Instituto Superior Santo Domingo	**UNIDAD Nº 1:** **Funciones**	**TEMAS:** **Paridad, representación y composición de funciones**	Clase **2**

Objetivos:

- Diferenciar las funciones según su paridad.
- Representar gráficamente funciones simples y por partes.
- Conocer la operación de composición de funciones.
- Componer funciones y descomponer una función en dos o más.

Introducción

En esta clase estudiaremos una clasificación de las funciones según su paridad, herramienta que nos ahorrará esfuerzo cuando realicemos la representación gráfica de la curva correspondiente a una función, que dicho sea de paso, también veremos a continuación.

Así como se pueden realizar operaciones entre números, también es factible hacerlo entre funciones, y una de las operaciones más importante es la composición, y en esta clase vamos a estudiarla.

Actividades

- Leer detenidamente el material de estudio, sin entrar en las funciones elementales.
- Tomar nota de las dudas que pudieran surgir
- Resolver los ejemplos que aparecen en el desarrollo y los propuestos en el trabajo práctico.

- Realizar la lectura del material, correspondiente al tema indicado, trata de hacerlo desde el inicio del tema, no está de más afianzar los conceptos.
- Si con la lectura del material propuesto no te resultara comprensible, busca cualquier libro de matemática para ciclo de especialización del nivel medio, y lee de ahí el tema "funciones".
- Trata de resolver los ejemplos propuestos en el desarrollo teórico, y luego compáralo con el escrito.
- Ten presente que al determinar el dominio de una función, de partir de la condición según la operación problemática que aparezca.
- Con la ayuda de un lápiz revisa todo lo indicado, marcando las aclaraciones necesarias y dudas que te puedan surgir.
- Resolver los ejercicios correspondientes que figuran en el trabajo práctico, inmediatamente luego de haber comprendido el tema,
- Comunicarse con el profesor, utilizando el "Campus del Instituto", si no pudiera salir por si solo de la duda que le pudiera surgir, NO DEJE QUE SU DUDA PERDURE.

Conjunto dominio e Imagen

Como ya se dijo anteriormente una función es una relación entre dos conjuntos, uno de partida o alcance y otro de llegada o rango. En todas las funciones que estudiaremos estos dos conjuntos coincidirán con el conjunto de números reales (R). Pero no en todas las funciones interviene la totalidad de números reales, es por ello que se definen dos conjuntos más.

Dominio: es el conjunto formado por todos los elementos del alcance que tienen una imagen. Se escribe Dom(f)

Imagen: es el conjunto formado por todos los elementos del rango que son imagen de algún valor de x. Se escribe Im(x)

En ocasiones resulta de gran utilidad conocer estos dos conjuntos, es decir determinarlos. ¿Pero cómo se hace?

Para la determinación del dominio se deben tener en cuenta las operaciones que intervienen en la fórmula de la función, ya que pueden presentarse tres inconvenientes con ellas, en los que la operación no existe en el campo de los números reales. Esos tres problemas se presentan cuando:

- En una división el divisor es cero.
- En una raíz de índice par el radicando es negativo.
- En un logaritmo el argumento no es positivo.

Por lo tanto todos aquellos valores de x para los que sí se pueda realizar las operaciones formarán el conjunto dominio.

Ejemplo 2:

Sea la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - 9}$ ¿cuál es su dominio?

De las tres dificultades que se nos pueden presentar con las operaciones, en ésta la que aparece es la primera, puesto que en la división el divisor podría anularse, por ello es que planteamos

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \wedge x = -3$

Comentario

Sería conveniente tener los conceptos relacionados a intervalos, para ello puedes leer el anexo 1 al final de la unidad.

Esto quiere decir que para los valores 3 y –3 el denominador se anula, con lo que podría llevarse a cabo la operación. Con cualquier otro valor no se tendría problema, entonces el dominio de la función estaría formado por todos los números reales salvo el 3 y el –3. Eso puede escribirse:

$$Dom(f) = R - \{3, -3\}$$

O también

$$Dom(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

<u>Ejemplo 3:</u>

Sea la función $m(x) = \log(2x + 1)$ ¿cuál es su dominio?

