

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

POGONSKA ČVRSTOĆA programski zadatak

prof. dr. sc. Zdenko Tonković, dipl. ing.

Ivan Trapić, mag. ing. mech.

Student:

Denis Meštrović

0035214226

4-INŽMOD

Zagreb, veljača 2021.

Sadržaj

1.	Programski zadatak	1
2.	Rješenje na temelju eksperimentalnih rezultata	2
2.1.	Koeficijent intenzivnosti naprezanja	2
2.2.	Ručni izračun koeficijenta intenzivnosti naprezanja	3
3.	Izračun koeficijenta intenzivnosti naprezanja metodom konačnih elemenata	7
3.1.	Konačni elementi	7
3.2.	Izračun dvodimenzijskim konačnim elementima	9
3.3.	Izračun trodimenzijskim konačnim elementima.....	14
4.	Literatura	21

Popis slika

Slika 1. Zadana geometrija sa shemom opterećenja [1]	1
Slika 2. Tri glavna tipa loma – odcjepni (I), smični (II), vijčani (III) [2]	2
Slika 3. Grafički prikaz primjenjivosti koeficijenta intenzivnosti naprezanja za određivanje polja naprezanja [3]	3
Slika 4. Vrijednost bezdimenzijske značajke $F(Y)$ za opterećenje koncentriranim silama na trima točkama u ovisnosti o omjeru duljine i visine uzorka te duljine pukotine [4]	4
Slika 5. Složeno opterećenje zamijenjeno kombinacijom: a) čistog savijanja, b) vlaka i c) opterećenja koncentriranim silama na trima točkama [5]	5
Slika 6. Izoparametarski 2D-element s 8 čvorova i 16 stupnjeva slobode [8]	7
Slika 7. Izoparametarski 3D-element s 20 čvorova i 60 stupnjeva slobode [8]	8
Slika 8. Trokutasti element dobiven kolabiranjem četverokutnog izoparametarskog elementa drugog reda za primjenu u mehanici loma s linearno-elastičnim ponašanjem materijala [8]	8
Slika 9. Klinasti element dobiven kolabiranjem heksaedarskog izoparametarskog elementa drugog reda za primjenu u mehanici loma s linearno-elastičnim ponašanjem materijala [8]	9
Slika 10. Skica polovice uzorka	9
Slika 11. Smjer širenja pukotine – dvodimenzijski model	10
Slika 12. Rubni uvjeti za model diskretiziran dvodimenzijskim elementima	11
Slika 13. Mreže generirane za numeričku analizu dvodimenzijskim elementima sa: a) 57 elemenata, b) 154 elementa, c) 288 elemenata i d) 466 elemenata	12
Slika 14. Konvergencija prosječnog ukupnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja	13
Slika 15. Četvrtina geometrije uzorka	14
Slika 16. Particionirana četvrtina geometrije uzorka i smjer širenja pukotine	15
Slika 17. Rubni uvjeti pomaka za model diskretiziran trodimenzijskim elementima	16
Slika 18. Mreže generirane za numeričku analizu dvodimenzijskim elementima s: a) 3135 elemenata, b) 8470 elemenata, c) 15840 elemenata i d) 25630 elemenata	17
Slika 19. Konvergencija vršnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja	18
Slika 20. Konvergencija prosječnog ukupnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja	19
Slika 21. Ovisnost vršnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja o udaljenosti od slobodne površine uzorka	20

Popis tablica

Tablica 1. Zadane dimenzije [1].....	1
Tablica 2. Svojstva odabranog materijala [6].....	7
Tablica 3. Konvergencija koeficijenta intenzivnosti naprezanja za model diskretiziran dvodimenzijskim elementima	12
Tablica 4. Konvergencija vršnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja za model diskretiziran trodimenzijskim elementima	18
Tablica 5. Konvergencija koeficijenta intenzivnosti naprezanja za model diskretiziran trodimenzijskim elementima	19

Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
a	mm	duljina pukotine,
d	mm	duljina pukotine,
$f(\theta)$	/	funkcija ovisnosti naprezanja o udaljenosti od vrška pukotine,
h	mm	poluduljina uzorka,
K_c	MPa·mm ^{0,5}	lomna žilavost,
K_I	MPa·mm ^{0,5}	koeficijent intenzivnosti naprezanja za I. način otvaranja pukotine,
K_{II}	MPa·mm ^{0,5}	koeficijent intenzivnosti naprezanja za II. način otvaranja pukotine,
K_{III}	MPa·mm ^{0,5}	koeficijent intenzivnosti naprezanja za III. način otvaranja pukotine,
K_{Isu}	MPa·mm ^{0,5}	koeficijent intenzivnosti naprezanja u sredini uzorka za I. način otvaranja pukotine,
K_{Iuk}	MPa·mm ^{0,5}	ukupni koeficijent intenzivnosti naprezanja za I. način otvaranja pukotine,
K_{I1}	MPa·mm ^{0,5}	prva komponenta koeficijenta intenzivnosti naprezanja za I. način otvaranja pukotine,
K_{I2}	MPa·mm ^{0,5}	druga komponenta koeficijenta intenzivnosti naprezanja za I. način otvaranja pukotine,
K_{I3}	MPa·mm ^{0,5}	treća komponenta koeficijenta intenzivnosti naprezanja za I. način otvaranja pukotine,
P	N·mm ⁻¹	linijsko opterećenje uzorka,
p	MPa	vršno nominalno vlačno naprezanje uzorka,
r	mm	udaljenost od pukotine,
S	MPa	lokalno naprezanje
s	mm	visina uzorka,
t	mm	debljina uzorka,

U	mm	ukupni pomak,
u_x	mm	pomak po x -osi,
u_y	mm	pomak po y -osi,
u_z	mm	pomak po z -osi,
Y	/	bezdimenzijski faktor oblika uzorka i načina opterećivanja,
θ	/	zakret u lokalnom koordinatnom sustavu pukotine,
σ	MPa	nominalno naprezanje,
φ_x	/	zakret po x -osi,
φ_y	/	zakret po y -osi,
φ_z	/	zakret po z -osi.

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
ZAVOD ZA TEHNIČKU MEHANIKU

Programski zadatak iz kolegija:

"Mehanika oštećenja i mehanika loma / Pogonska čvrstoća"

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković
(akademska godina 2020./2021.)

Ime i prezime: **Denis Meštrović**

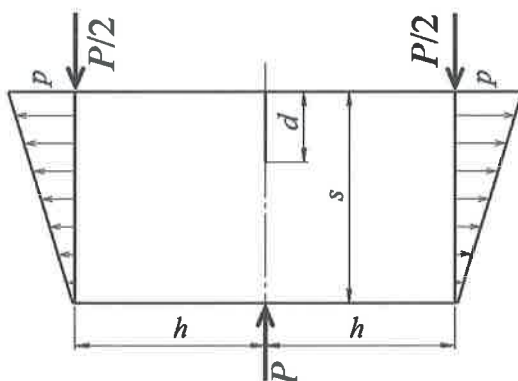
datum zadavanja:

23.11.2020.

rok za predaju:

1.10.2021.

Za uzorak zadan i opterećen prema slici primjenom metode konačnih elemenata potrebno je odrediti vrijednost koeficijenta intenzivnosti naprezanja u vršku pukotine. Uzorak je debljine t s pukotinom duljine d . Opterećenje odabrati tako da koeficijent intenzivnosti naprezanja ima vrijednost oko $100 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$. Odnos između opterećenja odrediti tako da jednoliko doprinose koeficijentu intenzivnosti naprezanja. Materijal odabrati prema vlastitom nahođenju.



$$\begin{aligned} s &= 100 \text{ mm} \\ d &= 40 \text{ mm} \\ h &= 120 \text{ mm} \\ t &= 55 \text{ mm} \end{aligned}$$

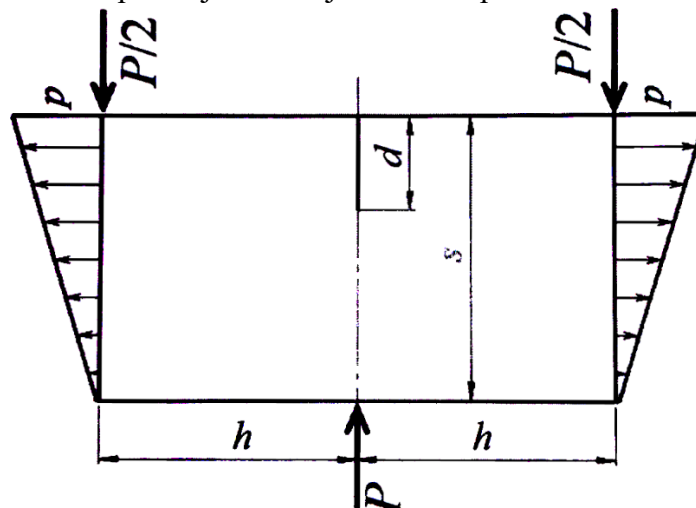
- a) Geometriju ploče potrebno je diskretizirati 2D konačnim elementima.
- b) Geometriju ploče potrebno je diskretizirati odgovarajućim 3D konačnim elementima.

Koristite rubne uvjete simetrije ukoliko se mogu primijeniti. Promjenom gustoće mreže elemenata provjerite konvergenciju rješenja. Rezultate prikazite tablično i dijagramom i usporediti analitička i numerička rješenja za odabrane proporcije dimenzija. Jedinstvenim dijagramom prikazite dobivene iznose koeficijenta intenzivnosti naprezanja po debljini uzorka. Potrebno je i prokomentirati promjenu koeficijenta intenzivnosti naprezanja po debljini uzorka te eventualne razlike između analitičkog i numeričkog rješenja. Potrebno je također skicirati korištene konačne elemente s pripadnim stupnjevima slobode, opisati osnovne karakteristike elementa i prikazati osnovne relacije za izračunavanje zadatkom traženih veličina.

Zadatak zadao: **Ivan Trapić**

1. Programski zadatak

Za uzorak zadan i opterećen prema Slici 1. primjenom metode konačnih elemenata potrebno je odrediti vrijednost koeficijenta intenzivnosti naprezanja u vršku pukotine. Uzorak je debljine t s pukotinom duljine d . Opterećenje odabrati tako da koeficijent intenzivnosti naprezanja ima vrijednost oko $100 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$. Odnos između opterećenja odrediti tako da jednoliko doprinose koeficijentu intenzivnosti naprezanja. Materijal odabrati prema vlastitom nahođenju.



Slika 1. Zadana geometrija sa shemom opterećenja [1]

Geometriju ploče potrebno je diskretizirati pomoću 2D i 3D konačnih elemenata. Koristiti rubne uvjete simetrije ukoliko su primjenjivi. Promjenom gustoće mreže provjeriti konvergenciju rješenja. Rezultate prikazati tablično i dijagramom, usporediti analitička i numerička rješenja za odabrane proporcije dimenzija, zadane Tablicom 1. Jedinstvenim dijagramom prikazati dobivene iznose koeficijenta intenzivnosti naprezanja po debljini uzorka te eventualne razlike između analitičkog i numeričkog rješenja. Skicirati korištene konačne elemente s pripadnim stupnjevima slobode, opisati osnovne karakteristike elemenata i prikazati osnovne relacije za izračunavanje zadatkom traženih veličina.

