

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**NUMERIČKA ANALIZA KONSTRUKCIJA  
IM (A)  
programske zadatke**

*prof. dr. sc. Zdenko Tonković, dipl. ing.*

*Marin Vukovojac, mag. ing. mech.*

**Student:**

Denis Meštrović  
0035214226  
4-INŽMOD

*Denis Meštrović*

**Zagreb, lipanj 2021.**

## **Sadržaj**

1.	Prvi zadatak .....	1
2.	Drugi zadatak .....	18
3.	Treći zadatak .....	34
4.	Četvrti zadatak.....	40
5.	Peti zadatak .....	46
6.	Šesti zadatak.....	56
7.	Literatura .....	60

## Popis slika

Slika 1. Varijator .....	1
Slika 2. Gonjeno vratilo – raspodjela opterećenja za maksimalni prijenosni omjer .....	2
Slika 3. Gonjeno vratilo – raspodjela nazivnih naprezanja za maksimalni prijenosni omjer ..	3
Slika 4. Gonjeno vratilo – raspodjela opterećenja za minimalni prijenosni omjer .....	3
Slika 5. Gonjeno vratilo – raspodjela nazivnih naprezanja za minimalni prijenosni omjer....	4
Slika 6. Izoparametarski 3D-element s 10 čvorova i 30 stupnjeva slobode [6] .....	5
Slika 7. Partitioniran model vratila.....	8
Slika 8. Elastični temelji.....	9
Slika 9. Opterećenja i rubni uvjeti na gonjenom vratilu .....	10
Slika 10. Početna mreža s 19392 C3D10 elemenata .....	10
Slika 11. Konačna mreža s 386209 C3D10 elemenata .....	11
Slika 12. Grafički prikaz konvergencije ključnih veličina .....	12
Slika 13. Prikaz slabije umreženih detalja u jednom od međukoraka koji rezultiraju pretjeranim vrijednostima vršnog naprezanja.....	13
Slika 14. Raspodjela naprezanja (u MPa) za mrežu s heksaedarskim elementima.....	14
Slika 15. Detalj raspodjele naprezanja (u MPa) na kritičnom dijelu pogonskog vratila za konvergirano rješenje dobiveno adaptivnim umrežavanjem.....	15
Slika 16. Raspodjela pomaka (u mm) za konvergiranu mrežu.....	16
Slika 17. Detalj raspodjele naprezanja (u MPa) na kritičnom dijelu pogonskog vratila za mrežu s heksaedarskim elementima .....	17
Slika 18. Osnovni četverokutni izoparametrijski element [6].....	19
Slika 19. Sklop u Solidworksu .....	20
Slika 20. Osnovne dimenzije profila [7] .....	21
Slika 21. Dimenzije profila ovisne o metodi izrade [7] .....	21
Slika 22. Sklop u modulu Assembly .....	23
Slika 23. Kontakti definirani u modulu Interaction.....	25
Slika 24. Opterećenja i rubni uvjeti pomaka .....	26

Slika 25. Mreže od: a) 10496, b) 24037 i c) 36269 elemenata.....	27
Slika 26. Grafički prikaz konvergencije vršnih naprezanja .....	28
Slika 27. Raspodjela naprezanja (u MPa) – cijeli sklop.....	29
Slika 28. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za klinasto vratilo oblika A...	30
Slika 29. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za klinasto vratilo oblika B ...	31
Slika 30. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za gonjeni zupčanik .....	32
Slika 31. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za pogonski zupčanik.....	33
Slika 32. Raspodjela naprezanja (u MPa) – neopterećene uzubine.....	33
Slika 33. Zadana konfiguracija – puna linija označava uklještenje, crtkana slobodno oslonjen rub [11] .....	34
Slika 34. Dvostruko zakrivljeni četverokutni ljkastki konačni element drugog reda [13] ...	35
Slika 35. Opterećenja i rubni uvjeti pomaka zadani na četvrtinskom modelu ploče .....	36
Slika 36. Mreže od: a) 2, b) 15, c) 115, d) 448 i e) 10920 elemenata .....	37
Slika 37. Grafički prikaz konvergencije progiba točke 1 .....	38
Slika 38. Raspodjela progiba (u mm) po četvrtini ploče .....	39
Slika 39. Rubni uvjeti pomaka zadani na punoj geometriji ploče.....	41
Slika 40. Mreže od: a) 15, b) 45, c) 448, d) 1736 i e) 43680 elemenata .....	42
Slika 41. Grafički prikaz konvergencije prve vlastite frekvencije ploče .....	43
Slika 42. Oblik prve forme vibriranja s preuveličanim deformacijama .....	44
Slika 43. Amplitudna karakteristika ploče .....	45
Slika 44. Zadana konfiguracija grede [11] .....	46
Slika 45. Osnovni štapni element [16] .....	47
Slika 46. Osnovni gredni element [16].....	49
Slika 47. Osnovni štapni element opterećen na uvijanje [16] .....	51
Slika 48. Rubni uvjet pomaka dodijeljen gredi .....	53
Slika 49. Mreže od 2 (gore), 30 (sredina) i 3000 (dolje) B33 elemenata .....	53
Slika 50. Konvergencija prve vlastite torzijske frekvencije grede .....	54

Slika 51. Konvergencija prve vlastite fleksijske frekvencije grede .....	55
Slika 52. Oblik prve fleksijske forme vibriranja grede .....	55
Slika 53. Rubni uvjet pomaka dodijeljen gredi i narinuto opterećenje .....	58
Slika 54. Konvergencija kritične sile izvijanja grede.....	59
Slika 55. Prva forma izvijanja grede .....	59

## Popis tablica

Tablica 1. Kontaktni tlakovi na ležajnim mjestima.....	5
Tablica 2. Svojstva odabranog materijala .....	8
Tablica 3. Konvergencija naprezanja i pomaka za adaptivno umrežavanje.....	12
Tablica 4. Dimenzije profila (u mm) [7] .....	21
Tablica 5. Svojstva odabranih materijala [9] .....	24
Tablica 6. Konvergencija vršnih naprezanja na klinastim vratilima i korijenima zuba zupčanika .....	27
Tablica 7. Zadane karakteristike ploče [11] .....	34
Tablica 8. Konvergencija progiba točke 1.....	38
Tablica 9. Dodatne veličine zadane u četvrtom zadatku [11] .....	40
Tablica 10. Konvergencija prve vlastite frekvencije ploče .....	43
Tablica 11. Zadane karakteristike grede [11, 15].....	46
Tablica 12. Konvergencija prvih vlastitih frekvencija grede .....	54
Tablica 13. Konvergencija kritične sile izvijanja.....	58

## Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$\text{mm}^2$	površina poprečnog presjeka,
$a$	mm	duljina ploče,
$a_g$	/	matrica identifikacije,
$B$	$\text{mm}^{-1}$	matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i čvornih pomaka,
$b$	mm	širina ploče,
$b_1$	mm	širina klina klinastog vratila,
$b_2$	mm	širina utora glavine klinastog vratila,
$C$	$\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{mm}^{-1}$	matrica prigušenja,
	$\text{mm}^{-1}$	matrica ograničenja,
$D$	MPa	matrica elastičnosti,
$D$	$\text{N}\cdot\text{mm}$	konstanta elastičnosti ploče,
$D_k$	$\text{mm}^{-1}$	kinematička matrica,
$D_F$	mm	promjer steznog spoja,
$d$	mm	promjer,
$d_1$	mm	karakteristični promjer klinastog vratila,
$d_2$	mm	karakteristični promjer klinastog vratila,
$d_3$	mm	karakteristični promjer glavine klinastog vratila,
$d_4$	mm	karakteristični promjer glavine klinastog vratila,
$d_{5min}$	mm	karakteristični promjer klinastog vratila,
$E$	MPa	modul elastičnosti,
$e_{max}$	mm	karakteristična dimenzija presjeka klinastog vratila,
$F$	N	vektor koncentriranih čvornih sila,
$F$	N	sila,
$\tilde{F}$	/	faktor kritične sile,

$F_{kr}$	N	kritična sila izvijanja,
$\mathbf{F}_s$	N	vektor površinskih sila elementa,
$\mathbf{F}_V$	N	vektor volumenskih sila elementa,
$\mathbf{F}_{\epsilon 0}$	N	vektor sila izazvanih početnim deformacijama,
$f$	Hz	frekvencija,
$f_1$	Hz	prva vlastita frekvencija,
$f_{1aksijalno}$	Hz	prva aksijalna vlastita frekvencija,
$f_{1aksijalnoR}$	Hz	ručno izračunata prva aksijalna vlastita frekvencija,
$f_{1analitički}$	Hz	analitički izračunata prva vlastita frekvencija,
$f_{1fleksijska}$	Hz	prva fleksijska vlastita frekvencija,
$f_{1fleksijskaR}$	Hz	ručno izračunata prva fleksijska vlastita frekvencija,
$f_{1numerički}$	Hz	numerički izračunata prva vlastita frekvencija,
$f_{1torzijski}$	Hz	prva torzijska vlastita frekvencija,
$f_{1torzijskiR}$	Hz	ručno izračunata prva torzijska vlastita frekvencija,
$f_{2aksijalnoR}$	Hz	ručno izračunata druga aksijalna vlastita frekvencija,
$f_{2fleksijskaR}$	Hz	ručno izračunata druga fleksijska vlastita frekvencija,
$f_{2torzijskiR}$	Hz	ručno izračunata druga torzijska vlastita frekvencija,
$f_{3fleksijskaR}$	Hz	ručno izračunata treća fleksijska vlastita frekvencija,
$f_{4fleksijskaR}$	Hz	ručno izračunata četvrta fleksijska vlastita frekvencija,
$f_{min}$	mm	karakteristična dimenzija presjeka klinastog vratila,
$g$	$m \cdot s^{-2}$	ubrzanje sile teže,
$g_{max}$	mm	karakteristična dimenzija presjeka klinastog vratila,
$h$	mm	karakteristična dimenzija presjeka klinastog vratila,
	mm	debljina ploče,
$I$	$mm^4$	moment tromosti,
$I_p$	$mm^4$	polarni moment tromosti,
$i$	/	prijenosni omjer,

	mm	radijus tromosti,
<b>J</b>	/	Jacobijeva matrica,
<b>K</b>	N·mm <sup>-1</sup>	globalna matrica krutosti,
<b>K<sub>g</sub></b>	N·mm <sup>-1</sup>	matrica geometrijske krutosti,
<b>k</b>	N·mm <sup>-1</sup>	matrica krutosti,
<i>k</i>	mm	širina skošenja na utoru glavine klinastog vratila,
<b>k<sub>g</sub></b>	N·mm <sup>-1</sup>	matrica geometrijske krutosti elementa,
	N·mm <sup>-1</sup>	matrica krutosti elementa u globalnom koordinatnom sustavu,
<b>L</b>	mm	duljina,
<i>l</i>	mm	duljina elementa,
<i>l<sub>0</sub></i>	mm	efektivna duljina,
<b>M</b>	kg	dijagonalna matrica masa,
<b>M<sub>s</sub></b>	N·mm	savojni moment,
<b>M<sub>t</sub></b>	N·mm	moment torzije,
<b>m</b>	kg	matrica mase elementa,
<i>m</i>	mm	modul ozubljenja,
<b>N</b>	/	matrica funkcija oblika,
<i>N</i>	N	aksijalna sila,
<i>N<sub>i</sub></i>	/	funkcija oblika za <i>i</i> -ti čvor,
<i>n</i>	/	broj elemenata,
<i>P<sub>max</sub></i>	µm	maksimalni preklop,
<i>p</i>	MPa	tlak,
<i>p<sub>0</sub></i>	MPa	kontinuirano opterećenje po površini ploče,
<i>p<sub>Fmax</sub></i>	MPa	maksimalni pritisak uslijed steznog spoja,
<b>Q</b>	mm	vektor konstanti,
<b>Q<sub>V</sub></b>	/	geometrijska karakteristika debelostjene cijevi,
<b>R</b>	N	vektor čvornih sila sustava,

$r$	N	vektor čvornih sila elementa,
$r_{1\max}$	mm	maksimalno dopušteno zaobljenje prijelaza klinastog vratila oblika B,
$r_{3\max}$	mm	maksimalno dopušteno zaobljenje prijelaza utora za klinasto vratilo,
$r_g$	N	vektor čvornih sila elementa u globalnom koordinatnom sustavu,
$S$	/	faktor sigurnosti,
	MPa	naprezanje (von Mises),
$T$	/	matrica transformacije,
$t$	/	vektor zadovoljenja kinematskih ograničenja,
$t$	s	vrijeme,
$U$	J	energija deformiranja,
	mm	pomak,
$U^*$	J	uprosječena energija deformiranja,
$U_E$	J	greška energije deformiranja,
$U_{\max}$	mm	maksimalni pomak,
$u$	mm	pomak u $x$ -smjeru,
$u_x$	mm	pomak u $x$ -smjeru,
$u_y$	mm	pomak u $y$ -smjeru,
$u_z$	mm	pomak u $z$ -smjeru,
$u_\varphi$	mm	pomak u tangencijalnom smjeru,
$V$	mm	vektor čvornih pomaka,
$V_0$	mm	globalni vektor pomaka u početnom trenutku,
$V_{At}$	mm	vremenski integriran globalni vektor pomaka,
$v$	mm	vektor čvornih pomaka elementa,
$v$	mm	pomak u $y$ -smjeru,
$\bar{v}$	mm	vektor amplituda čvornih pomaka,

$v_g$	mm	vektor čvornih pomaka elementa u globalnom koordinatnom sustavu,
$w$	mm	pomak u $z$ -smjeru,
$w_{analitički}$	mm	analitički izračunat pomak u $z$ -smjeru,
$w_{numerički}$	mm	numerički izračunat pomak u $z$ -smjeru,
$x$	mm	uzdužna koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu,
$y$	mm	poprečna koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu,
$z$	mm	poprečna koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu,
	mm	koordinata moda,
$\alpha$	J	dijagonalna matrica <i>penalty</i> brojeva,
$\varepsilon$	/	relativna greška,
$\varepsilon_{aksijalno}$	/	relativna greška aksijalne vlastite frekvencije,
$\varepsilon_{fleksijski}$	/	relativna greška fleksijske vlastite frekvencije,
$\varepsilon_{torzijski}$	/	relativna greška torzijske vlastite frekvencije,
$\zeta$	mm	koordinata u prirodnom koordinatnom sustavu elementa,
$\eta$	mm	koordinata u prirodnom koordinatnom sustavu elementa,
	/	relativna greška energije deformiranja,
$\eta_s$	/	srednja relativna greška energije deformiranja,
$\eta_{max}$	/	maksimalna relativna greška energije deformiranja,
$\eta_{min}$	/	minimalna relativna greška energije deformiranja,
$\lambda$	/	vitkost,
$\lambda_{11}$	/	karakteristika geometrije i rubnih uvjeta,
$\lambda_p$	/	granična vitkost,
$\nu$	/	Poissonov faktor,
$\xi$	mm	koordinata u prirodnom koordinatnom sustavu elementa,
$\zeta$		prigušenje,

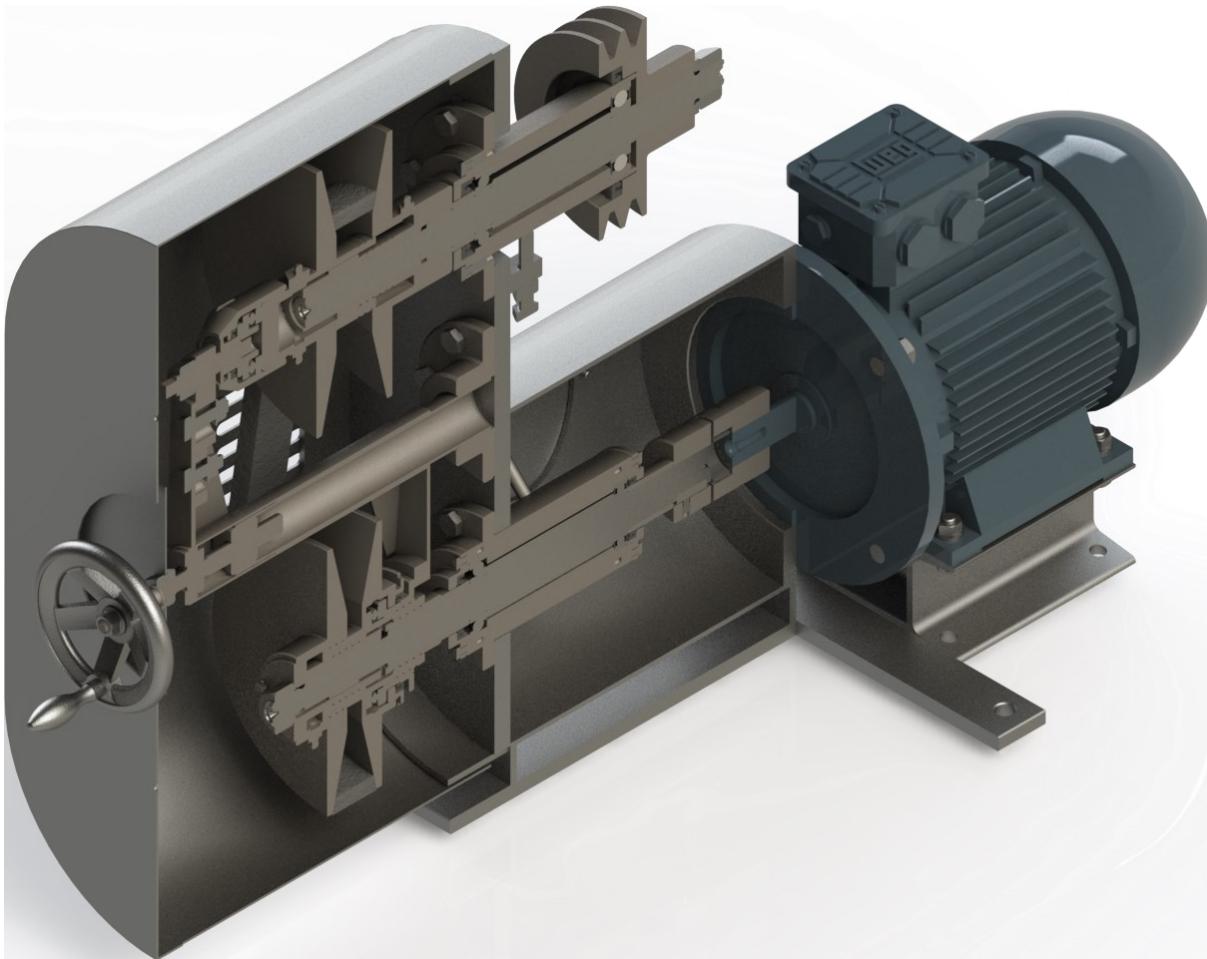
$\Pi$	J	ukupna potencijalna energija,
$\pi^*$	J	ukupna potencijalna energija s uračunatim kinematskim ograničenjima,
$\rho$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	gustoća,
$\sigma$	MPa	matrica naprezanja
$\sigma^*$	MPa	matrica uprosječenih naprezanja
$\sigma$	MPa	naprezanje
$\sigma_A$	MPa	vršno naprezanje na klinastom vratilu oblika A
$\sigma_{Ak}$	MPa	vršno naprezanje korijena zuba zupčanika uležištenog na klinastom vratilu oblika A
$\sigma_B$	MPa	vršno naprezanje na klinastom vratilu oblika B
$\sigma_{Bk}$	MPa	vršno naprezanje korijena zuba zupčanika uležištenog na klinastom vratilu oblika B
$\sigma_{bADK}$	MPa	efektivno savojno naprezanje s uračunatim zareznim djelovanjem
$\sigma_{dop}$	MPa	dopošteno naprezanje
$\sigma_E$	MPa	matrica greške naprezanja
$\sigma_{ekv}$	MPa	ekvivalentno naprezanje (von Mises)
$\sigma_{kr}$	MPa	kritično naprezanje izvijanja
$\sigma_{max}$	MPa	vršno naprezanje
$\sigma_n$	MPa	naprezanje uslijed aksijalne sile
$\sigma_s$	MPa	savojno naprezanje
$\tau$	MPa	smično naprezanje
$\tau_t$	MPa	smično naprezanje uslijed torzije
$\varphi_x$	/	zakret po x-osi
$\varphi_y$	/	zakret po y-osi
$\varphi_z$	/	zakret po z-osi
$\mathcal{Q}$	MPa	funkcija pobude ploče
$\omega$	$\text{s}^{-1}$	kružna frekvencija

$\omega_1$	$s^{-1}$	prva vlastita kružna frekvencija
$\omega_{1aksijalno}$	$s^{-1}$	prva vlastita aksijalna kružna frekvencija
$\omega_{1aksijalnoR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata prva vlastita aksijalna kružna frekvencija
$\omega_{1fleksijski}$	$s^{-1}$	prva vlastita fleksijska kružna frekvencija
$\omega_{1fleksijskiR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata prva vlastita fleksijska kružna frekvencija
$\omega_{1torzijska}$	$s^{-1}$	prva vlastita torzijska kružna frekvencija
$\omega_{1torzijskaR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata prva vlastita torzijska kružna frekvencija
$\omega_{2aksijalnoR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata druga vlastita aksijalna kružna frekvencija
$\omega_{2fleksijskiR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata druga vlastita fleksijska kružna frekvencija
$\omega_{2torzijskiR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata druga vlastita torzijska kružna frekvencija
$\omega_{3fleksijskiR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata treća vlastita fleksijska kružna frekvencija
$\omega_{4fleksijskiR}$	$s^{-1}$	ručno izračunata četvrta vlastita fleksijska kružna frekvencija

## 1. Prvi zadatak

Za konstrukcijski dio proizvoljne geometrije, opterećenja i rubnih uvjeta potrebno je provesti adaptivnu analizu i komentirati rezultate. Pri tome treba voditi računa o tome da geometrija, opterećenja i rubni uvjeti budu smisleni.

U sklopu ovog zadatka provedena je numerička analiza gonjenog vratila rekonstruiranog varijatora smještenog u Laboratoriju za elemente strojeva. Na Slici 1. prikazan je sklop varijatora s gonjenim vratilom smještenim iznad elektromotora.

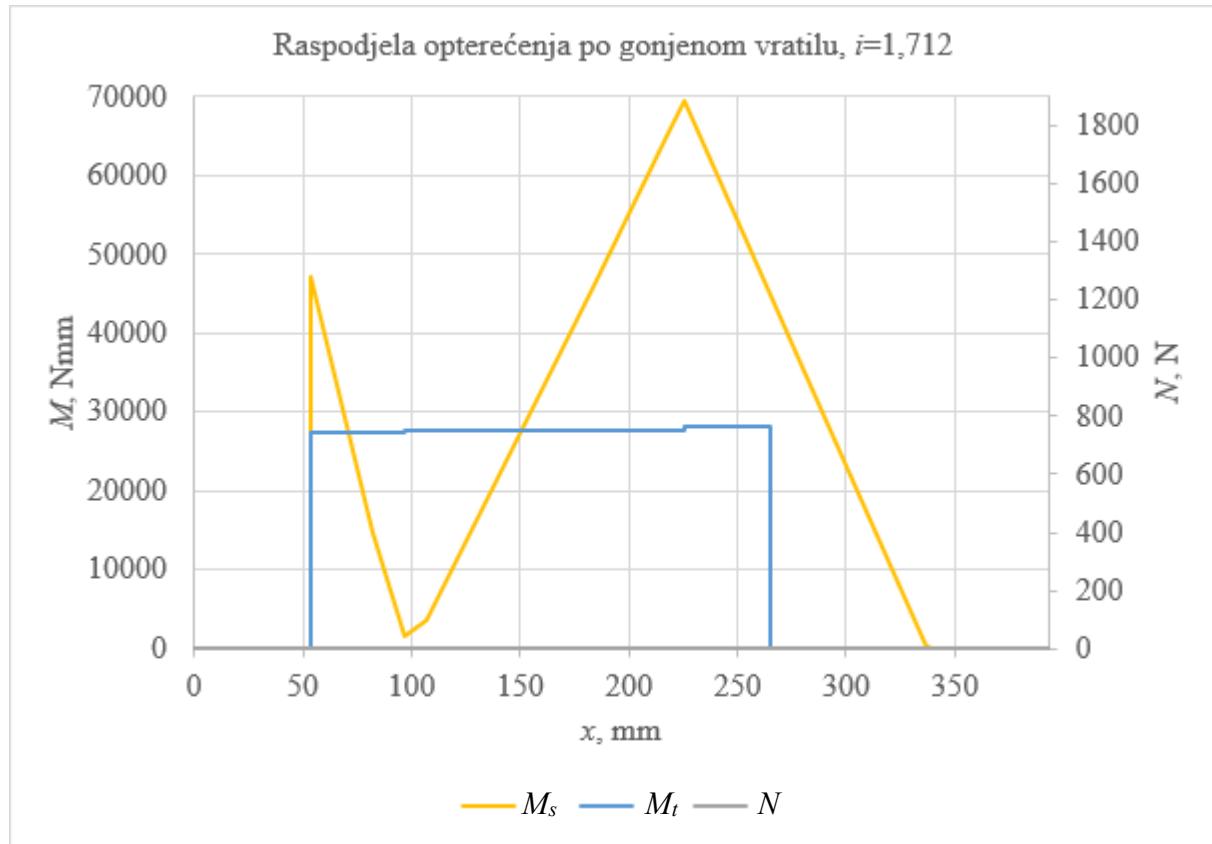


Slika 1. Varijator

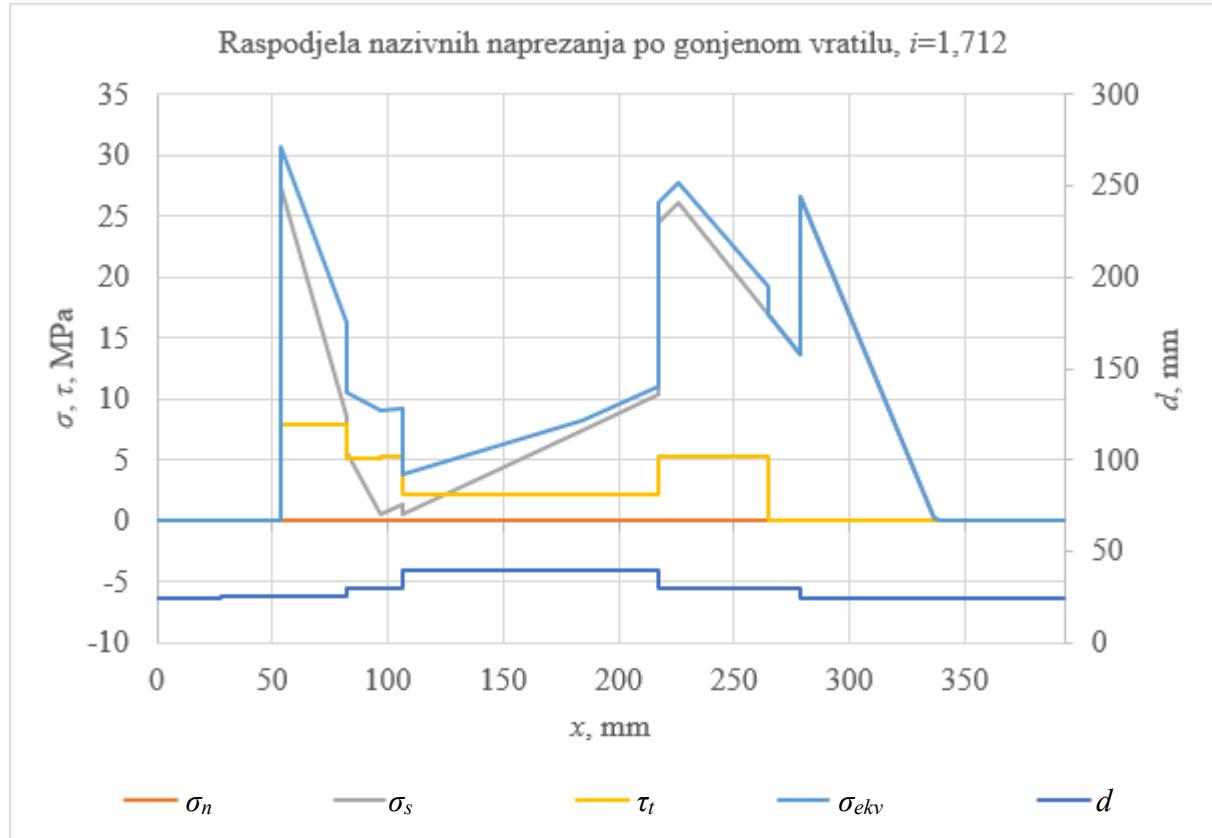
Vratilo je naprije proračunato po [1].

Analitički kontrolni proračun gonjenog vratila proveden je po [1] s faktorima koncentracije naprezanja po [2] i svojstvima materijala po [3]. Proračun je proveden s pretpostavkom konstantnog okretnog momenta, jer su promjene u okretnom momentu na gonjenom vratilu uslijed promjene prijenosnog omjera relativno spore (dovršene u više okretaja) i ne pokazuju faznu podudarnost sa savojnim naprezanjima, zbog čega se ni ne mogu uključiti u analitički proračun.