En este caso la dificultad que se presenta es la tercera, ya que el argumento del logaritmo podría ser no positivo. Entonces planteamos:

$$2x + 1 > 0$$
$$2x > -1$$
$$x > -½$$

Por lo tanto tendríamos que los valores de x para los que sí se podría realizar la operación son todos aquellos mayores a ½.

Lo escribimos:

$$Dom(m) = (-½, \infty)$$

Obsérvese que en los ejemplos se ha procedido de modo diferente, ya que en el primero se buscaron los puntos que no están en el dominio y luego se le restó al conjunto de números reales, en cambio en el segundo directamente se encontró el conjunto de números para los que sí se puede operar. Es indistinto el trabajar de un modo o del otro y quedará a criterio del estudiante el planteo que desee realizar.

Para la determinación del conjunto Imagen lo primero que debemos realizar es escribir la variable x en función de la variable y, que es lo mismo que decir despejar x de la fórmula de la función. Una vez hecho eso, el procedimiento es el mismo que hicimos en el dominio, es decir teniendo en cuenta las tres dificultades con operaciones.

Ejemplo 4:

Sea la función $g(x) = 2x^2 – 8$ ¿cuál es el conjunto imagen?

Primero escribimos x en función de y

$$y = 2x^2 – 6$$

$$y + 6 = 2x^2$$

$$(y + 6): 2 = x^2$$

Por lo tanto $x = \sqrt{\frac{y}{2} + 3}$

Y ahora si observamos como quedó la fórmula, vemos que se nos presenta la segunda dificultad, respecto a la raíz, por lo que deberíamos plantear

$$y/2 + 3 \geq 0$$

$$y/2 \geq – 3$$

$$y \geq – 3 .2$$

Entonces el conjunto imagen sería: $Im(g) = [– 6, \infty)$

Clasificación de funciones

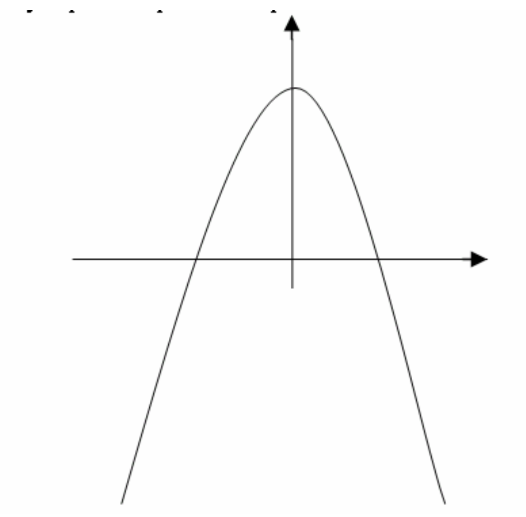
Como se verá unos pasos más adelante, toda función real puede representársela gráficamente en un plano, mediante una curva en un sistema de coordenadas. De acuerdo a la simetría que guarde la curva correspondiente, las funciones se pueden clasificar en *Pares*, *Impares* o simplemente *Sin paridad.*

Función Par

Función par es la que para valores opuestos de preimágenes corresponden iguales imágenes.

De otro modo f(x) es par si f(– x) = f(x)

La representación gráfica de una función par es una curva simétrica respecto al eje "y", por lo que corresponde a una simetría axial.



Glosario

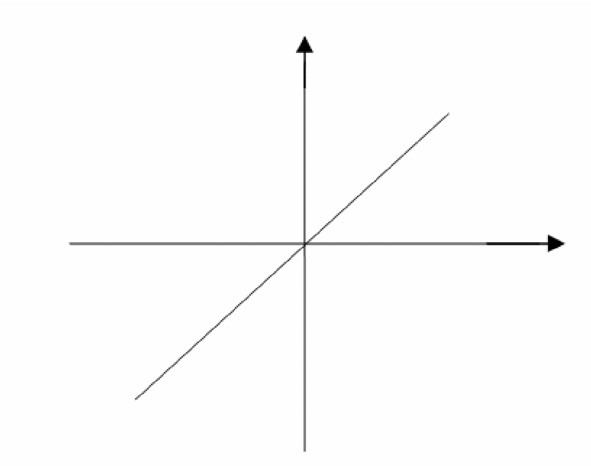
Hay otras clasificaciones de funciones, como por ejemplo inyectivas y suryectivas, pero al no necesitarlas no las estudiaremos. Si deseara conocer más busque el término biyectividad.