Tablica 1. Zadane dimenzije [1]

s , mm	d , mm	h , mm	t , mm
100	40	120	55

2. Rješenje na temelju eksperimentalnih rezultata

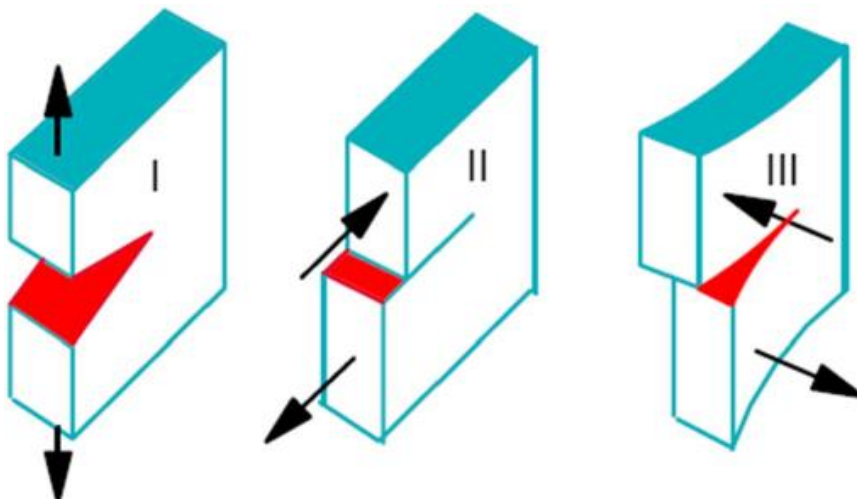
U ovome poglavlju prikazat će se postupak izračuna koeficijenta intenzivnosti naprezanja u vršku pukotine na temelju eksperimentalnih rezultata, kao i osnovne informacije o koeficijentu intenzivnosti naprezanja.

2.1. Koeficijent intenzivnosti naprezanja

Koeficijent intenzivnosti naprezanja oko vrška pukotine je jedan od parametara linearno-elastične mehanike loma. Nadilazi li lomnu žilavost:

$$K_{(I, II, III)} \geq K_{(I, II, III)c}, \quad (1)$$

dolazi do krhkog loma konstrukcije. Primjenjiv je za krhke materijale poput stakla, ali i za duktilne materijale niske istezljivosti, jer je zona plastičnih deformacija kod tih materijala dovoljno mala da se i energija plastičnog deformiranja može zanemariti u odnosu na elastičnu energiju deformiranja. Razlikujemo tri glavna tipa loma s pripadnim koeficijentima intenzivnosti naprezanja: odcjepni, smični i vijčani tip (Slika 2.).



Slika 2. Tri glavna tipa loma – odcjepni (I), smični (II), vijčani (III) [2]

Koeficijent intenzivnosti naprezanja oko vrška pukotine je općenito oblika:

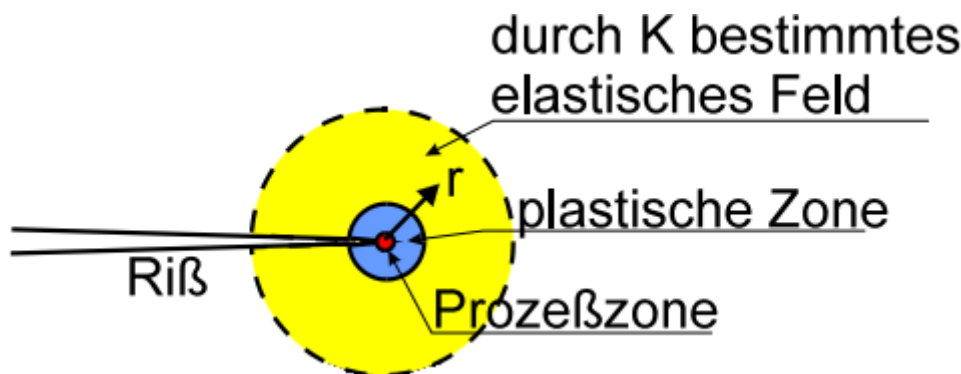
$$K_{(I, II, III)} = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}. \quad (2)$$

Pri tome je σ nominalno naprezanje, a duljina pukotine, a Y bezdimenzijski faktor kojim se relacija prilagođava pojedinoj geometriji uzorka i načinu opterećivanja. Naprezanja oko vrška pukotine mogu se izračunati pomoću koeficijenta intenzivnosti naprezanja, te u općem slučaju ovise o načinu otvaranja pukotine i pozicije s obzirom na vršak pukotine, definirane kutem θ i udaljenošću od pukotine r :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I, II, III)} = K_{(I, II, III)} \cdot (2 \cdot \pi \cdot r)^{-0,5} \cdot f_{ij}^{(I, II, III)}(\theta). \quad (3)$$

Može se uočiti da je relacija primjenjiva samo u zoni oko pukotine, jer za vrlo velike vrijednosti udaljenosti od vrška pukotine rezultirajuće naprezanje može biti manje od nominalnog. Također se može uočiti postojanje singularnosti naprezanja na samom vršku pukotine, na kojem je

naprezanje po izrazu (3) beskonačno. U stvarnosti na uzorku izrađenom od proizvoljnog tehničkog materijala dolazi do lokalne plastifikacije u neposrednoj blizini vrška pukotine (Slika 3.), a sama pukotina nije idealno oštra. Kod duktilnijih materijala dolazi do zaobljenja pukotine, što kao posljedicu ujedno ima i veću lomnu žilavost, a uz to je zbog diskretizirane građe svakog materijala na atomarnoj, odnosno molekularnoj razini radijus konačno malen.



Slika 3. Grafički prikaz primjenjivosti koeficijenta intenzivnosti naprezanja za određivanje polja naprezanja [3]

Koeficijent intenzivnosti naprezanja može se odrediti numerički ili izračunati ručno pomoću eksperimentalnih rezultata za uobičajene načine opterećivanja konstrukcijskih dijelova.

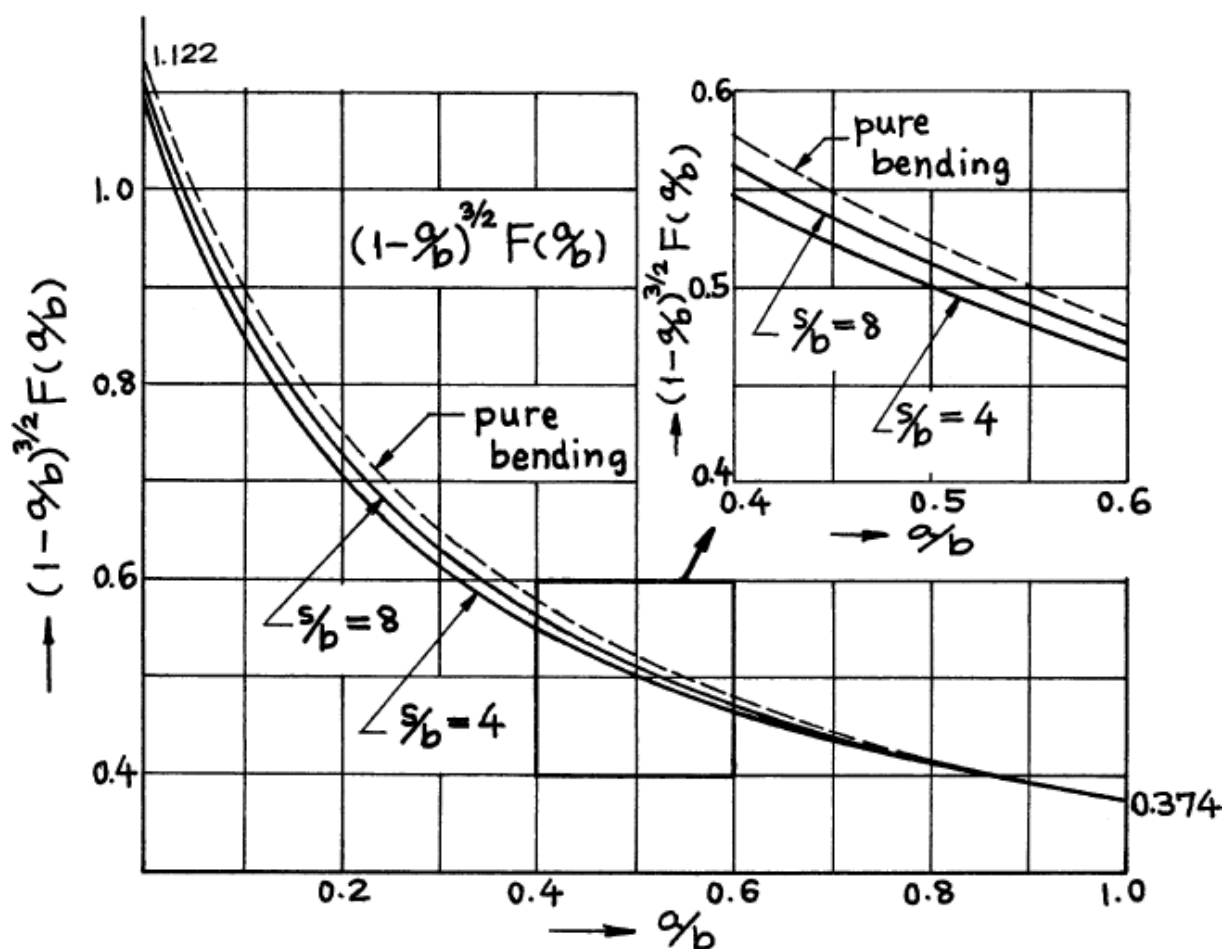
2.2. Ručni izračun koeficijenta intenzivnosti naprezanja

Budući da su materijali na koje je primjenjiv koeficijent intenzivnosti naprezanja kao parametar mehanike loma gotovo potpuno u elastičnoj zoni, moguće je superponiranjem jednostavnijih tipova opterećivanja geometrije ispravno opisati složeniji slučaj opterećenja. Nužna pretpostavka za sumaciju koeficijenata intenzivnosti naprezanja jest da svaki izdvojeni tip opterećenja rezultira istim načinom otvaranja pukotine, što je u ovom zadatku zadovoljeno.

