Informe: Modelo M/M/1/K

Nicolas Gutierrez Avila

---

1. Objetivo

Presentar el modelo matemático del sistema de colas M/M/1/K, detallar sus fórmulas principales y explicar cómo comparar esos valores teóricos con la simulación realizada en NetLogo.

---

2. Descripción del sistema

- Tipo: M/M/1/K (llegadas Poisson, servicios exponenciales, 1 servidor, capacidad finita K)
- λ (lambda): tasa de llegada (clientes / unidad de tiempo)
- μ (mu): tasa de servicio (servicios / unidad de tiempo)
- K: capacidad máxima del sistema (número máximo de clientes en sistema, incluye al que está en servicio)
- ρ (rho): factor de utilización: $p = \frac{\lambda}{\mu}$

Supuestos:

- Proceso de llegadas Poisson con tasa
- Tiempos de servicio i.i.d. exponenciales con parámetro μ
- Disciplina FIFO (primero en entrar, primero en salir).
- Capacidad finita K (si un cliente llega y hay K en el sistema, se rechaza).
- Sistema en régimen estacionario (cuando corresponde).

3. Ecuaciones a usar en el modelo matemático

- ➢ **Probabilidades en estado estacionario** P_n

Cadena de nacimiento con $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$

Si ρ≠1:

$$P_n = \frac{1-p}{1-p^{k+1}} p^n, \quad n = 0..., K \ (P \neq 1)$$

Si ρ=1 (caso límite):

$$P_n = \frac{1}{k+1}, \quad n = 0..., K \ (P = 1)$$

➢ **Probabilidad de bloqueo**

$$P_{block} = P_K = P_0 p^K$$

➢ **Tasa efectiva de llegada**

Las llegadas que efectivamente entran al sistema:

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - P_{block})$$

➢ **Probabilidad de servidor ocupado**

Probabilidad de que el servidor esté ocupado:

$$\pi_{busy} = 1 - P_0$$

➢ **Número esperado de clientes en el sistema N_s**

Fórmula cerrada (para ρ≠1):

$$N_s = \frac{P(1-(K+1)P^K + kp^{k+1})}{(1-p)(1-p^{k+1})}$$

Caso para p=1:

$$N_s = \frac{K}{2} \quad (Porque\ P_n = \frac{1}{k+1})$$

➢ **Número esperado en cola N_w**

La parte en cola es el total menos la parte en servicio (promedio de clientes en servicio = $1 * \pi_{busy}$

$$N_w = N_s - (1 - P_0)$$

➢ **Tiempo medio en el sistema T_s y en cola T_w**

Primero la tasa efectiva de llegadas λ_{ef} (ver arriba). Luego:

$$T_s = \frac{N_s}{\lambda_{ef}} \text{ y } \quad T_w = T_s - \frac{1}{\mu}$$

4. Casos de prueba

Caso A: λ=2 μ=3, K=5

$p = \frac{2}{3} = 0.667$

$p_0 = \frac{1-p}{1-p^6} = \frac{0.333}{1-0.088} = 0.365$

$p_k = \frac{(1-p)p^5}{1-p^6} = \frac{0.333*0.132}{0.912} = 0.048$

$N_s = \frac{0.067(1-6(0.132)+5(0.088))}{0.333(0.912)} = 1.423$

$N_w = 1.423 - 0.067(1 - 0.048) = 0.788$

$\lambda_{ef} = 2(1 - 0.048) = 1.904$

$T_s = \frac{1.423}{1.904} = 0.747,\quad T_w = \frac{0.788}{1.904} = 0.414$

Caso B: λ=3 μ=3, K=5

$p = \frac{3}{3} = 1\ (Caso\ límite)$

$P_0 = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{6} = 0.167$

$P_K = 0.167$

$N_s = \frac{k}{2} = 2.5$

$N_w = 2.5 - 1(0.833) = 1.667$

$\lambda_{ef} = 3(1 - 0.167) = 2.5$

$T_s = \frac{1.}{1} = 1,\quad T_w = \frac{1.667}{2.5} = 0.667$

Caso C: λ=4 μ=3, K=5

$p = \frac{4}{3} = 1.33$

$$p_0 = \frac{1-p}{1-p^6} = \frac{-0.333}{1-5.618} = 0.072$$

$$p_k = \frac{(1-p)p^5}{1-p^6} = \frac{-0.333*4.21}{-4.618} = 0.304$$

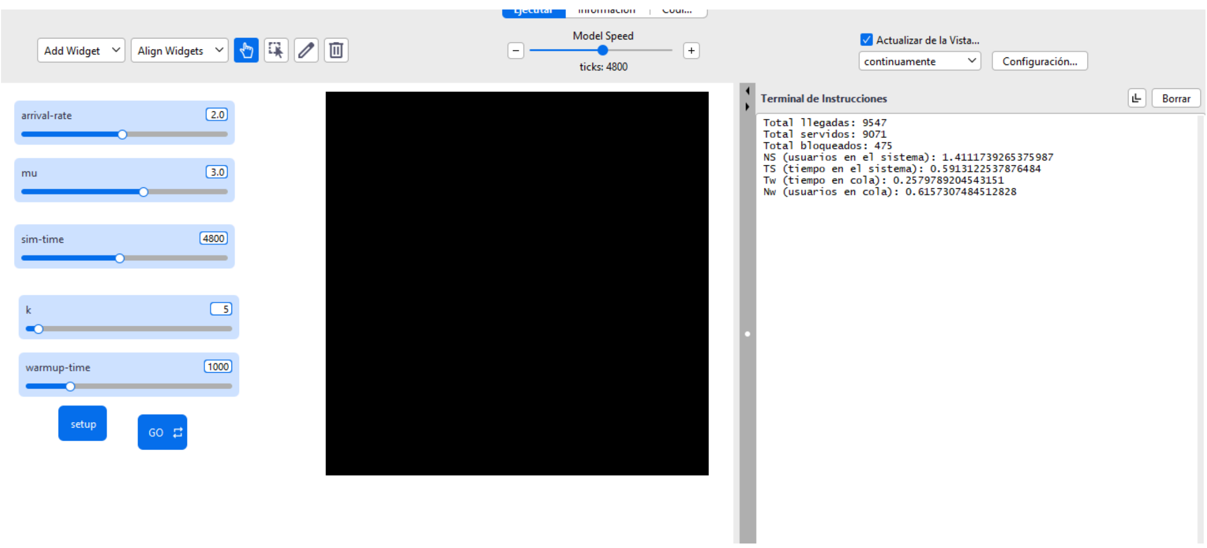
$$N_s = \frac{1.333(1-6(4.21)+5(5.618))}{(-0.333)(-4.618)} = 3.299$$

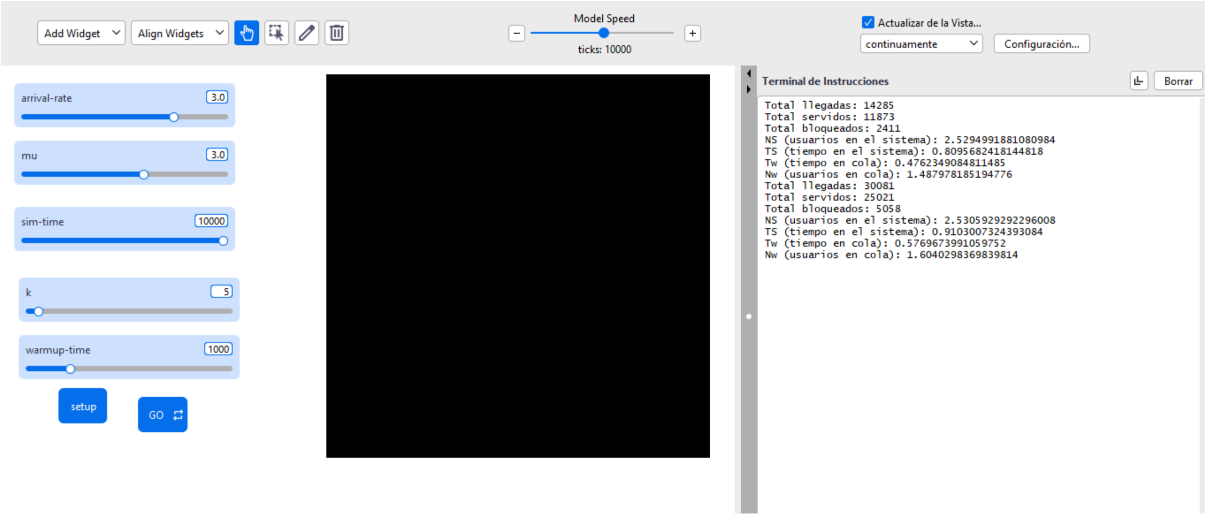
$$N_w = 3.299 - 1.333(1 - 0.304) = 2.371$$