Función Impar

Función impar es aquella que para valores opuestos de preimágenes corresponden imágenes opuestas.

De otro modo $f(x)$ es impar si $f(-x) = -f(x)$

La representación gráfica de una función impar es una curva simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas, por lo que corresponde a una simetría central.



¿Cómo determinar la paridad de una función sin conocer su gráfica?

Lo más usual es que uno no conozca la representación gráfica de las funciones no elementales, y que deba hacerla. Para ello es de suma utilidad conocer la paridad, puesto que ahorraría la mitad del trabajo. Para saber si una función es par o impar se debe valuar la función en $-x$, y compararla con $f(x)$ ó con $-f(x)$.

Ejemplo 5:

¿Cuál es la paridad de $f(x) = x^3 - x$?

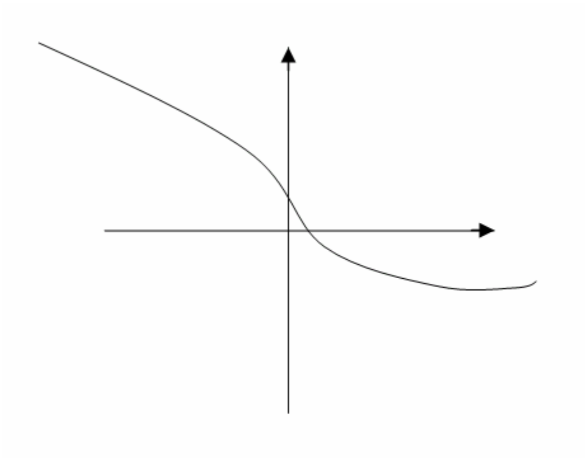
$f(-x) = (-x)^3 - (-x)$ $\quad\quad$ $-f(x) = -(x^3 - x)$

$f(-x) = -x^3 + x$ $\quad\quad$ $-f(x) = -x^3 + x$

$f(-x) \neq f(x)$ Esto nos indica que f no es par

$f(-x) = -f(x)$ Esto nos indica que f si es impar

Las funciones no necesariamente deben ser pares o impares, puede que no sean ni una ni la otra, en ese caso la llamamos *sin paridad*. Un ejemplo de ese tipo sería la función cuya gráfica es:

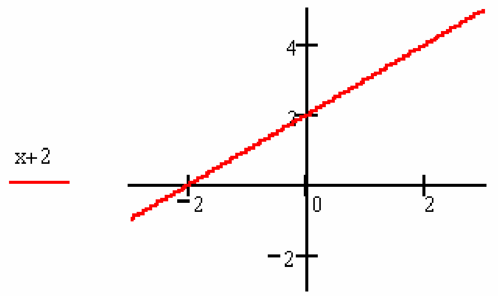


Representación gráfica de funciones

Todas las funciones reales de una variable pueden representarse gráficamente en el plano, mediante la utilización de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. En el eje horizontal, llamado de las abscisas, se representa al conjunto alcance, por lo que se le coloca el nombre de “eje x”; y en el eje vertical, llamado de las ordenadas, se representa al conjunto rango, por lo que se le asigna el nombre de “eje y”. La representación gráfica de la función está dada por el conjunto infinito de puntos del plano (x, y) para los que se cumple que y = f(x).

Ejemplo 6:

Sea la función f(x) = x + 2. Su representación gráfica será la curva del plano formada por los puntos (x, y) tales que y = x + 2.



Una idea

Si decimos que una función es par o impar, debemos demostrarlo; pero para hacerlo solo basta con mostrar un ejemplo que demuestre que la condición no se cumple.

Al realizar el gráfico de cualquier función, es conveniente conocer si existen las intersecciones de la curva con los ejes de coordenadas. La intersección con el eje "y", si la hay, debe ser un solo valor, ya que si se trata de una función no puede un valor de x tener dos imágenes. Ese punto de intersección se obtiene valuando la función en x = 0, por lo tanto el punto del plano es (0, f(0)).

