A(x) \wedge \exists y B(y)}$$

6) Relación de los cuantificadores con la disyunción:

a) Para el caso del cuantificador existencial, tenemos lo siguiente:

$$\exists x A(x) \vee \exists y B(y) \dashv\vdash \exists z (A(z) \vee B(z)).$$

b) Para el caso del cuantificador universal no se da la equivalencia, y sólo tenemos:

$$\frac{\forall x A(x) \vee \forall y B(y)}{\forall z (A(z) \vee B(z))}$$

7) Relación de los cuantificadores con la implicación:

a) En el caso de los cuantificadores universales, la relación es la siguiente:

$$\forall z (A(z) \rightarrow B(z))$$

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall y B(y)$$

b) En cambio, para el cuantificador existencial, tenemos:

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists y B(y)$$

$$\exists z (A(z) \rightarrow B(z))$$

Verdad y falsedad en la lógica de predicados

1. El concepto de interpretación en la lógica de predicados

Todo lo que explicamos sobre la indiferencia de la lógica respecto al significado de los enunciados se puede extender a la lógica de predicados y, concretamente, a las fórmulas. La lógica de predicados también asume que cualquier fórmula puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas simultáneamente, y garantiza que, si un razonamiento es correcto, entonces, siempre que las premisas sean verdaderas, la conclusión también lo será.

No obstante, una fórmula es algo más complejo que un enunciado. La definición de interpretación debe tener en cuenta esta mayor complejidad.

Con una interpretación se asigna un valor de verdad a una fórmula. Hay tres aspectos que condicionan el valor de verdad de una fórmula: el dominio considerado, el valor de verdad de los predicados cuando las variables son sustituidas por los elementos del dominio y el significado de las constantes (qué elemento del dominio designan). De este modo, para construir una interpretación es necesario explicitar los aspectos siguientes:

- 1) El dominio (D) de las variables, que no puede estar vacío (\emptyset).
- 2) Para cada símbolo de predicado, una interpretación (V o F) para cada una de las posibles sustituciones de todas sus variables por elementos del dominio. El conjunto de todas estas interpretaciones se denomina I_p .
- 3) Para cada símbolo de constante, una asignación de un elemento concreto del dominio. El conjunto de todas estas asignaciones se denomina I_c . Una interpretación en lógica de predicados es, pues, un triplete de la forma $\langle D, I_p, I_c \rangle$.

Ejemplos de construcción de una interpretación

1) Consideremos la fórmula $\forall x \exists y P(x,y)$ y veamos cómo se puede construir una interpretación de la misma:

- Como dominio se toma un conjunto de dos elementos, que se identifican con los números 1 y 2, $D = \{1, 2\}$.
- Todas las posibles sustituciones que se pueden hacer de las variables del predicado P por elementos del dominio dan lugar a $P(1,1)$, $P(1,2)$, $P(2,1)$ y $P(2,2)$. Una posible interpretación de estas sustituciones en el predicado P puede ser $P(1,1) = V$, $P(1,2) = F$, $P(2,1) = V$ y $P(2,2) = F$.
- Dado que en la fórmula no hay constantes, no se pueden hacer asignaciones a elementos concretos del dominio.

Así pues, finalmente, la interpretación ha quedado del modo que exponemos a continuación:

$\langle \{1, 2\}, \{P(1,1) = V, P(1,2) = F, P(2,1) = V, P(2,2) = F\}, \emptyset \rangle$.

Fijarnos en que, una vez sustituidos los parámetros por valores concretos del dominio, los predicados ya se pueden interpretar como V o F, del mismo modo que los enunciados. La explicación es simple: recordad que un predicado en el que se han sustituido todos los parámetros por elementos concretos del dominio es un enunciado.

Solamente teniendo en cuenta que el número de posibles dominios es infinito ($\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots$) ya se puede ver que el número de interpretaciones de una fórmula también es infinito. Esto no sucede en el caso de los enunciados, porque un enunciado con n átomos tiene, exactamente, 2^n interpretaciones.

