	UNIDAD Nº 3:	TEMAS:	Clase
Instituto Superior Santo Domingo	Derivadas	Aplicaciones de la derivada Máximos y mínimos de funciones	11

Objetivos:

- Conocer algunas aplicaciones de la derivada de funciones.
- Maximizar y minimizar funciones.
- Aplicar los máximos y mínimos a la resolución de problemas.

Introducción

Como lo dijimos en la clase anterior, estudiaremos algunas aplicaciones concretas de la derivad, y así como vimos la semana pasada la regla de L´Hopital, hoy estudiaremos la forma de maximizar o minimizar una función, como también conocer los valores máximos y mínimos relativos de otras.

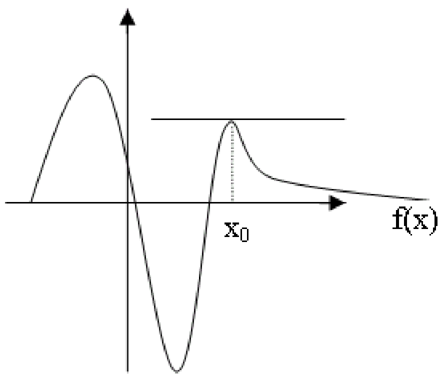
Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio correspondiente al tema.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir.
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Es de suma utilidad el conocimiento de las reglas de derivación, es por ello que necesitas recordarlas siempre. No así la tabla ya que ella podrás tenerla siempre a mano.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes, que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema.
- Comunicarse con el profesor, utilizando el “Campus del Instituto”.

Máximos y mínimos de funciones

Como ya lo hemos dicho varias veces, las funciones vienen a representar las relaciones que se dan entre variables de la vida cotidiana. En muchas ocasiones, necesitamos conocer, para que valores del dominio de ellas, la función toma valores máximos o valores mínimos, como así también saber en qué intervalo la función crece o decrece. Por ejemplo, si consideramos que la fidelidad de la recepción de una señal, depende de la posición de la antena receptora, esto significa que para una posición determinada de la antena, la fidelidad de la señal será la mejor u óptima.

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la derivada, podemos pensar lo siguiente. Si una función en un punto del dominio x_0 toma un valor máximo o mínimo relativo para un intervalo, y en la curva correspondiente a esa función trazáramos la recta tangente, obtendríamos una recta horizontal.



Como la pendiente hace referencia a la inclinación de una recta, esa recta tangente a la curva tendría pendiente nula; esto significaría que la derivada de la función en el punto x_0 debe ser cero. Es decir: si x_0 es un punto de máximo entonces $f'(x_0) = 0$

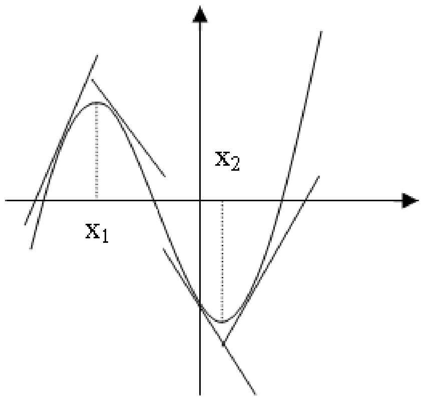
Entonces podemos generalizar:

Si x_0 es un valor del dominio de una función para el cual ella toma un valor de máximo o de mínimo relativo en un intervalo, la derivada de la función valuada en x_0 debe ser nula.

Si x_0 es punto de máximo ó punto de mínimo relativo de f(x) es:

$$\mathbf{f'(x_0) = 0}$$

Por lo tanto si dada una función deseamos saber si ella tiene puntos de máximo o de mínimo, lo que debemos hacer es encontrar la derivada primera y encontrar las raíces de ella. Una vez encontradas las raíces de la derivada de la función, tendremos que averiguar de qué se trata cada uno de esos puntos, ya que podrían ser de máximo, de mínimo u otra cosa que veremos más adelante. Pero, ¿Cómo sabremos de qué se trata? Es simple, si observamos el siguiente gráfico que muestra una función con puntos de máximo y de mínimo y comparamos las rectas tangentes a la curva a ambos lados de los puntos en cuestión x_1 y x_2.



Comentario

Puede resultarle de mucha ayuda ir colocando el lápiz en los lugares donde desea ver cómo es la recta tangente a la curva.

Lo primero que vamos a decir, porque se lo puede ver, es que en las regiones donde la función es creciente la derivada primera de la función es positiva, ya que las rectas tangentes a la curva a la izquierda de x_1 y a la derecha de x_2 tienen pendientes positivas, mientras que si la función en una región es decreciente, su derivada primera será negativa, como lo podemos observar las rectas tangentes a la curva a la derecha de x_1 y a la izquierda de x_2.