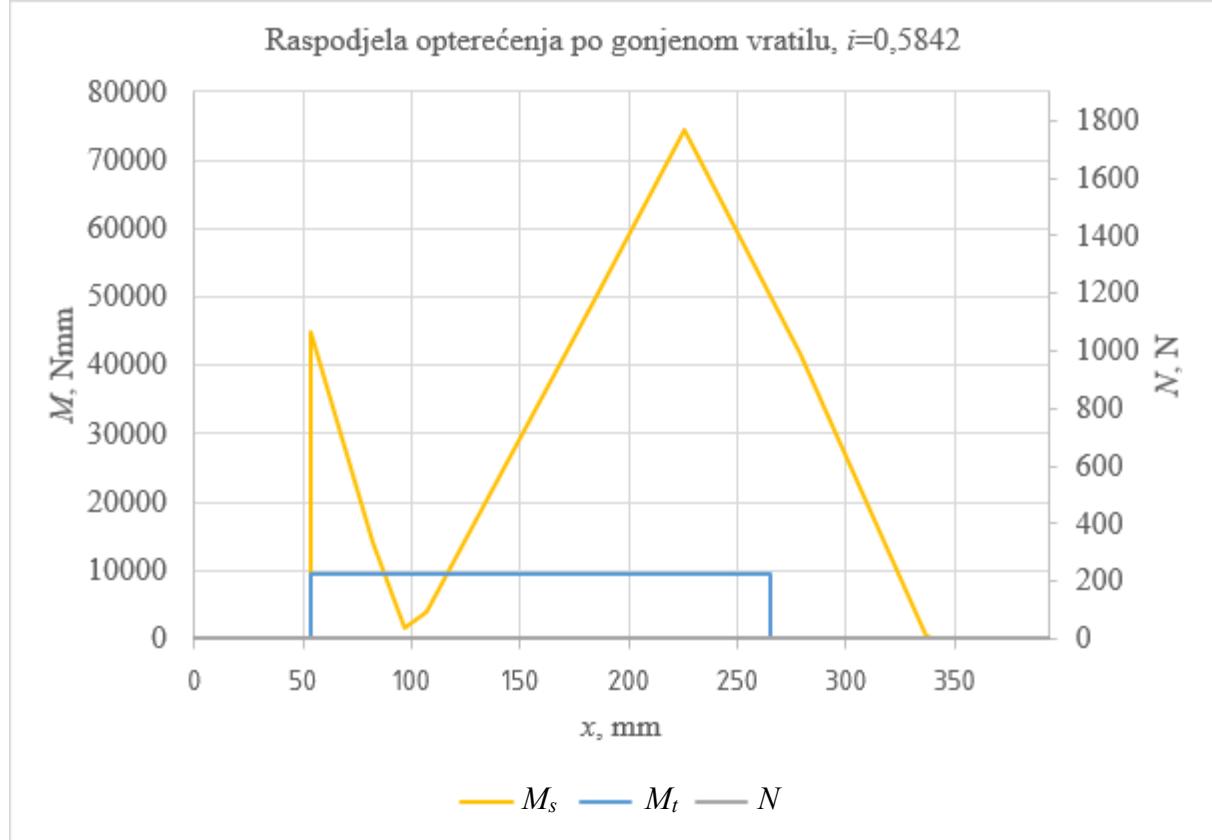
Za gonjeno vratilo su od opterećenja uzete u obzir težina izlazne remenice i sile izlaznog remenskog prijenosa za najnepovoljniju orijentaciju izlaznog remenskog prijenosa, pri čemu je pripadno opterećenje modelirano kao da djeluje u središtu izlaznog pera, s koncentriranim momentom zbog paralelnog pomaka sile. Također je uzeta u obzir težina samog vratila i težina svih ostalih elemenata montiranih na vratilo, izuzevši ležajeve i brtve. Opterećenja uslijed varijatorskog remenskog prijenosa i gubici momenta na ležajevima procijenjeni su na temelju iskustvenih vrijednosti po [4] i [5]. Za potrebe analitičkog proračuna svi momenti i sve sile su modelirane kao da djeluju u točki, odnosno presjeku, umjesto raspodjele tlaka ili površinskog smičnog naprezanja. Raspodjele nominalnih opterećenja i naprezanja po gonjenom vratilu pri nižoj (kritičnoj) brzini vrtnje elektromotora prikazane su Slikama 2., 3., 4. i 5. Za lakšu vizualizaciju dana je i kontura vratila s raspodjelama nazivnih naprezanja.



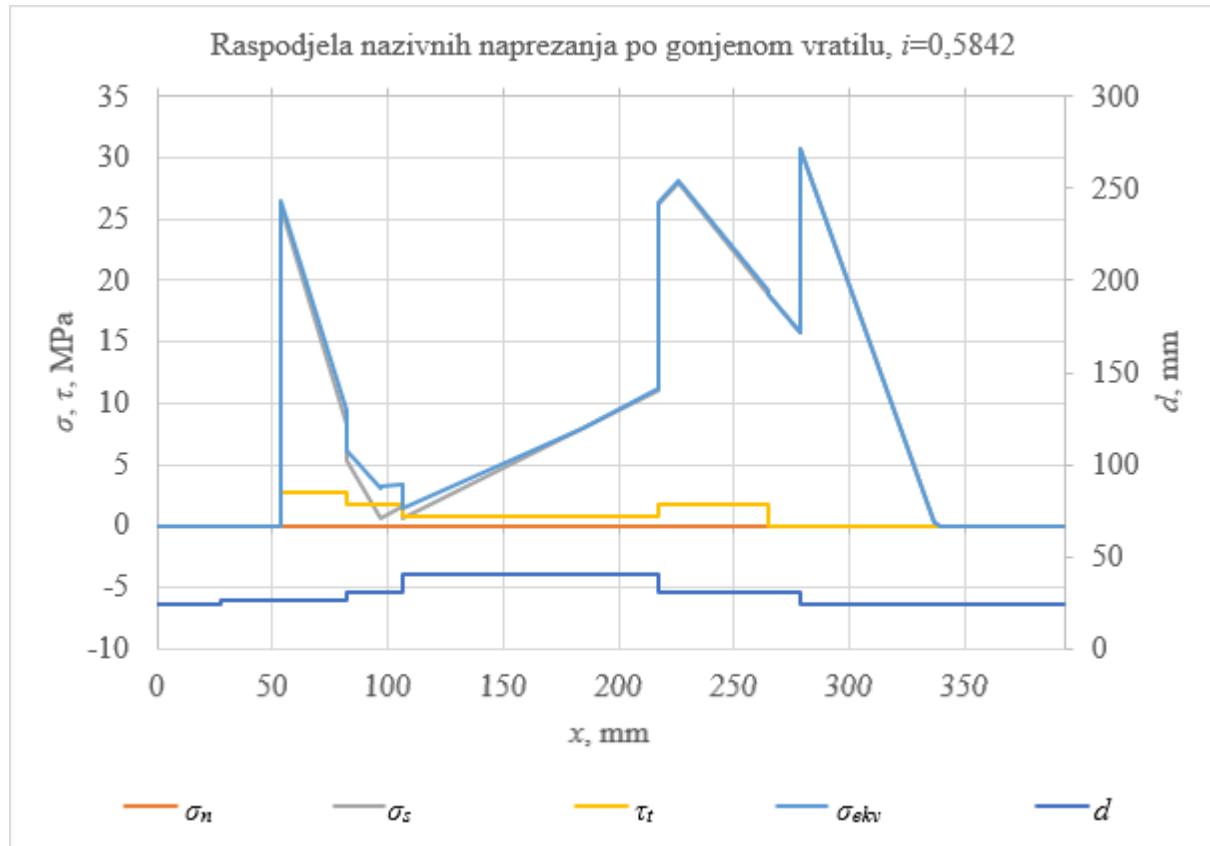
Slika 2. Gonjeno vratilo – raspodjela opterećenja za maksimalni prijenosni omjer



Slika 3. Gonjeno vratilo – raspodjela nazivnih naprezanja za maksimalni prijenosni omjer



Slika 4. Gonjeno vratilo – raspodjela opterećenja za minimalni prijenosni omjer



Slika 5. Gonjeno vratilo – raspodjela nazivnih naprezanja za minimalni prijenosni omjer

Promotri li se raspodjela nominalnih naprezanja za slučaj maksimalnog prijenosnog omjera, može se uočiti da slična naprezanja naprezzanjima na mjestu utora za pero vladaju i pri prijelazu s 40 mm na 30 mm kraj radijalno-aksijalnog ležajnog mjesta i na prijelazu s 30 mm na 24 mm, no vršna vrijednost tih nominalnih naprezanja je niža od vršne vrijednosti nominalnih naprezanja za minimalni prijenosni omjer. Dakle, bit će dovoljno provjeriti čvrstoću utora za pero bliže radijalnom ležajnom mjestu za slučaj maksimalnog prijenosnog omjera, te presjeke prijelaza s 40 mm na 30 mm, na sredini radijalno-aksijalnog ležajnog mjesta s obzirom na stezni spoj na njemu i prijelaza s 30 mm na 24 mm za slučaj minimalnog prijenosnog omjera. Ostali presjeci se ne moraju kontrolirati zbog nižih ukupnih naprezanja, odnosno nižih amplituda naprezanja pri sličnim očekivanim faktorima zareznog djelovanja.

Treba napomenuti da je za toplinski neobrađen čelik S235JR prepostavljen krhko ponašanje, tj. zanemareno je smanjenje efektivnog zareznog djelovanja lokalnim plastificiranjem materijala, čime je proračun dodatno na strani sigurnosti.

Zbog opsežnosti normiranog proračuna, navest će se samo efektivno vršno naprezanje na prijelazu oblika DIN 509 F s 30 mm na 40 mm bliže radijalno-aksijalnom ležaju i efektivna sigurnost:

$$\sigma_{b,DK}=66,49 \text{ MPa}, \quad (1)$$

$$\sigma_{dop}=162 \text{ MPa}, \quad (2)$$

$$S=2,437. \quad (3)$$

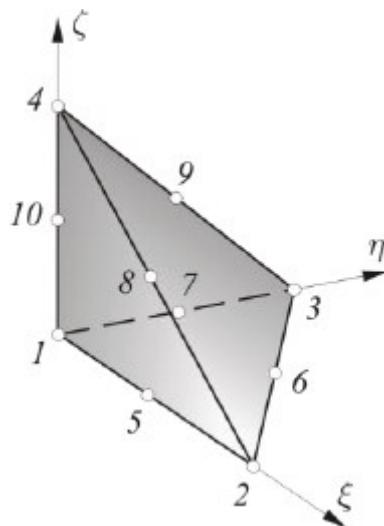
Može se zaključiti da s odabranim materijalom gonjeno vratilo ima zadovoljavajuću sigurnost po analitičkom proračunu.

Za očekivati je da će efektivno naprezanje na identificiranom kritičnom presjeku biti i veće od analitički dobivene vrijednosti, jer se u neposrednoj blizini prijelaza DIN 509 nalazi stezni spoj radikalno-aksijalnog ležaja i vratila. Takvo preklapanje zareznog djelovanja norma ne uzima u obzir. Za potrebe numeričke analize izračunati su kontaktni tlakovi za najnepovoljniji slučaj s maksimalnim mogućim preklopom, te je prepostavljeno da su ležajevi jednodijelni, topologije debelostjene cijevi. Tako dobiveni, inherentno konzervativni tlakovi s pomoćnim vrijednostima korištenim za izračun prikazani su u Tablici 1.

**Tablica 1. Kontaktni tlakovi na ležajnim mjestima**

Ležajno mjesto	$P_{max}$ , $\mu\text{m}$	$Q_V$	$D_F$ , mm	$p_{Fmax}$ , MPa
radikalno	21	0,4167	30	60,74
radikalno-aksijalno	21	0,4839	30	56,29

Numeričke analize provedene su s izoparametarskim 3D kontinuumskim elementima drugog reda s 10 čvorova i 30 stupnjeva slobode – C3D10. Izoparametarskim elementima je geometrija u Kartezijevom koordinatnom sustavu opisana pomoću interpolacijskih funkcija u prirodnim koordinatama. Za njih je karakteristično da je polje pomaka opisano istim interpolacijskim funkcijama kao i geometrija elementa. Navedeni element prikazan je na Slici 6.



**Slika 6. Izoparametarski 3D-element s 10 čvorova i 30 stupnjeva slobode [6]**

Geometrija elementa opisana je izrazima:

$$x = \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_i, \quad (4)$$

$$y = \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_i, \quad (5)$$

$$z = \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_i. \quad (6)$$

Pomaci u elementu opisani su izrazima:

$$u = \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot u_i, \quad (7)$$

$$v = \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot v_i, \quad (8)$$

$$w = \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot w_i. \quad (9)$$

Matrica krutosti za trodimenzijski tetraedarski izoparametarski element glasi:

$$\mathbf{k} = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} \int_{\zeta=0}^{1-\xi-\eta} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det J d\xi d\eta d\zeta, \quad (10)$$

gdje je  $\mathbf{J}$  Jacobijeva matrica:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Vektor čvornih sila se za neki element u općem slučaju sastoji od čvornih sila uzrokovanih vanjskim opterećenjem raspodijeljenim po volumenu, vanjskim opterećenjem raspodijeljenim po površini, sila koje su posljedica početnih deformacija u elementu i koncentriranih čvornih sila, tj.:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_{Vi} + \mathbf{F}_{si} + \mathbf{F}_{\epsilon_0 i} + \mathbf{F}_i. \quad (12)$$

Kako bi se dobilo rješenje sustava, potrebno je izraziti pomake konačnog elementa s obzirom na globalne stupnjeve slobode, a opterećenja i krutost čitave konstrukcije potrebno je izračunati na temelju opterećenja i krutosti pojedinih elemenata. Za to je potrebna uporaba matrice transformacije i matrice identifikacije. Vrijedi:

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T}, \quad (13)$$

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{v}_g^i, \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_{gi} = \mathbf{a}_{gi} \mathbf{V}, \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{a}_{gi}^T \mathbf{r}_{gi}, \quad (16)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i, \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{a}_{gi}^T \mathbf{k}_{gi} \mathbf{a}_{gi}, \quad (18)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i. \quad (19)$$

Kako bi se odredila tražena raspodjela naprezanja po strojnom dijelu, potrebno je poznavati čvorne pomake. Kako bi se izračunali pomaci u čvorovima, potrebno je primijeniti globalnu jednadžbu krutosti, dobivenu iz uvjeta stacionarnosti ukupne potencijalne energije, odnosno minimuma ukupne potencijalne energije:

$$\delta\boldsymbol{\Pi}=0 \quad (20)$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R} \quad (21)$$

Kako bi se ta matrična jednadžba riješila, potrebno je zadati rubne uvjete. Naime, jednadžba krutosti je uz svoja svojstva simetričnosti i pojasnosti i singularna. Time je njena determinanta jednak nuli, što onemogućuje invertiranje matrice krutosti i direktno rješavanje globalne jednadžbe krutosti. Uvođenjem rubnih uvjeta spriječeni su pomaci krutog tijela, čiji broj odgovara broju nultih vrijednosti matrice, čime matrica postaje pozitivno-definitna, što omogućuje rješavanje sustava.

Dobiveni pomaci se povratnom identifikacijom dodijeljuju pripadnim elementima, te se unutarnje sile i momenti  $i$ -og elementa računaju pomoću izraza:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{v}_i. \quad (23)$$

Pri čemu je  $\boldsymbol{D}_i$  matrica elastičnosti elementa. Matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima definirana je izrazom:

$$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{N}_i. \quad (24)$$

Pri čemu je  $\boldsymbol{D}_k$  kinematička matrica.

Adaptivno umrežavanje se zasniva na procjeni greške koja pokazuje valjanost mreže. Na temelju podataka o grešci stvara se nova mreža, čime se greška smanjuje. Iteriranje se provodi sve do postizanja zadovoljavajuće točnosti. Za procjenu valjanosti mreže se u mehanici deformabilnih tijela najčešće koriste izračunate vrijednosti naprezanja, na temelju kojih se računa energija deformiranja i uprosječena energija deformiranja:

$$U = \sum \frac{1}{2} \cdot \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (25)$$

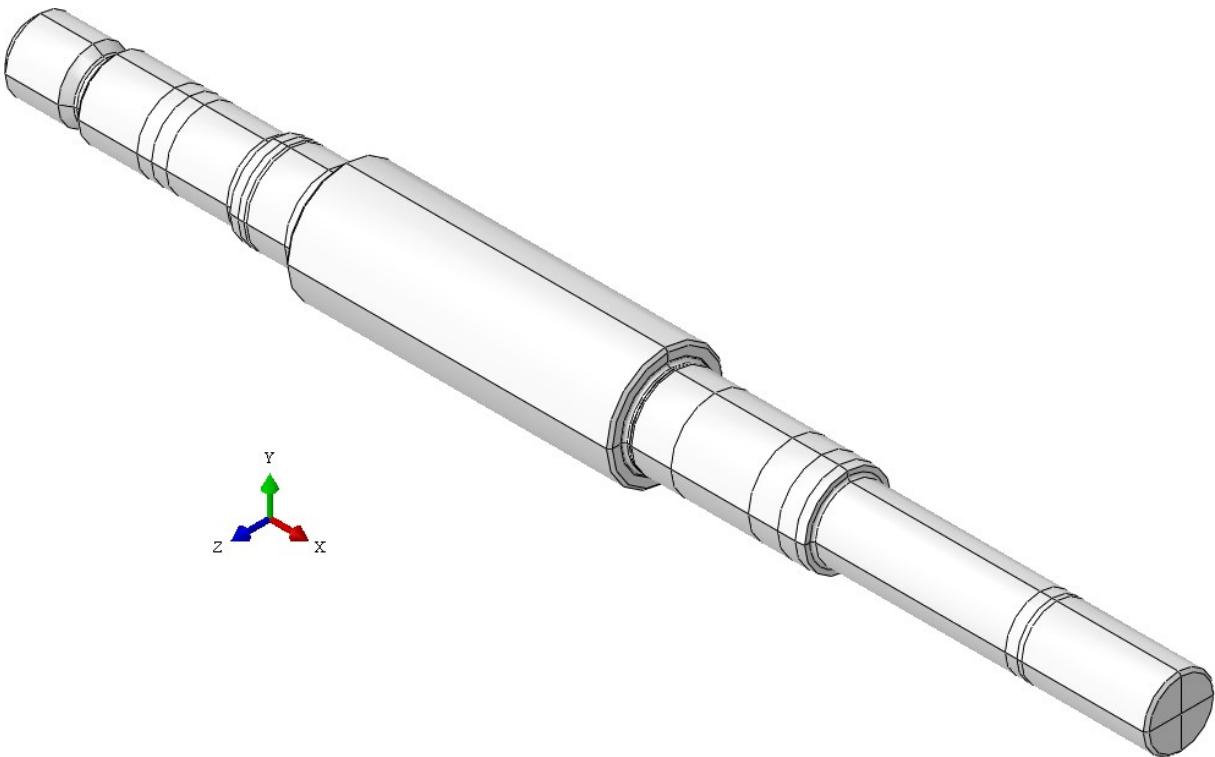
$$U^* = \sum \frac{1}{2} \cdot \int_V \boldsymbol{\sigma}^{*T} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* dV, \quad (26)$$

na temelju kojih se može izračunati greška energije i relativna greška koja se prati:

$$U_E = \sum \frac{1}{2} \cdot \int_V \boldsymbol{\sigma}_E^T \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_E dV, \quad (27)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{U_E}{U+U_E}}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (28)$$

Najprije je u modulu *Part* uvezen pojednostavljeni 3D model vratila generiran u *Solidworksu*, pri čemu su korištene naredbe *Import Part* i podnaredbama *3D Planar*, *Deformable*. Potom su partitionirane sve površine na kojima je bilo potrebno postaviti rubne uvjete opterećenja i ili pomaka, po Slici 7.



Slika 7. Partitioniran model vratila

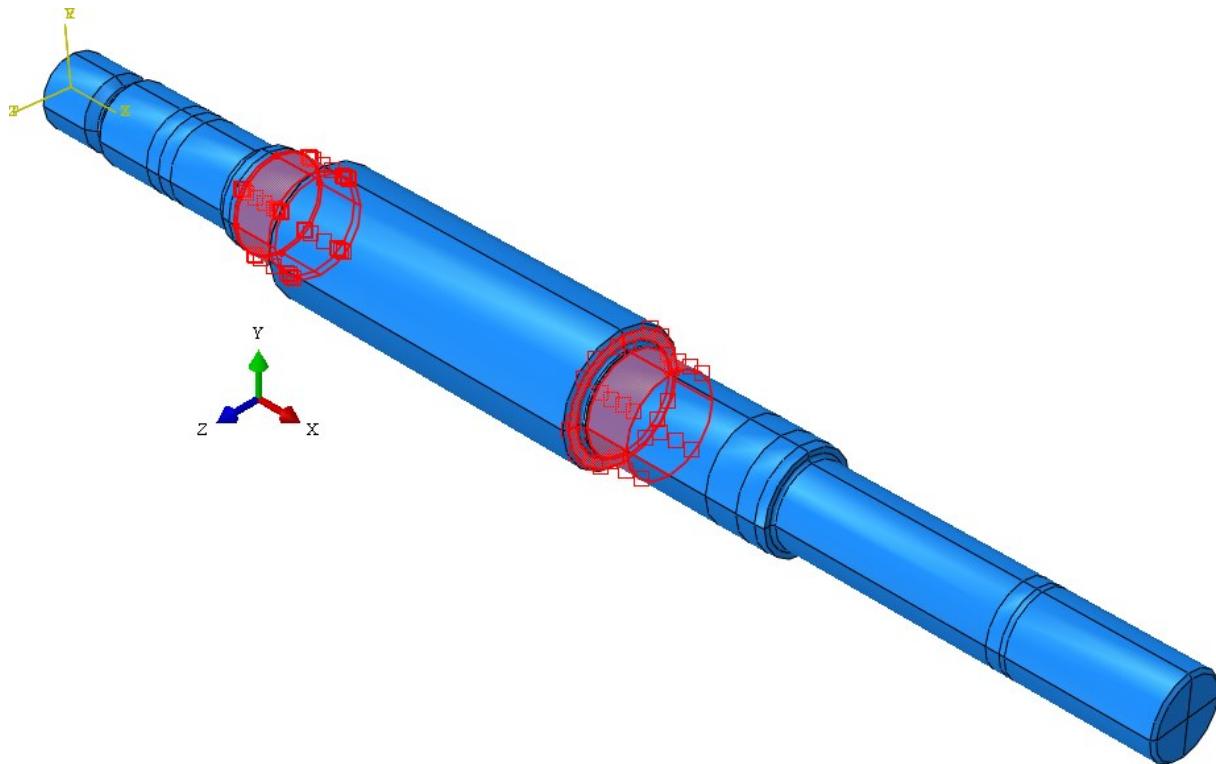
Može se uočiti da je geometrija na temelju rezultata analitičkog prorauna pojednostavljena, kako bi se izbjeglo modeliranje presjeka koji sa sigurnošću nisu kritični velikim brojem elemenata. S tim ciljem uklonjeni su utori za pera i gnijezda DIN 332 na krajevima vratila. Tako dobivenoj geometriji dodijeljena su u modulu *Property* svojstva materijala (po Tablici 2.) i presjeka naredbama *Create Material*, *Create Sections* s podnaredbama *Solid*, *Homogeneous* i naredbom *Assign Section*.

Tablica 2. Svojstva odabranog materijala

$\rho$ , kg·m <sup>-3</sup>	$\nu$	E, GPa
7830	0,3	210

Tako dobivena geometrija s pripadajućim svojstvima uvezena je u modul *Assembly* naredbom *Create Instance*, s opcijama *Parts* i *Independent*. Također je kreiran cilindrični koordinatni sustav čija se z-os poklapa s duljinskom osi vratila. Zatim je u modulu *Step* naredbom *Create Step* opcijom *Static, General* definiran korak u kojem će se narinuti opterećenje na model.

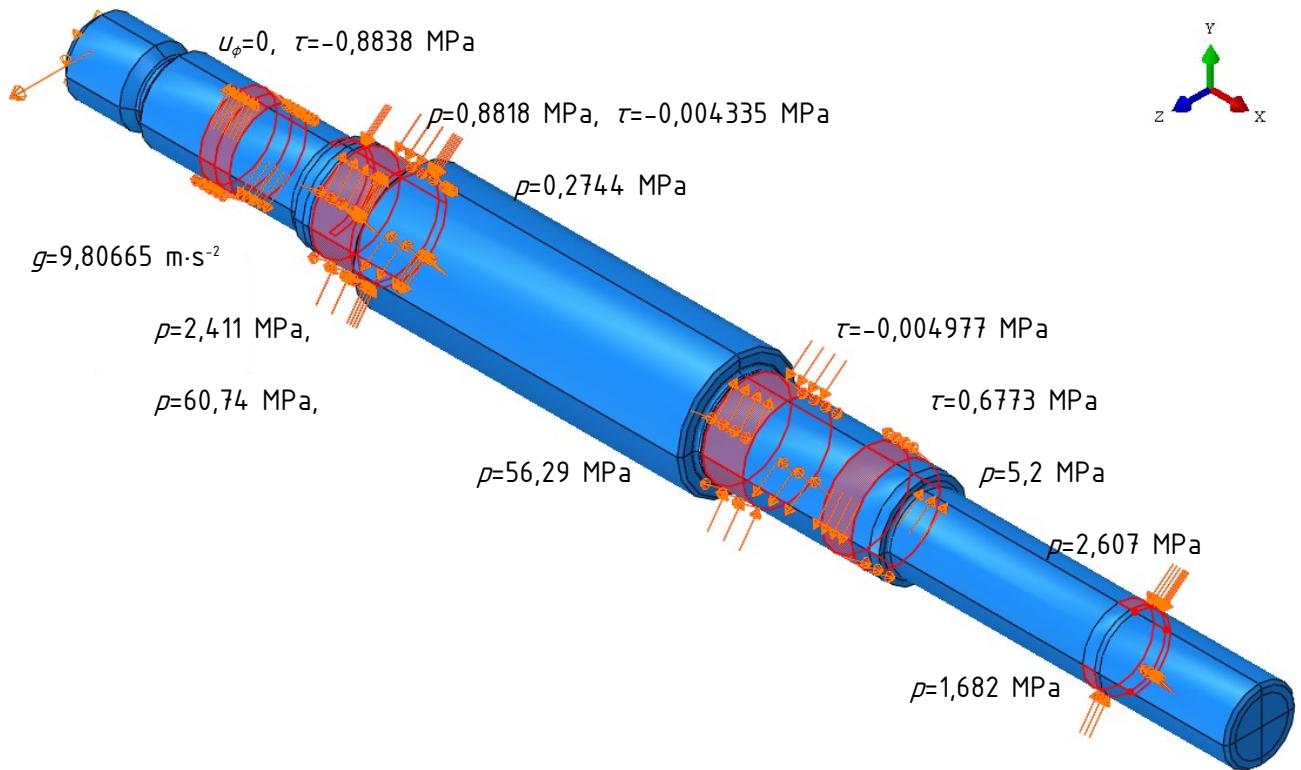
U modulu *Interaction* naredbom *Create Interaction* i opcijom *Elastic Foundation* kreirani su elastični temelji na mjestima uležištenja vratila, s vrijednošću površinske krutosti od  $10000 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-3}$  za površine radikalnih oslonaca, odnosno  $100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-3}$  za površinu aksijalnog oslonca, s obzirom da na vratilo ne djeluje nikakvo aksijalno opterećenje. Analiza osjetljivosti numeričke analize na birane vrijednosti površinskih krutosti provedena je u sklopu rekonstrukcije varijatora za pogonsko vratilo, koje je po svojim dimenzijama i rubnim uvjetima dovoljno slično gonjenome da se tako provedena analiza može smatrati zadovoljavajućom i za gonjeno vratilo.



Slika 8. Elastični temelji

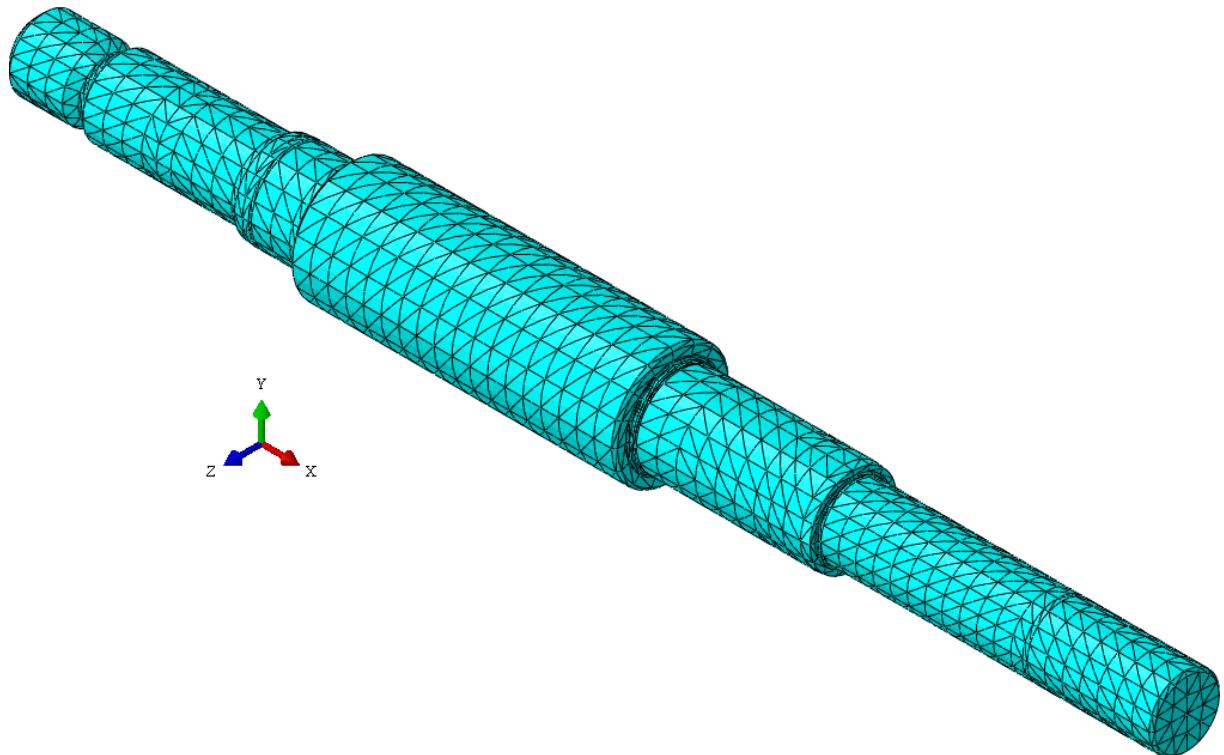
U modulu *Load* naredbom *Create Boundary Condition* narinut je rubni uvjet pomaka u vidu sprečavanja rotacije na jednom od bridova particioniranih površina radijalnog oslonca, čime je model potpuno staticki određen (Slika 9.).