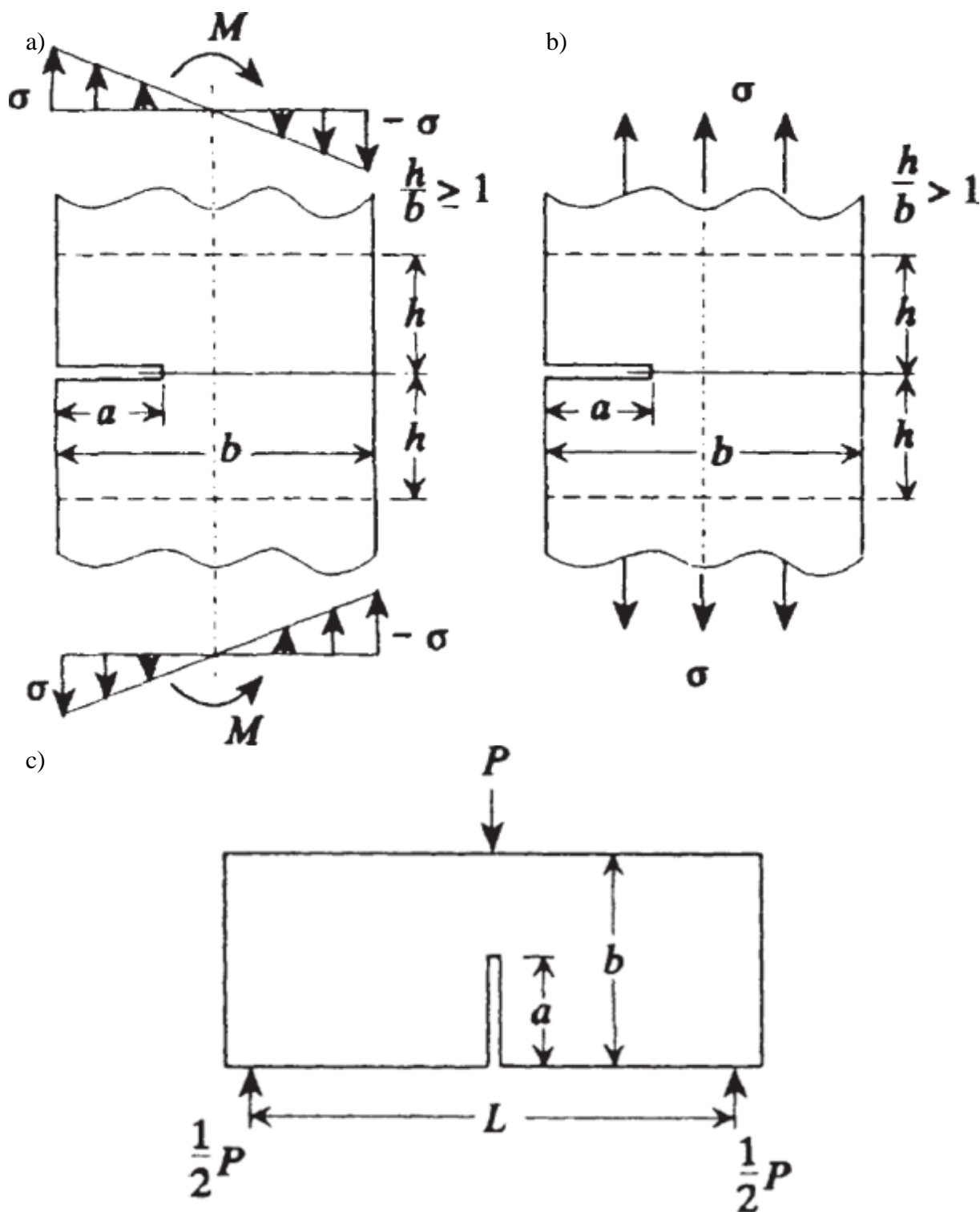
Zadano opterećenje, okarakterizirano odcjepnim načinom otvaranja pukotine, može se razložiti na opterećenje koncentriranim silama na trima točkama, čisto savijanje i vlak. Time je složeno opterećenje načelno opisano tabličnim slučajevima, prikazanim na Slici 5. Ne postoji tablično rješenje za zadani omjer duljine i visine uzorka za opterećenje koncentriranim silama na trima točkama, ali se iz Slike 4. može zaključiti da su vrijednosti dobivene za:

$$2 \cdot h \cdot s^{-1} = 4 \quad (4)$$

dovoljno točne i na strani sigurnosti. Navedeni omjer naznačen je na Slici 4. kao s/b .



Slika 4. Vrijednost bezdimenzijske značajke $F(Y)$ za opterećenje koncentriranim silama na trima točkama u ovisnosti o omjeru duljine i visine uzorka te duljine pukotine [4]



Slika 5. Složeno opterećenje zamijenjeno kombinacijom: a) čistog savijanja, b) vlaka i c) opterećenja koncentriranim silama na trima točkama [5]

U nastavku su dani izrazi za određivanje koeficijenta intenzivnosti naprezanja za savijanje (5), vlak (6) i opterećenje koncentriranim silama na trima točkama (7). Izrazi su preuzeti iz [5], s uvrštenim oznakama po Slici 1.:

$$K_{I1} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot s \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot s}\right)} \cdot \frac{0,923 + 0,199 \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot s}\right)\right]^4}{\cos\left(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot s}\right)}, \quad (5)$$

$$K_{I2} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot s \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot s}\right)} \cdot \frac{0,752 + 2,02 \cdot \frac{d}{s} + 0,37 \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot s}\right)\right]^3}{\cos\left(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot s}\right)}, \quad (6)$$

$$K_{I3} = \frac{3 \cdot P \cdot h}{s^2} \cdot \sqrt{d} \cdot \frac{1,99 \cdot \frac{d}{s} \cdot \left(1 - \frac{d}{s}\right) \cdot \left(2,15 - 3,93 \cdot \frac{d}{s} + 2,7 \cdot \left(\frac{d}{s}\right)^2\right)}{\left(1 + 2 \cdot \frac{d}{s}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{s}\right)^{1,5}}. \quad (7)$$

Uvrste li se poznate dimenzije u izraze (5), (6) i (7), dobivaju se izrazi:

$$K_{I1} = p \cdot 6,919, \quad (8)$$

$$K_{I2} = p \cdot 11,82, \quad (9)$$

$$K_{I3} = P \cdot 0,4756. \quad (10)$$

Budući da je zadano da tlak i koncentrirane sile imaju podjednak udio u ukupnom koeficijentu intenzivnosti naprezanja iznosa $100 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}$, vrijedi:

$$K_{I1} + K_{I2} = p \cdot (6,919 + 11,82) \cong 50 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}, \quad (11)$$

$$K_{I3} = P \cdot 0,4756 \cong 50 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}. \quad (12)$$

Iz relacija (11) i (12) proizlazi da tlak i koncentrirana sila po jedinici širine uzorka iznose:

$$p = 2,668 \text{ MPa}, \quad (13)$$

$$P = 105,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}. \quad (14)$$

Konačno, pojedinačni koeficijenti intenzivnosti naprezanja i ukupni koeficijenti intenzivnosti naprezanja iznose:

$$K_{I1} = 18,46 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}, \quad (15)$$

$$K_{I2} = 31,54 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}, \quad (16)$$

$$K_{I3} = 49,99 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}, \quad (17)$$

$$K_{Iuk} = K_{I1} + K_{I2} + K_{I3} = 18,46 + 31,54 + 49,99 = 99,99 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5} \cong 100 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0,5}. \quad (18)$$

3. Izračun koeficijenata intenzivnosti naprezanja metodom konačnih elemenata

U ovome poglavlju prikazat će se postupak izračuna koeficijenta intenzivnosti naprezanja u vršku pukotine metodom konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus* na temelju dobivenih vrijednosti opterećenja iz prethodnog poglavlja. Navest će se i karakteristike korištenih konačnih elemenata.

U nastavku proračuna pomoću metode konačnih elemenata koristit će se svojstva nodularnog lijeva EN-GJS-700-2S (GGG 70), dana u Tablici 2.

Tablica 2. Svojstva odabranog materijala [6]

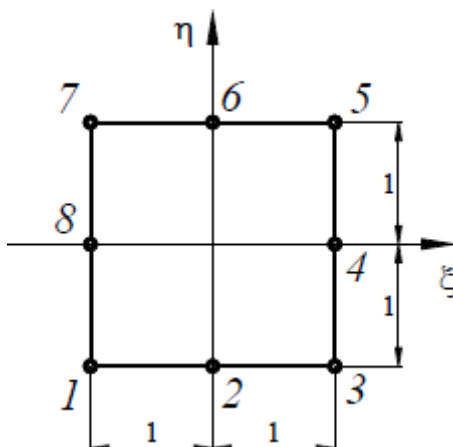
$A_{min}, \%$	ν	E, GPa
3	0,28	176

Kako je riječ o nodularnom lijevu dominantno perlitne strukture, primjerena je uporaba koeficijenata intenzivnosti naprezanja za procjenu polja naprezanja u okolini pukotine [7].

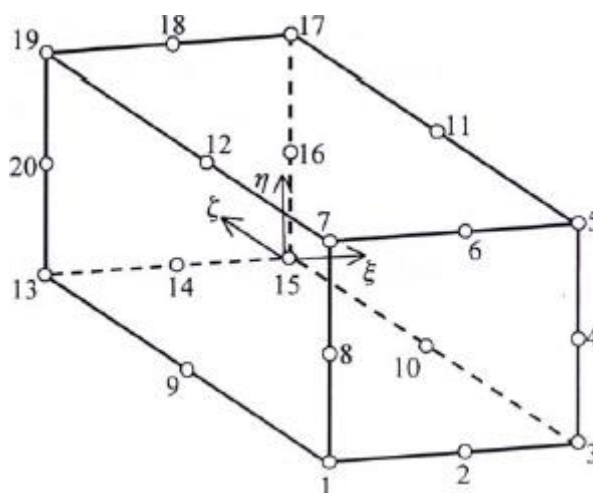
3.1. Konačni elementi

Zadani problem iz mehanike lome riješit će se pomoću dviju grupa konačnih elemenata – pomoću klasičnih izoparametarskih elemenata i singularnih kondenziranih elemenata s međučvorom na četvrtini stranice.

Klasični izoparametarski elementi opisuju geometriju elementa u Kartezijevom koordinatnom sustavu pomoću interpolacijskih funkcija u prirodnim koordinatama. Za njih je karakteristično da je polje pomaka opisano istim interpolacijskim funkcijama kao i geometrija elementa. Ne postižu zadovoljavajuću konvergenciju koriste li se neposredno uz vršak pukotine. U okviru ovog programskog zadatka koristit će se izoparametarski 2D kontinuumski elementi drugog reda s 8 čvorova i 16 stupnjeva slobode, reducirane integracije – CPE8R, te 3D kontinuumski elementi drugog reda s 20 čvorova i 60 stupnjeva slobode, reducirane integracije – C3D20. Navedeni elementi prikazani su na Slikama 6. i 7.

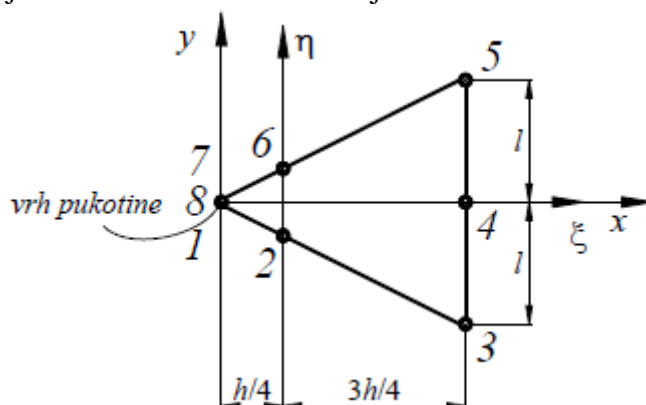


Slika 6. Izoparametarski 2D-element s 8 čvorova i 16 stupnjeva slobode [8]



Slika 7. Izoparametarski 3D-element s 20 čvorova i 60 stupnjeva slobode [8]

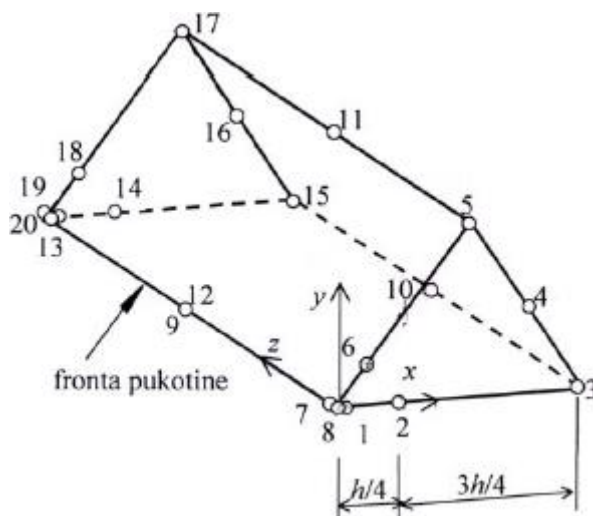
Kako bi se riješio problem konvergencije u okolini vrška pukotine, razvijeni su specijalizirani elementi za primjenu u mehanici loma. Pokazalo se da se pomicanjem međučvorova sa sredine brida na četvrtinu brida prema vršku pukotine može postići tražena singularnost deformacije tipa $r^{-0.5}$, te da su za primjenu u neposrednoj blizini vrška pukotine pogodniji trokutni od četverokutnih elemenata, jer četverokutni elementi zadovoljavaju uvjete singularnosti samo na rubu. Stoga su uvedeni trokutasti elementi dobiveni kolabiranjem četverokutnih elemenata. Ovisno o ponašanju materijala, potrebno je osigurati navedenu singularnost tipa $r^{-0.5}$ za linearno-elastično ponašanje materijala. Za njih je determinanta Jacobijeve matrice u spojenim čvorovima jednaka nuli. Kolabirani čvorovi 1, 7 i 8 su povezani, a središnji čvorovi na stranicama konačnog elementa koji se sastaju u vrhu pukotine moraju biti na jednoj četvrtini duljine stranice od vrha pukotine. Takav konformni element korišten je za rješavanje zadanog problema dvodimenzijalnim elementima. Prikazan je na Slici 8.