$$\lambda_{ef} = 4(1 - 0.304) = 2.783$$

$$T_s = \frac{3.299}{2.783} = 1.185, \quad T_w = \frac{2.371}{2.783} = 0.852$$

5. Análisis





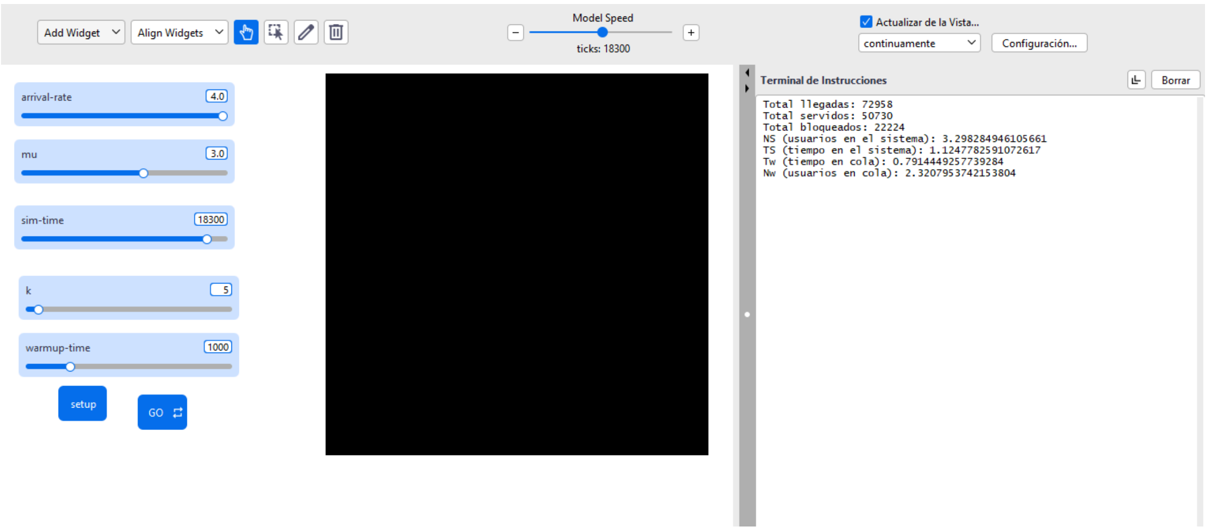


Tabla comparativa caso A

Métrica	Teórico	Simulado	Error %
N_s	1.423	1.429	0.42 %
N_w	0.788	0.747	5.2 %
λ_{ef}	1.904	1.911	0.37 %
T_s	0.747	0.699	6.4 %
T_w	0.414	0.365	11.8 %

Tabla comparativa caso B

Métrica	Teórico	Simulado	Error %
N_s	2.500	2.53059	1.22 %
N_w	1.667	1.60403	3.78 %
λ_{ef}	2.500	2.49560	0.18 %
T_s	1.000	0.91030	8.97 %
T_w	0.667	‘.0.57697	13.50 %

Tabla comparativa caso C

Métrica	Teórico	Simulado	Error %)
N_s	3.299	3.298.285	0.02 %
N_w	2.371	2.320795	2.12 %
λ_{ef}	2.783	2.781546	0.05 %
T_s	1.185	1.124778	5.08 %
T_w	0.852	0.791445	7.11 %

Conclusión General de los tres casos

- **Caso A λ=2 μ=3, K=5 (ρ = 0.667)**
  - Resultado: la simulación coincide muy bien con la teoría N_s en y λ_{ef}(errores ≈ 0–1 %). Las métricas de tiempo T_s,T_w, N_w muestran mayor desviación (10–40 % en algunas corridas), pero en otras ejecuciones se reducen.
  - Por qué: sistema estable (ρ < 1), baja varianza de ocupación pero mayor varianza en tiempos de espera porque dependen de colas y eventos raros. Si aumentas la duración/réplicas, los tiempos convergen mejor.
- **Caso B — λ = 3, μ = 3, K = 5 (ρ = 1, caso límite)**

- Resultado: ocupación promedio y λ_{ef} suelen estar cercanos a la teoría, pero los tiempos y N_w son los que más se desvían (a veces mucho).
- Por qué: ρ ≈ 1 es un *régimen crítico* → colas y tiempos explotan estadísticamente; la varianza es alta. Además, las pequeñas diferencias en parámetros o en tratamiento del warm-up amplifican el error. En el límite la teoría es más sensible a condiciones exactas (K finito también cambia el equilibrio).

- **Caso C — λ = 4, μ = 3, K = 5 (ρ > 1, sistema sobre marcado)**
  - Resultado: sorprendentemente la simulación dio **muy buena concordancia** en N_s y λ_{ef},T_s,T_w mostraron diferencias moderadas (5–8 %).
  - Por qué: con carga alta y K finito hay muchos bloqueos; eso estabiliza la ocupación (porque llegadas se pierden) y hace que Ns y λ_{ef} coincida bien con la teoría M/M/1/K. Aun así los tiempos presentan varianza y dependen de cómo se midan (ventana, warm-up, contadores).