Zatim su definirana opterećenja naredbom *Create Load*. Sva opterećenja su definirana naredbama *Pressure* i *Surface Traction*. Time je, zajedno s elastičnim temeljima, osigurano da se na cijelom modelu ne javljaju singularnosti koje bi mogle negativno utjecati na kvalitetu mreža dobivenih adaptivnim umrežavanjem umjetnim povećavanjem diskretizacijskih grešaka na mjestima na kojima u stvarnosti nema tako izraženih gradijenata. Zanemaren je utjecaj centrifugальног opterećenja zbog razmjerno niske brzine vrtnje vratila. Prikaz opterećenja na modelu dan je na Slici 9.



Slika 9. Opterećenja i rubni uvjeti na gonjenom vratilu

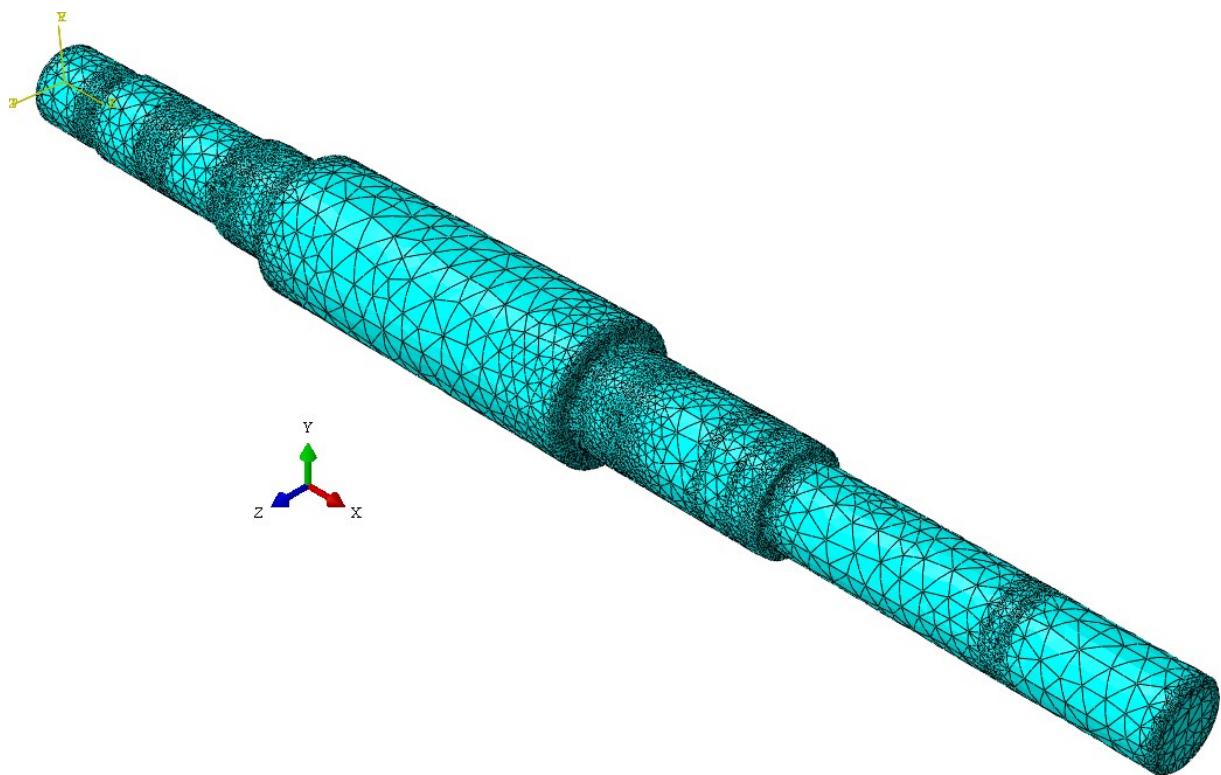
U modulu *Mesh* generirana je početna, gruba mreža konačnih elemenata koja je poslužila kao osnova za algoritam adaptivnog umrežavanja. Prikazana je na Slici 10.



Slika 10. Početna mreža s 19392 C3D10 elemenata

Na koncu je definiran *Remeshing Rule* s indikatorom greške diskretizacije u vidu energije deformiranja elementa. Kako na modelu nema nikakvih singularnosti, definirano je maksimalno relativno odstupanje od 1% pri vršnoj vrijednosti indikatora, odnosno 5% pri minimalnoj vrijednosti. Zadana je minimalna dopuštena veličina elementa od 0,05 mm i maksimum od 400000 elemenata u mreži, te je onemogućeno ogrubljivanje mreže u odnosu na početnu mrežu.

Konvergencija prema traženim vrijednostima ostvarena je unutar 6 iteracija. Konačna mreža s 386209 C3D10 elemenata prikazana je na Slici 11. Tek 170 elemenata, odnosno nešto više od 0,04% elemenata imaju razmjerne značajnu distorziranost, no s obzirom da se velikom većinom ne nalaze na potencijalno kritičnom području i s obzirom na njihov veoma malen broj, mreža se može smatrati zadovoljavajućom po pitanju kvalitete generiranih elemenata.

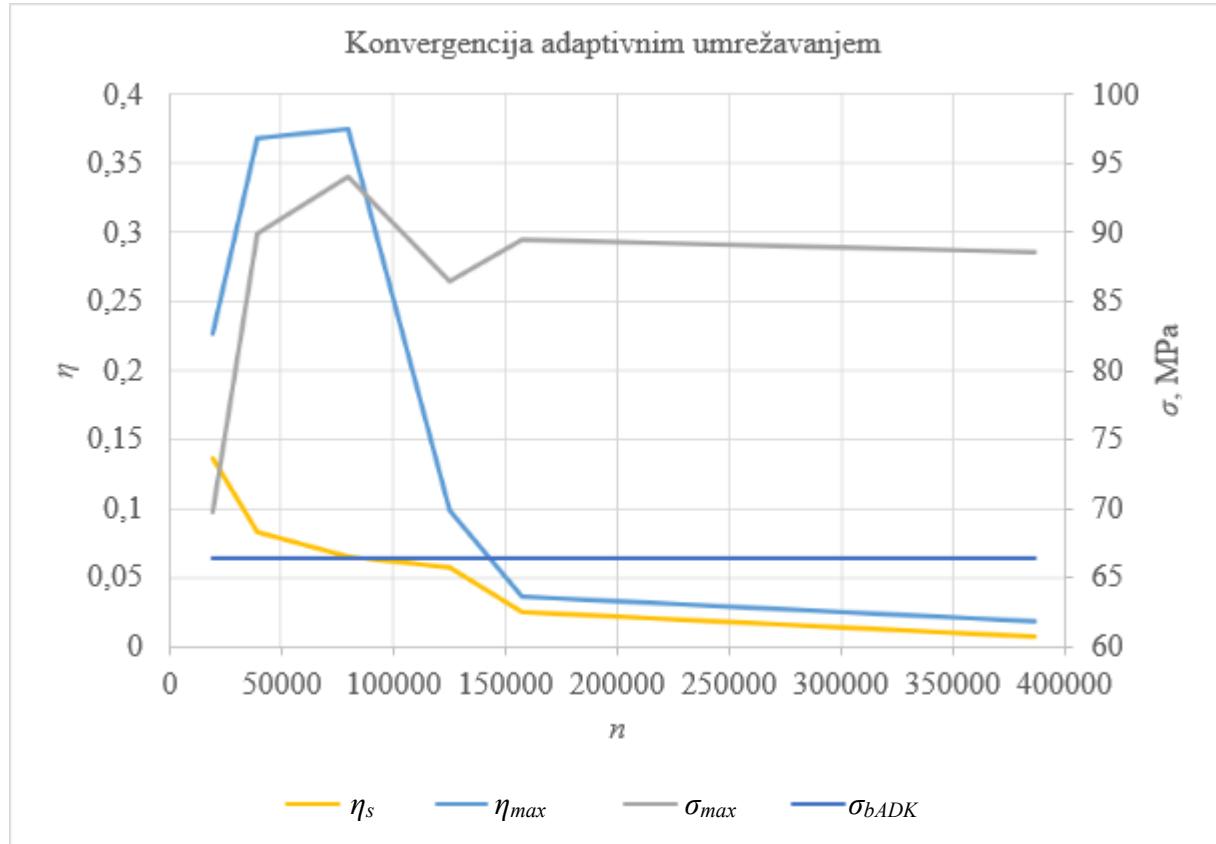


Slika 11. Konačna mreža s 386209 C3D10 elemenata

Konvergencija je prikazana Tablicom 3. i Slikom 12.

Tablica 3. Konvergencija naprezanja i pomaka za adaptivno umrežavanje

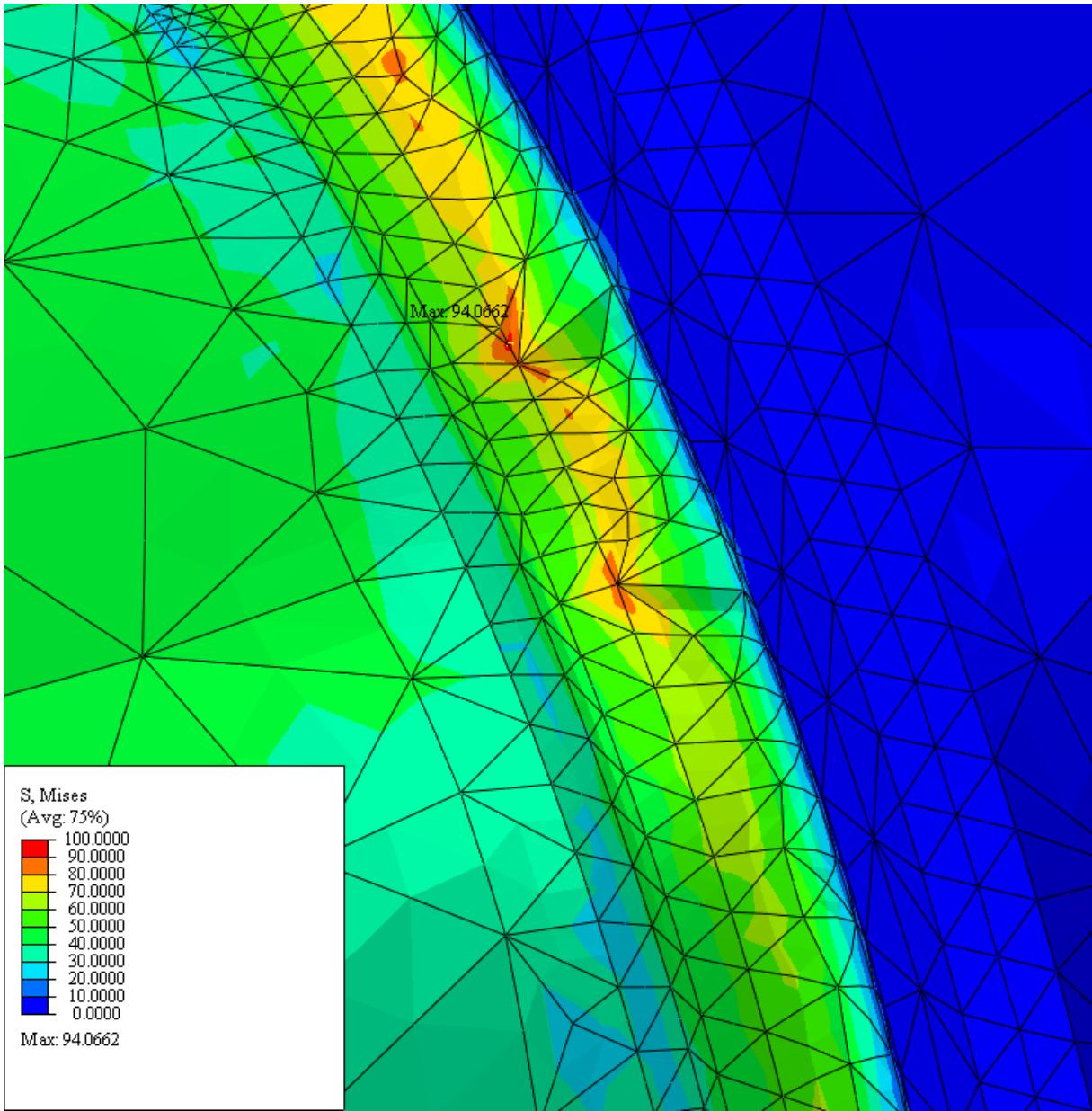
Broj iteracije	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$n$	19392	39252	80083	125268	157656	386209
$\eta_s$	0,1371	0,0839	0,0656	0,0575	0,0370	0,0192
$\eta_{max}$	0,2273	0,3684	0,3752	0,0994	0,0254	0,0074
$\eta_{min}$				~0		
$\sigma_{max}$ , MPa	69,77	89,90	94,07	86,44	89,42	88,55
$\sigma_{bADK}$ , MPa			66,49			
$\varepsilon$	0,0493	0,3521	0,4148	0,3000	0,3449	0,3318
$U_{max}$ , mm	0,1218	0,1221	0,1222	0,1222	0,1222	0,1222



Slika 12. Grafički prikaz konvergencije ključnih veličina

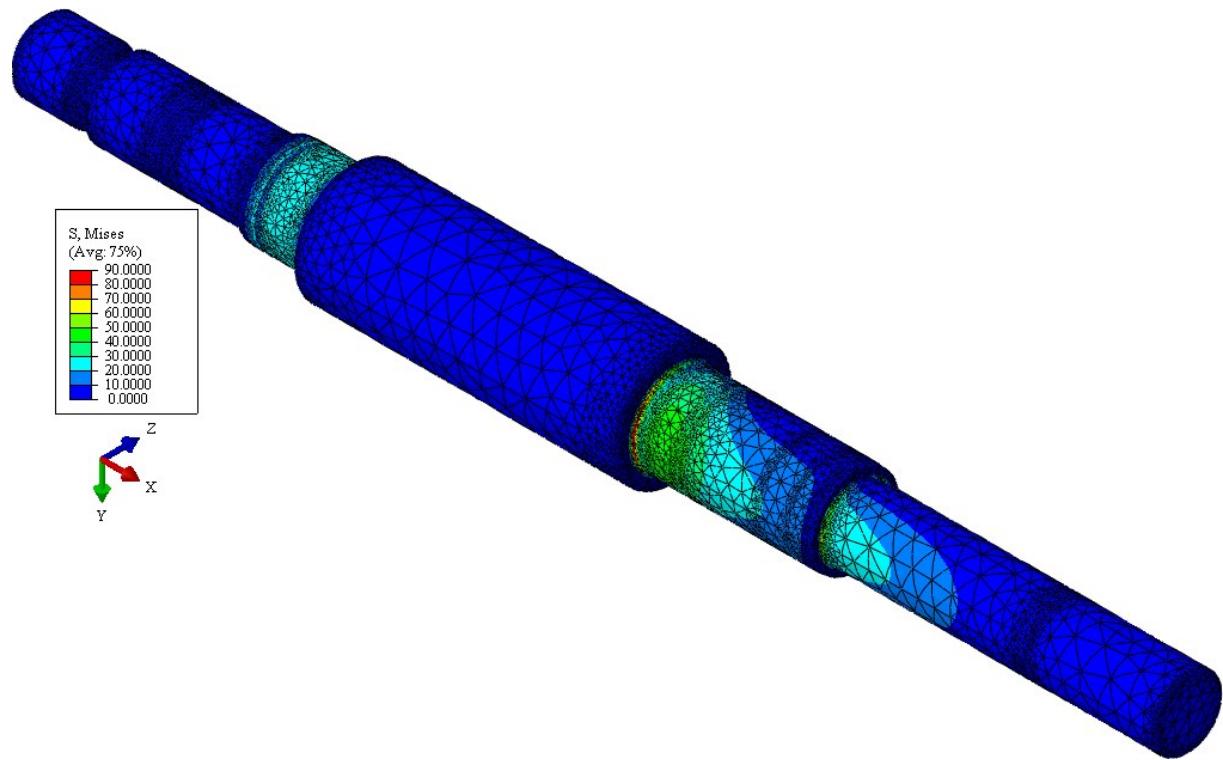
Može se uočiti da je po pitanju vršnog pomaka analiza već pri trećoj iteraciji potpuno konvergirala, iako se zbog male razlike u odnosu na vršni pomak u prvoj iteraciji i rezultate s izvornom mrežom može smatrati prihvatljivima po pitanju pomaka. Također se može uočiti da

postoje određene oscilacije u vrijednostima vršnog naprezanja, koje su posljedica pojedinačnih elemenata neprilagođene veličine, kao što to pokazuje Slika 13. Normirana srednja relativna greška monotono pada do vrijednosti niže od 2%, što je više nego zadovoljavajuće. Vršna relativna greška doživljava oscilacije zbog istih razloga kao i vršno naprezanje.

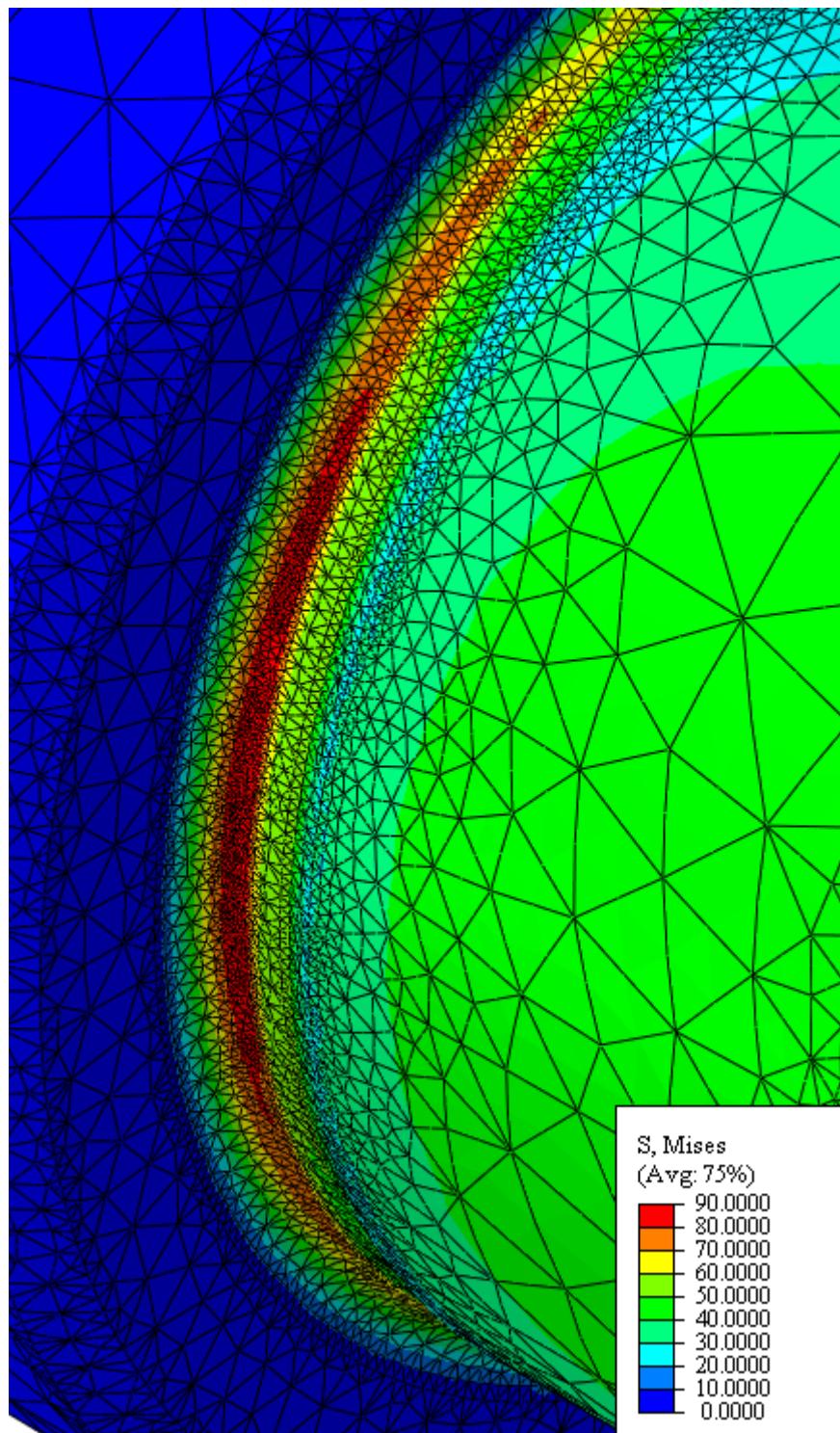


**Slika 13. Prikaz slabije umreženih detalja u jednom od medukoraka koji rezultiraju pretjeranim vrijednostima vršnog naprezanja**

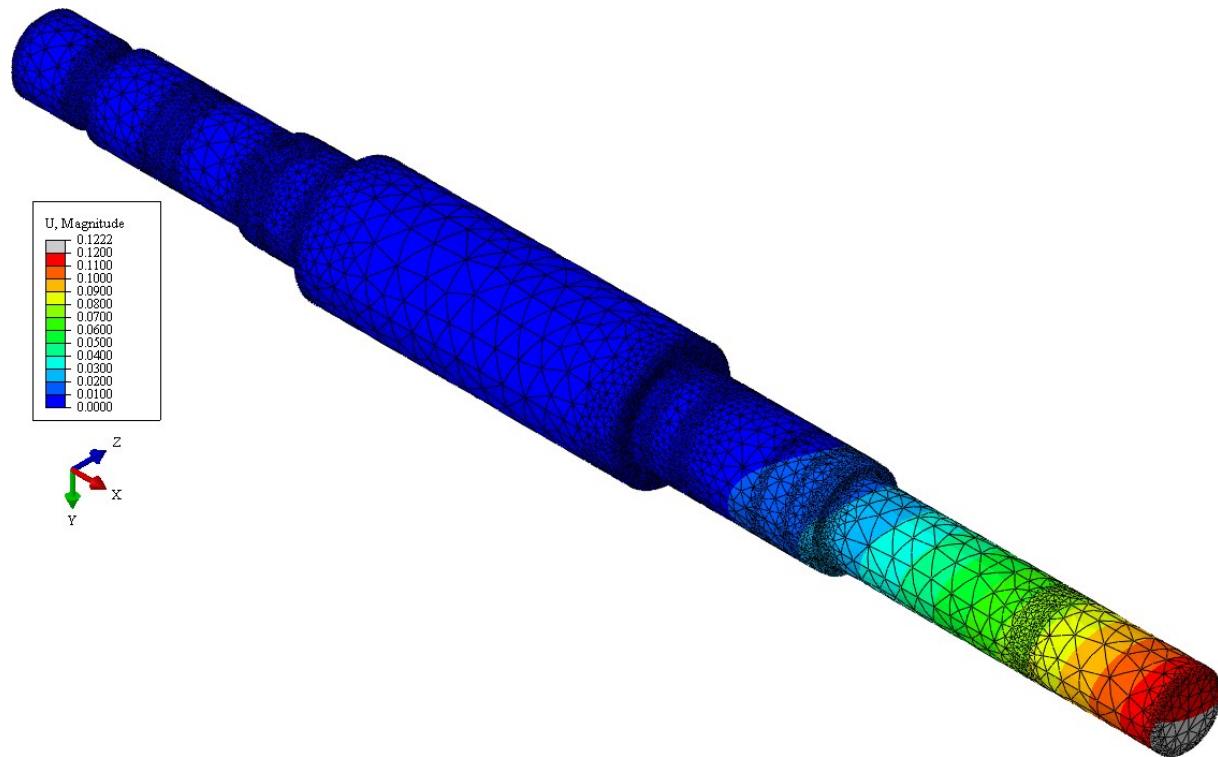
Konvergirano rješenje je za 30% veće od onog dobivenog analitičkim proračunom, što je i očekivano zbog preklapanja dva faktora zareznog djelovanja, što norma ne uzima u obzir. Pozicija vršnog naprezanja je nepromijenjena, te su polja naprezanja i pomaka i pripadni detalji prikazani na narednim slikama.



Slika 14. Raspodjela naprezanja (u MPa) za mrežu s heksaedarskim elementima

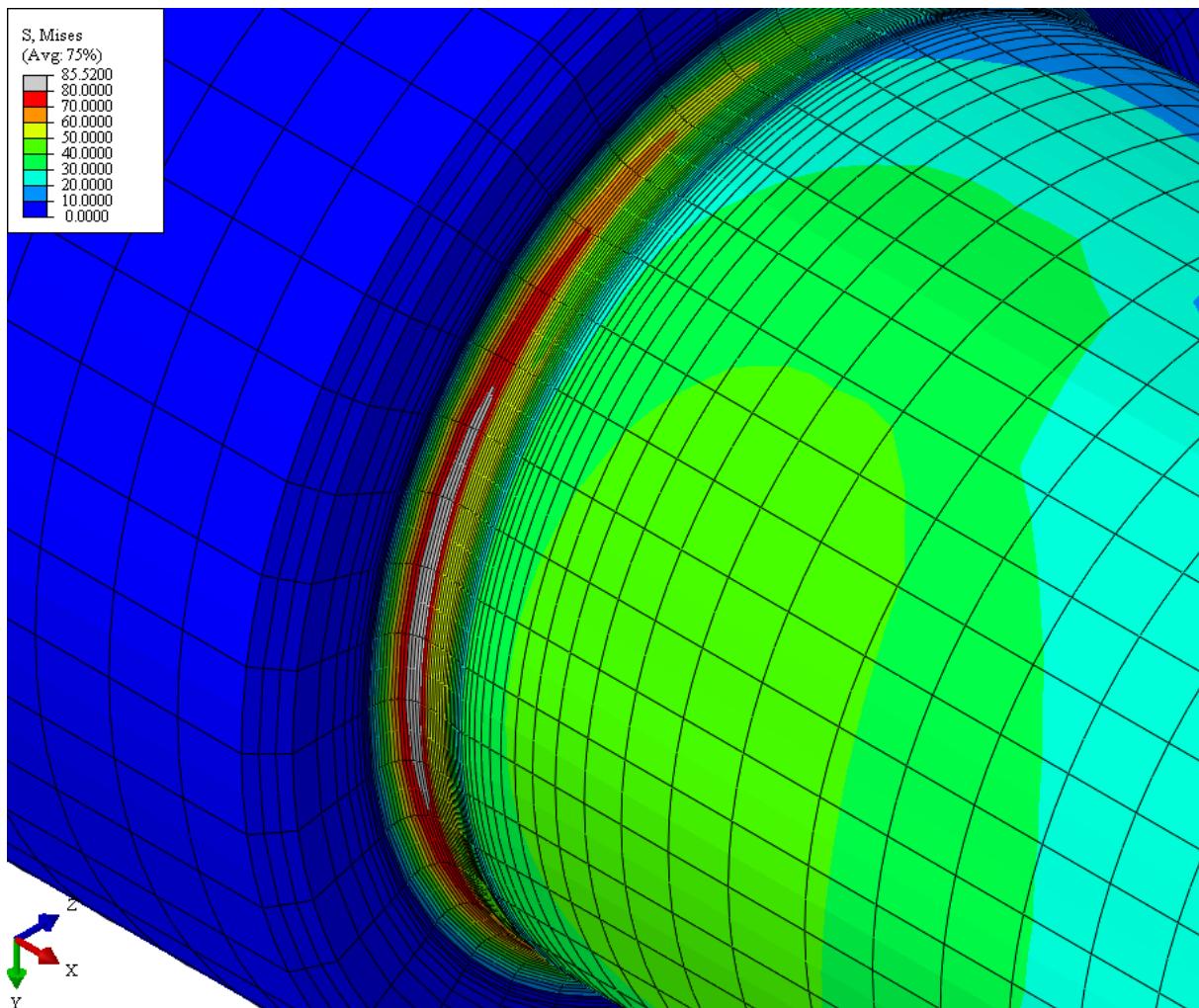


**Slika 15.** Detalj raspodjele naprezanja (u MPa) na kritičnom dijelu pogonskog vratila za konvergirano rješenje dobiveno adaptivnim umrežavanjem



Slika 16. Raspodjela pomaka (u mm) za konvergiranu mrežu

Dobiveni rezultati se dobro poklapaju s rezultatima numeričke analize sa strukturiranim mrežom i C3D20 elementima, izvedenom za kolegij *Mehaničke konstrukcije RS*, za koju je detalj kritičnog mjesta prikazan na Slici 17.



