Lógica de Predicados
Semántica

Docente: Anabel N. Ruiz

Repaso

$$\text{Alfabeto} == \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, P, Q, R, \ldots, \underbrace{\underbrace{a, b, c}_{\text{Constantes}}, \ldots, \underbrace{x, y, z}_{\text{Variables}}}_{\text{Términos}}, (,)\}$$

Las fórmulas bien formadas se definen así:

i. Todo átomo es una FBF.

ii. Si A y B son fórmulas bien formadas, entonces $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \longrightarrow B)$ y $(A \longleftrightarrow B)$ también lo son.

iii. Si A es una fórmula bien formada y x es una variable, entonces $(\forall x)\, A$ y $(\exists x)\, A$ son fórmulas bien formadas.

Ámbito de Cuantificadores

- Se denomina ámbito de un cuantificador a aquella zona de una fórmula que está dentro de su campo de acción, es decir, bajo sus efectos.
- Las variables que están afectadas por la acción de algún cuantificador se denominan **variables ligadas**. Las no afectadas por ningún cuantificador se denominan **variables libres**.
- Las fórmulas sin ninguna variable libre se denominan **fórmulas cerradas**. Las que tienen alguna variable libre, **fórmulas abiertas**.

Ejemplo

$$\forall x\, [P(x) \wedge \exists x\, Q(x, z) \rightarrow \exists y\, R(x, y)] \vee Q(z, x)$$

Variable
Libre

Variables
Libres

Variables misma letra

- Cuando dos variables están designadas por el mismo símbolo (misma letra) decimos que:
  – Son la misma variable si están bajo el alcance del mismo cuantificador, o si las dos son libres
  – Son variables diferentes si están bajo el alcance de cuantificadores distintos, o si una es libre y la otra no.

$$\forall x\,[P(x) \wedge \exists x\, Q(x, z) \rightarrow \exists y\, R(x, y)] \vee Q(z, x)$$

Significado de Cuantificadores

- Cuando todas las variables que aparecen en una fórmula están cuantificadas, la fórmula es un enunciado. Los cuantificadores representan la sustitución de las variables cuantificadas por elementos del dominio.

- Si el dominio de la variable x es el conjunto {1, 2, 3, 4 }, entonces:

  – La fórmula $\forall x\ P(x)$ se puede entender como $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.

  – La fórmula $\exists x\ P(x)$ se puede entender como $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.

La Formalización

- Los pasos que habrá que seguir son los siguientes:
  - Determinar el dominio
  - Determinar los predicados atómicos
  - Determinar si hay elementos concretos del dominio
  - Formalizar cada frase simple y decidir la cuantificación adecuada

Ejemplo

Hay personas honradas y hay personas sensatas. Las personas honradas siempre son sensatas. Podemos concluir que hay personas que son honradas y sensatas.

- Dominio: conjunto de todas las personas
- Predicados:
  - **H(x)**: “x es una persona honrada
  - **A(x)**: “x es una persona sensata”.
- Formalización:

$$\exists x\, H(x) \wedge \exists y\, A(y),\ \forall x\, (H(x) \rightarrow A(x))\ .\because\ \exists x\, (H(x) \wedge A(x))$$

Significado Existencial o Universal

- Las frases con sentido existencial se formalizan según el patrón siguiente

$\exists$x [Selección(x) $\wedge$ Propiedades_de_la_selección(x)]

- Las frases con sentido universal se formalizan según el patrón siguiente:

$\forall$x [Selección(x) $\rightarrow$ Propiedades_de_la_selección(x)]

Sentido Existencia - Ejemplo

Si con P(x): “x es un programa”; A(x): “x es antiguo”; V(x): “x tiene un valor considerable”; C(x): “El mantenimiento de x es complicado”, formalizamos las frases “Algunos programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado”

$$\exists x\ (\underbrace{P(x) \wedge A(x)}_{\textbf{Selección}} \wedge \underbrace{V(x) \wedge C(x)}_{\textbf{Propiedades de la selección}})$$