2) Para la fórmula $\exists z Q(z,a)$, una interpretación sería la siguiente:

- El dominio es $D = \{1, 2\}$.
- Todas las sustituciones que se pueden hacer de las variables del predicado Q dan lugar a $Q(1,1)$, $Q(1,2)$, $Q(2,1)$ y $Q(2,2)$, y una posible interpretación de todas estas sustituciones puede ser $Q(1,1) = F$, $Q(1,2) = V$, $Q(2,1) = V$ y $Q(2,2) = F$.
- A la constante a se le debe asignar un elemento del dominio. Una posible asignación es $a = 2$.

Así pues, finalmente, la interpretación ha quedado de la manera que presentamos a continuación:

$\langle \{1,2\}, Q(1,1) = F, Q(1,2) = V, Q(2,1) = V, Q(2,2) = F \rangle, \{a = 2\}$

2. Paso de fórmulas a enunciados

Acabamos de ver qué se entiende por interpretación en la lógica de predicados. Ahora es necesario ver cómo se debe determinar el valor de verdad de una fórmula, a partir de los valores de verdad asignados a los enunciados* y de la asignación de elementos concretos a las constantes.

* Resultantes de sustituir las variables de los predicados por elementos del dominio.

Se debe tener en cuenta que, si el dominio a partir del cual se hace la interpretación tiene n elementos ($D = \{1, 2, \dots, n\}$), entonces:

1. Toda fórmula del tipo $\forall x p(x)$ es equivalente al enunciado:

$$P(1) \wedge \dots \wedge P(n).$$

2. Toda fórmula del tipo es equivalente al enunciado:

$$P(1) \vee \dots \vee P(n).$$

Ejemplos de equivalencia entre enunciados y fórmulas

Si $D = \{1, 2, 3\}$, entonces:

1) la fórmula $\forall x P(x)$ es equivalente al enunciado $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$;

2) la fórmula $\exists y [Q(y) \rightarrow R(y)]$ es equivalente al enunciado siguiente:

$$(Q(1) \rightarrow R(1)) \vee (Q(2) \rightarrow R(2)) \vee (Q(3) \rightarrow R(3));$$

3) la fórmula $\forall x \exists y P(x, y)$ es equivalente a $\exists y P(1,y) \wedge \exists y P(2,y) \wedge \exists y P(3,y)$ y ésta lo es al enunciado siguiente:

$$[P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3)] \wedge [P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3)] \wedge [P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)]$$

Para determinar el valor de verdad de una fórmula, dada una interpretación en concreto, sólo hay que convertirla en un enunciado, siguiendo las dos reglas que acabamos de describir, y proceder de la misma forma como lo hacemos para cualquier otro enunciado.

Ejemplos de determinación del valor de verdad de una fórmula

Dadas la fórmula $\forall x \exists y P(x,y)$ y la interpretación , tenemos que en el dominio $D = \{ 1, 2 \}$ la fórmula es equivalente al enunciado $[P(1,1) \vee P(1,2)] \wedge [P(2,1) \vee P(2,2)]$. Finalmente, sólo hay que proceder como si se calculase una única fila de una tabla de verdad, como mostramos a continuación:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$	$P(1,1) \vee P(1,2)$	$P(2,1) \vee P(2,2)$	$\forall x \exists y P(x,y)$
V	F	V	F	V	V	V

De la misma manera, para la fórmula $\exists x Q(z, a)$ y la interpretación , tendríamos que $\exists x Q(z,a)$ es equivalente a $Q(1,a) \vee Q(2,a)$ y, dado que sería lo mismo que $Q(1,2) \vee Q(2,2)$, quedaría la tabla siguiente:

$Q(1,a) = Q(1,2)$	$Q(2,a) = Q(2,2)$	$\exists x Q(z,a) = Q(1,2) \vee Q(2,2)$ (con $a = 2$)
V	F	V

Volviendo a la fórmula $\forall x \exists y P(x,y)$, la tabla de verdad para todas las interpretaciones donde el dominio es $D = \{ 1, 2 \}$ sería la que presentamos a continuación; resulta sencillo darse cuenta de que es posible construir la tabla de verdad para todas las interpretaciones que tienen un mismo dominio.