Slika 17. Detalj raspodjele naprezanja (u MPa) na kritičnom dijelu pogonskog vratila za mrežu s heksaedarskim elementima

## 2. Drugi zadatak

Za proizvoljan sklop od minimalno tri dijela, proizvoljna opterećenja i rubne uvjete potrebno je provesti analizu metodom konačnih elemenata koristeći minimalno tri mehaničke veze u sklopovima i komentirati rezultate. Potrebno je voditi računa o tome da geometrija, opterećenje i rubni uvjeti budu smisleni.

Kao predmet analize ovog zadatka odabran je sklop od četiri strojna dijela – dva čelnika tankih vijenaca predviđenih za montažu na klinasta vratila za alatne strojeve ( $21 \times 25 \times 8$  DIN 5471), modula  $m=1$  mm i broja zubi  $z=35$ , s ozubljenjem profila A po ISO 53:1998 i oborenim bridovima vrha zuba, te dva klinasta vratila za alatne strojeve, jedno profila A  $21\text{j}6 \times 25 \times 8$ , drugo profila B  $21\text{j}6 \times 25 \times 8$ .

Iako je naizgled riječ o relativno jednostavnom problemu, u analizi je potrebno uzeti u obzir ukupno 18 parova površina koje su u kontaktu, od kojih kod 8 parova postoji preklop. Zbog navedene složenosti numerička analiza provedena je u Abaqus Explicitu s dvodimenzijanskim elementima za ravninsko stanje deformacija.

Abaqus Explicit koristi *penalty* metodu. Jednadžba ograničenja je oblika:

$$CV - Q = t, \quad (29)$$

pri čemu  $t=0$  predstavlja zadovoljenje kinematskog ograničenja. U općem slučaju je modificirana ukupna potencijalna energija s kinematskim ograničenjima jednaka:

$$\pi^* = 0,5 \cdot V^T K V - V^T R + 0,5 \cdot t^T \alpha t, \quad (30)$$

gdje je  $\alpha$  dijagonalna matrica *penalty* brojeva.

Analogno klasičnim jednadžbama metode konačnih elemenata navedenih u sklopu prvog zadatka, sustav je i u ovom slučaju u ravnoteži kada je prva varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli:

$$\delta \pi^* = \delta V^T K V - \delta V^T R + \delta V^T C^T \alpha (CV - Q) = 0, \quad (31)$$

iz čega slijedi:

$$[K + C^T \alpha C] V = R + C^T \alpha Q.$$

Kako  $\alpha$  raste, kinematska ograničenja su bolje ispunjena.

Izvođenjem analize pomoću Abaqus Explicita problem prelazi u kvazistatički problem. Za smislene rezultate je nužno osigurati da kinetička energija sustava bude bitno niža od ukupne energije.

Za dinamičke probleme se osnovna jednadžba metode konačnih elemenata proširuje:

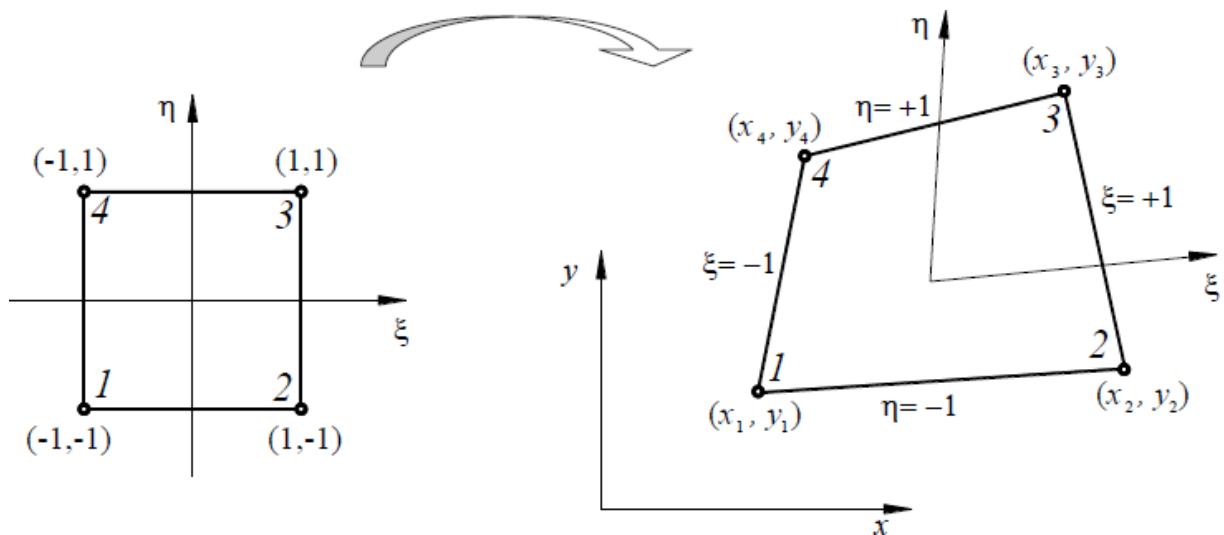
$$M \ddot{V} + C \dot{V} + K V = R(t), \quad (32)$$

pri čemu je  $\mathbf{M}$  dijagonalna matrica masa. Numerička analiza provodi se u nizu inkremenata. Abaqus Explicit, sukladno imenu, koristi eksplicitni postupak – stanje na kraju inkrementa temelji se samo na pomacima, brzinama i ubrzanjima s početka inkrementa. Najprije se na nivou čvorova računa dinamička ravnoteža, nakon čega se vrši eksplicitna integracija u vremenskom inkrementu metodom središnjih razlika:

$$\dot{\mathbf{V}}_{\Delta t} = \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{V}}_0 + \dot{\mathbf{V}}_0, \quad (33)$$

nakon čega se na nivou elementa, tj. u točkama integracije računaju inkrementi deformacija, naprezanja i unutarnje čvorne sile. Postupak se ponavlja sve dok nije postignuto vrijeme završetka analize.

U zadatku su korišteni elementi CPE4R – osnovni četverokutni izoparametrijski elementi s reduciranim integracijom (Slika 18.).



Slika 18. Osnovni četverokutni izoparametrijski element [6]

Potpuno analogno elementima C3D10 opisanim u sklopu prvog zadatka, vrijedi:

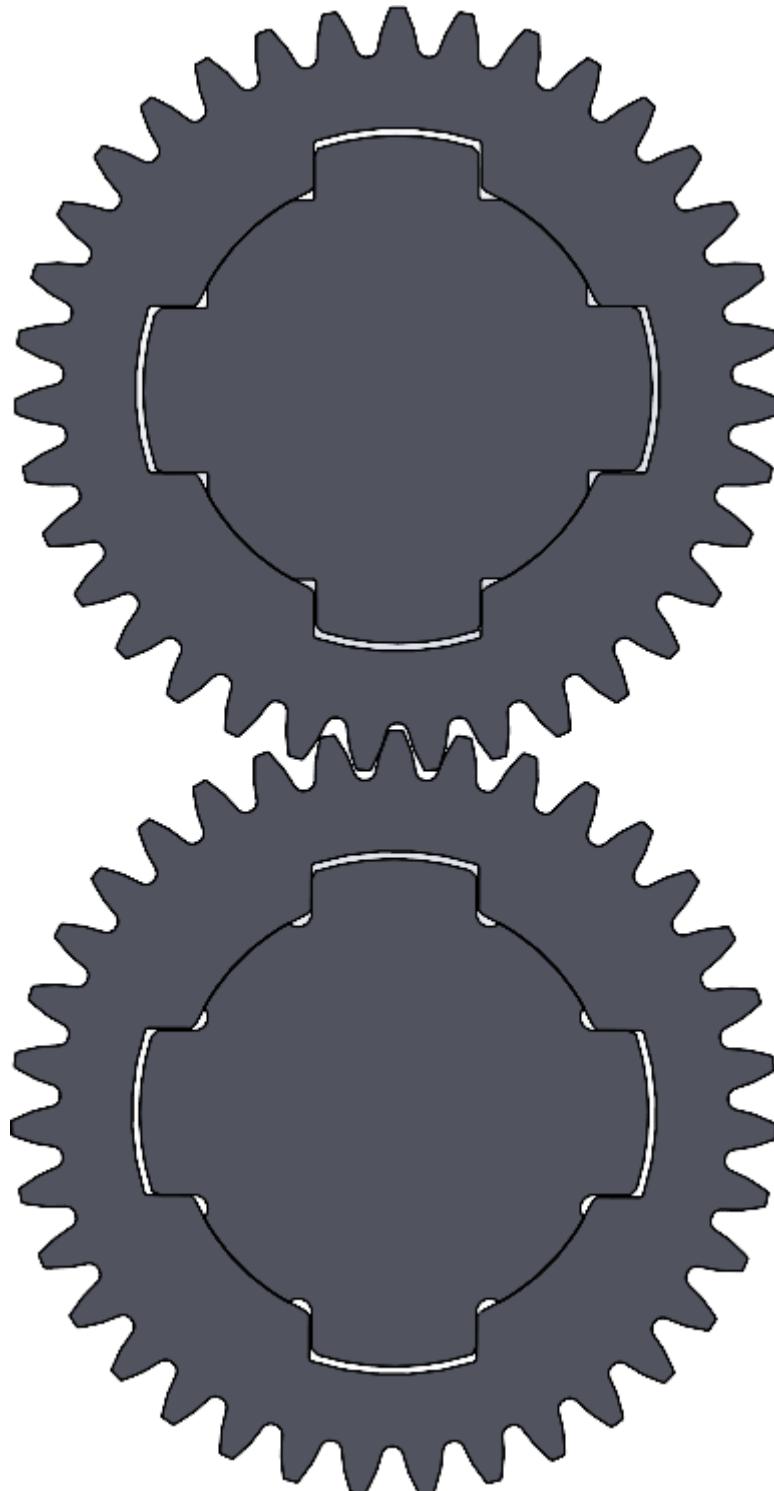
$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i, \quad (34)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i, \quad (35)$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i, \quad (36)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i. \quad (37)$$

Geometrija je modelirana u nekoliko koraka. Ozubljenje je generirano u programu KISSsoft, te je potom uvezeno u Solidworks, u kojem su dodani navedeni profili za klinasta vratila i formiran sklop navedenih dijelova, kao što to prikazuje Slika 19.



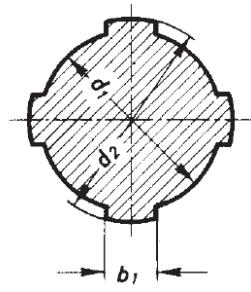
Slika 19. Sklop u Solidworksu

Od dimenzija profila danih u Tablici 4. s pripadnim kotama na Slici 20. i 21., zračnosti vanjskog promjera i zračnosti na bokovima su izravno modelirane u Solidworksu s maksimalnim mogućim vrijednostima s obzirom na propisane dosjede. Time su nosive površine bokova najmanje moguće, što je na strani sigurnosti. Analogno je prijelazni dosjed kojim je osigurano unutarnje centriranje kasnije definiran kao izvedeni čvrsti dosjed preklopa 9  $\mu\text{m}$ , dok je u Solidworksu modeliran s nazivnim mjerama.

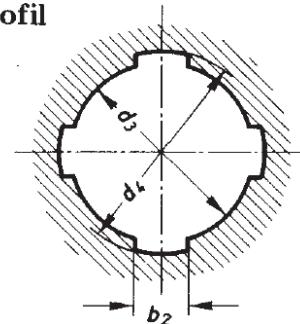
Tablica 4. Dimenzije profila (u mm) [7]

$d_1$	21 j6	$e_{max}$	1,64
$d_2$	25 a11	$f_{min}$	5
$d_3$	21 H7	$g_{max}$	0,3
$d_4$	25 H13	$h$	8,9
$d_{5min}$	20,1	$r_{1max}$	0,15
$b_1$	8 h9	$r_{3max}$	0,25-0,05
$b_2$	8 D9	$k$	0,3-0,1

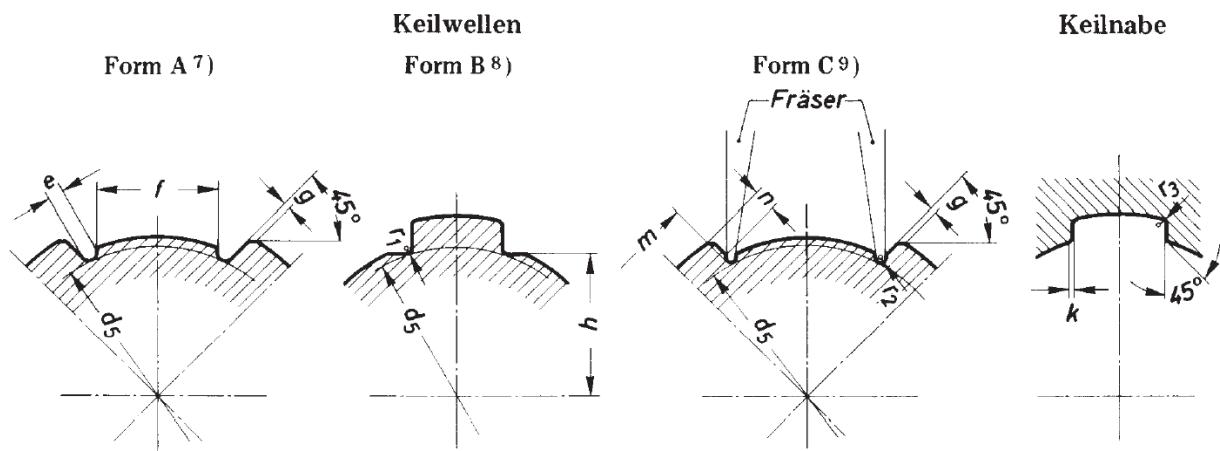
Keilwellen-Profil



Keilnaben-Profil



Slika 20. Osnovne dimenzije profila [7]



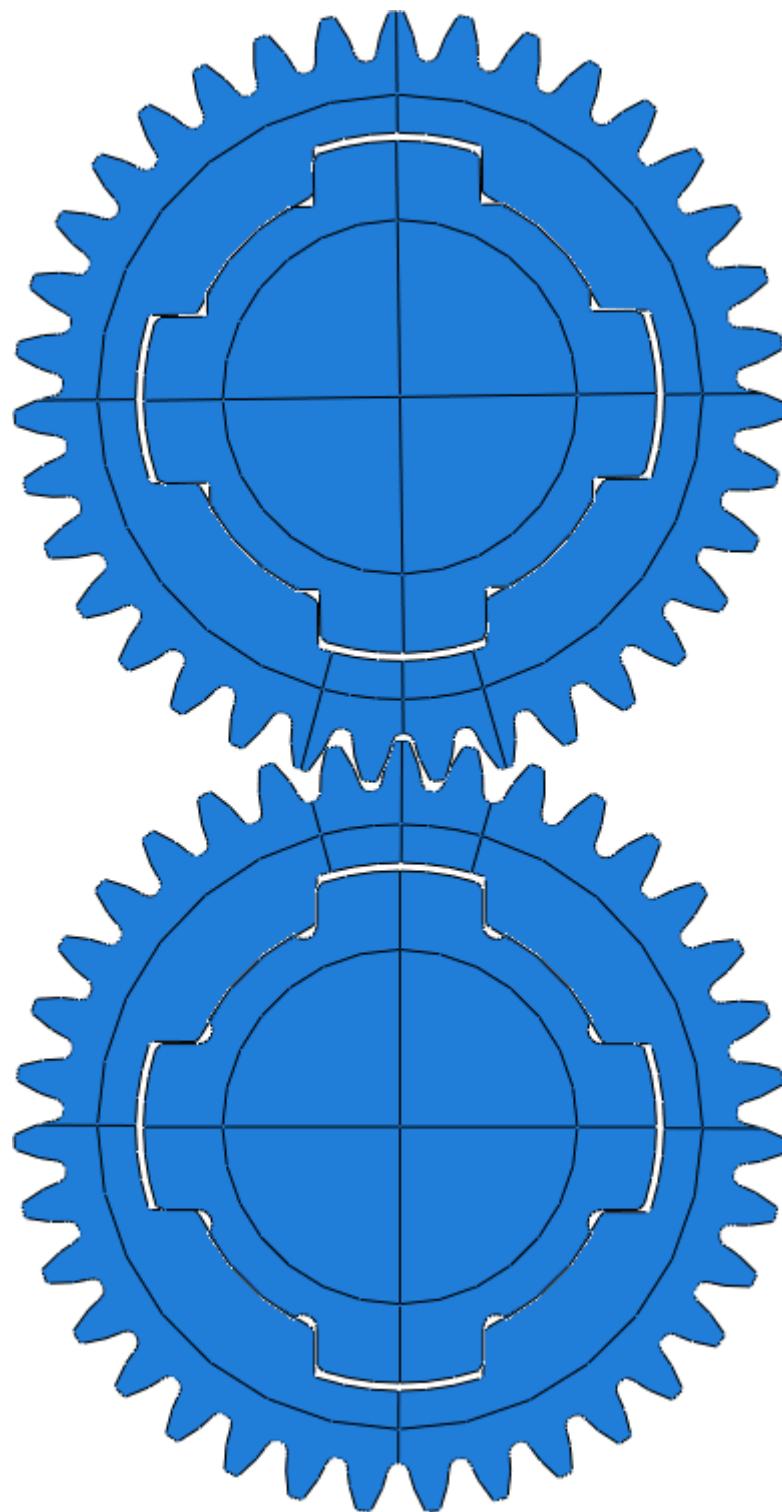
Slika 21. Dimenzije profila ovisne o metodi izrade [7]

Cilj numeričke analize je kvalitativna usporedba naprezanja na klinastim vratilima izazvana različitim oblicima profila propisanih po [7] i različitim relativnim položajem zahvatne linije. Prijenos opterećenja s jednog vratila na drugo ostvaren je pomoću zupčanika, za koje je po [8] na temelju toplinske obrade i broja zubi određeno da je kritična nosivost korijena zuba. Kako bi se potvrdio ispravan prijenos opterećenja s jednog na drugo vratilo praćena su naprezanja na korijenima zubi. Zbog velike finoće mreže potrebne za ispravno modeliranje naprezanja

izazvanih Hertzovim pritiskom na mjestima kontakta zubi raspodjela naprezanja po bokovima nije predmet ove analize.

Kako bi se osigurala točnost evolventnog ozubljenja pri uvozu geometrije u Abaqus, ne mogu se modelirani strojni dijelovi sa Slike 19. spremiti kao površine koje bi se uvozile u Abaqus, već je potrebno uvesti trodimenzijske modele i pomoći njih projiciranjem bridova generirati skice na temelju kojih nastaju dvodimenzijski dijelovi za analizu u Abaqusu.

Potom su partitionirane sve površine na kojima je predviđeno proguršćivanje mreže i dijelovi pozicionirani – s malom zračnošću kako bi se smanjili dinamički efekti tijekom analize – u modulu *Assembly*, u koji su dijelovi uvezeni naredbom *Create Instance*, s opcijama *Parts* i *Dependent*, po Slici 22. Također je kreiran cilindrični koordinatni sustav čija se *z*-os poklapa s osi pogonskog (gornjeg) zupčanika.



Slika 22. Sklop u modulu *Assembly*

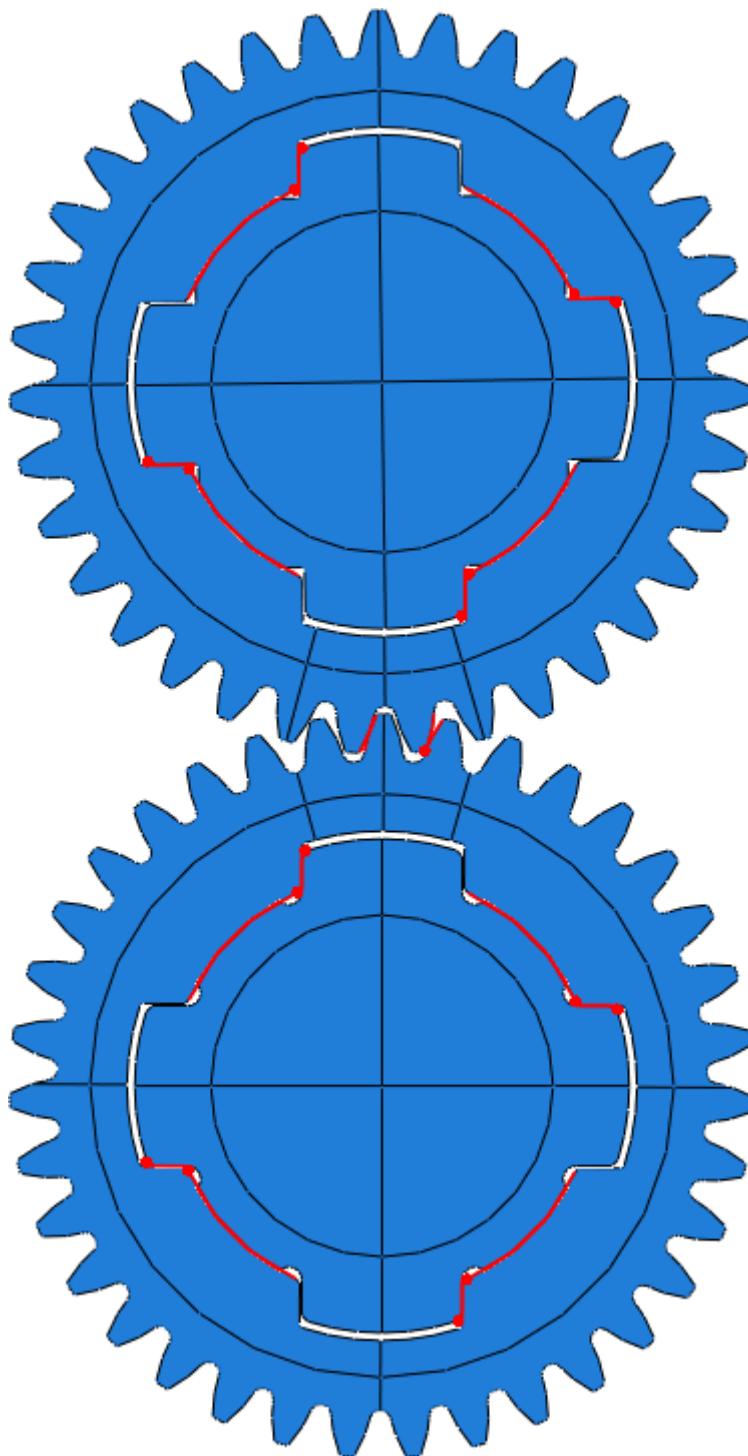
Potom su dijelovima u modulu *Property* dodijeljena svojstva materijala (po Tablici 5.) i presjeka naredbama *Create Material*, *Create Sections* s podnaredbama *Solid*, *Homogeneous* i naredbom *Assign Section*. Za materijal zupčanika uzet je površinski zakaljen nodularni lijev EN-GJS-400-15, dok je za materijal klinastih vratila uzet konstrukcijski čelik S350.

**Tablica 5. Svojstva odabralih materijala [9]**

Materijal	$\rho, \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\nu$	$E, \text{GPa}$
EN-GJS-400-15	7100	0,28	169
S350	7830	0,3	210

Zatim su u modulu *Step* naredbom *Create Step* opcijom *Dynamic, Explicit* definirana dva koraka – u prvom u trajanju od 5 ms su uspostavljeni kontakti među komponentama sklopa, dok su u drugom koraku u trajanju od 5 ms unesena opterećenja.

U modulu *Interaction* naredbom *Create Interaction* i opcijom *General contact (Explicit)* kreirano je ukupno 18 parova površina, odnosno 18 kontakata, po Slici 23. Naredbom *Create Interaction Property* definiran je kontakt u normalnom smjeru kao „hard“-kontakt, dok je u tangencijalnom smjeru trenje modelirano *penaltyjem* s koeficijentom trenja 0,09.



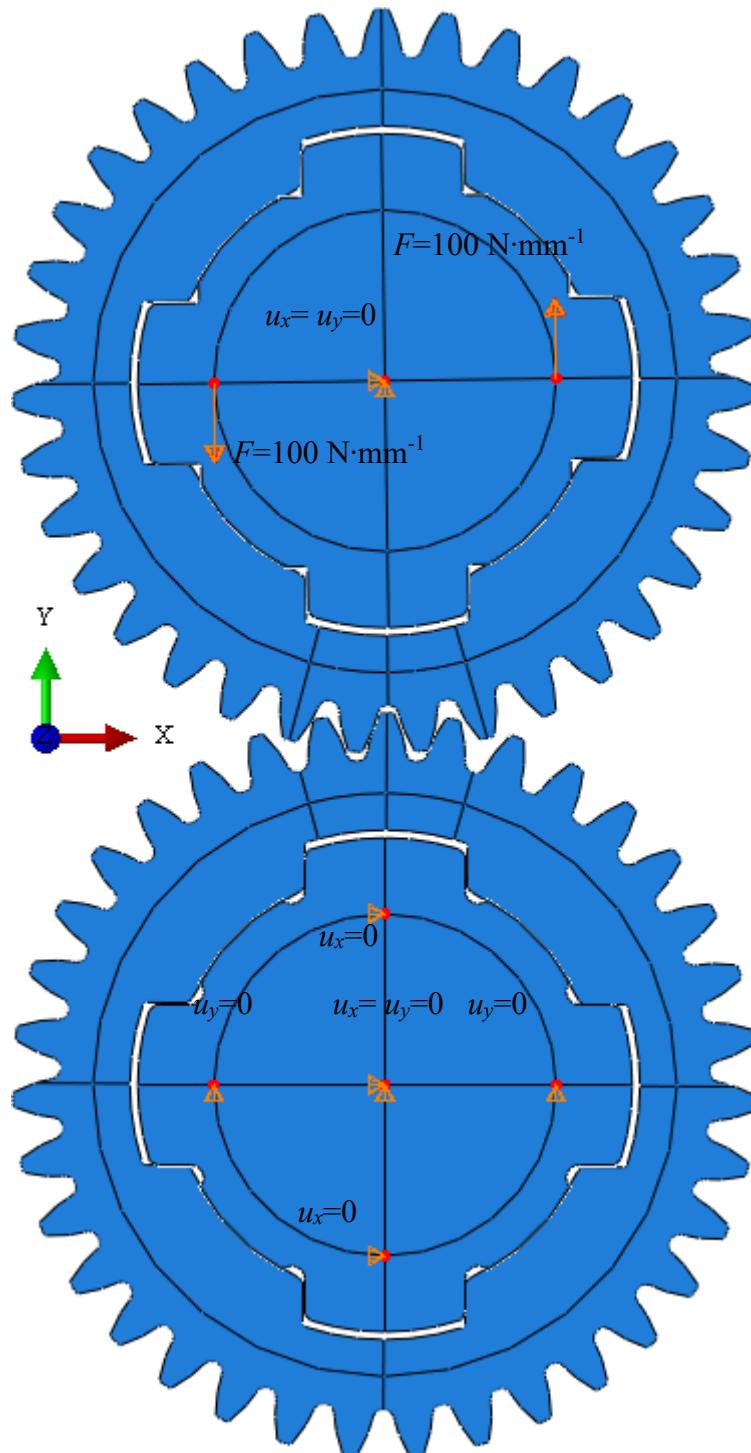
Slika 23. Kontakti definirani u modulu *Interaction*

Od navedenih kontakata, njih 8 je izdvojeno opcijom *Initialization assignments*, te je generirana inicijalizacija kontakta preklopnog spoja naredbom *Create Contact Initialization*, opcijom *Treat as interference fits* s vrijednošću preklopa od  $4,5 \mu\text{m}$ .