Slika 8. Trokutasti element dobiven kolabiranjem četverokutnog izoparametarskog elementa drugog reda za primjenu u mehanici loma s linearno-elastičnim ponašanjem materijala [8]

Za elastično-idealno plastično ponašanje sa singularnošću r^{-1} bilo bi potrebno ostaviti čvorove 1, 7 i 8 slobodne i međučvorove na sredini stranice. Za nelinearno očvršćujući materijal singularnost poprima oblik $r^{-n/(n+1)}$, pri čemu je n karakteristika materijala kojom je opisano očvršćivanje materijala. U tom slučaju bi bilo potrebno ostaviti čvorove 1, 7 i 8 slobodne, a pomaknuti međučvorove na četvrtinu duljine stranice od vrha pukotine.

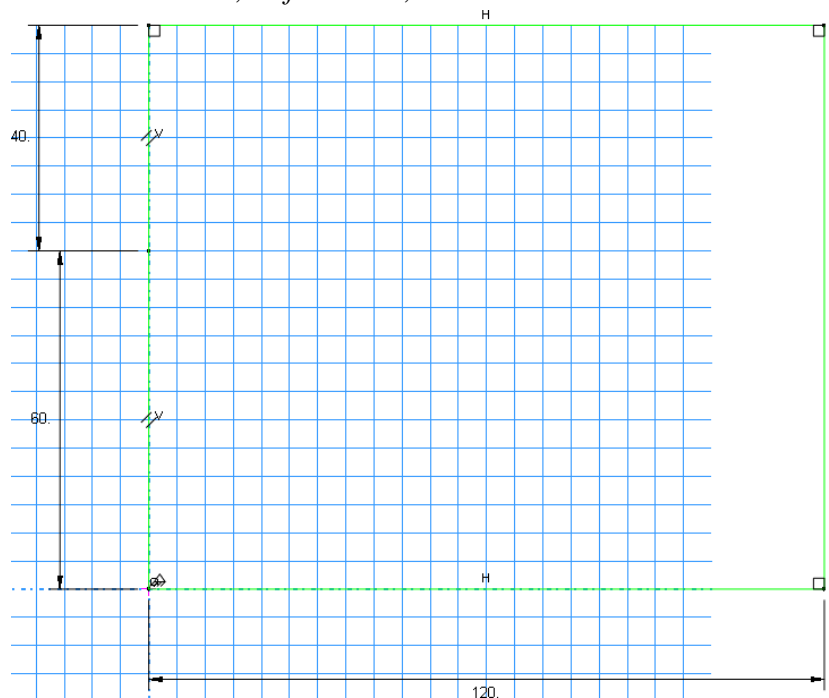
Potpuno analogno se dobivaju trodimenzijski klinasti elementi kolabiranjem jedne od stranica četverostrane prizme elementa C3D20 (Slika 9.).



Slika 9. Klinasti element dobiven kolabiranjem heksaedarskog izoparametarskog elementa drugog reda za primjenu u mehanici loma s linearno-elastičnim ponašanjem materijala [8]

3.2. Izračun dvodimenzijским konačnim elementima

Najprije je u modulu *Part* generirana geometrija polovice uzorka (Slika 10.) naredbom *Create Part* i podnaredbama *2D Planar*, *Deformable*, *Shell*.



Slika 10. Skica polovice uzorka

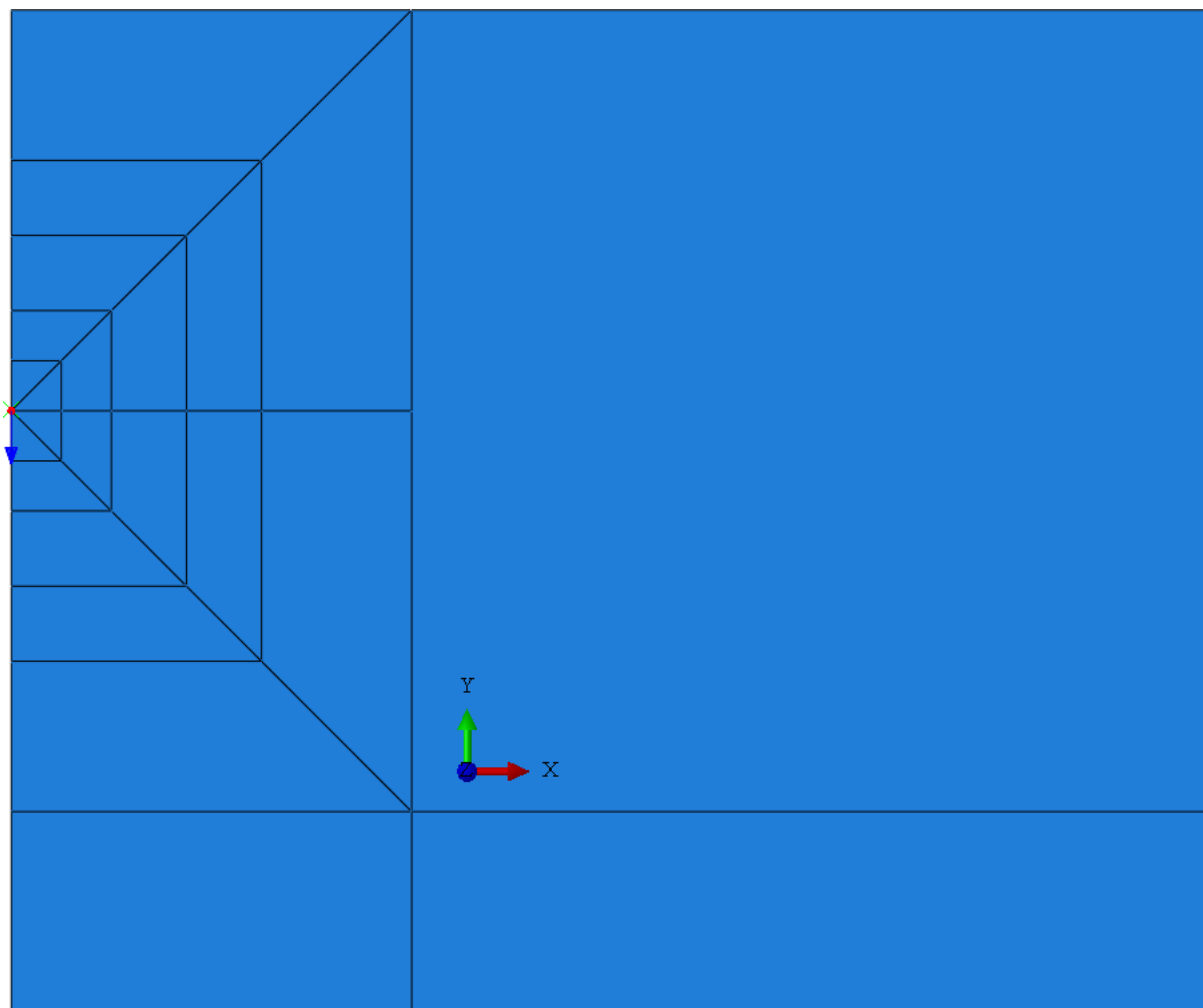
Tako dobivenoj geometriji dodijeljena su u modulu *Property* svojstva materijala (po Tablici 2.) i presjeka naredbama *Create Material*, *Create Sections* s podnaredbama *Solid*, *Homogeneous* i naredbom *Assign Section*.

Tako dobivena geometrija s pripadajućim svojstvima uvezena je u modul *Assembly* naredbom *Create Instance*, s opcijama *Parts* i *Independent*. Zatim je u modulu *Step* naredbom *Create Step*

opcijom *Static, General* definiran korak u kojem će se narinuti opterećenje na polovični model uzorka.

U modulu *Interaction* naredbom *Partition Face: Sketch* particioniran je model uzorka kako bi se mogla ispravno generirati mreža za analizu danog problema. Pri tome je uvažena preporučena duljina singularnih elemenata u direktnom kontaktu s vrškom pukotine od 15% do 25% ukupne duljine pukotine [8] particioniranjem kvadrata dimenzija 5, 10, 17,5, 25 i 40 mm s vrhovima koji se poklapaju s vrškom pukotine (Slika 11.), koji su potom podijeljeni po dijagonali.