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$	$P(1,1) \vee P(1,2)$	$P(2,1) \vee P(2,2)$	$\forall x \exists y P(x,y)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F

Los conceptos de tautología y contradicción que se aplican a los enunciados también se pueden aplicar a las fórmulas.

Dependiendo del valor de verdad de una fórmula, tenemos que:

- Una fórmula es una **tautología** cuando su valor de verdad es V en todas las posibles interpretaciones.
- Una fórmula es una **contradicción** cuando su valor de verdad es F en todas las posibles interpretaciones.
- Cuando una fórmula ni es una tautología ni es una contradicción, se dice que es **contingente**.

NOTA: Por “en todas las posibles interpretaciones” entendemos “para cualquier dominio”, “para cualquier combinación de atribución de valores de verdad a las posibles sustituciones” y “para cualquier asignación de elementos del dominio a constantes”.

3. Refutación de razonamientos

Como en el caso de la lógica de enunciados, un razonamiento es correcto si, y sólo si, todas aquellas interpretaciones que hacen verdaderas las premisas también hacen verdadera la conclusión.

La infinidad en el número de interpretaciones no permite validar un razonamiento por la vía de comprobar que todas las interpretaciones que hacen verdaderas las premisas también hacen verdadera la conclusión. A pesar de esta adversidad, sí que es posible utilizar esta vía para demostrar que un razonamiento es formalmente inválido.

Un razonamiento es formalmente inválido cuando existe una interpretación, como mínimo, que hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión. Estas interpretaciones se denominan, como en el caso de la lógica de enunciados, **contraejemplos**.

El proceso para buscar un contraejemplo, que invalide un razonamiento es el siguiente:

1) Se comienza con el menor dominio posible ($D = \{1\}$) y todas las interpretaciones que se puedan construir con éste. Si alguna de éstas hace verdaderas las premisas, pero no la conclusión, ya se ha encontrado el contraejemplo que se buscaba.

2) Se repite el proceso añadiendo cada vez un elemento más al dominio. El proceso se para cuándo se encuentra un contraejemplo. Si el razonamiento es inválido, se acabará encontrando el contraejemplo que se buscaba. Contrariamente, si el razonamiento es correcto, el proceso continuará indefinidamente*, cada vez con dominios de más elementos, sin encontrar nada. Esto hace que el procedimiento se tenga que reservar para encontrar contraejemplos de razonamientos que se saben inválidos o de los cuales se tienen sospechas fundadas de invalidez.

* Si el razonamiento es correcto, el proceso se convierte en una iteración infinita.

Ejemplo de cómo hay que buscar un contraejemplo

Demostramos la invalidez del razonamiento $\exists x P(x) \therefore \forall z P(z)$

- Cuando tenemos el dominio $D = \{1\}$. Sustituyendo todas las variables del predicado P por elementos del dominio, se obtiene $P(1)$. La fórmula $\exists x P(x)$ es equivalente a $P(1)$, y $\forall z P(z)$ es equivalente a $P(1)$. Entonces, obtenemos la siguiente tabla de verdad:

$P(1)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
V	V	V
F	F	F

Todas las interpretaciones que hacen verdadera la premisa también hacen verdadera la conclusión. En este dominio, pues, no hemos encontrado ningún contraejemplo.

- Cuando tenemos el dominio $D = \{1, 2\}$, las sustituciones dan lugar a $P(1)$ y $P(2)$. La premisa es equivalente a $P(1) \vee P(2)$, y la conclusión es equivalente a $P(1) \wedge P(2)$. Así, tenemos la siguiente tabla de verdad:

$P(1)$	$P(2)$	$P(1) \vee P(2) = \exists x P(x)$	$P(1) \wedge P(2) = \forall x P(x)$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

Contraejemplos

En este dominio sí se han encontrado contraejemplos. En concreto, se ha encontrado que las interpretaciones $\langle \{1, 2\}, \{P(1) = V, P(2) = F\}, \emptyset \rangle$ y $\langle \{1, 2\}, \{P(1) = F, P(2) = V\}, \emptyset \rangle$ hacen verdadera la premisa, pero no la conclusión. Se acaba de demostrar que el razonamiento es inválido y ya no es necesario continuar buscando en dominios de más elementos.