U modulu *Load* naredbom *Create Boundary Condition* narinuti su rubni uvjet pomaka u vidu sprečavanja pomaka u oba smjera na središtima klinastih vratila i sprečavanja tangencijalnog pomaka gonjenog klinastog vratila na četiri točke na istoj udaljenosti od središta. Time je spriječena rotacija gonjenog vratila (koja se ne bi mogla spriječiti u centru vratila jer korišteni

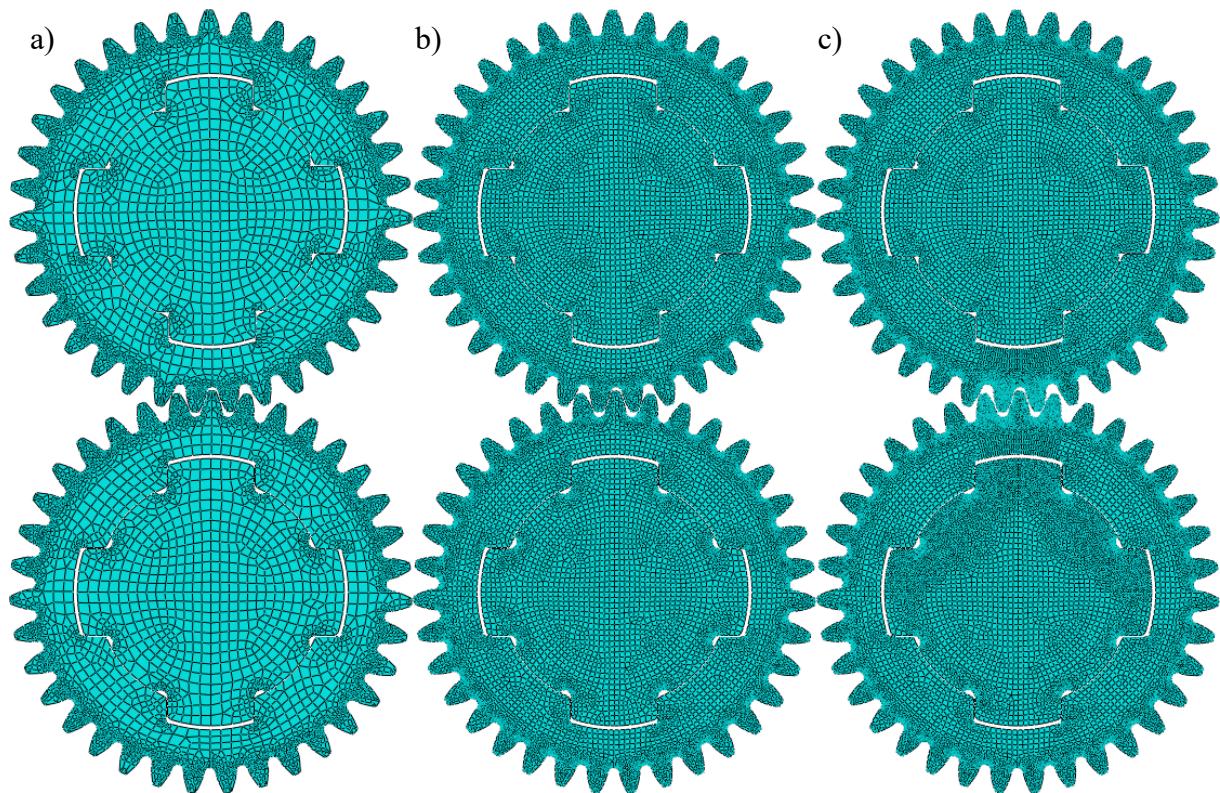
elementi imaju samo stupnjeve slobode pomaka), čime je sklop uz realizaciju kontakata potpuno statički određen.

Zatim je definirano opterećenje u vidu sprega dvaju sila iznosa  $100 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$  na krakovima od 8,5 mm naredbom *Create Load, Concentrated force*. Opcijom *Amplitude* definiran je postupni prist sile od 0 do krajne vrijednosti unutar prve milisekunde drugog koraka. Prikaz rubnih uvjeta pomaka i opterećenja na modelu dan je na Slici 24.



Slika 24. Opterećenja i rubni uvjeti pomaka

U modulu *Mesh* generirane su tri progresivno finije mreže od 10496, 24037 i 36269 elemenata, prikazane na Slici 25.

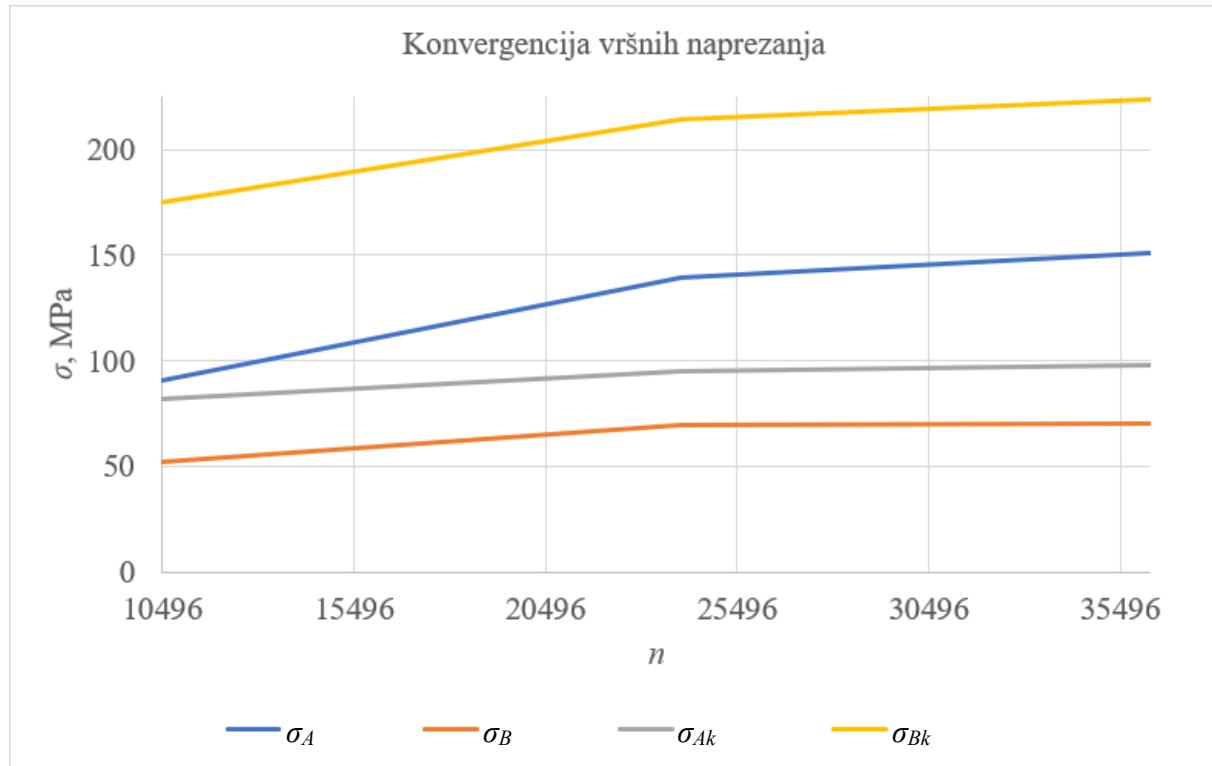


Slika 25. Mreže od: a) 10496, b) 24037 i c) 36269 elemenata

Konvergencija numeričkih analiza prikazana je tablično Tablicom 6. i na Slici 26.

**Tablica 6. Konvergencija vršnih naprezanja na klinastim vratilima i korijenima zuba zupčanika**

Broj iteracije	1.	2.	3.
$n$	10496	24037	36269
$\sigma_A$ , MPa	90,26	139,1	151,1
$\sigma_B$ , MPa	51,96	69,23	70,49
$\sigma_{Ak}$ , MPa	82,07	95,01	98,02
$\sigma_{Bk}$ , MPa	199,2	208,1	223,9



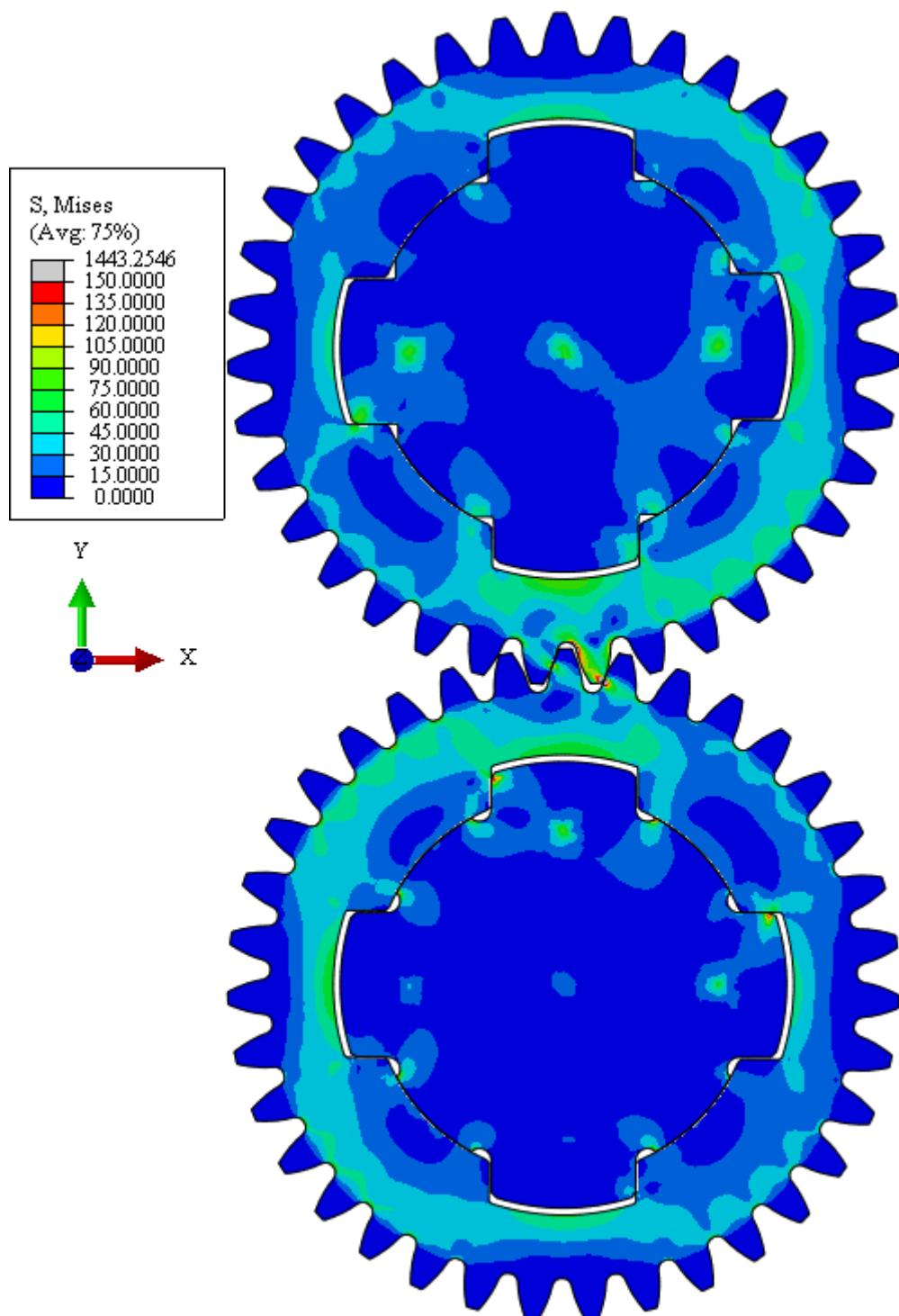
Slika 26. Grafički prikaz konvergencije vršnih naprezanja

Za sve provedene simulacije je udio kinetičke energije u ukupnoj energiji  $\ll 1\%$ , čime je zadovoljen uvjet za smislenost provedbe kvazistatičke analize.

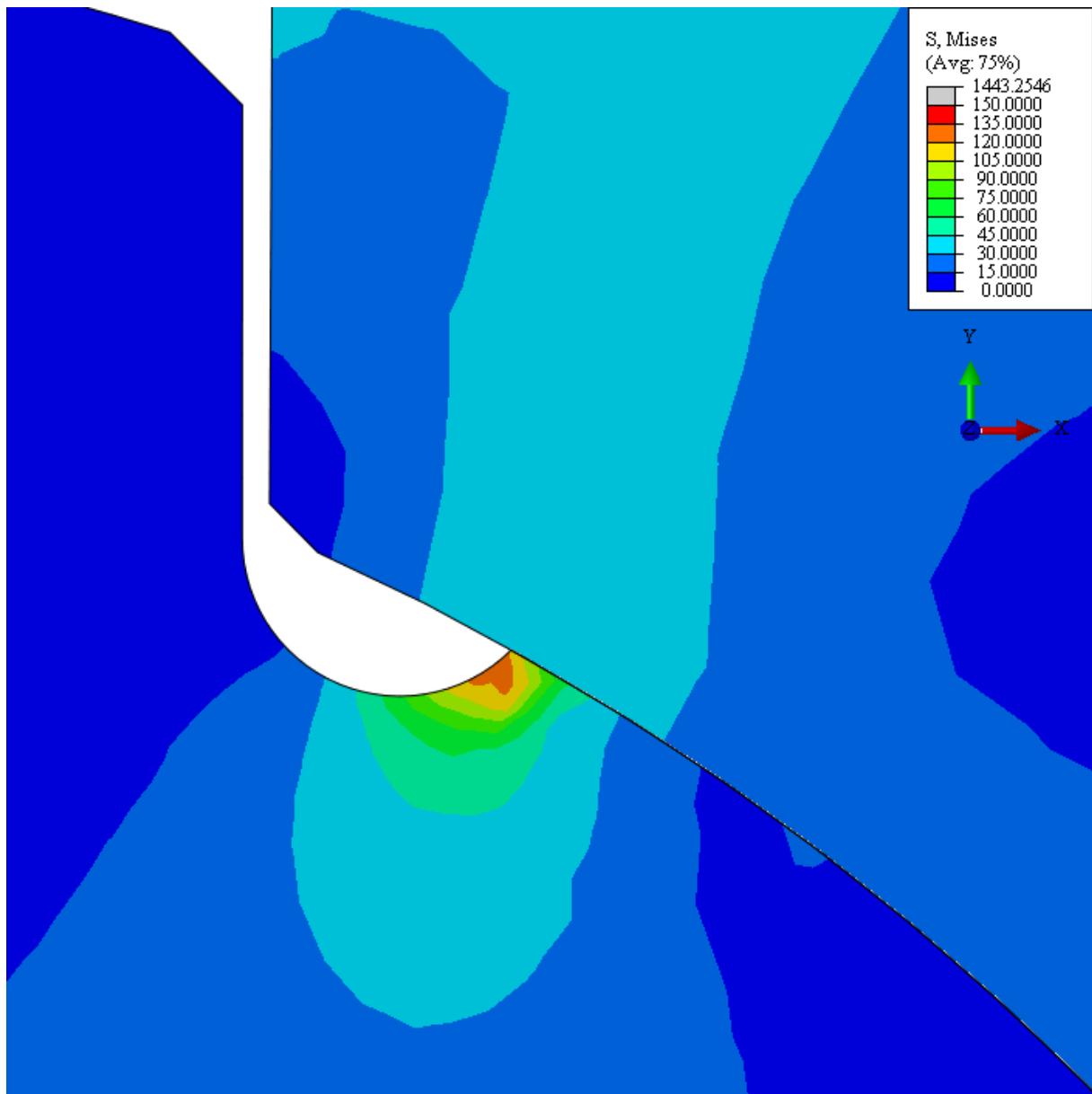
Može se uočiti da je vršno naprezanje za oblik A klinastog vratila znatno više od vršnog naprezanja za oblik B. Kako bi se utvrdila egzaktna razlika bilo bi dobro provesti zasebnu statičku analizu koja bi uključivala samo klinasta vratila, ali se uz zanemarenje utjecaja različitih polja naprezanja u blizini zuba u zahvatu može pretpostaviti da je oblik B po svojoj izvedbi povoljniji od oblika A. Zanimljivo je da zbog trenja steznog spoja kojim je osigurano unutarnje centriranje vršno naprezanje nastupa na strani s neopterećenim bokom klina. Nažalost ne postoji normiran proračun niti poznata analitička rješenja za promatrani oblik klinastog vratila, tako da ne postoji osnova za usporedbu rezultata.

Kako su promatrani zupčanici u stvari zupčanici s relativno tankim vijencem, ni za njih se ne može dobiti pouzdano normirano, odnosno analitičko rješenje. Međutim, rezultati se mogu kvalitativno usporediti s rezultatima iz [10], koji se relativno dobro poklapaju s rezultatima provedene numeričke analize. Jedini izuzetak čine naprezanja na boku opterećenijeg zuba u zahvatu, no to je očekivano s obzirom na potrebnu gustoću mreže za ispravan opis Herzovog pritiska na mjestu zahvata, pa se rezultati lokalno oko kontakta dva zuba ne mogu smatrati posve pouzdanima. Osobito je interesantno da stezni spoj s klinastim vratilom izaziva naprezanja na uzubinama zupčanika.

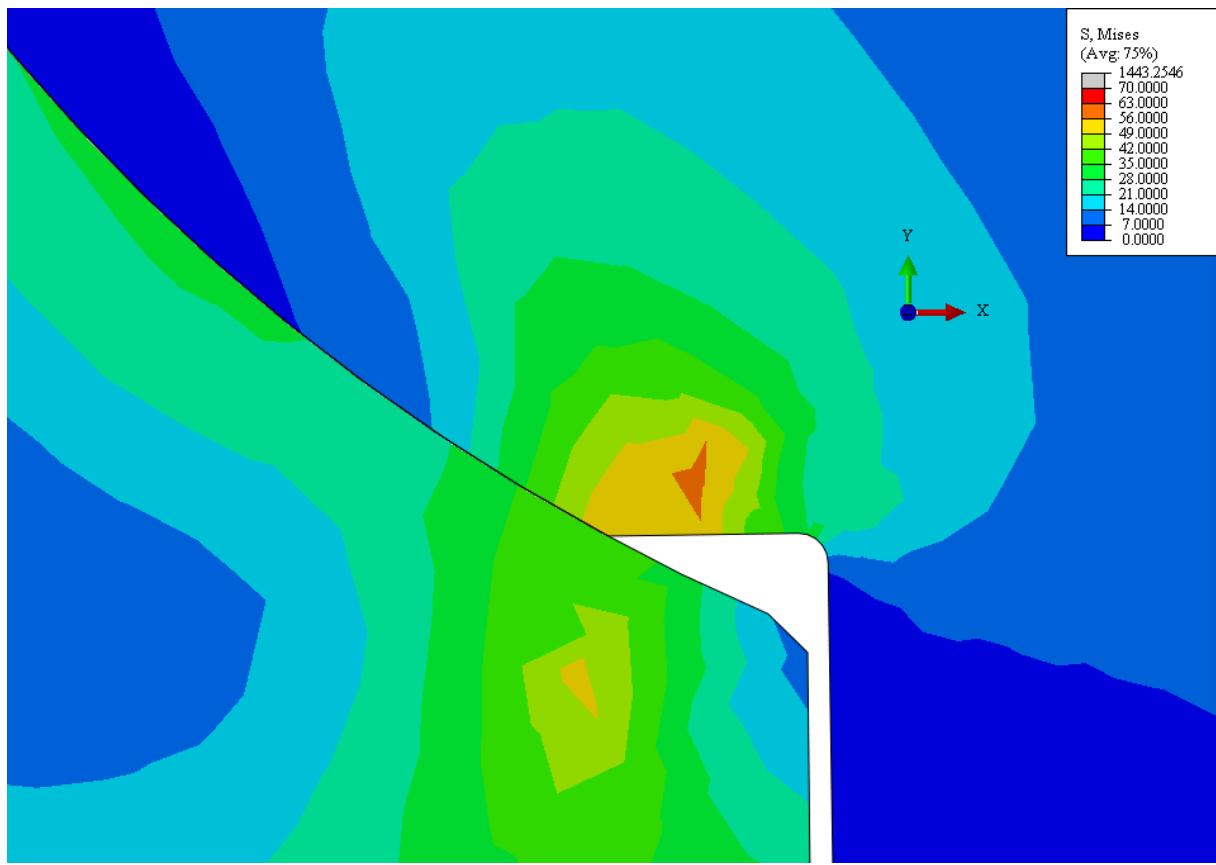
Slike 27., 28., 29., 30., 31. i 32. pokazuju raspodjelu naprezanja po sklopu i regijama od osobitog interesa.



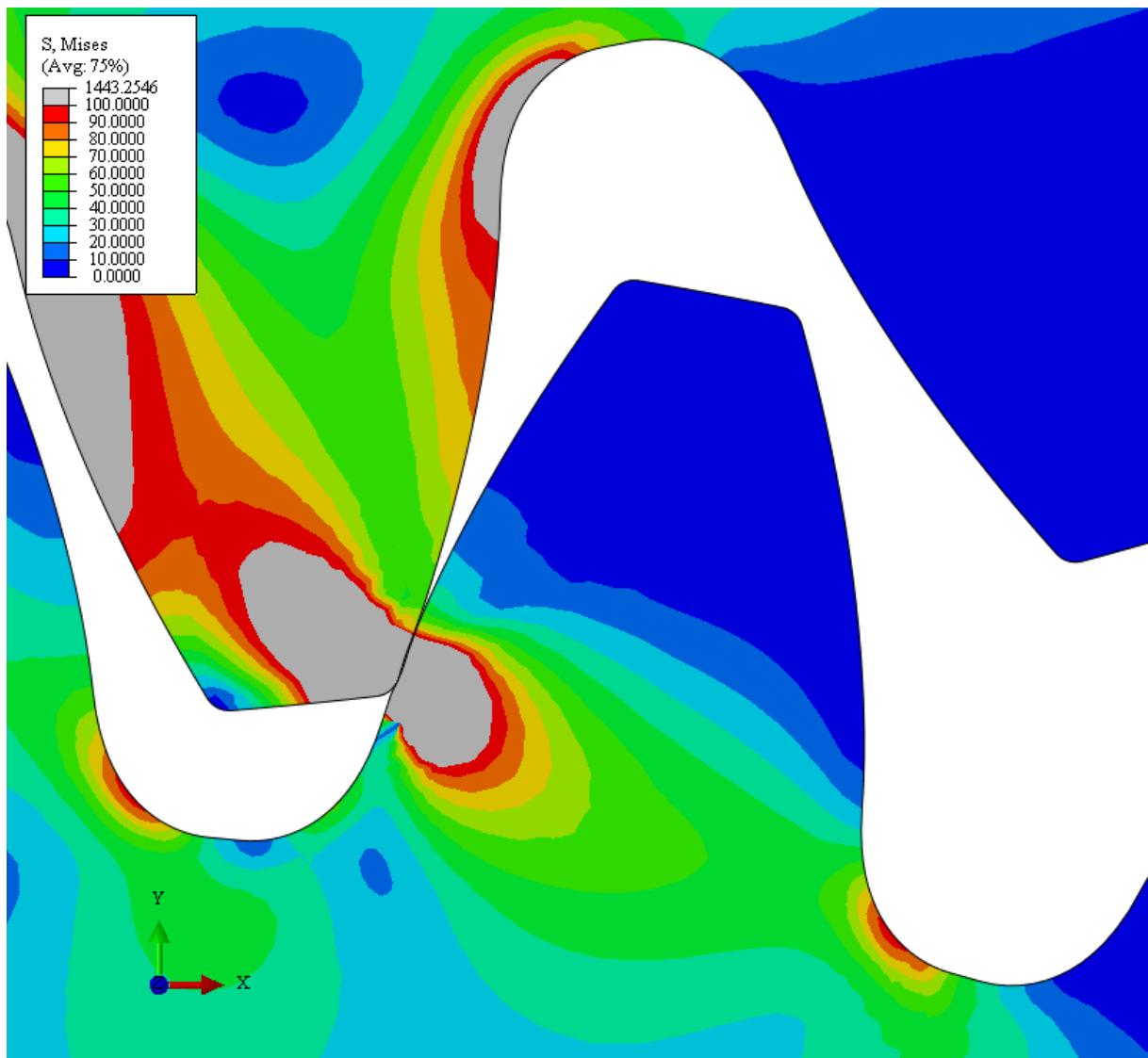
Slika 27. Raspodjela naprezanja (u MPa) – cijeli sklop



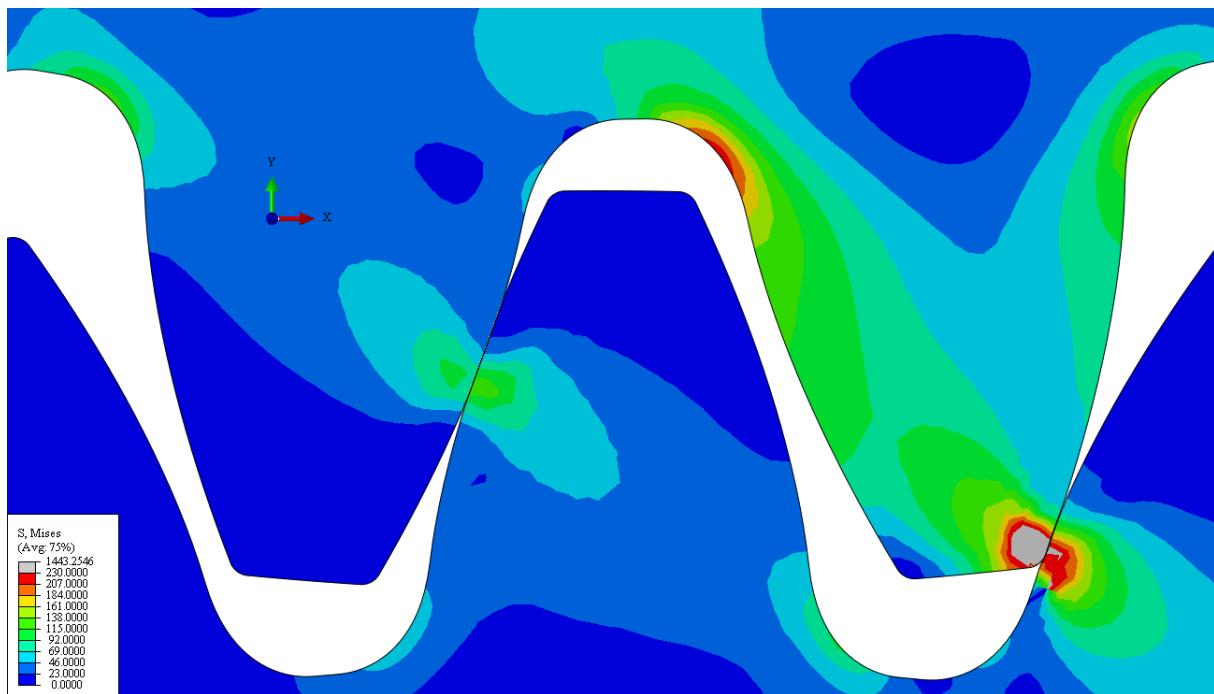
Slika 28. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za klinasto vratilo oblika A



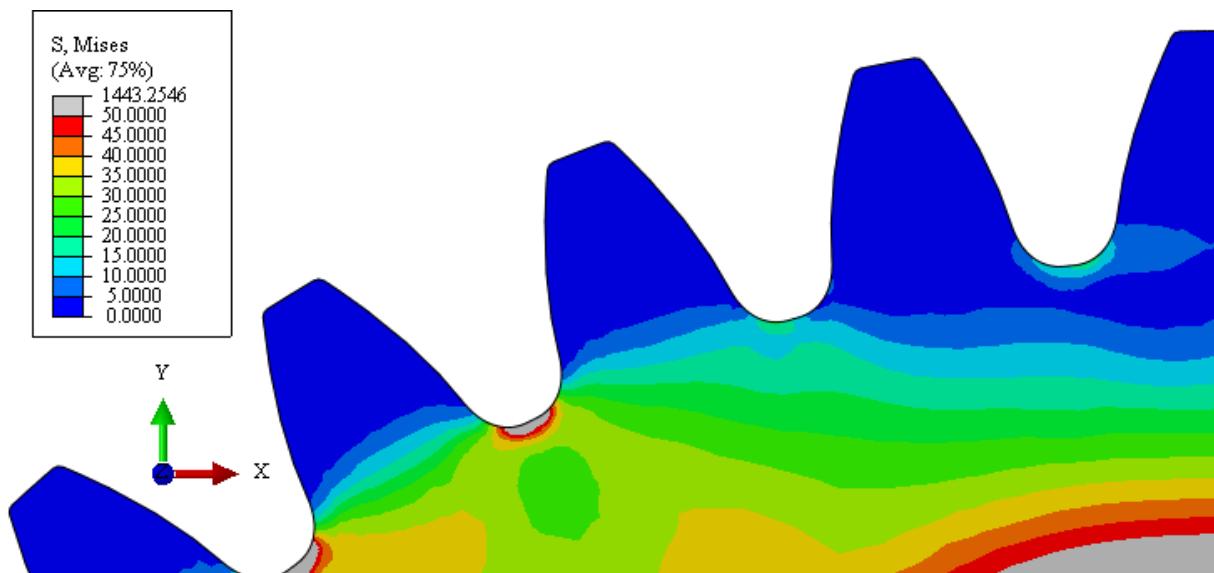
Slika 29. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za klinasto vratilo oblika B



Slika 30. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za gonjeni zupčanik



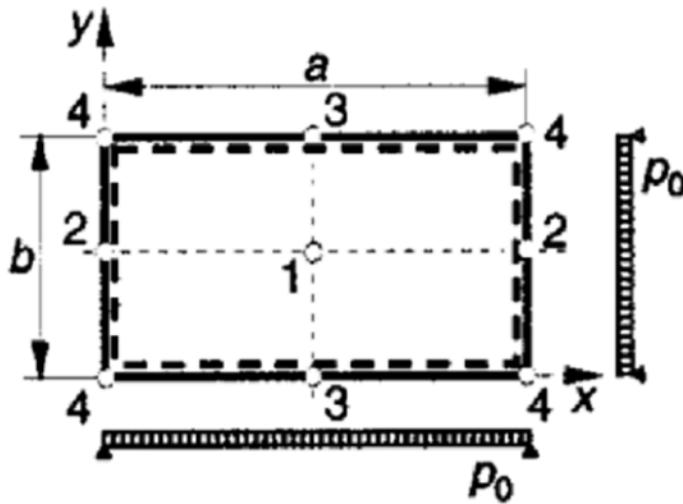
Slika 31. Raspodjela naprezanja (u MPa) – vršno naprezanje za pogonski zupčanik



Slika 32. Raspodjela naprezanja (u MPa) – neopterećene uzubine

### 3. Treći zadatak

Za pravokutnu ploču opterećenu kontinuiranim opterećenjem  $p_0$  potrebno je odrediti progib središta ploče (točka 1 na Slici 33.) primjenom metode konačnih elemenata. Rezultat je potrebno usporediti s analitičkim rješenjem. Potrebno je primijeniti rubne uvjete simetrije i provesti analizu konvergencije rješenja.