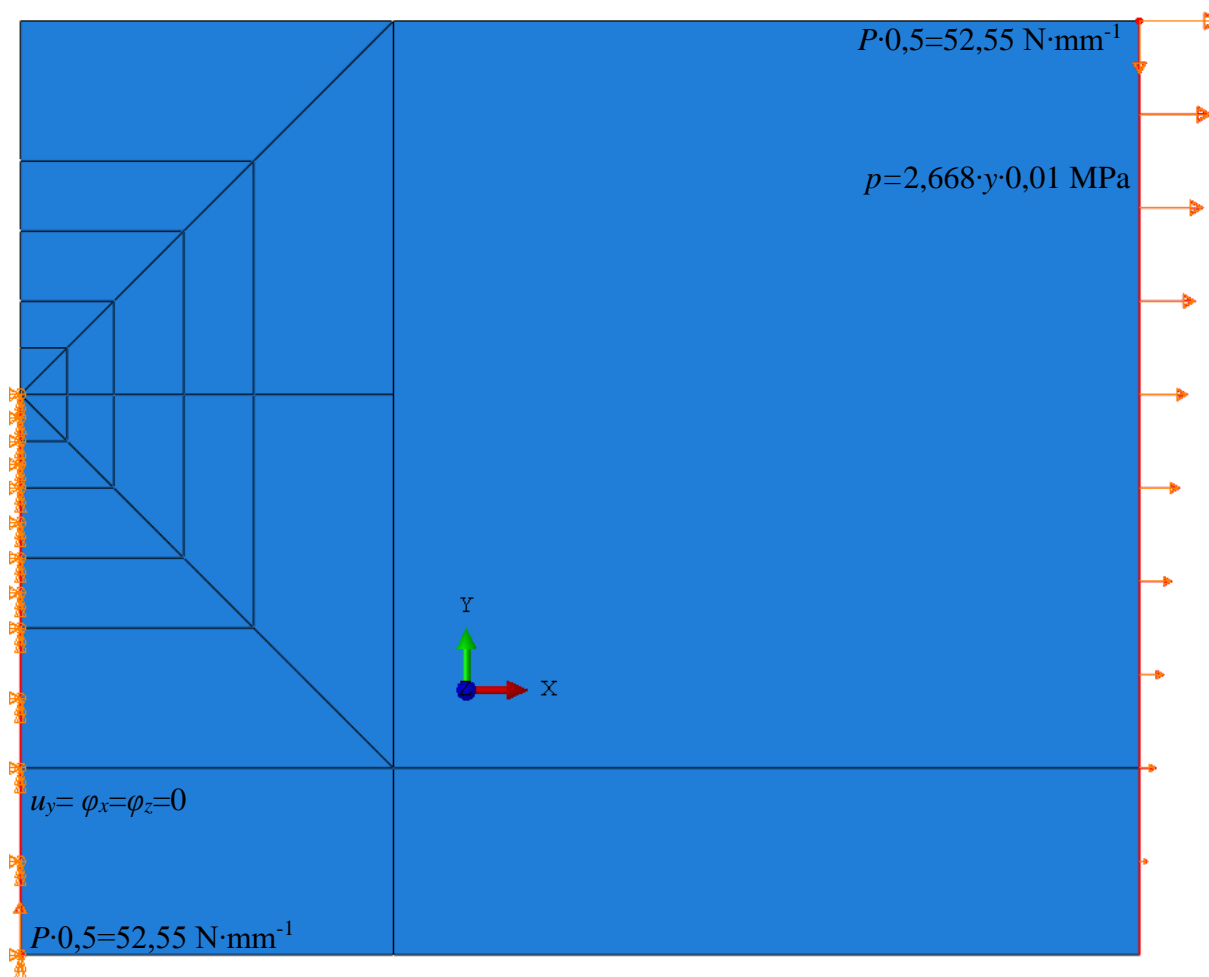
Potom je definirana pukotina slijedom naredbi *Special, Crack, Create, Contour Integral*. U izborniku *Edit Crack* q -vektorom određen je smjer prostiranja pukotine (Slika 11.). Selektirana je opcija *On symmetry plane (half-crack model)*, a u izborniku *Singularity* odabrane su opcije 0,25 za *Midside node parameter* ($0 < t < 1$) i *Collapsed element side, single node* za *Degenerate Element Control at Crack Tip/Line*, čime je osiguran vjeran opis za linearno-elastičnu mehaniku loma. Naknadno je u modulu *Step* naredbom *History Output Requests* zadano iščitavanje vrijednosti koeficijenta intenzivnosti naprezanja na 5 kontura.



Slika 11. Smjer širenja pukotine – dvodimenzijski model

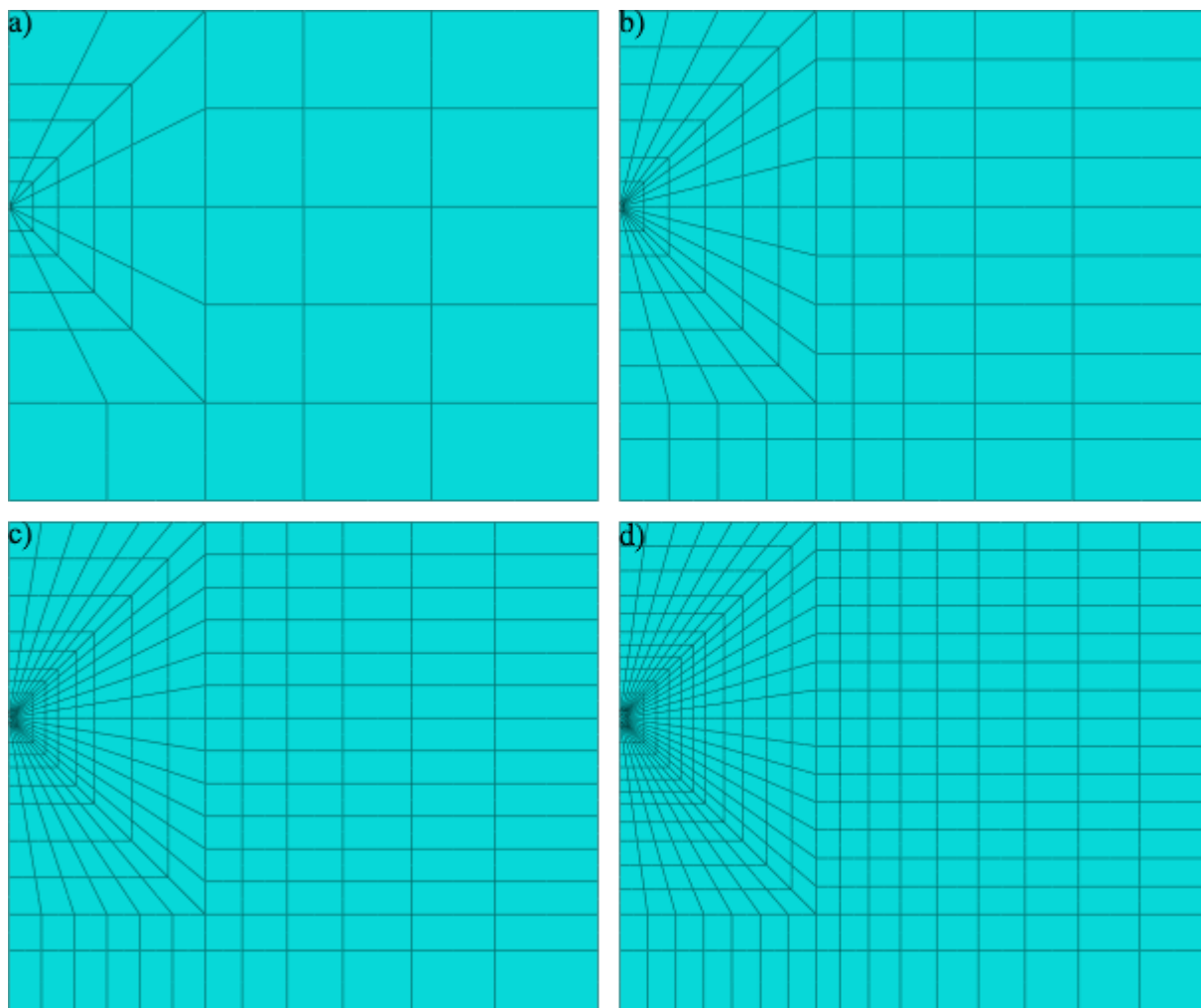
U modulu *Load* naredbom *Create Boundary Condition* narinuti su rubni uvjeti pomaka u vidu simetrije po yz-ravnini na bridu polovinskog modela uzorka uz pukotinu, čime je onemogućena rotacija točkama na tom bridu po y-osi te translacija po x-osi (Slika 12.).

Zatim su definirana opterećenja naredbom *Create Load*. Najprije su definirana opterećenja koncentriranom silom jednakog iznosa po jedinici širine naredbom *Concentrated Force*, te trokutasto vlačno naprezanje naredbom *Pressure* i opcijom *Create Analytical Field*. Prikaz opterećenja na modelu dan je na Slici 12.



Slika 12. Rubni uvjeti za model diskretiziran dvodimenzijskim elementima

U modulu *Mesh* izvršeno je još jedno particioniranje kojim je najveća površina modela razdvojena na dva pravokutnika za lakše strukturiranje mreže. U neposrednom kontaktu s pukotinom korišteni su CPE8R elementi s kolabirantom, dok je ostatak mreže generiran pomoću uobičajenih CPE8R elemenata. Generirane mreže različitih gustoća prikazane su na Slici 13.

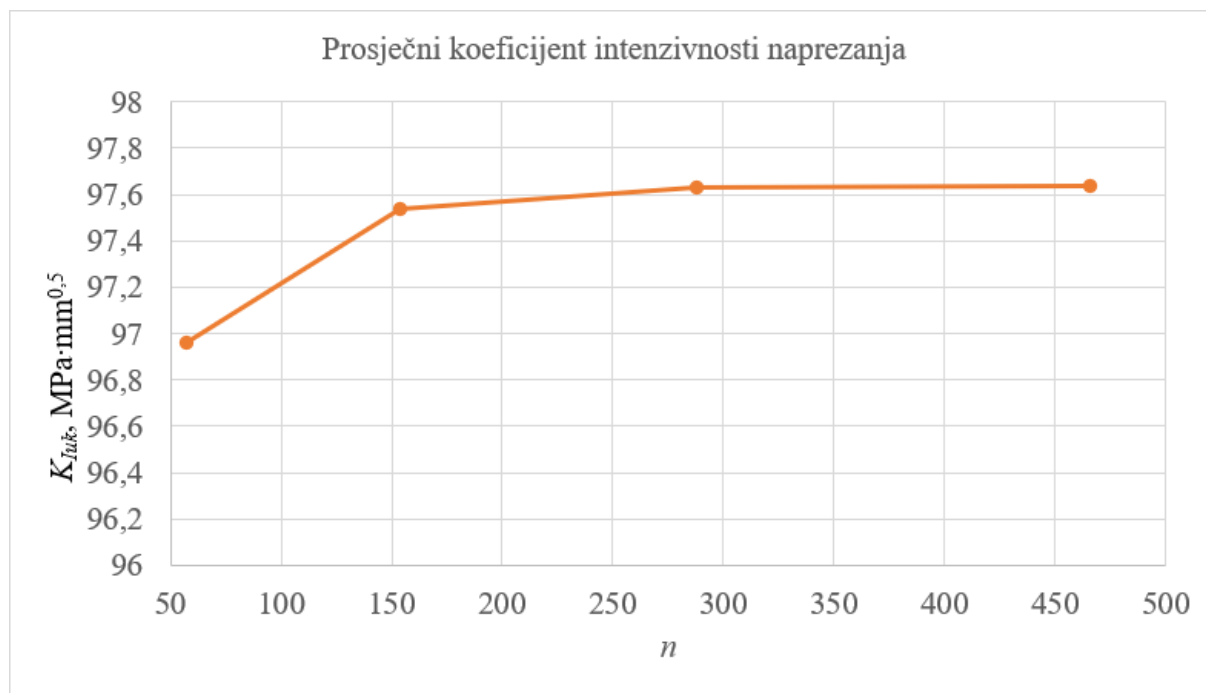


Slika 13. Mreže generirane za numeričku analizu dvodimenzijским elementima sa: a) 57 elemenata, b) 154 elementa, c) 288 elemenata i d) 466 elemenata

Konvergencija rješenja prikazana je Tablicom 3. i Slikom 14.