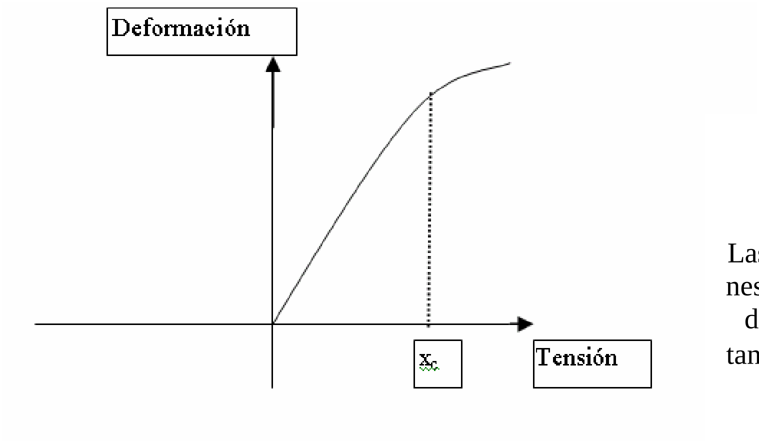
La intersección con eje "x" puede ser más de un punto, como así también ninguno. Corresponden a los puntos o valores de x que anulan a la función. Estos puntos reciben el nombre de ceros o raíces de la función. Entonces si f(m) = 0 quiere decir que m es un cero de la función, por lo que el corte con el eje "x" será el punto del plano (m, 0).

Funciones definidas por partes

En la mayoría de las relaciones entre magnitudes, la ley o fórmula que la rige no es una sola, sino que son diferentes según el intervalo que se considere.

Para entenderlo mejor, consideremos el siguiente ejemplo:

Al aplicar fuerzas en los extremos de un alambre para tensarlo, el mismo sufrirá deformaciones. En una primera etapa esas deformaciones serán proporcionales a la tensión, pero superado un valor crítico de tensión (x_c), la deformación varía de otra forma. Si se graficara la deformación en función de la tensión obtendríamos algo así:



Comentario

Las partes de este tipo de funciones, no necesariamente deben ser dos, pueden estar definidas en tantas partes como sea necesario.

Entonces si se quisiera escribir la función f(x) que relaciona la deformación con la tensión, habría que hacerlo de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} a(x) & \text{si } 0 < x < x_c \\ b(x) & \text{si } x > x_c \end{cases}$$

Es decir una fórmula rige la relación para valores menores a x_c y otra fórmula para los valores mayores a x_c.

Al valor de x o los valores de x en los cuales se produce el cambio de fórmula, en el ejemplo anterior x_c, se los denomina puntos de empalme. Una función podría tener tantos puntos de empalme como sea necesario.

A una función definida por partes, se le puede hacer el mismo estudio que las funciones comunes, solo que se deberá tener en cuenta el intervalo en el que rige cada fórmula, procediendo en cada una de ellas del modo habitual. Supongamos que queremos saber cuál es el dominio de la siguiente función:

<u>Ejemplo 7:</u>

¿Cuál es el dominio de h(x)?

$$h(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 + 3\sqrt{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Entonces analizamos cada parte por separado, y luego tendremos en cuenta el intervalo que corresponde a cada una.

La primera parte no presenta ninguna dificultad en las operaciones que intervienen, por lo que su dominio sería R. La segunda parte si presenta una dificultad, ya que aparece una raíz cuadrada, por lo que su dominio sería el conjunto de números reales mayores o iguales a cero.

Por lo tanto la primera parte aporta al domino todos los reales que sean menores o iguales a –1, y la segunda parte aporta los reales mayores o iguales a cero. El dominio de h(x) será:

$$\text{Dom}(h) = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

Si de la función h(x) quisiéramos conocer alguna imagen, solo sería necesario reemplazar la variable x por el número deseado, teniendo en cuenta a qué intervalo pertenece dicho valor x. Por ejemplo la imagen de $x = 1$

Glosario

Recuerde que cualquier operación, por ejemplo “$*$” cumple con la propiedad conmutativa si:

$A * B = B * A$

$1 > -1 \Rightarrow h(1) = 1 + 3\sqrt{1} \Rightarrow h(1) = 4$

Por ejemplo ¿cuál es el valor de h para x = –2?