Sentido Universal - Ejemplo

Si con P(x): "x es un programa"; A(x): "x es antiguo"; V(x): "x tiene un valor considerable"; C(x): "El mantenimiento de x es complicado", formalizamos las frases "Todos los programas antiguos tienen un valor considerable pero su mantenimiento es complicado"

$$\forall x\, (\underbrace{P(x) \wedge A(x)}_{\textbf{Selección}} \rightarrow \underbrace{V(x) \wedge C(x)}_{\textbf{Propiedades de la selección}})$$

Formalización de frases complejas

Con frecuencia, para formalizar con el lenguaje de la lógica de predicados es conveniente reducir un problema complejo a una colección de problemas más simples, de manera parecida a como se hace en la formalización al lenguaje de la lógica de enunciados. Un buen ejemplo son aquellas frases que requieren el uso de más de un cuantificador para su formalización.

Ejemplo

"Los programadores que tienen asignado un despacho rinden por encima de la media"

P(x): "x es un programador"

D(x): "x es un despacho"

R(x): "x rinde por encima de la media"

A(x,y): "x tiene y asignado" ("y está asignado a x")

Ejemplo – Cont.

Sentido: universal.

Selección: subconjunto de los programadores que tienen asignado un despacho.

Propiedades de la selección: los elementos del subconjunto rinden por encima de la media.

La formalización será:

$$\forall x\ [P(x) \wedge \text{“}x \text{ tiene asignado un despacho”} \rightarrow R(x)]$$

Ejemplo – Cont.

Ahora formalicemos "**x tiene asignado un despacho**".

Sentido: existencial.

Selección: subconjunto de despachos.

Propiedades de la selección: los elementos de la selección (algunos) están asignados a x.

La formalización será:

$$\exists y\ [D(y) \wedge A(x,y)]$$

Ejemplo – Cont.

Finalmente, la formalización de toda la frase es:

$$\forall x\ (P(x) \wedge \exists y\ [(y) \wedge A(x,y)] \rightarrow R(x))$$

$$\forall x\ [P(x) \wedge \text{“}x \text{ tiene asignado un despacho”} \rightarrow R(x)]$$

$$\exists y\ [D(y) \wedge A(x,y)]$$

“Los programadores que tienen asignado un despacho rinden por encima de la media”

Deducción Natural

- La deducción natural de la lógica de predicados mantiene las ocho reglas básicas de la lógica de enunciados (sin considerar las 2 reglas del bicondicional), más la Regla de Identidad o iteración y añade cuatro más: dos para cada cuantificador, una para eliminarlo y una para introducirlo.

Reglas de la Negación			
Eliminación del Negador	$E\neg$ EN	Regla de la Doble Negación	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$
Introducción del Negador	$I\neg$ IN	Regla de Reducción al Absurdo	$\dfrac{\begin{array}{\|l} A \\ \hline \dots \\ B \\ \dots \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$

Reglas del Condicional o Implicación Material			
Eliminación del Condicional	E $\rightarrow$ EI	Regla del Modus Ponendo Ponens	$\dfrac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \end{array}}{B}$
Introducción del Condicional	I $\rightarrow$ II	Teorema de la Deducción	$\dfrac{\begin{array}{\|l} \underline{A} \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}$

Reglas de la Disyunción			
Eliminación del Disyuntor	$E_{\vee}$ ED	Regla de los Caos	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{\|l} A \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{\|l} B \\ \hline C \end{array}}{C}$
Introducción del Disyuntor	$I_{\vee}$ ID	Regla de la Adición	$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{A}{B \vee A}$

Reglas de la Conjunción			
Eliminación del Conjuntor	E ∧ IC	Regla de la Simplificación	$\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$
Introducción del Conjuntor	I ∧ EC	Regla del Producto	$\dfrac{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}{A \wedge B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}{B \wedge A}$