Slika 33. Zadana konfiguracija – puna linija označava uklještenje, crtkana slobodno oslonjen rub [11]

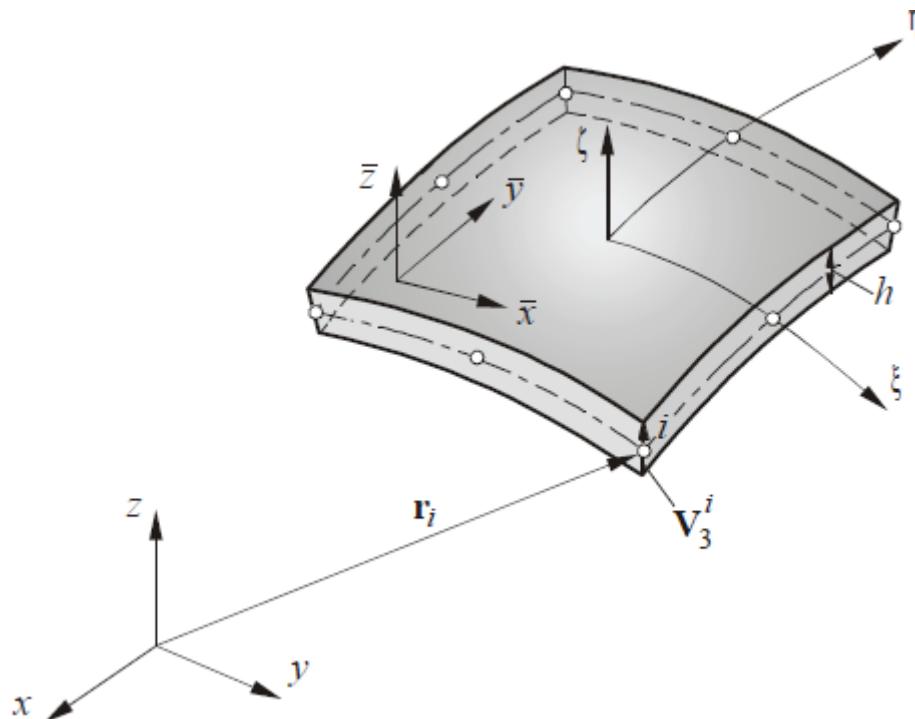
Tablica 7. Zadane karakteristike ploče [11]

$E$ , GPa	$\nu$	$p_0$ , $\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$	$h$ , mm	$a \cdot b^{-1}$	$a$ , mm
120	0,3	1	3	1,8	140

Analitičko rješenje dobiveno je na temelju podataka iz [12]:

$$w_1 = -\frac{p_0 \cdot a^4}{E \cdot h^3} \cdot 0,0097 = -0,00115 \text{ mm.} \quad [12] \quad (38)$$

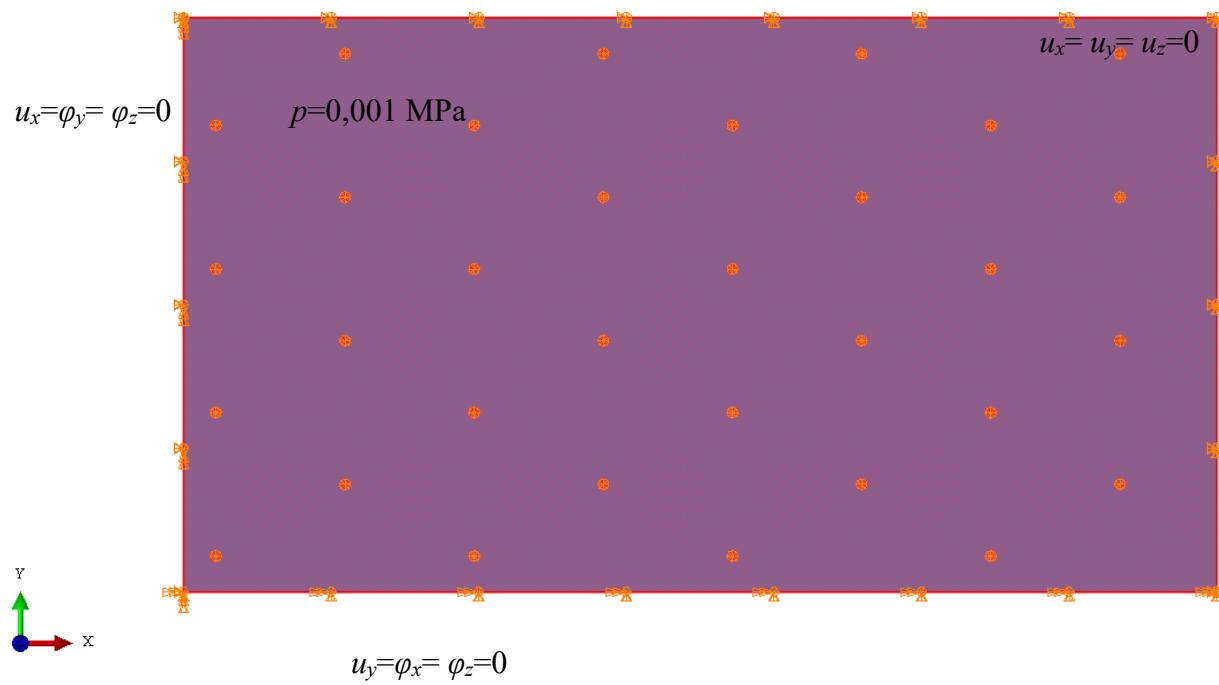
Za izračun metodom konačnih elemenata korišteni su pravokutni dvostruko zakrivljeni ljuskasti elementi drugog reda reducirane integracije S8R (Slika 34.) s ukupno 48 stupnjeva slobode – tri rotacije i tri translacije po čvoru, bazirani na Reissner-Mindlinovom kinematičkom modelu po kojem normale na srednju plohu ostaju ravne, ali ne nužno i okomite. Uporabom elemenata drugog reda i primjenom reducirane integracije čime je bitno ublažen efekt *shear-lockinga*, odnosno pretjerane smične krutosti u odnosu na fleksiju krutost. Pomaci čvorova računaju se analogno postupku opisanom u prvom zadatku.



Slika 34. Dvostruko zakrivljeni četverokutni ljuskasti konačni element drugog reda [13]

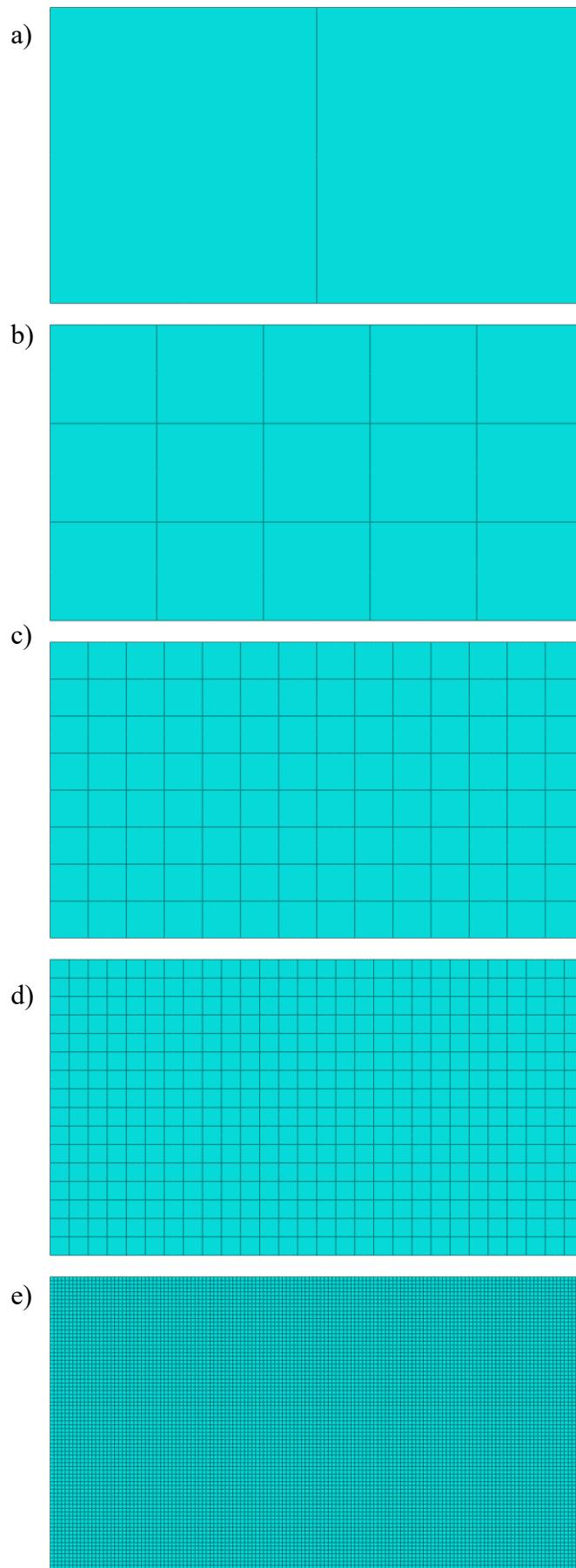
U modulu *Part* je naredbom *Create Part* i opcijama *3D*, *Deformable*, *Shell*, *Planar* generiran četvrtinski model zadane geometrije, što je moguće zahvaljujući dvostrukoj simetriji problema. U modulu *Property* ploči su dodijeljena svojstva materijala analogno postupku opisanom u drugom zadatku s veličinama iz Tablice 7., a svojstva presjeka generirana su naredbom *Create Section* i opcijama *Shell*, *Homogeneous*, te je presjeku dodijeljena zadana debljina od 3 mm.

U modul *Assembly* je ploča uvezena naredbom *Create Instance*, opcijama *Parts*, *Dependent*. Potom je u modulu *Step* generiran korak naredbom *Create Step* i opcijom *Static*, *General*. U modulu *Load* geometriji je dodijeljeno opterećenje od 0,001 MPa naredbom *Create Load* i opcijama *Mechanical*, *Pressure*, te rubni uvjeti pomaka u vidu ukinutih translacionih stupnjeva slobode po vanjskim bridovima i  $x$ - odnosno  $y$ -simetrije na unutarnjim bridovima naredbom *Create Boundary Condition* s opcijama *Symmetry/Antisymmetry/Encastre* i *Pinned*, odnosno *X-Symm* i *Y-Symm*. Opterećenja i rubni uvjeti pomaka prikazani su na Slici 35.



Slika 35. Opterećenja i rubni uvjeti pomaka zadani na četvrtinskom modelu ploče

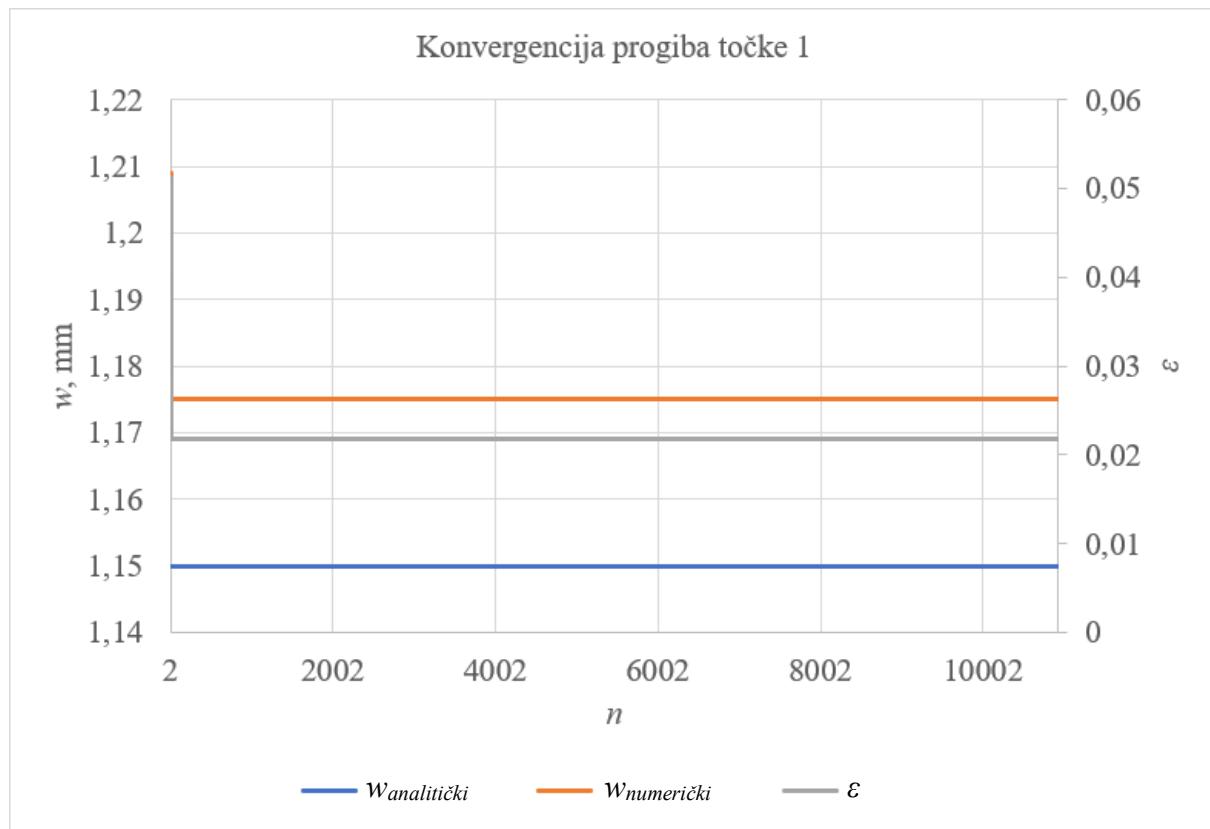
U modulu *Mesh* generirano je pet različitih mreža s 2, 15, 115, 448 i 10920 elemenata, po Slici 36. S navedenim mrežama provedene su numeričke analize, te je konvergencija rješenja zabilježena tablicom 8. i Slikom 37.



**Slika 36.** Mreže od: a) 2, b) 15, c) 115, d) 448 i e) 10920 elemenata

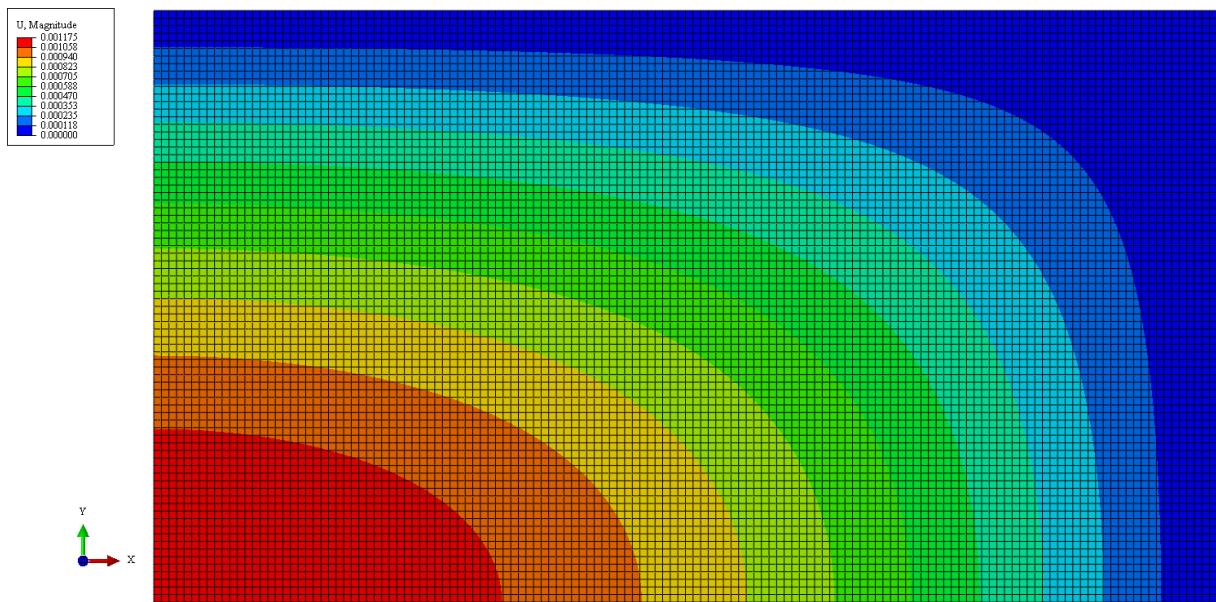
Tablica 8. Konvergencija progiba točke 1

Broj iteracije	1.	2.	3.	4.	5.
$n$	2	15	115	448	10920
$w_{\text{analitički}}, \mu\text{m}$	1,15				
$w_{\text{numerički}}, \mu\text{m}$	1,209	1,175			
$\varepsilon$	0,0513	0,02174			



Slika 37. Grafički prikaz konvergencije progiba točke 1

Može se uočiti da je rješenje potpuno konvergiralo već s mrežom od 15 elemenata. Odstupanje od analitičkog rješenja iznosi svega 2,174%, što je prihvatljivo. Raspodjela progiba po četvrtini ploče prikazana je na Slici 38.



Slika 38. Raspodjela progiba (u mm) po četvrtini ploče

## 4. Četvrti zadatak

Za pravokutnu ploču zadalu u trećem zadatku potrebno je provesti analizu prisilnih vibracija s harmonijskom uzbudom za raspon frekvencija uzbudnog opterećenja ( $\Omega=2\cdot\pi\cdot f$ ) od  $f=0$  do  $f=1,1 \text{ f}_1$ , gdje je  $f_1$  prva vlastita frekvencija. Potrebno je provesti provjeru konvergencije prve vlastite frekvencije i usporediti ju s analitičkim rješenjem i odrediti maksimalnu amplitudu, tj. maksimalni progib ploče.

Tablica 9. Dodatne veličine zadane u četvrtom zadatku [11]

$\zeta$	$\rho, \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
3%	6100

Analitički se prva vlastita frekvencija ploče može odrediti pomoću izraza iz [14]:

$$\lambda_{11} = \pi^2 \cdot \left( 1^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \cdot 1^2 \right) = 41,85, [14] \quad (39)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = 519200 \text{ N}\cdot\text{mm}, [14] \quad (40)$$

$$\omega_1 = \omega_{11} = \frac{\lambda_{11}}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}} = 8597 \text{ s}^{-1}, [14] \quad (41)$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1368 \text{ Hz.} \quad (42)$$

Za numerički proračun jednadžba dinamičke ravnoteže (32) prelazi u:

$$M\ddot{V} + KV = \mathbf{0}, \quad (43)$$

te uz pretpostavku pomaka opisanih harmonijskom funkcijom u vremenu:

$$v = \bar{v} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (44)$$

gdje je  $\bar{v}$  vektor amplituda čvornih pomaka, dobivamo problem vlastitih vrijednosti:

$$[k \cdot m \cdot \omega^2] \bar{v} = \mathbf{0}. \quad (45)$$

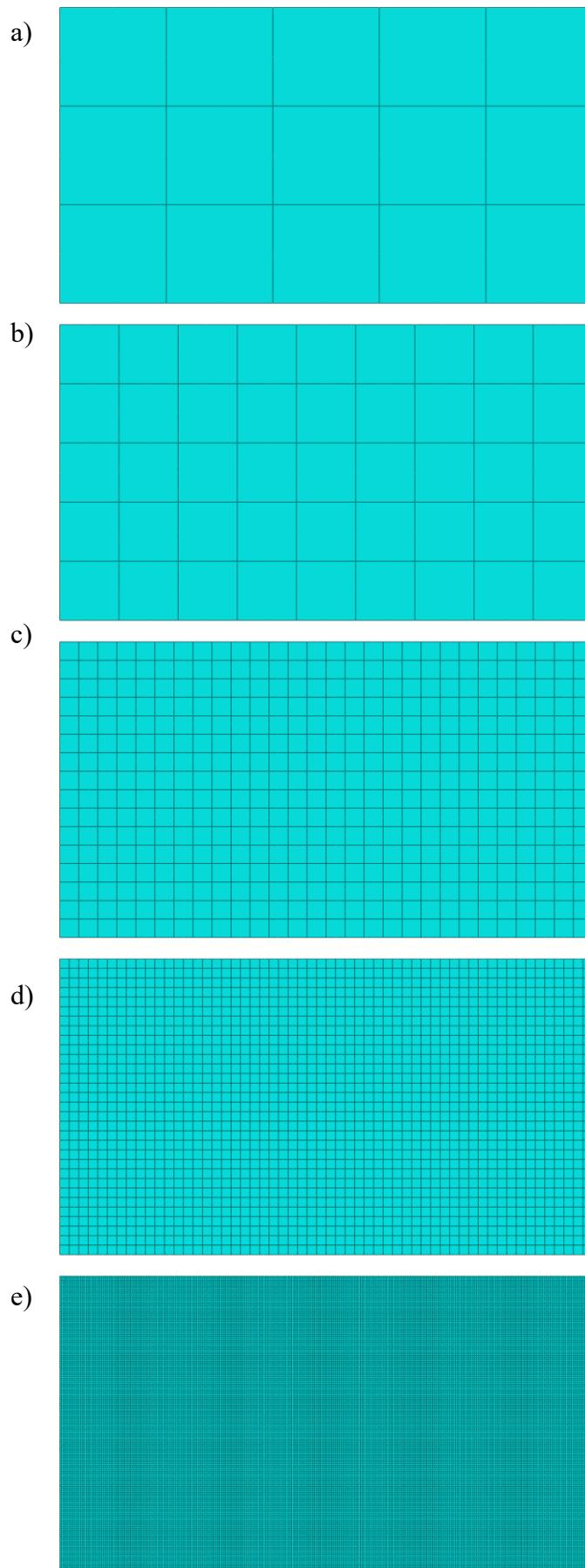
Za dinamičke probleme općenito vrijedi da se ne smiju koristiti rubni uvjeti simetrije kojima se smanjuje domena proračuna. Kako simetrične konstrukcije mogu imati nesimetričnu formu vibriranja, ni za analizu vlastitih frekvencija nisu primjenjivi rubni uvjeti simetrije. Zbog toga je u modulu *Part* generiran puni model ploče zadane u trećem zadatku. U modulu *Property* tako kreiranoj geometriji dodijeljen je isti presjek kao i u trećem zadatku, no svojstva materijala su modificirana dodavanjem gustoće po podacima iz Tablice 9. U modulu *Step* kreiran je korak naredbom *Create Step* s opcijama *Frequency* i *Linear perturbation*. Odabran je rješavač vlastitih vrijednosti *Subspace*, te je zatražen izračun prvih 10 vlastitih frekvencija ploče. U modulu *Assembly* naredbom *Replace Instance* zamijenjen je četvrtinski model ploče s punom geometrijom ploče. Rubni uvjeti pomaka definirani su u modulu *Load* u vidu ukidanja translatornih stupnjeva slobode po vanjskim bridovima naredbom *Create Boundary Condition*

s opcijom *Symmetry/Antisymmetry/Encastre* i *Pinned*. Rubni uvjeti pomaka prikazani su na Slici 39.



Slika 39. Rubni uvjeti pomaka zadani na punoj geometriji ploče

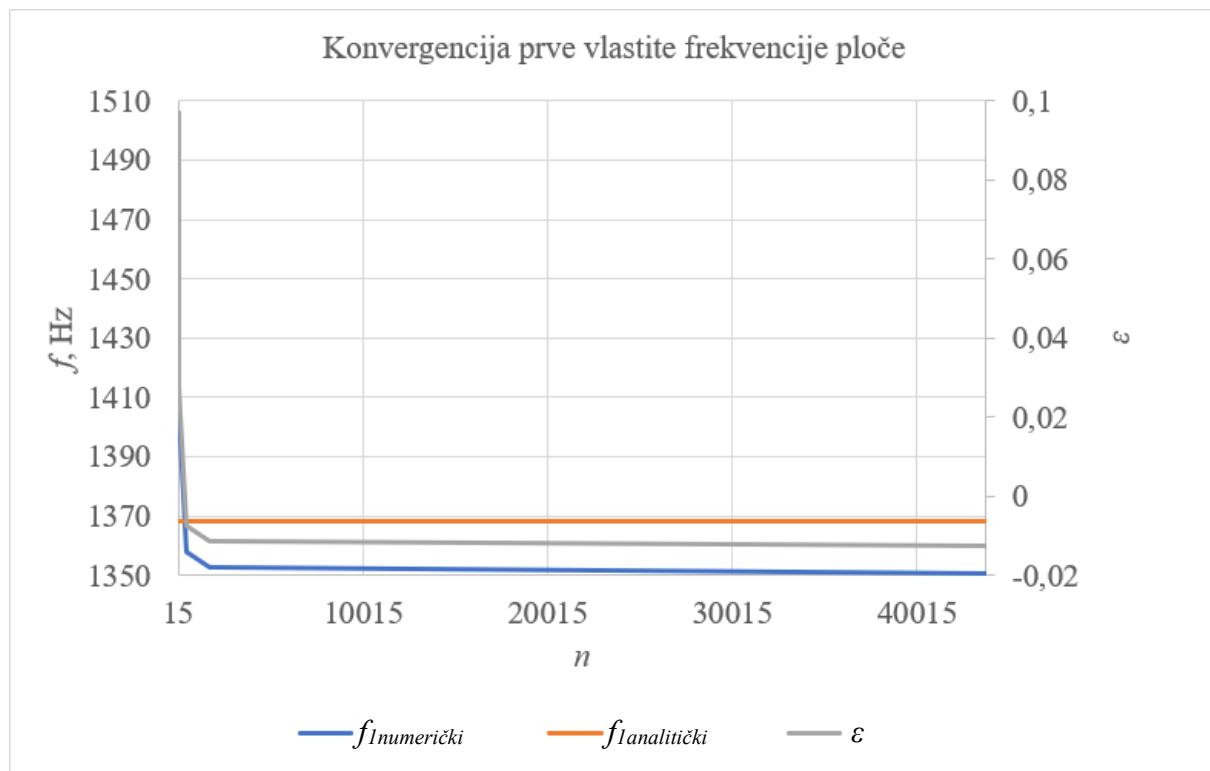
U modulu *Mesh* generirano je pet mreža s 15, 45, 448, 1736 i 43680 S8R elemenata, opisanih u trećem zadatku. Mreže su prikazane na Slici 40. S navedenim mrežama provedene su numeričke analize, te je konvergencija rješenja zabilježena tablicom 10. i Slikom 41.



Slika 40. Mreže od: a) 15, b) 45, c) 448, d) 1736 i e) 43680 elemenata

Tablica 10. Konvergencija prve vlastite frekvencije ploče

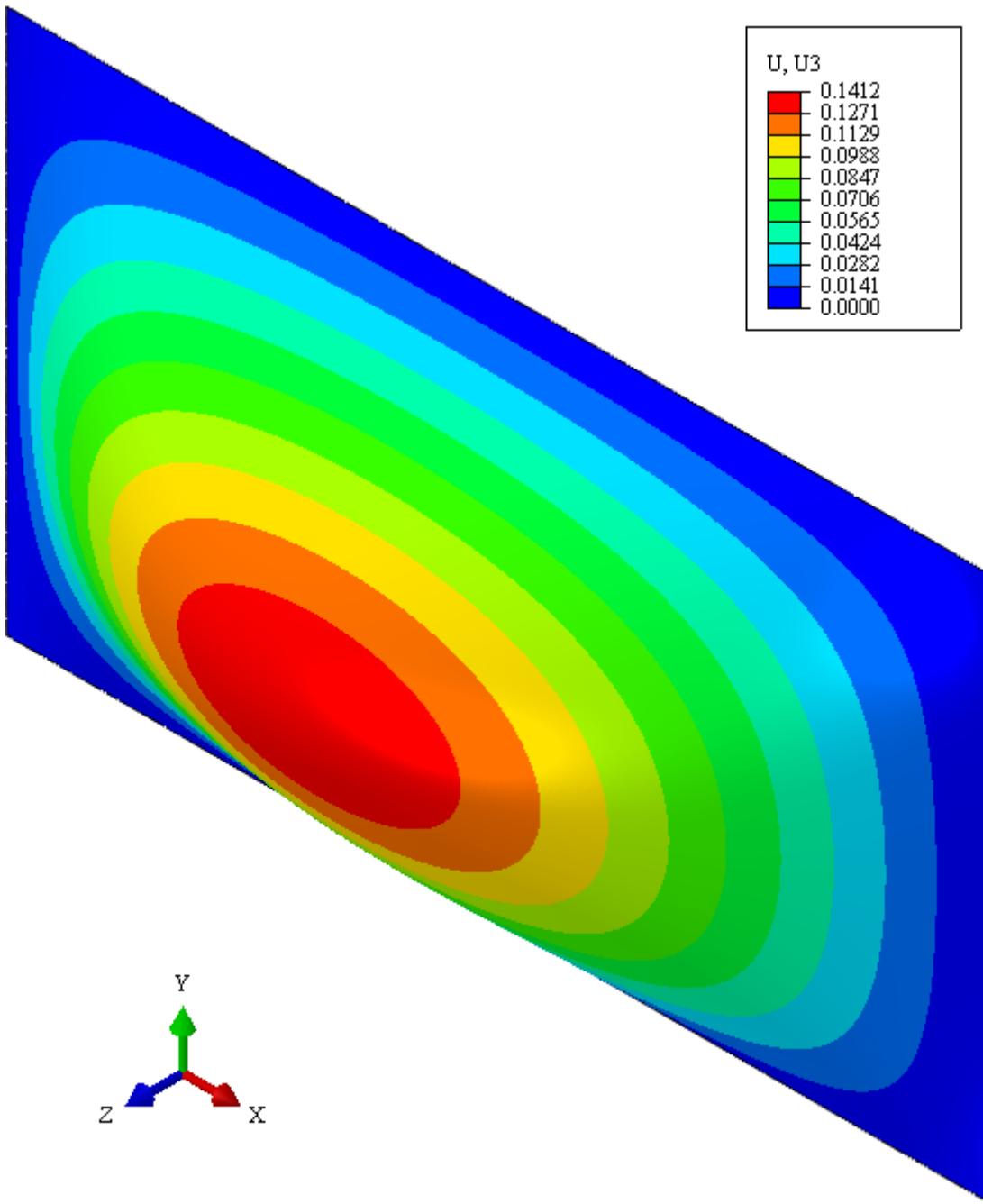
Broj iteracije	1.	2.	3.	4.	5.
$n$	15	45	448	1736	43680
$f_{\text{analitički}}, \text{Hz}$	1368				
$f_{\text{numerički}}, \text{Hz}$	1501	1406	1358	1353	1351
$\varepsilon$	0,09722	0,02778	$-7,31 \cdot 10^{-3}$	-0,01096	-0,01243



Slika 41. Grafički prikaz konvergencije prve vlastite frekvencije ploče

Može se uočiti da je numerički dobivena prva vlastita frekvencija neznatno ( $\sim 1\%$ ) niža od analitički dobivene prve vlastite frekvencije. S obzirom na minornu promjenu u rješenju između četvrte i pete iteracije, rješenje se može smatrati konvergiranim.

