Sistemas de Ecuaciones y Matrices

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 9 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -7 \\ x \qquad + 2z = 7 \\ x + 3y + \ \ z = -2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x + 5y + 7z = 0 \\ -x + 6y + 3z = 0 \\ 7x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + \ \ y - 6z = 21 \\ 5x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + 7y + \ \ z = 10 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x - 4y = -2 \\ -5x + 3y = -7 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x - 3y = -19 \\ 4x + 5y = 17 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = 2 \\ -x + 2y + \ \ z = -1 \\ -x + 4y + 5z = 2 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x - \ \ y + 2z = -3 \\ 4x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 2y - 4z = 6 \end{cases}$

2. En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo.

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

3. Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes estudiando sus soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

4. Hallar matrices reducidas por filas, asociadas a cada sistema del Ejercicio 1).

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Reduciendo A por filas,

   a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

   b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,
   a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
   b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

8. Dar todas las posibles matrices 2×2 escalón reducidas por filas.

9. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícitamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

   $a)\ \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 3z = 0 \end{cases}$

10. Demostrar que las siguientes matrices no son equivalentes por filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

11. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(2, 7)$ y $(3, 14)$.

12. Hallar un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que el conjunto de todas sus soluciones sea $\{(1 - t, 2 + t, 3 + 2t) : \ t \in \mathbb{R}\}$.

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar para cuales a, el sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ admite solución. Para esos valores de a, calcular todas las soluciones del sistema.

14. ¿Para qué valores de a el siguiente sistema tiene única o infinitas soluciones?

$$\begin{cases} ax - y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + (2 - a)z = 4a \end{cases} \tag{1}$$

15. Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2) o (b_1, b_2, b_3) para los cuales cada sistema tiene solución

$a)$ $\begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x + 2y = b_2 \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} 2x - y + z = b_1 \\ 3x + y + 4z = b_2 \\ -x + 3y + 2z = b_3 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} x - y + 2z + w = b_1 \\ 2x + 2y + z - w = b_2 \\ 3x + y + 3z = b_3 \end{cases}$

16. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

   $a)$ Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

   $b)$ Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

17. Probar que si un sistema homogéneo, $AX = 0$, posee soluciones no triviales, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

Ejercicios Adicionales

1. Hallar una matriz reducida por filas que sea equivalente por filas a

$$A = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Dar todas las posibles matrices 2×3 escalón reducidas por filas.

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   $a)$ Dos matrices 3×3 escalón reducidas por filas que tienen la misma cantidad de unos son iguales.

   $b)$ Sean A una matriz 5×4 e $Y \neq 0$. Si $AX = Y$ tiene una única solución, entonces $AX = 0$ tiene una solución no trivial.

   $c)$ Sean A una matriz 5×4 e $Y \neq 0$. Si $AX = Y$ no tiene solución, entonces $AX = 0$ tiene solo la solución trivial.

   $d)$ Sean A una matriz 4×5 e $Y \neq 0$. El sistema $AX = Y$ tiene solución si y sólo si el sistema $AX = 0$ tiene solución.

   $e)$ Sean A una matriz 5×5 e $Y \neq 0$. El sistema $AX = Y$ tiene solución exactamente cuando $AX = 0$ tiene una solución no trivial.

   $f)$ Si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones diferentes entonces tiene infinitas soluciones diferentes.