Tablica 3. Konvergencija koeficijenta intenzivnosti naprežanja za model diskretiziran dvodimenzijским elementima

K_I , MPa·mm ^{0,5} , za:	n			
	57	154	288	466
Konturu 1.	97,00	97,58	97,63	97,65
Konturu 2.	96,94	97,53	97,63	97,64
Konturu 3.	96,95	97,53	97,63	97,64
Konturu 4.	96,96	97,54	97,63	97,64
Konturu 5.	96,95	97,54	97,63	97,65
Prosjek	96,96	97,54	97,63	97,64
Rješenje na temelju priručnika	100	100	100	100
Relativno odstupanje	-3,04%	-2,46%	-2,37%	-2,36%



Slika 14. Konvergencija prosječnog ukupnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja

Može se uočiti da se vrijednost prosječnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja nije značajno promijenila dodatnim progušćivanjem provedenim u četvrtoj mreži. S obzirom na preporučenu duljinu singularnih elemenata, četvrta mreža predstavlja najgušću izvedivu mrežu u okolini vrška pukotine. Kako se zadnjim progušćivanjem mreže vrijednost koeficijenta intenzivnosti naprezanja tek neznatno povećala (promjena uočljiva tek na četvrtoj značajnoj znamenici), usvaja se vrijednost koeficijenta intenzivnosti naprezanja dobivena četvrtom mrežom:

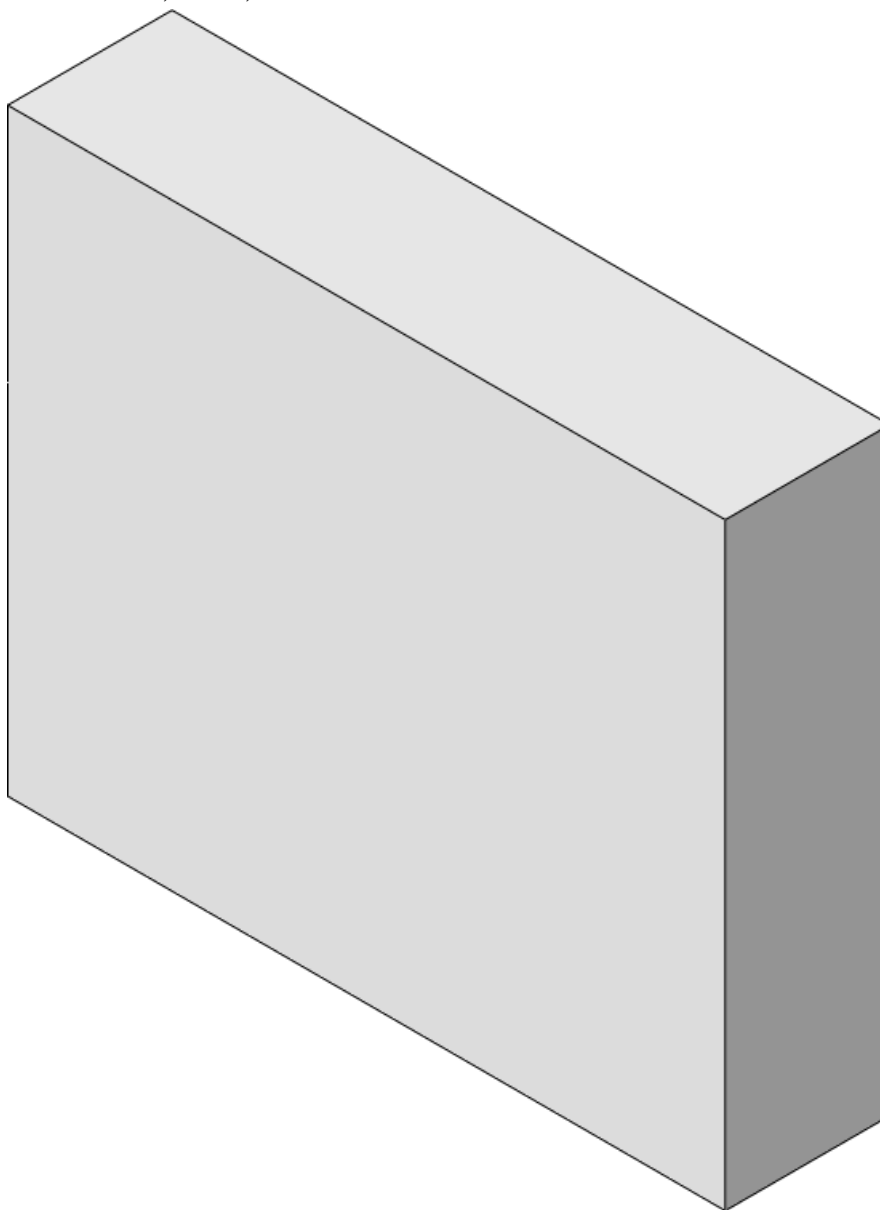
$$K_{Iuk}=97,64 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^{0,5}. \quad (19)$$

Dobiveni rezultat potvrđuje prije uvedenu pretpostavku da je koeficijent intenzivnosti naprezanja za opterećenje koncentriranim silama na trima točkama za omjer po izrazu (4) na strani sigurnosti, jer je rezultatni koeficijent intenzivnosti naprezanja dobiven metodom konačnih elemenata neznatno niži od onog dobivenog na temelju kombiniranja koeficijenata intenzivnosti naprezanja za karakteristične kombinacije uzoraka i opterećenja.

Preostalo je još odrediti koliko od tako dobivenog rješenja odudara rješenje trodimenzijskim elementima, u kojem je uvažena i debljina uzorka.

3.3. Izračun trodimenzijskim konačnim elementima

Najprije je u modulu *Part* generirana geometrija četvrtine uzorka (Slika 15.) naredbom *Create Part* i podnaredbama *3D*, *Solid*, *Extrusion*.



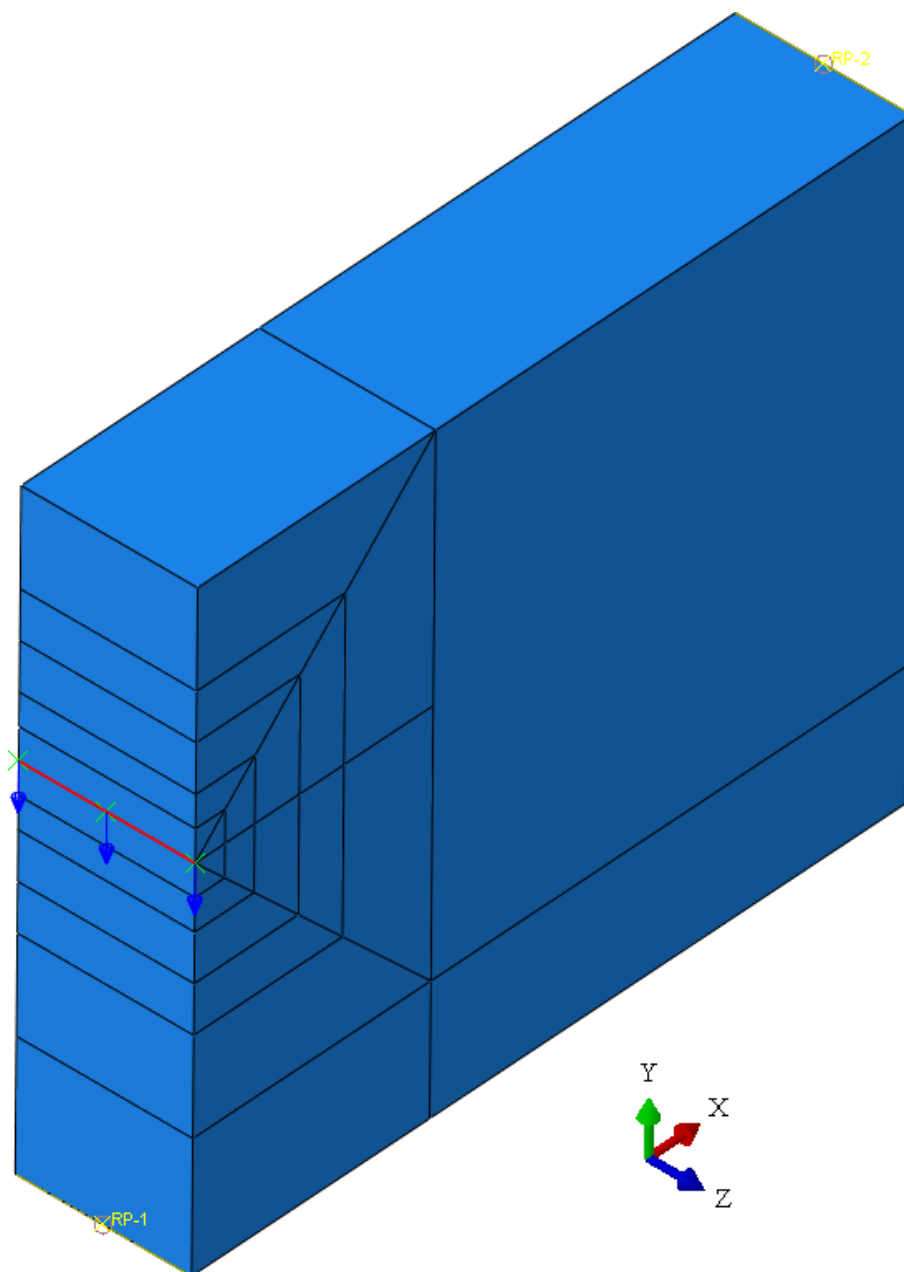
Slika 15. Četvrtina geometrije uzorka

Tako dobivenoj geometriji dodijeljena su u modulu *Property* svojstva materijala (iz Tablice 2.) i presjeka naredbama *Create Material*, *Create Sections* s podnaredbama *Solid*, *Homogeneous* i naredbom *Assign Section*.

Tako dobivena geometrija s pripadajućim svojstvima uvezena je u modul *Assembly* naredbom *Create Instance*, s opcijama *Parts* i *Independent*. Zatim je u modulu *Step* naredbom *Create Step* opcijom *Static*, *General* definiran korak u kojem će se narinuti opterećenje na polovični model uzorka.

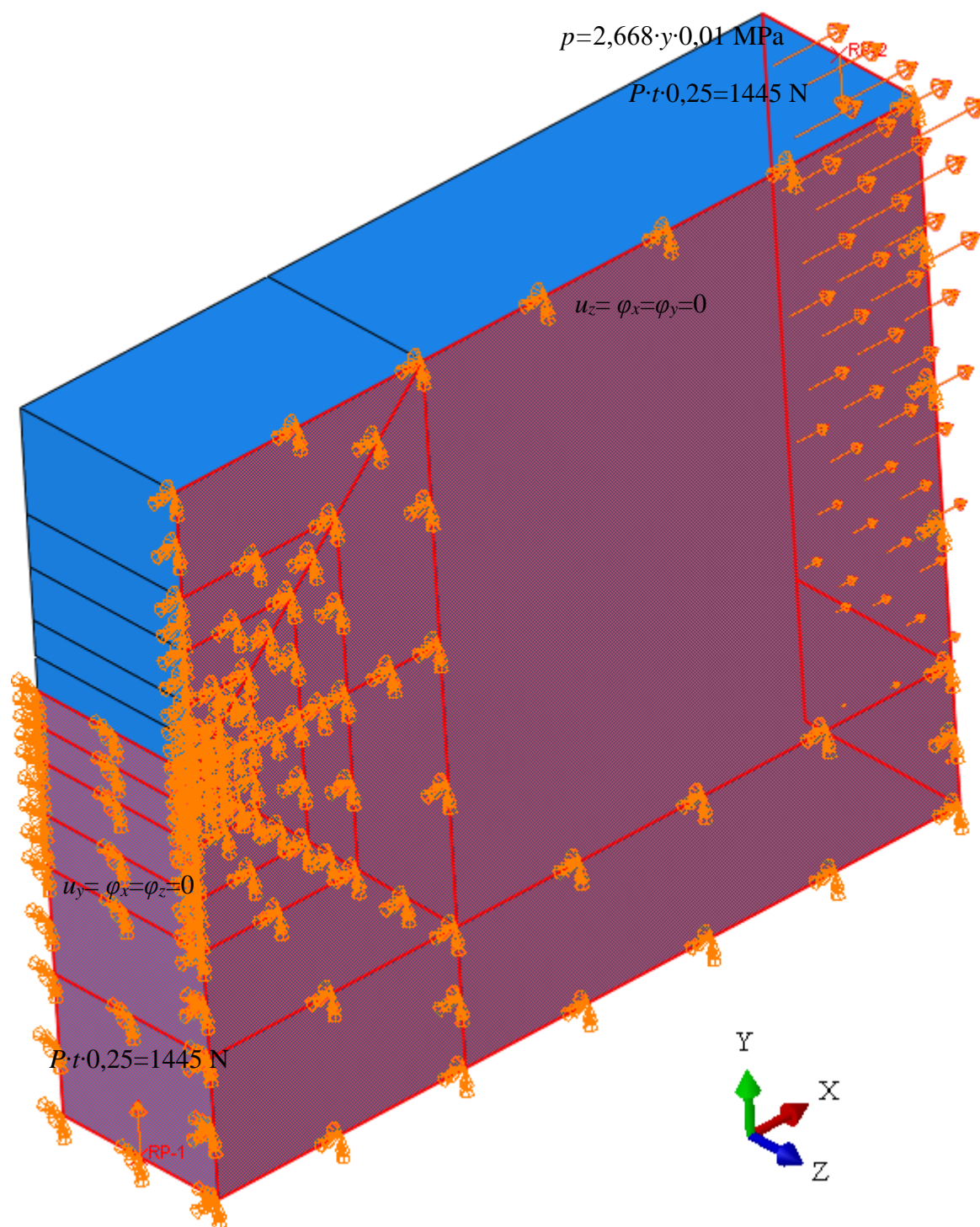
U modulu *Interaction* naredbom *Partition Face: Sketch* particionirana je prednja stranica uzorka identično dvodimenzijskom slučaju (Slika 11.). Naredbom *Partition Cell: Extrude/Sweep Edges* ekstrudirani su bridovi podvolumena modela, čime je dovršeno particioniranje geometrije (Slika 19.).