Oblik prve forme vibriranja prikazan je na Slici 42., s 200 puta uvećanim deformacijama numeričke analize.



Slika 42. Oblik prve forme vibriranja s preuveličanim deformacijama

Ovisnost vršnih progiba o frekvenciji pobude određena je modalnom metodom, u kojoj iz modificirane jednadžbe dinamičke ravnoteže:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (46)$$

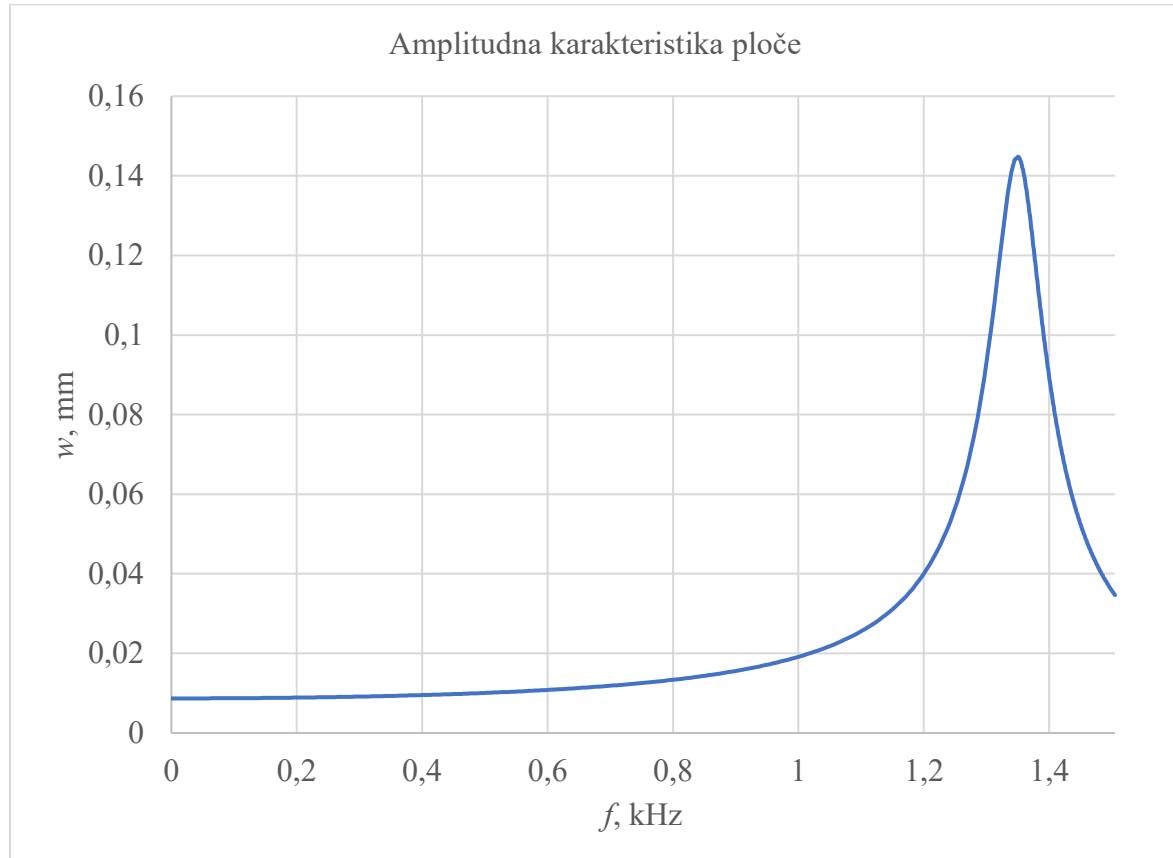
dobivamo niz modalnih skalarnih jednadžbi:

$$\ddot{z}_i + 2\cdot\zeta_i\cdot\omega_i\cdot\dot{z}_i + \omega_i^2\cdot z_i = p_i \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (47)$$

čijom superpozicijom dobivamo za danu frekvenciju dobivamo traženi vektor čvornih pomaka:

$$\mathbf{v} = z_i \mathbf{v}_i. \quad (48)$$

Kako bi se dobila tražena karakteristika kreiran je u modulu *Step* naredbom *Create Step* i opcijama *Steady-state dynamics*, *Modal* i *Linear perturbation* korak u kojem je definirana analiza frekvencijskog raspona od  $\sim 0$  do 1505 Hz u 250 koraka u jednakim, linearnim razmacima. Frekvencijskom rasponu pridruženo je prigušenje od 3%. Odziv točke 1 praćen je naredbom *Create History* i opcijom *Generalized displacements* na svakom inkrementu. Točka 1 selektirana je u modulu *Mesh*. Korištena je mreža s 43680 S8R elemenata, s obzirom da je već utvrđeno konvergiranje analize za prvu glavnu frekvenciju s tom mrežom. Amplitudna karakteristika prikazana je na Slici 43.

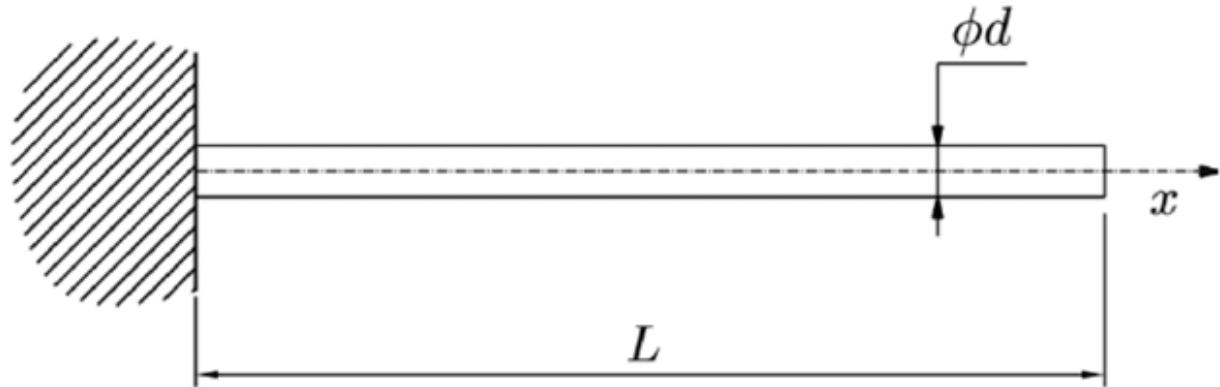


Slika 43. Amplitudna karakteristika ploče

Očekivano je odziv najveći upravo u neposrednoj blizini prve glavne frekvencije, dok je u području dalje od prve glavne frekvencije bitno manji. Vršni progib ploče iznosi 0,1448 mm pri frekvenciji od 1351 Hz - numerički dobivenoj prvoj vlastitoj frekvenciji.

## 5. Peti zadatak

Za homogenu gredu konstantne krutosti i jednolikog poprečnog presjeka oslonjenu prema Slici 44. potrebno je odrediti najnižu vlastitu frekvenciju analitički, ručno i u programskom paketu primjenom dva ili više grednih konačnih elemenata. Potrebno je razmotriti uzdužne, torzijske i savojne vibracije, te prikazati konvergenciju rezultata i usporediti ih s analitičkim rezultatima.



Slika 44. Zadana konfiguracija grede [11]

Zadane karakteristike grede dane su u Tablici 11. Svojstva materijala uzeta su iz [15] za EN-GJL-150.

Tablica 11. Zadane karakteristike grede [11, 15]

$\rho$ , kg·m <sup>-3</sup>	$E$ , GPa	$\nu$	$L$ , mm	$d$ , mm
7100	103	0,26	1500	45

Analitički izrazi za izračun uzdužnih, torzijskih i savojnih vlastitih frekvencija preuzeti su iz [14]:

$$\omega_{1aksijalno} = \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 126,1 \text{ s}^{-1}, [14] \quad (49)$$

$$\omega_{1torziski} = \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho \cdot 2 \cdot (1+\nu)}} = 79,45 \text{ s}^{-1}, [14] \quad (50)$$

$$I = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}, \quad (51)$$

$$\omega_{1fleksiski} = \frac{3,516}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} = 2,117 \text{ s}^{-1}, [14] \quad (52)$$

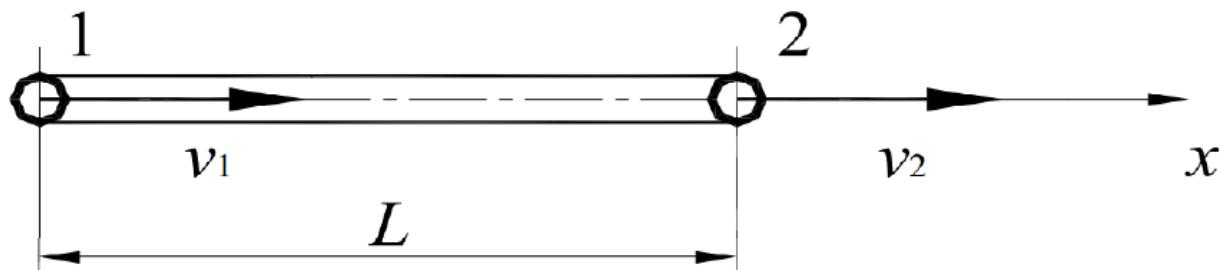
a primjenom izraza (42) dobivaju se analitički izračunate prve uzdužne, torzijske i savojne vlastite frekvencije:

$$f_{1aksijalno} = 20,07 \text{ Hz}, \quad (53)$$

$$f_{1torziski} = 12,64 \text{ Hz}, \quad (54)$$

$$f_{\text{flexijski}} = 0,3369 \text{ Hz.} \quad (55)$$

Za određivanje uzdužne vlastite frekvencije korišten je gredni element za analizu trodimenzijskih okvirnih konstrukcija, koji nastaje superpozicijom osnovnog štapnog, dva osnovna gredna i osnovnog štapnog konačnog elementa opterećenog na uvijanje. Kako su za izračun uzdužne vlastite frekvencije samo uzdužne krutosti od interesa, račun s grednim elementom za analizu dvodimenzionalnih konstrukcija svodi se na račun s osnovnim štapnim elementom po Slici 45.



Slika 45. Osnovni štapni element [16]

Funkcije oblika  $i$ -tog elementa ovog tipa glase:

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} 1-x \cdot l_i^{-1} \\ x \cdot l_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

a matrica krutosti  $i$ -tog elementa je jednaka:

$$\mathbf{k}_i = E_i \cdot \begin{bmatrix} A_i \cdot l_i^{-1} & -A_i \cdot l_i^{-1} \\ -A_i \cdot l_i^{-1} & A_i \cdot l_i^{-1} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Matrica mase računa se pomoću izraza:

$$\mathbf{m}_i = \rho \cdot \int_{V_i} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \frac{A_i \cdot l_i \cdot \rho_i}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

pri čemu je prirodno diskretizirati štap pomoću dva elementa jednake duljine, tako da je:

$$l_1 = l_2 = 0,5 \cdot L. \quad (59)$$

Imajući na umu orijentaciju štapnih elemenata, vrijedi:

$$\mathbf{k}_{g1} = \mathbf{k}_1, \quad (60)$$

$$\mathbf{k}_{g2} = \mathbf{k}_2. \quad (61)$$

Navedene matrice potrebno je izraziti s obzirom na globalne stupnjeve slobode. Red tako izražene matrice krutosti jednak je ukupnom broju stupnjeva slobode proračunskog modela, a od nule se razlikuju samo oni retci i stupci koji odgovaraju stupnjevima slobode elementa. Matrica krutosti  $i$ -tog elementa izražena preko globalnih stupnjeva slobode povezana je s matricom krutosti  $i$ -tog elementa u orijentaciji globalnog koordinatnog sustava izrazom:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{a}_{gi}^T \mathbf{k}_{gi} \mathbf{a}_{gi}, \quad (62)$$

pri čemu su matrice identifikacije  $\mathbf{a}_{gi}$  jednake:

$$\mathbf{a}_{g1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\mathbf{a}_{g2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

pa se globalna matrica krutosti može dobiti sumiranjem matrica krutosti pojedinih elemenata:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{K}_i, \quad (65)$$

$$\mathbf{K} = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot E}{L \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Potpuno analogno se dobiva globalna matrica mase:

$$\mathbf{M} = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L}{6 \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Uvrštavanjem matrice krutosti i matrice mase u generalizirani problem vlastitih vrijednosti:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) = 0, \quad (67)$$

te uvrštavanjem rubnog uvjeta  $V_1 = 0$ , dobiva se:

$$\det \left( \frac{d^2 \cdot \pi \cdot E}{L \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \omega_n^2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot L}{6 \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (68)$$

iz čega slijedi da je:

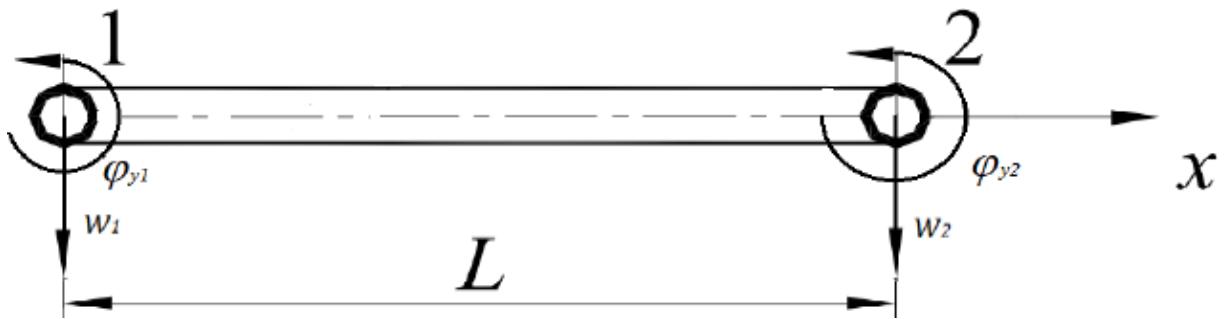
$$\omega_{1aksijalnoR} = 129,4 \text{ s}^{-1}, \quad (69)$$

$$f_{1aksijalnoR} = 20,59 \text{ Hz}, \quad (70)$$

$$\omega_{2aksijalnoR} = 452 \text{ s}^{-1}, \quad (71)$$

$$f_{2aksijalnoR} = 71,94 \text{ Hz}. \quad (72)$$

Za analizu fleksijskih vibracija gredni element za analizu trodimenzijskih rešetkastih konstrukcija prelazi u osnovni gredni element, prikazan na Slici 46.



Slika 46. Osnovni gredni element [16]

Funkcije oblika  $i$ -tog elementa ovog tipa glase:

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 \cdot l_i^2 + 2x^3 \cdot l_i^3 \\ -x + 2x^2 \cdot l_i^1 - x^3 \cdot l_i^2 \\ 3x^2 \cdot l_i^2 - 2x^3 \cdot l_i^3 \\ x^2 \cdot l_i^1 - x^3 \cdot l_i^2 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

a matrica krutosti  $i$ -tog elementa je jednaka:

$$\mathbf{k}_i = E_i \cdot \begin{bmatrix} 12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 \\ -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 4 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 \\ -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 \\ -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 4 \cdot I_i \cdot l_i^1 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Matrica mase računa se pomoću izraza:

$$\mathbf{m}_i = \rho \cdot \int_{V_i} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \frac{\rho \cdot l \cdot \rho_i}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & -22 \cdot l & 54 & 13 \cdot l \\ -22 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -13 \cdot l & -3 \cdot l^2 \\ 54 & -13 \cdot l & 156 & 22 \cdot l \\ 13 \cdot l & -3 \cdot l^2 & 22 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

pri čemu je prirodno diskretizirati štap pomoću dva elementa jednake duljine, tako da je:

$$l_1 = l_2 = 0,5 \cdot L. \quad (76)$$

Imajući na umu orientaciju štarnih elemenata, vrijedi:

$$\mathbf{k}_{g1} = \mathbf{k}_1, \quad (77)$$

$$\mathbf{k}_{g2} = \mathbf{k}_2. \quad (78)$$

Navedene matrice potrebno je izraziti s obzirom na globalne stupnjeve slobode. Red tako izražene matrice krutosti jednak je ukupnom broju stupnjeva slobode proračunskog modela, a od nule se razlikuju samo oni retci i stupci koji odgovaraju stupnjevima slobode elementa. Matrica krutosti  $i$ -tog elementa izražena preko globalnih stupnjeva slobode povezana je s matricom krutosti  $i$ -tog elementa u orijentaciji globalnog koordinatnog sustava izrazom:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{a}_{gi}^T \mathbf{k}_i \mathbf{a}_{gi}, \quad (79)$$

pri čemu su matrice identifikacije  $\mathbf{a}_{gi}$  jednake:

$$\mathbf{a}_{g1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (80)$$

$$\mathbf{a}_{g2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

pa se globalna matrica krutosti može dobiti sumiranjem matrica krutosti pojedinih elemenata:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{K}_i, \quad (86)$$

$$\mathbf{K} = E_i \cdot \begin{bmatrix} 12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 0 & 0 \\ -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 4 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 0 & 0 \\ -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 24 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 0 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 \\ -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 0 & 8 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 \\ 0 & 0 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 \\ 0 & 0 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 4 \cdot I_i \cdot l_i^1 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Potpuno analogno se dobiva globalna matrica mase:

$$\mathbf{M} = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot l \cdot \rho_i}{420 \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 156 & -22 \cdot l & 54 & 13 \cdot l & 0 & 0 \\ -22 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -13 \cdot l & -3 \cdot l^2 & 0 & 0 \\ 54 & -13 \cdot l & 312 & 0 & 54 & 13 \cdot l \\ 13 \cdot l & -3 \cdot l^2 & 0 & 8 \cdot l^2 & -13 \cdot l & -3 \cdot l^2 \\ 0 & 0 & 54 & -13 \cdot l & 156 & 22 \cdot l \\ 0 & 0 & 13 \cdot l & -3 \cdot l^2 & 22 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Uvrštavanjem matrice krutosti i matrice mase u generalizirani problem vlastitih vrijednosti:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) = 0, \quad (89)$$

te uvrštavanjem rubnih uvjeta  $V_1=0$ ,  $V_2=0$  dobiva se:

$$\det \left( E_i \cdot I_i \cdot \begin{bmatrix} 24 \cdot l_i^3 & 0 & -12 \cdot l_i^3 & -6 \cdot l_i^2 \\ 0 & 8 \cdot l_i^1 & 6 \cdot l_i^2 & 2 \cdot l_i^1 \\ -12 \cdot l_i^3 & 6 \cdot l_i^2 & 12 \cdot l_i^3 & 6 \cdot l_i^2 \\ -6 \cdot l_i^2 & 2 \cdot l_i^1 & 6 \cdot l_i^2 & 4 \cdot l_i^1 \end{bmatrix} - \frac{\omega_n^2 \cdot d^2 \cdot \pi \cdot l \cdot \rho_i}{420 \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & 13 \cdot l \\ 0 & 8 \cdot l^2 & -13 \cdot l & -3 \cdot l^2 \\ 54 & -13 \cdot l & 156 & 22 \cdot l \\ 13 \cdot l & -3 \cdot l^2 & 22 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (90)$$

iz čega slijedi da je:

$$\omega_{1fleksiskiR} = 2,119 \text{ s}^{-1}, \quad (91)$$

$$f_{1fleksiskiR} = 0,3372 \text{ Hz}, \quad (92)$$

$$\omega_{2fleksiskiR} = 13,38 \text{ s}^{-1}, \quad (93)$$

$$f_{2fleksiskiR} = 2,13 \text{ Hz}, \quad (94)$$

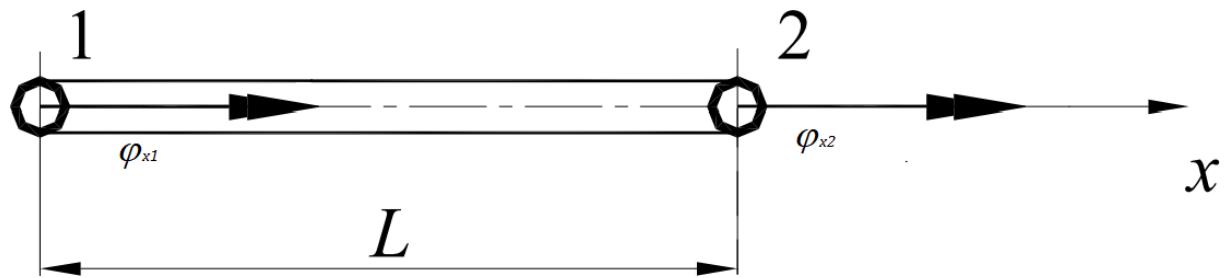
$$\omega_{3fleksiskiR}=45,26 \text{ s}^{-1}, \quad (95)$$

$$f_{3fleksiskiR}=7,204 \text{ Hz}, \quad (96)$$

$$\omega_{4fleksiskiR}=131,4 \text{ s}^{-1}, \quad (97)$$

$$f_{4fleksiskiR}=20,91 \text{ Hz}. \quad (98)$$

Za određivanje torzijske vlastite frekvencije gredni element za analizu trodimenzijskih okvirnih konstrukcija može se svesti na osnovni štapni konačni element opterećen na uvijanje, s obzirom da su za taj proračun samo torzijske krutosti od interesa. Osnovni štapni element opterećen na uvijanje prikazan je na Slici 47.



Slika 47. Osnovni štapni element opterećen na uvijanje [16]

Funkcije oblika  $i$ -tog elementa ovog tipa glase:

$$N_i^T = \begin{bmatrix} 1 - x \cdot l_i^{-1} \\ x \cdot l_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad (99)$$

a matrica krutosti  $i$ -tog elementa je jednaka:

$$k_i = \frac{E_i \cdot I_p}{l_i \cdot 2 \cdot (1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (100)$$

pri čemu je:

$$I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}. \quad (101)$$

Matrica mase računa se pomoću izraza:

$$m_i = \rho \cdot \int_{V_i} N^T N dV = \frac{I_p \cdot l_i \cdot \rho_i}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

pri čemu je prirodno diskretizirati štap pomoću dva elementa jednake duljine, tako da je:

$$l_1 = l_2 = 0,5 \cdot L. \quad (103)$$

Imajući na umu orientaciju štapnih elemenata, vrijedi:

$$k_{g1} = k_1, \quad (104)$$

$$k_{g2} = k_2. \quad (105)$$

Navedene matrice potrebno je izraziti s obzirom na globalne stupnjeve slobode. Red tako izražene matrice krutosti jednak je ukupnom broju stupnjeva slobode proračunskog modela, a od nule se razlikuju samo oni retci i stupci koji odgovaraju stupnjevima slobode elementa. Matrica krutosti  $i$ -tog elementa izražena preko globalnih stupnjeva slobode povezana je s matricom krutosti  $i$ -tog elementa u orijentaciji globalnog koordinatnog sustava izrazom:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{a}_{gi}^T \mathbf{k}_{gi} \mathbf{a}_{gi}, \quad (106)$$

pri čemu su matrice identifikacije  $\mathbf{a}_{gi}$  jednake:

$$\mathbf{a}_{g1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (107)$$

$$\mathbf{a}_{g2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (108)$$

pa se globalna matrica krutosti može dobiti sumiranjem matrica krutosti pojedinih elemenata:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{K}_i, \quad (109)$$

$$\mathbf{K} = \frac{E_i I_p}{L \cdot 2 \cdot (1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (110)$$

Potpuno analogno se dobiva globalna matrica mase:

$$\mathbf{M} = \frac{I_p \cdot L \cdot \rho_i}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Uvrštavanjem matrice krutosti i matrice mase u generalizirani problem vlastitih vrijednosti:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) = 0, \quad (112)$$

te uvrštavanjem rubnog uvjeta  $V_1 = 0$ , dobiva se:

$$\det\left(\frac{E_i I_p}{L \cdot 2 \cdot (1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \omega_n^2 \cdot \frac{I_p \cdot L \cdot \rho_i}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad (113)$$

iz čega slijedi da je:

$$\omega_{1torzjskiR} = 81,51 \text{ s}^{-1}, \quad (114)$$

$$f_{1torzjskiR} = 12,97 \text{ Hz}, \quad (115)$$

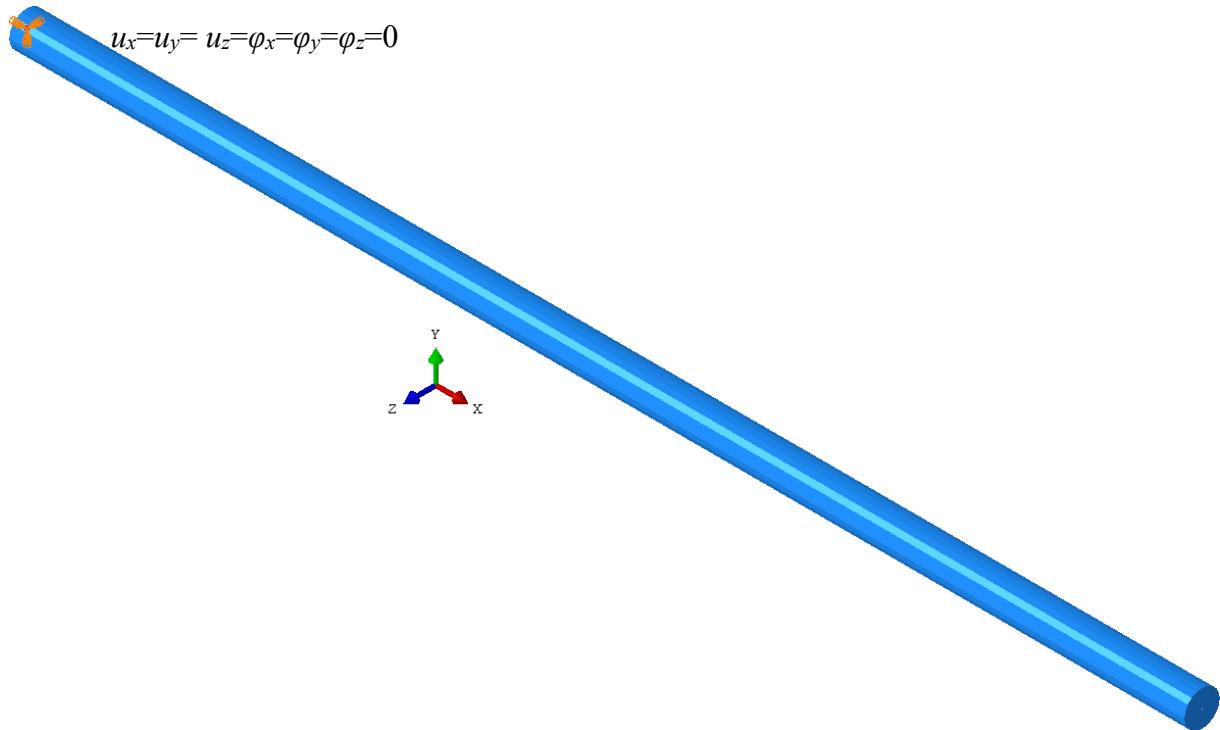
$$\omega_{2torzjskiR} = 284,7 \text{ s}^{-1}, \quad (116)$$

$$f_{2torzjskiR} = 45,32 \text{ Hz}. \quad (117)$$

Za analizu u programskom paketu u modulu *Part* je naredbom *Create Part* i opcijama *3D*, *Deformable* i *Wire* generirana geometrija grede. U modulu *Property* naredbom *Create Material* generiran je materijal sa svojstvima navedenim u Tablici 11., potom je naredbom *Create Beam Profile* i opcijom *Circular* generiran zadani profil grede, te je naredbom *Create Section* i

opcijom *Beam* definiran presjek grede s dodijeljenim materijalom i profilom. Zatim je naredbom *Assign Beam Orientation* definirana orijentacija poprečnog presjeka i naredbom *Assign Section* je na koncu presjek dodijeljen geometriji.