Regla Identidad o Iteración (It)	
Cualquier enunciado que aparece en una deducción puede volver a ser escrito al final de la lista de enunciados, siempre que la repetición se produzca en el mismo ámbito en el que aparece el enunciado o en el de una subdeducción interna a éste.	$\dfrac{A}{A}$

Reglas Adicionales

- Regla 10: eliminación del cuantificador universal (E∀)

$$\frac{\forall x\ A(x)}{A(t)}$$

- Regla 11: introducción del cuantificador universal (I∀)

$$\frac{A(u)}{\forall x\ A(x)}$$

- Regla 12: eliminación del cuantificador existencial (E∃)

$$\frac{\exists x\ A(x)}{A(a)}$$

- Regla 13: introducción del cuantificador existencial (I∃)

$$\frac{A(t)}{\exists x\ A(x)}$$

Restricciones Adicionales

I) Cuando una fórmula contiene a la vez:

- Una variable libre (u) que proviene de la eliminación de un cuantificador universal, y
- Una constante (a) que proviene de la eliminación de un cuantificador existencial que estaba dentro del alcance del cuantificador universal anterior (aquél cuya eliminación ha dado lugar a la aparición de la variable u),

entonces: no solo se puede aplicar la regla I$\forall$ respecto a la variable libre u.

Restricciones Adicionales

II) Las constantes introducidas al aplicar la regla E∃ son locales en la (sub)deducción que las ha originado y sólo pueden ser utilizadas en el mismo nivel o en niveles más interiores, pero no pueden subir a niveles superiores.

Reglas Derivadas y Equivalencias Deductivas

1) Cambio de nombre de la variable cuantificada:

$$\forall x\ A(x) \dashv\vdash \forall y\ A(y)$$

$$\exists x\ A(x) \dashv\vdash \exists y\ A(y)$$

2) Paso del cuantificador universal al existencial:

$$\frac{\forall x\ A(x)}{\exists x\ A(x)}$$

Reglas Derivadas y Equivalencias Deductivas

3) Conmutatividad de los cuantificadores:

$$\forall x\ \forall y\ A(x,y) \dashv\vdash \forall y\ \forall x\ A(x,y)$$

$$\exists x\ \exists y\ A(x,y) \dashv\vdash \exists y\ \exists x\ A(x,y)$$

4) Relación de los cuantificadores con la negación, **leyes de De Morgan**:

$$\neg\forall x\ A(x) \dashv\vdash \exists x\ \neg A(x)$$

$$\neg\exists x\ A(x) \dashv\vdash \forall x\ \neg A(x)$$

Reglas Derivadas y Equivalencias Deductivas

5) Relación de los cuantificadores con la conjunción:

- Para el caso del cuantificador universal, tenemos lo siguiente:

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall y\, B(y) \dashv\vdash \forall z\, (A(z) \wedge B(z))$$

- Para el caso del cuantificador existencial no se da la equivalencia y sólo tenemos:

$$\frac{\exists z\, (A(z) \wedge B(z))}{\exists x\, A(x) \wedge \exists y\, B(y)}$$

Reglas Derivadas y Equivalencias Deductivas

6) Relación de los cuantificadores con la disyunción:

– Para el caso del cuantificador existencial, tenemos lo siguiente:

$$\exists x\, A(x) \vee \exists y\, B(y) \dashv\vdash \exists z\, (A(z) \vee B(z))$$

– Para el caso del cuantificador universal no se da la equivalencia, y sólo tenemos:

$$\frac{\forall x\, A(x) \vee \forall y\, B(y)}{\forall z\, (A(z) \vee B(z))}$$

Reglas Derivadas y Equivalencias Deductivas

7) Relación de los cuantificadores con la implicación:

– Para los cuantificadores existenciales, la relación es la siguiente:

$$\frac{\forall z\ (A(z) \rightarrow B(z))}{\forall x\ A(x) \rightarrow \forall y\ B(y)}$$

– Para el cuantificador existencial, tenemos:

$$\frac{\exists x\ A(x) \rightarrow \exists y\ B(y)}{\exists z\ (A(z) \rightarrow B(z))}$$