Potom je definirana pukotina slijedom naredbi *Special, Crack, Create, Contour Integral*. U izborniku *Edit Crack* q -vektorom određen je smjer prostiranja pukotine (Slika 16.). Selektirana je opcija *On symmetry plane (half-crack model)*, a u izborniku *Singularity* odabrane su opcije 0,25 za *Midside node parameter* ($0 < t < 1$) i *Collapsed element side, single node* za *Degenerate Element Control at Crack Tip/Line*, čime je osiguran vjeran opis za linearno-elastičnu mehaniku loma. Naknadno je u modulu *Step* naredbom *History Output Requests* zadano iščitavanje vrijednosti koeficijenta intenzivnosti naprezanja na 5 kontura.



Slika 16. Partitionirana četvrtina geometrije uzorka i smjer širenja pukotine

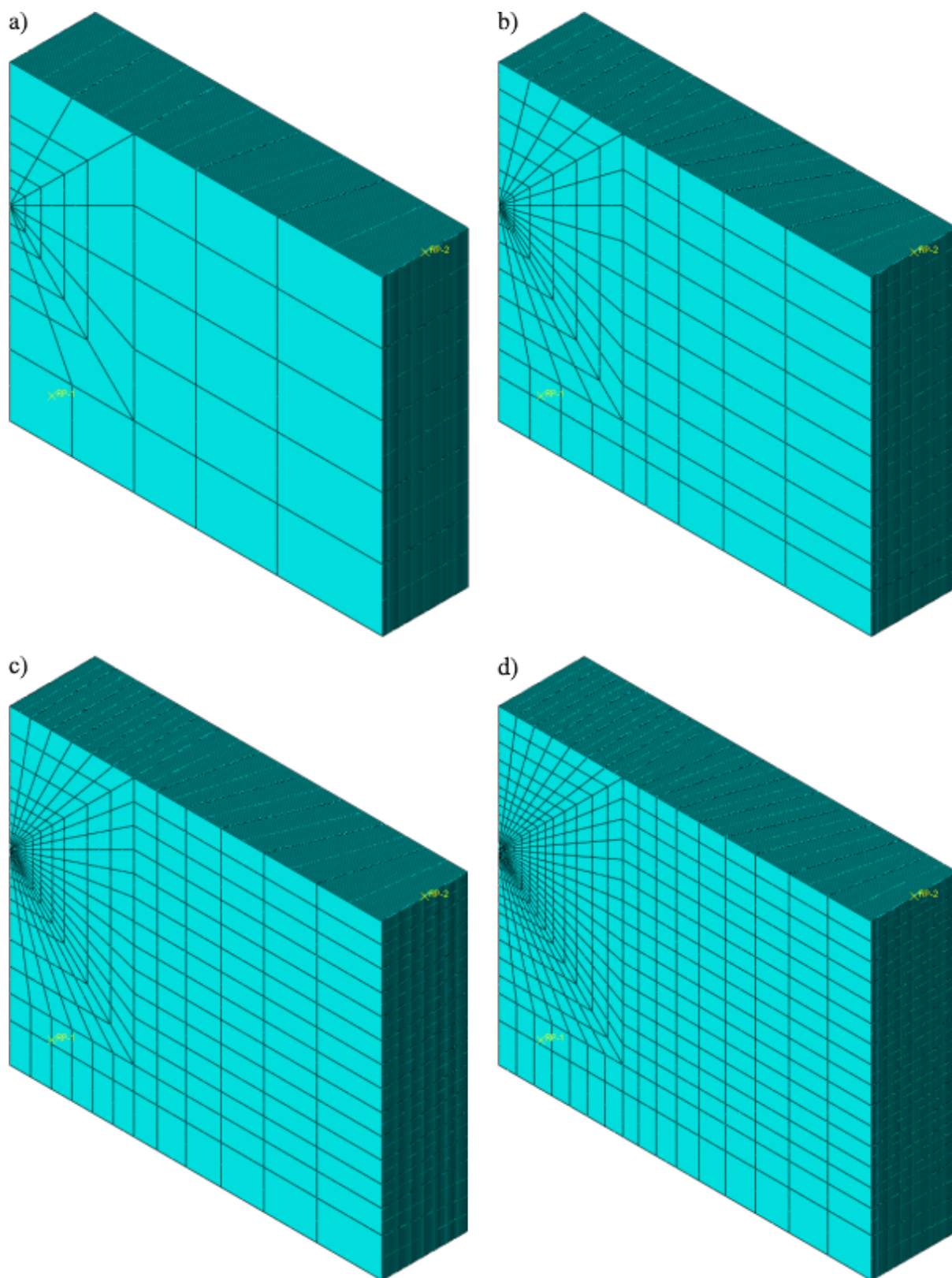
U modulu *Load* naredbom *Create Boundary Condition* narinuti su rubni uvjeti pomaka u vidu simetrije po yz -ravnini na plohi četvrtinskog uzorka uz pukotinu, čime je onemogućena rotacija točkama na toj plohi po y - i z -osi, te pomak po x -osi i simetrije po xy -ravnini, čime je onemogućena rotacija po x - i y -osi, te pomak po z -osi točkama na plohi koja prolazi kroz sredinu pune geometrije uzorka (Slika 17.).



Slika 17. Rubni uvjeti pomaka za model diskretiziran trodimenzijskim elementima

Trokutasto vlačno naprezanje modelirano je identičnim postupkom kao i za analizu dvodimenzijskim elementima, s razlikom da je dodijeljeno plohi umjesto bridu (Slika 17.). Koncentrirane linijske sile po širini uzorka modelirane su koncentriranim silama na referentnim točkama postavljenim na sredini brida na kojem djeluje opterećenje (Slika 17.). Potom je referentna točka povezana *couplingom* s bridom. Iznosi koncentriranih sila odgovaraju umnošku polovice širine uzorka i duljinske sile, budući da su primijenjeni rubni uvjeti dvostruke simetrije kroz sredinu uzorka.

U modulu *Mesh* generirane su četiri mreže različitih gustoća, prikazane na Slici 18. Za neposredni kontakt s pukotinom korišteni su elementi C3D20R s kolabiranim stranicom, dok je ostatak mreže generiran pomoću uobičajenih C3D20R elemenata.



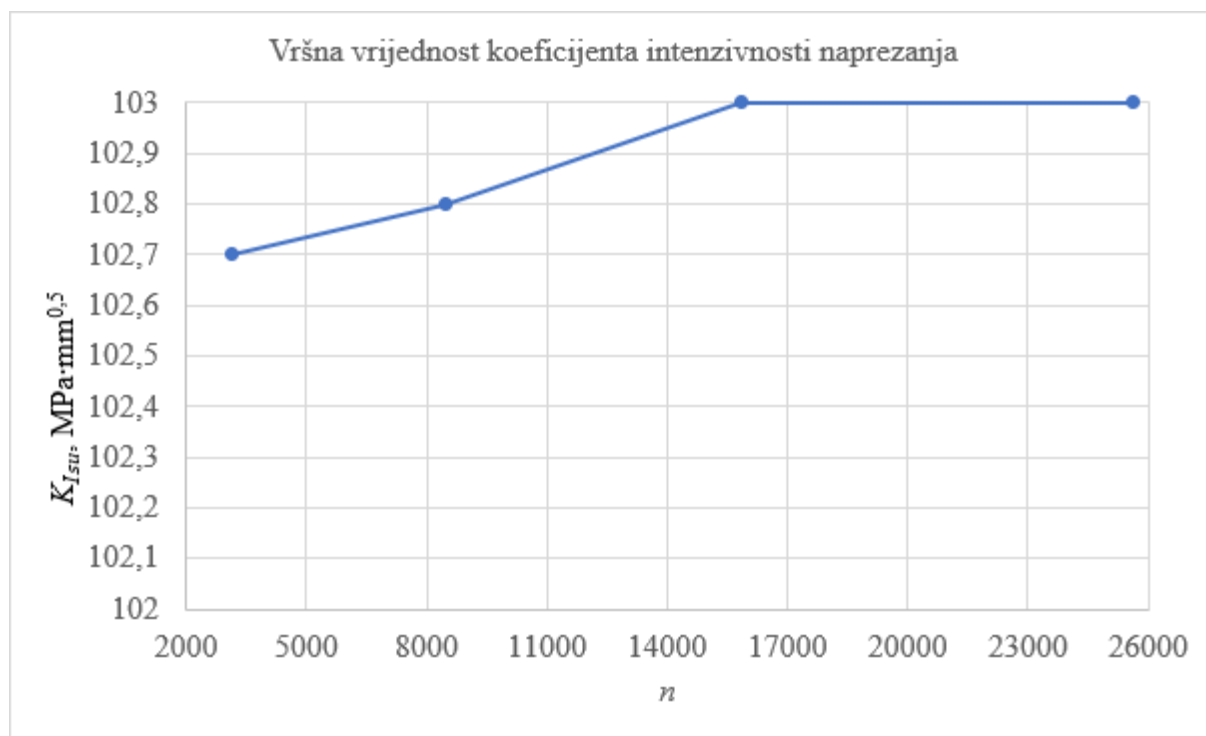
Slika 18. Mreže generirane za numeričku analizu dvodimenzijским elementima s: a) 3135 elemenata, b) 8470 elemenata, c) 15840 elemenata i d) 25630 elemenata

Treba napomenuti da ne postoji potreba za nametanjem 55 konačnih elemenata po širini geometrije zbog točnosti rješenja, jer nema osobito značajnih gradijenata u tom smjeru. Ovdje je iskorišteno toliko puno elemenata kako bi se za zadnju mrežu moglo zornije predložiti mijenjanje koeficijenta intenzivnosti naprezanja po širini, tj. debljini uzorka.