U modul *Assembly* uvezena je generirana geometrija naredbom *Create Instance* i opcijom *Dependent*. Potom je u modulu *Step* naredbom *Create Step* i opcijama *Linear perturbation*, *Frequency* generiran korak analize. Odabran je *Subspace* rješavač vlastitih vrijednosti, a broj vlastitih vrijednosti koje je potrebno odrediti limitiran je na 50. U modulu *Load* dodijeljen je rubni uvjet uklještenja pripadnom čvoru naredbom *Create Boundary Condition* i opcijama *Symmetry/Antisymmetry/Encastre*, *Encastre*, kao što to prikazuje slika 48.



**Slika 48. Rubni uvjet pomaka dodijeljen gredi**

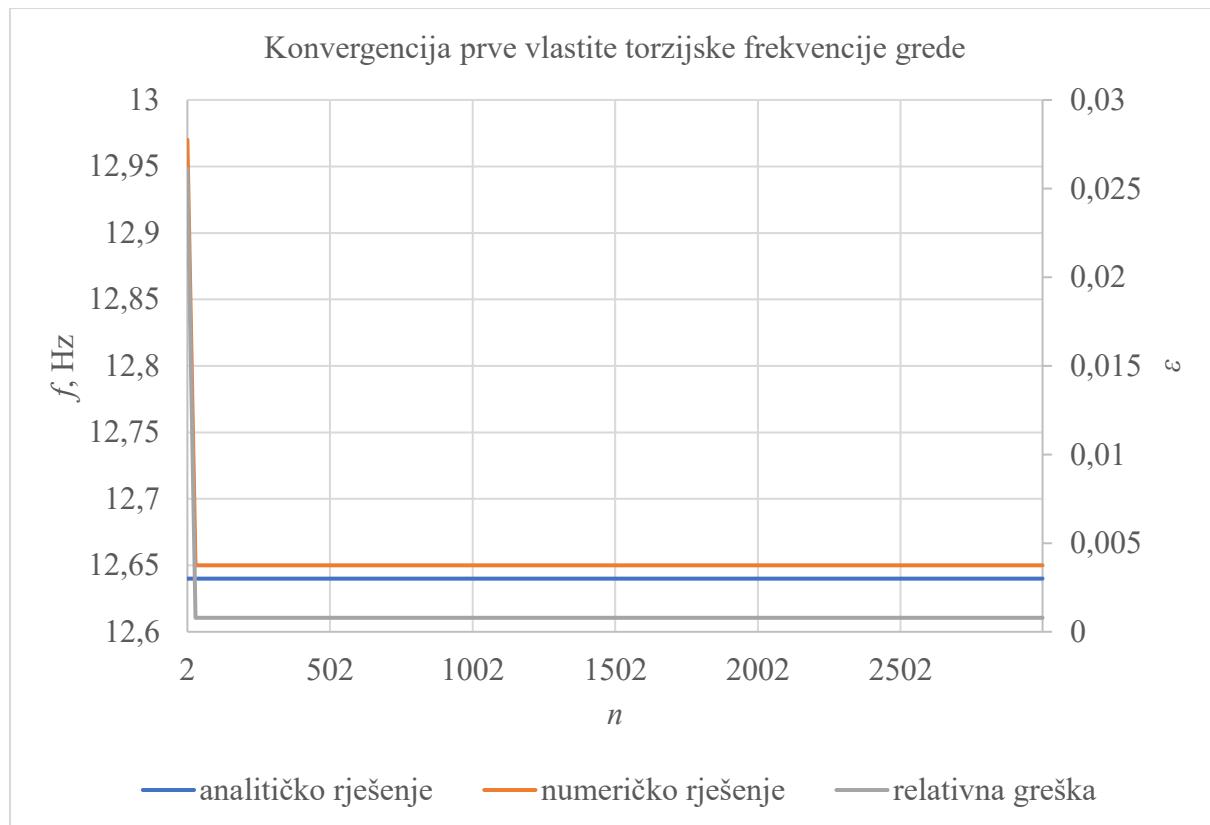
U modulu *Mesh* generirane su tri mreže s 2, 30 i 3000 B33 linearnih grednih elemenata temeljenih na Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja štapova (Slika 49.). Konvergencije prvih vlastitih frekvencija za uzdužno, torzijsko i fleksijsko vibriranje dane su tablično u Tablici 12. i na Slikama 50. i 51 za fleksijske i torzijske vibracije, budući da se za aksijalne vibracije numerički rezultati potpuno poklapaju s analitičkim rezultatima. Na Slici 52. prikazana je forma vibriranja za prvu fleksijsku vlastitu frekvenciju. Torzijske i aksijalne vibracije je teško predočiti na štapu okruglog presjeka bez animacije, zbog čega nisu prikazani navedeni oblici vibriranja.

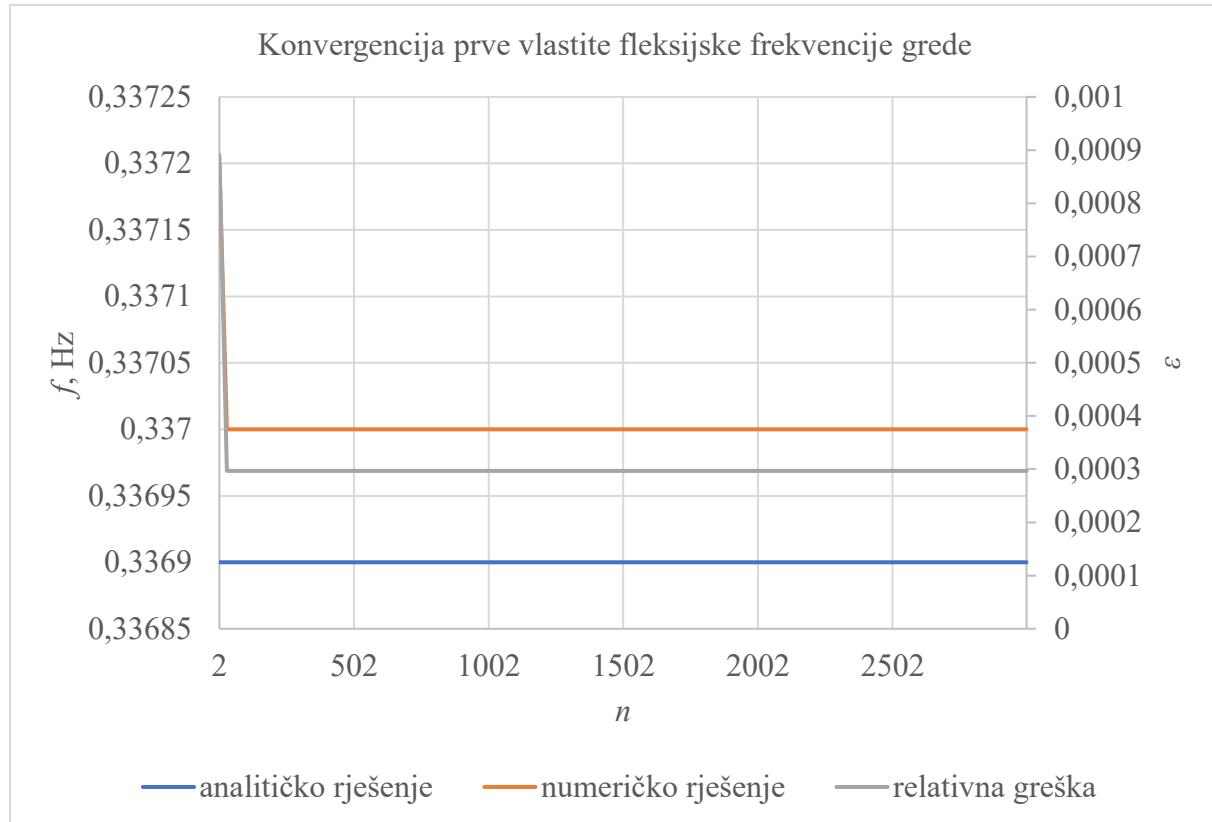


**Slika 49. Mreže od 2 (gore), 30 (sredina) i 3000 (dolje) B33 elemenata**

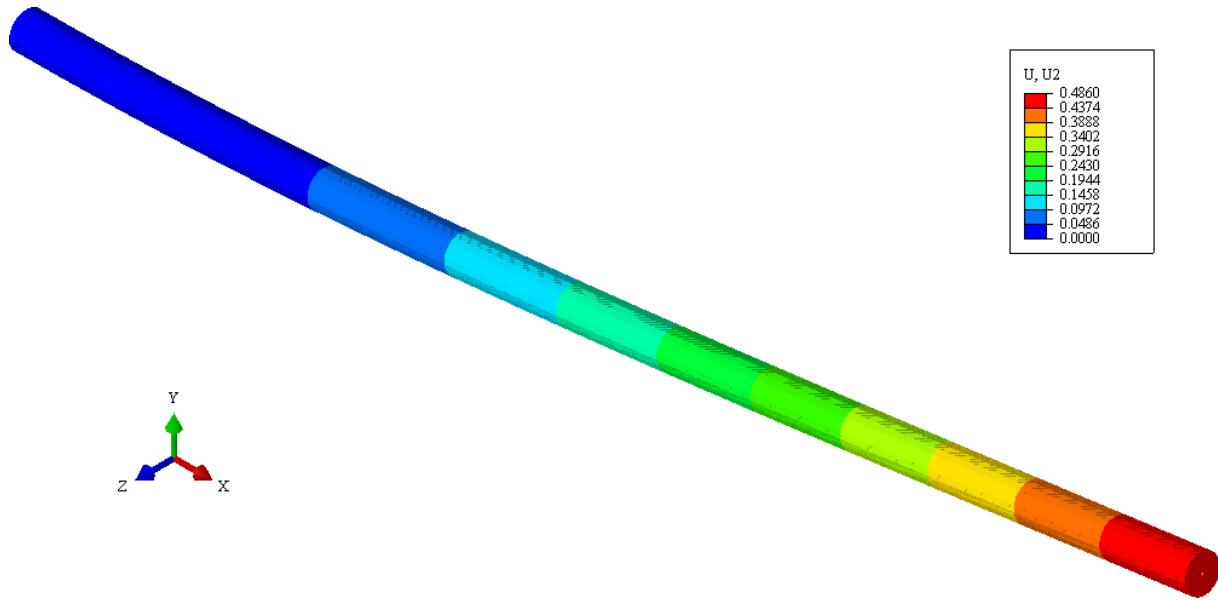
**Tablica 12. Konvergencija prvih vlastitih frekvencija grede**

Tip proračuna	Analitički	Ručno	MKE, $n=2$	MKE, $n=30$	MKE, $n=3000$
$f_{\text{langsijalno}}, \text{Hz}$	20,07	20,59	20,07	20,07	20,07
$\varepsilon_{\text{langsijalno}}$	/	0,02591		0	
$f_{\text{torzijsko}}, \text{Hz}$	12,64	12,97	12,97	12,65	12,65
$\varepsilon_{\text{torzijsko}}$	/	0,02611	0,02611		$7,911 \cdot 10^{-4}$
$f_{\text{fleksijsko}}, \text{Hz}$	0,3369	0,3372	0,3372	0,337	0,337
$\varepsilon_{\text{fleksijsko}}$	/	$8,905 \cdot 10^{-4}$	$8,905 \cdot 10^{-4}$		$2,968 \cdot 10^{-4}$

**Slika 50. Konvergencija prve vlastite torzijske frekvencije grede**



Slika 51. Konvergencija prve vlastite fleksijske frekvencije grede



Slika 52. Oblik prve fleksijske forme vibriranja grede

Može se zaključiti da se zadana geometrija već s malim brojem elemenata može jako dobro opisati po pitanju prvih vlastitih frekvencija.

## 6. Šesti zadatak

Za gredu zadalu u petom zadatku, na koju djeluje tlačna sila na desnom kraju, potrebno je odrediti kritičnu silu izvijanja analitički, ručno i u programskom paketu primjenom dva i više grednih konačnih elemenata, te potom usporediti dobivene rezultate.

Kako bi se dobilo analitičko rješenje, najprije treba odrediti po kojem postupku se računa kritična sila izvijanja s obzirom na vitkost grede:

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 11,25 \text{ mm}, \quad (118)$$

za zadane rubne uvjete vrijedi:

$$l_0 = 2 \cdot L = 3000 \text{ mm}, \quad (119)$$

te je:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = 266,7. \quad (120)$$

Minimalna vitkost za koju je izvijanje grede u području Eulerove hiperbole je po [17]:

$$\lambda_p = 80 < \lambda, \quad [17] \quad (121)$$

iz čega proizlazi da se greda nalazi u Eulerovom području, te vrijedi:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = 14,3 \text{ MPa}, \quad (122)$$

$$F_{kr} = A \cdot \sigma_{kr} = 22740 \text{ N}. \quad (123)$$

Kako bi se odredila kritična sila izvijanja metodom konačnih elemenata, potrebno je provesti analizu vlastitih vrijednosti konstrukcije:

$$(\mathbf{K} - \tilde{F} \cdot \mathbf{K}_g) \mathbf{V} = 0, \quad (124)$$

pri čemu  $\tilde{F}$  predstavlja faktor kritične sile – broj kojim se mora pomnožiti sila da nastupi izvijanje. Za jedinično opterećenje,  $\tilde{F}$  je numerički jednak kritičnoj sili izvijanja.  $\mathbf{K}_g$  je geometrijska matrica krutosti, koja je na razini elementa definirana izrazom:

$$\mathbf{k}_g = \int_0^L F \frac{dN^T}{dx} \frac{dN}{dx} dx, \quad (125)$$

pri čemu je  $F$  sila koja djeluje na gredu, a  $N$  matrica funkcija oblika, koje su definirane izrazom (73). Integriranjem se dobiva geometrijska matrica krutosti na razini elementa:

$$\mathbf{k}_g = F \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5 \cdot l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5 \cdot l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2 \cdot l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ \frac{10}{-6} & \frac{1}{1} & \frac{6}{5 \cdot l} & \frac{1}{10} \\ \frac{5 \cdot l}{10} & \frac{1}{10} & \frac{5 \cdot l}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2 \cdot l}{15} \end{bmatrix}, \quad (126)$$

te se diskretizacijom grede pomoću dva osnovna gredna konačna elementa analogno globalnoj matrici krutosti potpuno analognim postupkom poput opisanog u 5. zadatku dobiva globalna matrica geometrijske krutosti jednaka:

$$\mathbf{K}_g = F \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5 \cdot l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5 \cdot l} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2 \cdot l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & 0 \\ \frac{10}{-6} & \frac{1}{1} & \frac{12}{5 \cdot l} & 0 & -\frac{6}{5 \cdot l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{5 \cdot l}{10} & \frac{1}{10} & \frac{5 \cdot l}{10} & 0 & \frac{4 \cdot l}{15} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & \frac{15}{10} & \frac{1}{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5 \cdot l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5 \cdot l} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{10} & \frac{-l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2 \cdot l}{15} \end{bmatrix}, \quad (127)$$

$$\mathbf{K} = E_i \cdot \begin{bmatrix} 12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 0 & 0 \\ -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 4 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 0 & 0 \\ -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 24 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 0 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 \\ -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 0 & 8 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 \\ 0 & 0 & -12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 12 \cdot I_i \cdot l_i^3 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 \\ 0 & 0 & -6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 2 \cdot I_i \cdot l_i^1 & 6 \cdot I_i \cdot l_i^2 & 4 \cdot I_i \cdot l_i^1 \end{bmatrix}. \quad (128)$$

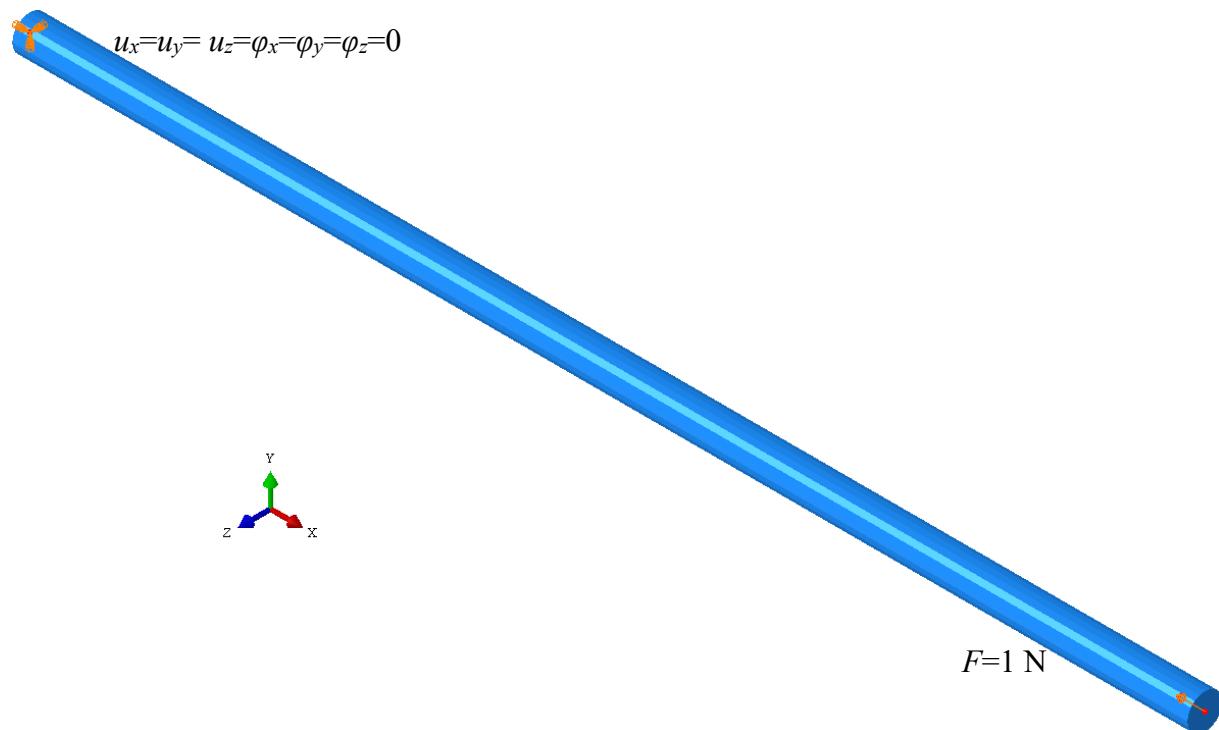
Uvrštavanjem rubnih uvjeta  $V_1=0$  i  $V_2=0$ , dobiva se konačni izraz:

$$\det \left( E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 24 \cdot l_i^3 & 0 & -12 \cdot l_i^3 & -6 \cdot l_i^2 \\ 0 & 8 \cdot l_i^1 & 6 \cdot l_i^2 & 2 \cdot l_i^1 \\ -12 \cdot l_i^3 & 6 \cdot l_i^2 & 12 \cdot l_i^3 & 6 \cdot l_i^2 \\ -6 \cdot l_i^2 & 2 \cdot l_i^1 & 6 \cdot l_i^2 & 4 \cdot l_i^1 \end{bmatrix} - \tilde{F} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{5 \cdot l} & 0 & -\frac{6}{5 \cdot l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{4 \cdot l}{15} & \frac{1}{10} & \frac{30}{30} \\ -\frac{6}{5 \cdot l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5 \cdot l} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2 \cdot l}{15} \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (129)$$

iz kojeg slijedi kritična sila kao najniža od četiri rješenja jednadžbe:

$$\tilde{F} = F_{kr} = 22750 \text{ N.} \quad (130)$$

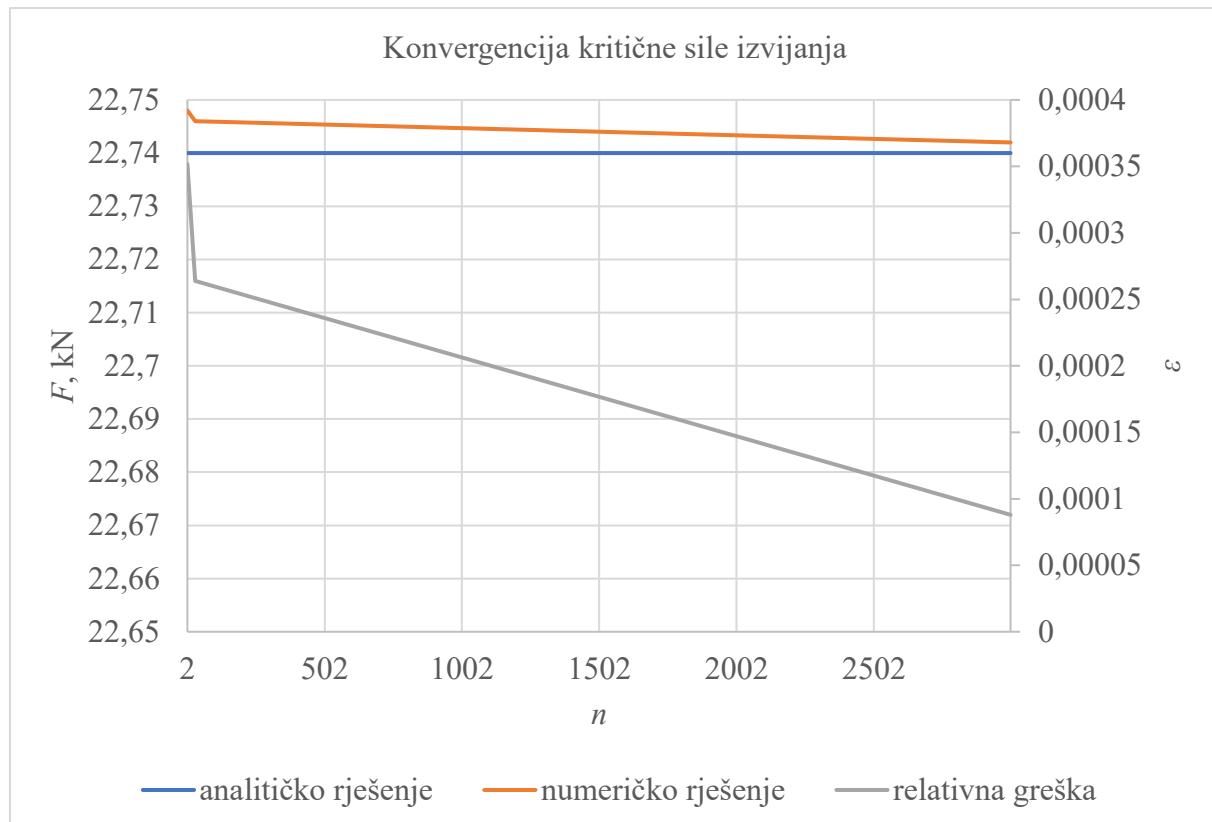
Numerička analiza u programskom paketu provedena je s mrežama sa Slike 49., na način da je već postojećem modelu dodan korak naredbom *Create Step* i opcijama *Buckle*, *Linear perturbation*. Potom je u modulu *Load* dodano jedinično opterećenje kojim je greda tlačena naredbom *Create Load* i opcijom *Concentrated Force*. Rubni uvjeti pomaka i opterećenje mogu se vidjeti na Slici 53., a konvergencija rješenja za navedene tri mreže prikazana je na Slici 54. i tablično Tablicom 13. Prva forma izvijanja prikazana je na Slici 55.



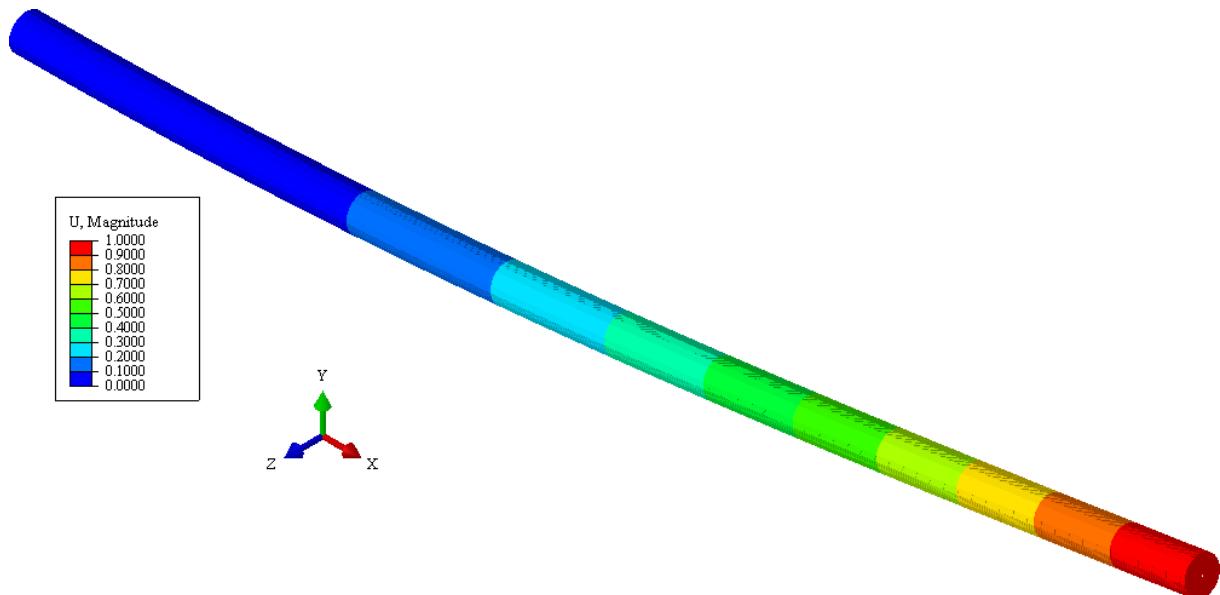
Slika 53. Rubni uvjet pomaka dodijeljen gredi i narinuto opterećenje

Tablica 13. Konvergencija kritične sile izvijanja

Tip proračuna	Analitički	Ručno	MKE, $n=2$	MKE, $n=30$	MKE, $n=3000$
$F_{kr}$ , kN	22,74	22,75	22,75	22,75	22,74
$\varepsilon$	/	$4,398 \cdot 10^{-4}$	$4,398 \cdot 10^{-4}$	$4,398 \cdot 10^{-4}$	$\sim 0$



Slika 54. Konvergencija kritične sile izvijanja grede



Slika 55. Prva forma izvijanja grede

I za provedenu analizu izvijanja se može zaključiti da je zadani fenomen vrlo dobro opisan već s razmjerno malim brojem konačnih elemenata, uz gotovo zanemariva odstupanja od analitičkog rješenja.

## **7. Literatura**

1. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., DIN 743-1 2012-12: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen – Teil 1: Grundlagen, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2012.
2. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., DIN 743-2 2012-12: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen – Teil 2: Formzahlen und Kerbwirkungszahlen, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2012.
3. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., DIN 743-3 2012-12: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen – Teil 3: Werkstoff-Festigkeitswerte, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2012.
4. K. Vučković, Remenski prijenos (podloge uz predavanja – za internu uporabu), Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2019.
5. K. Vučković, Ležajevi (podloge uz predavanja – za internu uporabu), Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2019.
6. Z. Tonković, Izoparametrijski konačni elementi, Zagreb, 2020.
7. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., DIN 5471 1974-08: Werkzeugmaschinen – Keilwellen- und Keilnaben-Profile mit 4 Keilen – Innenzentrierung - Maße
8. M. Opalić, Prijenosnici snage i gibanja, Hrvatsko društvo za elemente strojeva i konstruiranje, Zagreb, 1998.
9. [https://www.meuselwitz-guss.de/fileadmin/daten/Dateien/pdf/werkstoffe/Werkstoffkenndaten\\_Kugelgraphit\\_getrennt\\_gegossen.pdf](https://www.meuselwitz-guss.de/fileadmin/daten/Dateien/pdf/werkstoffe/Werkstoffkenndaten_Kugelgraphit_getrennt_gegossen.pdf), zadnji put pristupljeno 18.6.2021.
10. I. Čular, Numerička analiza zamora u korijenu zuba cilindričnog zupčanika, Zagreb, 2017.
11. M. Vukovojac, Programske zadaci - Numerička analiza konstrukcija, Zagreb, 2021.
12. S. Timošenko, S. Wojnovsky-Krieger, Teorija ploča i ljuški, Građevinska knjiga, Beograd, 1962.
13. Z. Tonković, Pločasti i ljuškasti konačni elementi, Zagreb, 2020.
14. Nastavni materijali iz Numeričke analize konstrukcija
15. [https://www.ke-ag.de/wp-content/uploads/2017/11/Werkstofftabelle\\_GJL.pdf](https://www.ke-ag.de/wp-content/uploads/2017/11/Werkstofftabelle_GJL.pdf), zadnji put pristupljeno 19.6.2021.
16. J. Sorić, Metoda konačnih elemenata, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
17. <https://www.johannes-strommer.com/formeln/knicken-von-staeben-euler/>, zadnji put pristupljeno 19.6.2021.