

Modèles d Détection de Ruptur

#### Sommair

Modèles de Détection de Rupture

vraisemblance et Logvraisemblance

Estimation des paramètres

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto

## Modèles de Détection de Rupture

Le Cnam- EICNAM

9 mars 2020





### Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

#### Sommain

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimation des paramètre du modèle

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto

- 1 Sommaire
- 2 Modèles de Détection de Rupture
- 3 Fonctions: vraisemblance et Log-vraisemblance
- 4 Estimation des paramètres du modèle
- 5 Modèle de Rupture pour la loi de Pareto



## Modèles de Détection de Rupture

Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Logvraisemblance

Estimatio des paramètre

Modèle de Rupture pour la loi

#### $Mod\`{e}le$

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe un instant k (1 < k < n-1), appelé l'instant de Rupture tel que :



# Modèles de Détection de Rupture

Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

vraisemblance et Logvraisemblance

Estimatio des paramètre du modèle

Modèle de Rupture pour la loi

#### $Mod\`{e}le$

Soit  $X_1, \ldots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe un instant k (1 < k < n-1), appelé l'instant de Rupture tel que :

#### Cas discret

 $X_1, \ldots, X_k$  suivent la loi  $\overline{P_{\theta_1}}$   $X_{k+1}, \ldots, X_n$  suivent la loi  $P_{\theta_2}$ 



# Modèles de Détection de Rupture

Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimatior des paramètres du modèle

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto

#### $Mod\`{e}le$

Soit  $X_1, \ldots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe un instant k (1 < k < n-1), appelé l'instant de Rupture tel que :

#### Cas discret

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_k \text{ suivent la loi } P_{\theta_1} \\ X_{k+1}, \dots, X_n \text{ suivent la loi } P_{\theta_2} \end{cases}$$

#### Cas continu

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_k \text{ suivent la loi } f_1(x, \theta_1) \\ X_{k+1}, \dots, X_n \text{ suivent la loi } f_2(x, \theta_2) \end{cases}$$



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Logvraisemblance

Estimation des paramètres

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto Notons L la vraisemblance associée au modèle et  $\ell$  la fonction Log-vraisemblance.



vraisemblance

Cas discret

Notons L la vraisemblance associée au modèle et  $\ell$  la fonction Log-vraisemblance.



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Log-

vraisemblance
Estimation

des paramètre du modèle

Modèle de Rupture pour la lor de Pareto Notons L la vraisemblance associée au modèle et  $\ell$  la fonction Log-vraisemblance.

$$\overset{\text{To}}{\underset{\text{o}}{\text{go}}} \left\{ \begin{array}{l} L(\underline{x},\theta_1,\theta_2,k) = \prod_{i=1}^k P_{\theta_1}(X_i=x_1) \prod_{i=k+1}^n P_{\theta_2}(X_i=x_1) \\ \ell(\underline{x},\theta_1,\theta_2,k) = \sum_{i=1}^k \log\left(P_{\theta_1}(X_i=x_i)\right) + \sum_{i=k+1}^n \log\left(P_{\theta_2}(X_i=x_1)\right) \\ \ell(\underline{x},\theta_1,\theta_2,k) = \sum_{i=1}^k \log\left(P_{\theta_1}(X_i=x_i)\right) + \sum_{i=k+1}^n \log\left(P_{\theta_2}(X_i=x_1)\right) \\ \ell(\underline{x},\theta_1,\theta_2,k) = \sum_{i=1}^k \log\left(P_{\theta_1}(X_i=x_1)\right) \\ \ell(\underline{x},\theta_1,\theta_2,k) = \sum_{i=1}^k \log\left(P_{\theta_1}(X$$



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Log-

vraisemblance

des paramètres du modèle

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto Notons L la vraisemblance associée au modèle et  $\ell$  la fonction Log-vraisemblance.

$$\overset{\text{to}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{\text{bot}}}{\overset{bot}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}} \\$$

Cas continu



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimation des paramètres du modèle

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto Notons L la vraisemblance associée au modèle et  $\ell$  la fonction Log-vraisemblance.

$$\begin{cases} \text{Theorem } \begin{cases} L(\underline{x}, \theta_1, \theta_2, k) = \prod_{i=1}^k P_{\theta_1}(X_i = x_1) \prod_{i=k+1}^n P_{\theta_2}(X_i = x_1) \\ \ell(\underline{x}, \theta_1, \theta_2, k) = \sum_{i=1}^k \log\left(P_{\theta_1}(X_i = x_i)\right) + \sum_{i=k+1}^n \log\left(P_{\theta_2}(X_i = x_i)\right) \\ L(\underline{x}, \theta_1, \theta_2, k) = \prod_{i=1}^k f_1(x_i, \theta_1) \prod_{i=k+1}^n f_2(x_i, \theta_2) \\ \ell(\underline{x}, \theta_1, \theta_2, k) = \sum_{i=1}^k \log\left(f_1(x_i, \theta_1)\right) + \sum_{i=k+1}^n \log\left(f_2(x_i, \theta_2)\right) \end{cases} \end{cases}$$



## Estimation des paramètres

Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Logvraisemblance

Estimatio des paramètre

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto Les estimateurs sont obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance :



## Estimation des paramètres

Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

des paramètre

Modèle de Rupture pour la loi Les estimateurs sont obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance :

$$(\hat{\theta}_1(k), \hat{\theta}_2(k)) = \arg \sup_{(\theta_1, \theta_2)} \ell(\underline{x}, \theta_1, \theta_2, k)$$
 (1)



## Estimation des paramètres

Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimation

des paramètres du modèle

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto Les estimateurs sont obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance :

$$(\hat{\theta}_1(k), \hat{\theta}_2(k)) = \operatorname{Arg} \sup_{(\theta_1, \theta_2)} \ell(\underline{x}, \theta_1, \theta_2, k)$$
 (1)

#### estimation de l'intant de Rupture

Notons  $\Lambda(k)=\ell(\underline{x},\hat{\theta}_1(k),\hat{\theta}_2(k),k)$ .  $\hat{k}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de k est déterminé par :

$$\hat{k} = \operatorname{Arg} \max_{k} \Lambda(k) \tag{2}$$



Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Logvraisemblance

Estimation des

Modèle de Rupture pour la los de Pareto

Soit 
$$f(x,a) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x) = a \, e^{-(a+1) \log x} \mathbb{1}_{[1,\infty[}(x) \, \text{où } a > 0.$$

Soit  $X_1, \ldots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe un instant k (1 < k < n-1), appelé l'instant de Rupture tel que :



vraisemblance

Soit 
$$f(x,a) = \frac{a}{x^{a+1}} 1_{[1,\infty[}(x) = a e^{-(a+1)\log x} 1_{[1,\infty[}(x) \text{ où } a > 0.$$

Soit  $X_1, \ldots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe un instant k (1 < k < n-1), appelé l'instant de Rupture tel que :

#### Modèle de Rupture pour la loi de Pareto

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_k \text{ suivent la loi } f(x_i, a_1) \\ X_{k+1}, \dots, X_n \text{ suivent la loi } f(x_i, a_2) \end{cases}$$

$$X_{k+1}, \ldots, X_n$$
 suivent la loi  $f(x_i, a_2)$ 



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimation des paramètres du modèle

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto vraisemblance et la fonction Log-vraisemblance associée au modèle

$$L(\underline{x}, a_1, a_2, k) = \prod_{i=1}^{k} a_1 e^{-(a_1+1)\log x_i} \prod_{i=k+1}^{n} a_2 e^{-(a_2+1)\log x_i}$$

$$\ell(\underline{x}, a_1, a_2, k) = \sum_{i=1}^{k} (\log a_1 - (a_1+1)\log x_i)$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} (\log a_2 - (a_2+1)\log x_i)$$

$$= k \log a_1 - (a_1+1) \sum_{i=1}^{k} \log x_i$$

$$+ (n-k) \log a_2 - (a_2+1) \sum_{i=k+1}^{n} \log x_i$$



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimation des naramètres

Modèle de Rupture pour la lo

#### estimateurs des paramètres

$$\hat{a}_{1} = \hat{a}_{1}(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} \log X_{i}}$$

$$\hat{a}_{2} = \hat{a}_{2}(k) = \frac{n-k}{\sum_{i=k+1}^{n} \log X_{i}}$$
(3)



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Logvraisemblance

des paramètres

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto estimateurs des paramètres

$$\begin{cases}
\hat{a}_1 = \hat{a}_1(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \log X_i} \\
\hat{a}_2 = \hat{a}_2(k) = \frac{n-k}{\sum_{i=k+1}^n \log X_i}
\end{cases}$$
(3)

Notons  $\Lambda(k) = \ell(\underline{x}, \hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), k)$ .  $\hat{k}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de k est déterminé par :

$$\hat{k} = \operatorname{Arg} \max_{k} \Lambda(k) \tag{4}$$



Modèles de Détection de Rupture

Sommaire

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions: vraisemblance et Logvraisemblance

Estimation des paramètres

Modèle de Rupture pour la loi de Pareto

#### estimateur de l'instant de rupture

$$\Lambda(k) = k \log \hat{a}_{1}(k) - (\hat{a}_{1}(k) + 1) \sum_{i=1}^{k} \log X_{i} 
+ (n - k) \log \hat{a}_{2}(k) - (\hat{a}_{2}(k) + 1) \sum_{i=k+1}^{n} \log X_{i} 
= k \log \left(\frac{k}{\sum_{i=1}^{k} \log X_{i}}\right) 
+ (n - k) \log \left(\frac{n - k}{\sum_{i=1}^{n} \log X_{i}}\right) - n - \sum_{i=1}^{n} \log X_{i}$$
(5)



Modèles de Détection de Rupture

Sommair

Modèles de Détection de Rupture

Fonctions:
vraisemblance et
Logvraisemblance

Estimation des paramètres du modèle

Modèle de Rupture pour la lor de Pareto

#### Remarque pour la programmation

En programmation, pour l'expression de  $\Lambda(k)$ , on tient compte des termes qui font intervenir k :

$$\Lambda(k) = k \log \left( \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} \log X_i} \right) + (n-k) \log \left( \frac{n-k}{\sum_{i=k+1}^{n} \log X_i} \right)$$
 (6)