Konvergencija rješenja praćena je za ukupni koeficijent intenzivnosti naprezanja na „unutarnjoj“ (u dosadašnjim prikazima – prednjoj) površini u Tablici 4. i na Slici 19. (jer će tu stanje deformacija biti najbliže ravninskom) te za prosječni koeficijent intenzivnosti naprezanja po širini uzorka u Tablici 5. i na Slici 20. jer će tu stanje deformacija biti najbliže ravninskom.

Tablica 4. Konvergencija vršnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja za model diskretiziran trodimenzijskim elementima po sredini uzorka

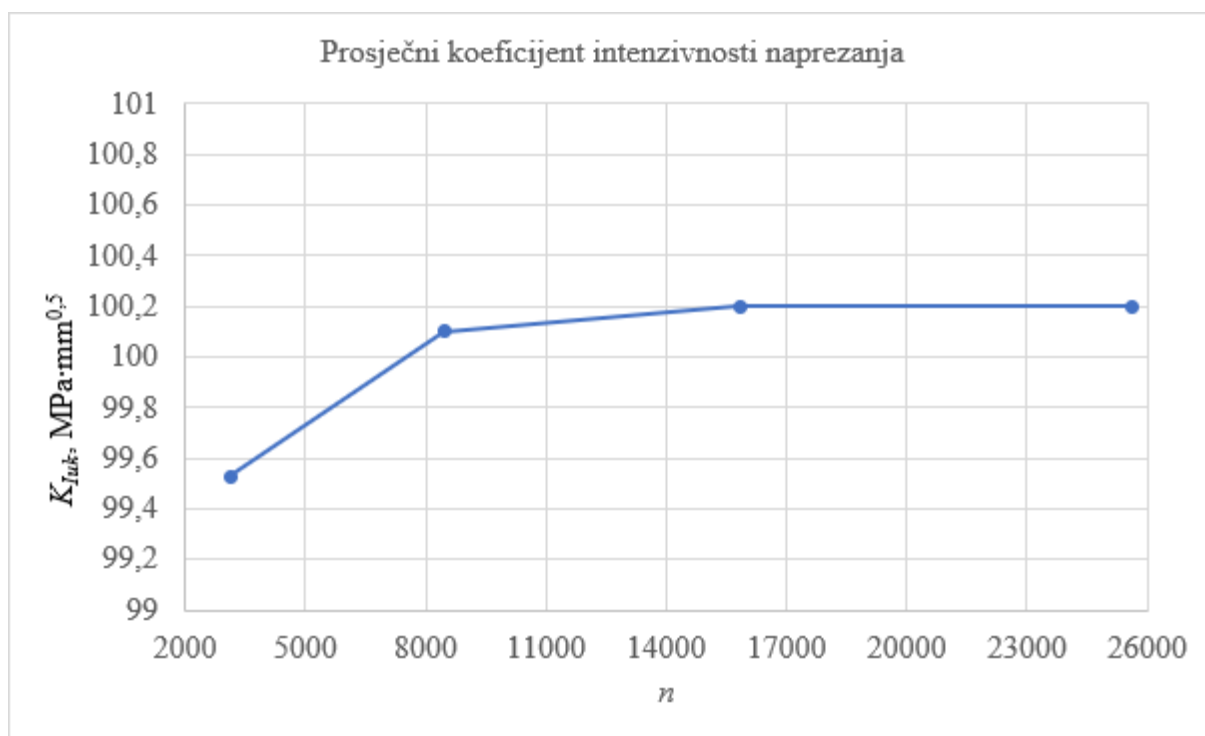
$K_{I_{su}}$, MPa·mm ^{0,5} , za:	n			
	3135	8470	15840	25630
Konturu 1.	102,7	102,9	102,9	102,9
Konturu 2.	102,7	102,8	103,0	103,0
Konturu 3.	102,7	102,8	103,0	103,0
Konturu 4.	102,7	102,8	103,0	103,0
Konturu 5.	102,7	102,8	103,0	103,0
Prosjek	102,7	102,8	103,0	103,0
Rješenje na temelju priručnika	100	100	100	100
Relativno odstupanje	2,70%	2,80%	3,00%	3,00%



Slika 19. Konvergencija vršnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja

Tablica 5. Konvergencija prosječnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja za model diskretiziran trodimenzijskim elementima

$K_{I\text{prosječno}}, \text{MPa}\cdot\text{mm}^{0,5}, \text{ za:}$	n			
	3135	8470	15840	25630
Konturu 1.	99,59	100,2	100,2	100,3
Konturu 2.	99,50	100,1	100,2	100,2
Konturu 3.	99,51	100,1	100,2	100,2
Konturu 4.	99,52	100,1	100,2	100,2
Konturu 5.	99,51	100,1	100,2	100,2
Prosjek	99,53	100,1	100,2	100,2
Rješenje na temelju priručnika	100	100	100	100
Relativno odstupanje	-0,47%	0,10%	0,20%	0,20%

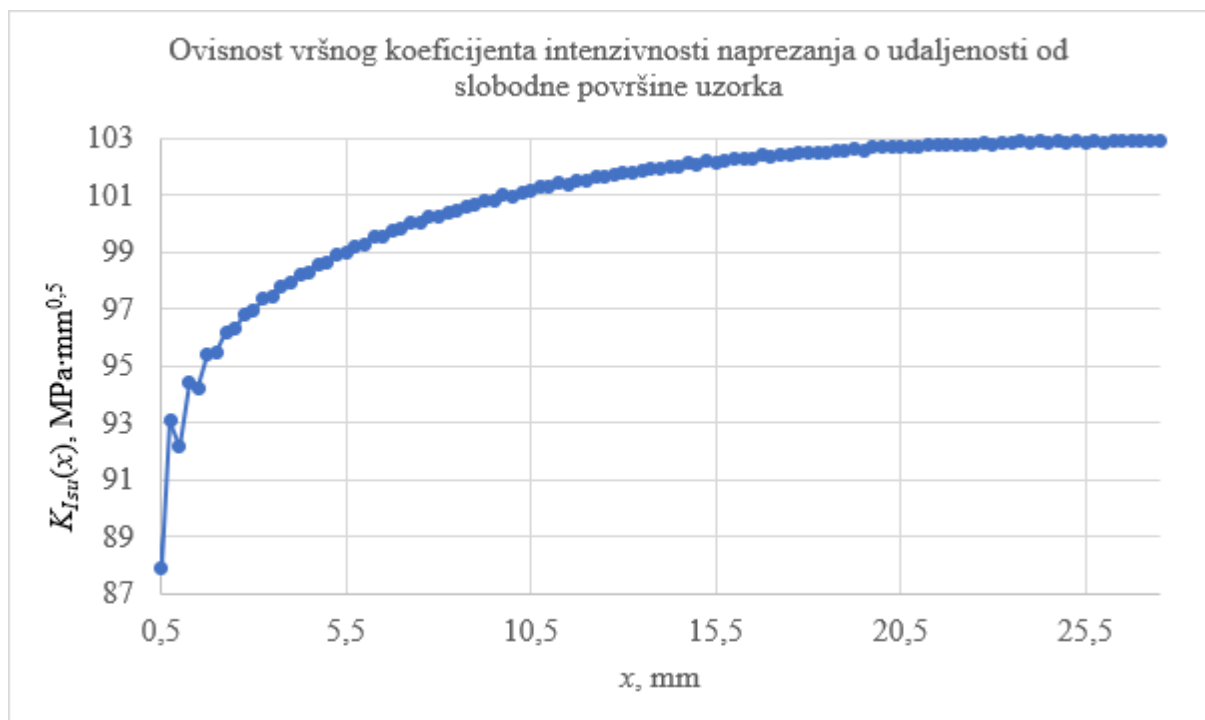


Slika 20. Konvergencija prosječnog ukupnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja

Budući da se ni prosječni ni vršni koeficijent intenzivnosti naprezanja nije značajno promijenio povećanjem broja konačnih elemenata u okolini vrška pukotine i da bi daljnje povećavanje gustoće mreže u okolini vrška pukotine izazvalo značajnu distorziranost klinastih konačnih elemenata, kao konačno rješenje zadatka usvaja se vršna vrijednost koeficijenta intenzivnosti naprezanja dobivena u sredini uzorka:

$$K_{Isu} = 103,0 \text{ MPa}\cdot\text{mm}^{0,5}. \quad (20)$$

Raspodjele koeficijenta intenzivnosti naprezanja po poprečnom presjeku uzorka dana je na Slici 21.



Slika 21. Ovisnost vršnog koeficijenta intenzivnosti naprezanja o udaljenosti od slobodne površine uzorka

Očekivano se najveći koeficijent intenzivnosti naprezanja manifestira upravo u sredini uzorka, jer je tu stanje deformacija najbliže ravninskom, tj. materijal se ne može slobodno deformirati u smjeru širine uzorka. Na vanjskim plohamo se materijal može slobodno deformirati u smjeru širine uzorka (ravninsko stanje naprezanja), zbog čega je izračunata vrijednost koeficijenta intenzivnosti naprezanja na vanjskim plohamo niža od vrijednosti izračunate za sredinu uzorka. Ravninsko stanje deformacija je ujedno i razlog zbog čega je dobiveni rezultat u sredini uzorka veći od koeficijenata izračunatih na temelju poznatih eksperimentalnih podataka za standardne tipove opterećivanja i diskretizacijom modela dvodimenzijskim konačnim elementima.

Iako je razlika niža od 5%, dobiveni rezultati pokazuju da je potrebno posvetiti veliku pažnju pri konstruiranju i po mogućnosti izbjegavati konstrukcijske dijelove većih debljina. Uz veću osjetljivost na pukotine uslijed većeg koeficijenta intenzivnosti naprezanja, veći je volumen u kojem se statistički može pojaviti defekt koji će u nekom trenutku prerasti u pukotinu, a uz to je za unutrašnjost konstrukcijskih dijelova većih izmjera karakteristična veća veličina zrna, što se negativno odražava na mehanička svojstva.

4. Literatura

1. Programski zadatak iz kolegija: „Mehanika oštećenja i mehanika loma / Pogonska čvrstoća“, Ivan Trapić, mag. ing. mech., Zagreb, 23.11.2020.
2. Uvod u procjenu cjelovitosti (integriteta) konstrukcije, prof. dr. sc. Zdenko Tonković, Zagreb, 2014.
3. https://www.mb.uni-siegen.de/lmw/downloads_prints/materialermuedung/bruchmechanik-steilkurs.pdf, zadnji put pristupljeno 5.2.2021.
4. Formulas for stress, strain and structural matrices, Walter D. Pilkey, Charlottesville, 2004.
5. The stress analysis of cracks handbook, Hiroshi Tada, Paul C. Paris, George R. Irwin, New York, 2000.
6. https://www.meuselwitz-guss.de/fileadmin/daten/Dateien/pdf/werkstoffe/Werkstoffkenndaten_Kugelgraphit_getrennt_gegossen.pdf, zadnji put pristupljeno 5.2.2021.
7. Bruchzähigkeit von Gusseisen, dr. sc. Stefan Wolfensberger, Zürich, 1986.
8. Konačni elementi u mehanici loma, prof. dr. sc. Zdenko Tonković, Zagreb, 2011.