$-2 < -1 \Rightarrow h(-2) = 2 - (-2) \Rightarrow h(-2) = 4$

Composición de funciones

La composición de funciones es una de las operaciones que se pueden realizar entre las funciones, como hacer una suma o un producto de ellas. Componer dos funciones significa valuar una de ellas en la otra, reemplazar en una función la variable x por la otra función. Por ejemplo, si tengo las funciones a(x) y b(x), componer a con b sería a(b(x)), que no es lo mismo que componer b con a: b(a(x)). Por lo que ya podemos asegurar que la composición de funciones no cumple con la propiedad conmutativa.

Ejemplo 8

Sean $f(x) = 2x^2 - 3$ $\quad g(x) = x + 3$

Hacer f(g(x)) sería:

$f(g(x)) = f(x + 3)$

$\mathbf{f(g(x)) = 2(x + 3)^2 - 3}$

Comentario

La composición, es una operación que se puede llevar a cabo entre más de dos funciones. El procedimiento es el mismo que para dos.

Hacer g(f(x)) sería:

$g(f(x)) = g(2x^2 - 3)$

$g(f(x)) = 2x^2 - 3 + 3$

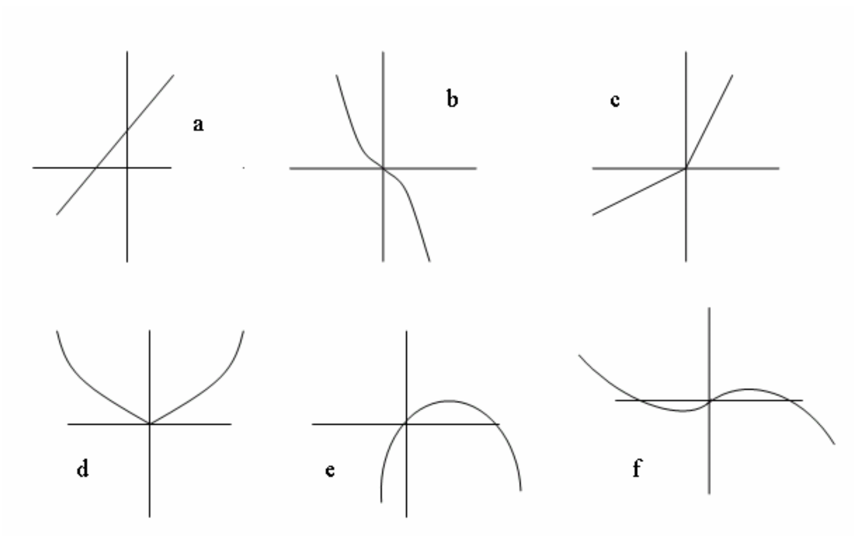
$\mathbf{g(f(x)) = 2x^2}$

En donde se puede observar claramente que $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Trabajo Práctico

<u>Ejercicio 10:</u>

A partir de los siguientes gráficos determine la paridad de las funciones representadas:



<u>Ejercicio 11:</u>

Clasifique las siguientes funciones según su paridad

$f(x) = 2\,(x + 1)^2$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 1}$ $\quad h(x) = x - x^3$

Ejercicio 12:

Realice la composición de las siguientes funciones, en cada punto, de todas las formas que sea posible:

a- $f(x) = 2 + x^2$ $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$

b- $f(x) = x^3$ $g(x) = x - 1$ $h(x) = 2.\sqrt{x+2}$

Ejercicio 13:

A partir de las siguientes funciones, encuentre dos y tres funciones respectivamente, que compuestas den por resultado la f(x) y la g(x).

$f(x) = 3 + \frac{1}{x}$ $g(x) = 5\sqrt{\frac{x+5}{2}}$

Respuestas

Ejercicio 10:

a) Sin paridad d) Par
b) Impar e) Sin paridad
c) Sin paridad f) Impar

Ejercicio 11:

f(x): Sin paridad g(x): Par h(x) : Impar

Ejercicio 12:

Una de las respuestas sería:

a) $g(f(x)) = 2 - \dfrac{3}{2+x^2}$

b) $h(g(f(x))) = 2.\sqrt{x^3+1}$