En símbolos sería Si f(x) es creciente en (a,b):

$$f'(x) > 0 \text{ en } (a,b)$$

Si f(x) es decreciente en (a,b):

$$f'(x) < 0 \text{ en } (a,b)$$

Ahora retomemos lo que veníamos buscando, es decir como distinguir si se corresponde a un punto de máximo o de mínimo.

Al conocer el punto que anula la derivada primera, por ejemplo x_1 y x_2, una de las formas de distinguir de que se trata, sería comparando las derivadas a la izquierda y a la derecha del punto, tomando para ello dos puntos cercanos, ya que si es un punto de máximo a la izquierda la derivada es positiva y a la derecha es negativa, como en nuestro ejemplo sucede con x_1. Si se trata de un punto de mínimo la derivada a la izquierda es negativa y a la derecha es positiva, como sucede con x_2 en nuestro ejemplo. Sería así:

Sea $a < x_1 < b \Rightarrow$ si $f'(a) > 0$ y $f'(b) < 0 \Rightarrow x_1$ es punto de máximo

Sea $a < x_2 < b \Rightarrow$ si $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0 \Rightarrow x_2$ es punto de mínimo

Debe tenerse en cuenta que los valores que se tomen para a y para b deben ser cercanos al punto en cuestión.

Pero hay otra manera de distinguir un punto de máximo de uno de mínimo, y resulta tan sencillo de comprender como el anterior.

Como ya se pudo observar más arriba si el punto x_0 corresponde a un punto de máximo, a su izquierda la derivada es positiva y a la derecha es negativa, es decir que la función derivada pasa de positiva a negativa, lo que quiere decir que la función derivada es una función decreciente en el punto x_0, por lo tanto si derivamos la función derivada y la valuamos en x_0, tendrá que ser negativa.

Esto sería: Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es punto de máximo

Haciendo un razonamiento similar podríamos decir, si x0 es un punto de mínimo, a su izquierda la derivada es negativa y la derecha es positiva, es decir la derivada pasa de negativa a positiva, lo que quiere decir que la función derivada es una función creciente en el punto x0, por lo tanto si derivamos la función derivada y la valuamos en x0, el resultado deberá ser positiva.

Esto sería: Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es punto de mínimo

<u>Ejemplo:</u>

¿Tiene la función $y = 2x + x^2 - 3$ algún punto de máximo o de mínimo?

Lo primero es derivar la función:

$$y' = 2 + 2x$$

Ahora vemos si la derivada se anula en algún punto, para lo que igualamos y´ a cero:

$$y' = 0 \Rightarrow 2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$$

Para determinar a qué corresponde este valor de x = – 1 apliquemos el último procedimiento explicado, entonces debemos encontrar la derivada segunda:

$$y' = 2 + 2x \quad \Rightarrow \quad y'' = 2$$

Por último debemos valuar la derivada segunda en x = – 1:

$y''(-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ como $y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad -1$ corresponde a un punto de mínimo.

Para saber cuál es el valor mínimo correspondiente a la función, simplemente valuamos la función en x = – 1.

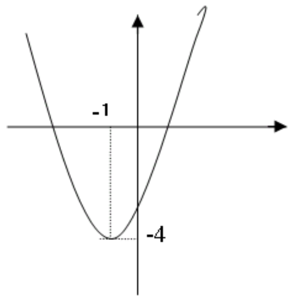
Esto es:

$$y(-1) = 2.(-1) + (-1)^2 - 3$$
$$y(-1) = -4$$

Por lo que la respuesta a la pregunta original sería: La función $y = 2x + x^2 - 3$ si tiene un punto de mínimo en x = – 1, y el valor mínimo correspondiente de la función sería y = – 4.

El punto mínimo es (-1, -4)

Si hacemos un gráfico aproximado obtendríamos algo como:



Trabajo Práctico

Ejercicio 11:

Utilizando las derivadas sucesivas encuentre las coordenadas de los puntos máximos, mínimos o inflexión de las curvas. Distinga cada punto.

a - $y = 3x^2 - 4 + x^3 - 2x^4$

b - $y = \frac{1}{2} . \text{sen } 2x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Ejercicio 12:

¿De qué modo podría dividir en dos el número 100, para que la suma de los cubos de las partes sea mínima?

Ejercicio 13:

Un sector rectangular de terreno junto a una pared, se quiere cercar con un alambre de 100 m de largo. ¿Cuáles son las dimensiones del sector si el área que abarca es máxima?

Ejercicio 14:

Los pulsos eléctricos encargados de transmitir una señal tienen una función tensión que depende del tiempo de la siguiente forma

$$T = 3/5\text{v sen } (1200 \text{ hz } t - \pi/4)$$

¿Para qué valores de t la tensión es máxima?

Ejercicio 15:

Las variaciones de presión que provoca la emisión de un sonido en el aire, en función del tiempo, cumplen con la siguiente relación:

$$P = 1013 \text{ hPa} + 125 \text{ hPa. sen } (125\text{hz } t - \pi/3)$$

¿Cuál es el valor de presión para t = 0?

Escriba algunos valores de t para los que la presión sea mínima.