1 Malthus

- introduit en 1798
- "Population, when unchecked, increase in a geometrical ratio"
- Population homogène d'une seule espèce animale
- On néglige :
  - l'âge
  - la taille
  - la périodicité de naissance et de mort
- Elle vit dans un milieu invariant soit seul ou sans relation de coexistence avec d'autres espèces

Principe 1. *On suppose que la croissance de la densité de population de l'espèce considérée est proportionnel à la densité pendant un court intervalle de temps.*

Définition 1.1. *On appelle "croissance Malthusienne" :*

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

où:

- *$N(t)$ est la densité de l'espèce au cours du temps.*
- *$k \in \mathbb{R}_+$ le coefficient d'accroissement*

Remarque 1. *Le modèle de Malthus ne prend pas en compte la capacité maximale d'un territoire qui imposerait une limite à la croissance.*

Propriété 1.1. *On considère la "croissance Malthusienne" précédemment définie.*

- *si $k < 0$:* *on dit que la population est en extinction exponentielle*
- *si $k = 0$:* *on dit que la population est en équilibre démographique*
- *si $k > 0$:* *on dit que la population est en croissance exponentielle*

Remarque 2. *un solution du l'équation différentielle est*

$$N(t) = N(0)\exp(kt)$$

Preuve 1. *Soit $k < 0$ alors*

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$$

Soit $k = 0$ alors

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = N(0)$$

Soit $k > 0$ alors

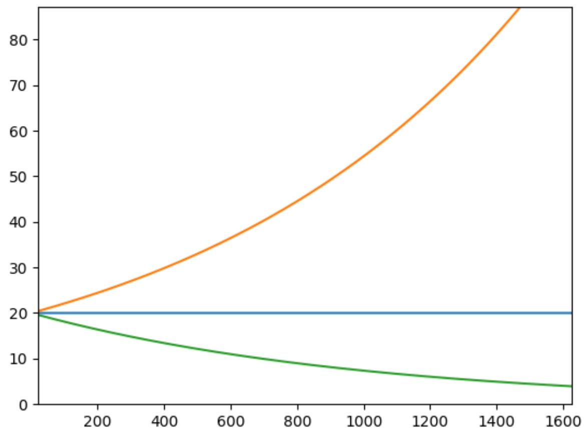
$$\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$$

$\square$

$k > 0$
$k = 0$
$k < 0$

Conclusion 1. *Le modèle reste donc valable pour une densité faible de la population i.e. tant que la population ne sature pas le milieu.*

Figure 1: densité de population



2 Vehulst

2.1 Présentation et hypothèse

"Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement"

- population homogène d'une seule espèce animale
- on néglige:
  - l'âge
  - la taille
  - la périodicité de naissance et de mort
- vit dans un milieu invariant seul ou sans interactions avec d'autres espèces

Principe 2. *En opposition au modèle de Malthus, on considère que le taux de croissance change avec la densité de la population.*

Définition 2.1. *On appelle* ***équation logistique de Verhulst****, l'équation différentielle:*

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)(1 - \frac{N(t)}{l})$$

où:

- *N(t) est la densité de l'espèce au cours du temps*
- $k \in \mathbb{R}_+$ *le coefficient d'accroissement*
- $l \in \mathbb{R}_+^*$ *la capacité du milieu à supporter la croissance i.e. population limite*

2.2 Etude de l'équation fonctionnelle

Définition 2.2. *$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre ssi $f(\bar{x}) = 0$*

Définition 2.3. *Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre, $\bar{x}$ est stable ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x_0 - \bar{x}\| < \eta \Longrightarrow \forall t > 0, \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$$

On dit que $\bar{x}$ est asymptotiquement stable si :

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

Propriété 2.1. *L'équation logistique de Verhulst admet deux points d'équilibre $a_0 = 0$ et $a_1 = l$.*

Preuve 2. *On note $\dfrac{dN(t)}{dt} = f(N(t))$ alors,pour tout $i \in 0, 1$, $f(a_i) = 0$ et, donc, $\frac{dN(t)}{dt} = 0$. On en déduit que $N(t)$ est constant.*

$\square$

Propriété 2.2. *Un seul des points d'équilibre est stable : $a_1 = l$*

Preuve 3. *On note $\bar{N}$ un point d'équilibre quelconque. Alors*

$$\frac{d}{dt}N = k(1 - \frac{2}{l}\bar{N})N + o(\|\bar{N} - N\|)$$

On linéarise et on a:

$$\frac{d}{dt}N \sim k(1 - \frac{2}{l}\bar{N})N$$

<u>en 0:</u>

$$\frac{d}{dt}N \sim kN$$

<u>en l:</u>

$$\frac{d}{dt}N \sim -kN$$

$\square$

$N(0) = l$
$N(0) > l$
$N(0) < l$

3 Lotka-Volterra

3.1 Présentation et hypothèses

- 1925-1926: Alfred James Lotka et Vito Volterra
- neurologie
- environnement

On considère deux espèces:

Figure 2: Portrait de phase

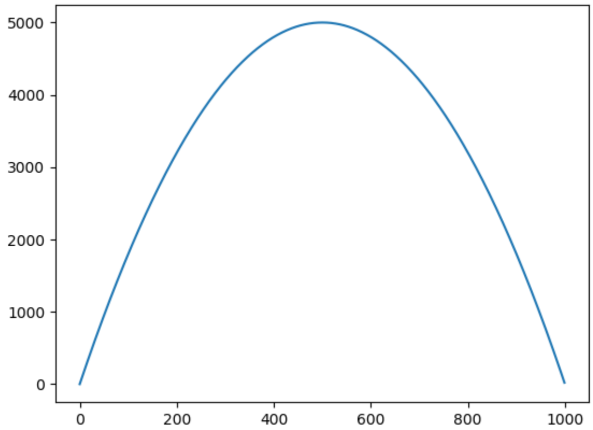
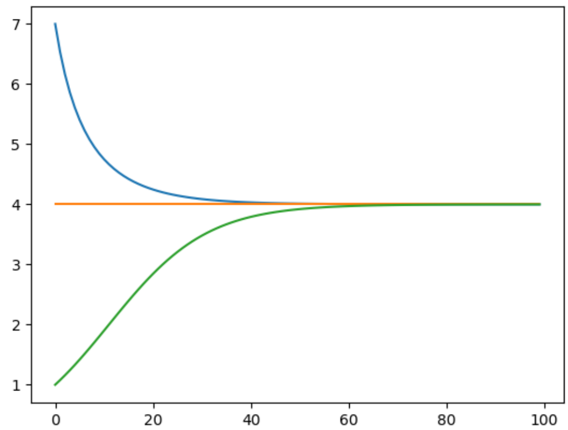


Figure 3: densité de population



- mouton notée m
- loup notée l

Leurs quantités seront données respectivement par $t \mapsto m(t)$ et $t \mapsto l(t)$

- les moutons ont accès à une quantité illimitée de nourriture
- seul les loups s'opposent à leur croissance
- quantité de loups limitée par le nombre de moutons
- croissance et décroissance des loups proportionnelles aux rencontres

Définition 3.1.

$$\begin{cases} m'(t) = am(t) - bm(t)l(t) \\ l'(t) = -cl(t) + dl(t)m(t) \\ (m(0), l(0)) = (m_0, l_0), m_0, l_0 > 0 \end{cases} \quad \textit{(1)}$$

- *a : taux d'accroissement des moutons*
- *b : taux de mortalité des moutons en fonction des rencontres*
- *c : taux de mortalité des loups*
- *d : taux de reproduction des loups en fonction des rencontres*

3.2 Résolution et étude de la périodicité

Propriété 3.1. *Si $m_0 = 0$ alors, pour tout t, $m(t) = 0$.*
S'il existe t_0 tel que $m(t_0) = 0$ alors pout tout t, $m(t) = 0$.
Si $m_0 > 0$ alors pour tout $t > 0$, $m(t) > 0$.
Ceci est aussi valable pour l

Preuve 4. *On suppose que $m_0 = 0$ alors $(0, l_0 \exp(ct))$ est solution de (1).*
D'après l'unicité dû à Cauchy-Lipschitz, pour tout t, $m(t) = 0$.
On suppose qu'il existe t_0 tq $m(t_0) = 0$.

□

Solution 1.

- *deux solutions triviales:*
  - $(0, l(t0)\exp(-ct))$
  - $(m(t0)\exp(at), 0)$
- *deux solutions constantes:*
  - $(0, 0)$
  - $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

On peut écrire (1) comme le système suivant:

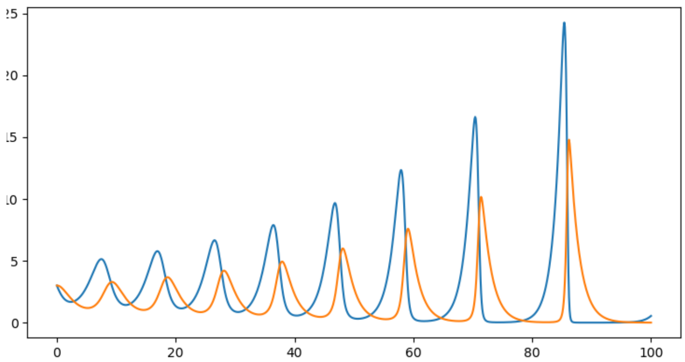
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \begin{pmatrix} m_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

avec $f\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(a-by) \\ l(-c+dm) \end{pmatrix}$

où (1):

$$\begin{cases} m'(t) = am(t) - bm(t)l(t) \\ l'(t) = -cl(t) + dl(t)m(t) \\ (m(0), l(0)) = (m_0, l_0), m_0, l_0 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Figure 4: Graphe des effectifs des moutons(en) et des loups dans le cas où M(0)=3 et L(0)=2



Théorème 3.1. *Les solutions de Lotka-Volterra sont périodiques.*

On introduit d'abord:

Propriété 3.2. *Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $m, l > 0$ par:*

$$H(m,l) = c\ln(m) - dm + a\ln(l) - bl$$

On appelle H une intégrale première du mouvement i.e.

si $\begin{pmatrix} m(t) \\ l(t) \end{pmatrix}$ est solution de (3) alors:

$$\forall t, H(m(t), l(t)) = c^{te}$$

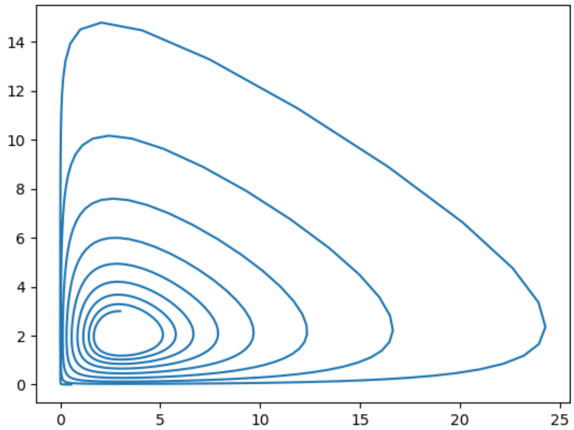
Preuve 5. *Recherche d'une intégrale première du mouvement:*

$$\frac{c-dm}{m}m' + \frac{a-bm}{m}l' = 0$$

donc:

$$\frac{d}{dt}(c\ln(m) - dm + a\ln(l) - bl) = 0$$

Figure 5: trajectoire dans le portrait de phase où M(0)=3 et L(0)=2



On en déduit que:

$$c\ln(m) - dm + a\ln(l) - bl = c^{te} = H(m,l)$$

$\square$

On considère un système différentiel autonome :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Théorème 3.2 (Cauchy-Lipschitz)**.** *On suppose que f est localement lipschitzienne, alors il existe une unique solution $x \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de (2).*

On choisit un point initial quelconque (m_0, l_0) dans la 1^{ere} zone.

Lemme 1. *Pour $i \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_i > 0$ tel que $\tau(t) = (m(t), l(t))$ rentre dans la zone $i+1$.*

Preuve 6. *Raisonnons par l'absurde:*

On suppose que, pour tout t, $\tau(t)$ reste dans la zone 1.

On en déduit que m et l sont bornée et d'après l'étude des solutions m et l sont monotones. Alors m et l admettent une limite finie qu'on note m_∞ et l_∞.

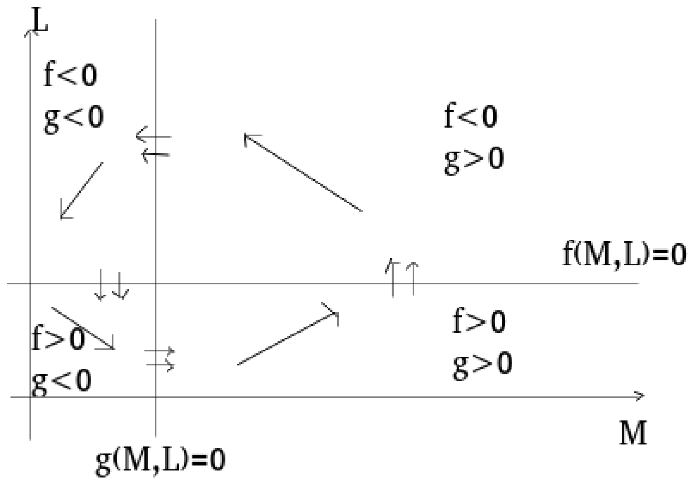
De plus avec l'expression de m' et l', on a que les dérivées admettent donc également une limite finies.

Or la limite de ces fonctions ne peut être que 0. Car si $\lim_{t\to\infty} m'(t) = m'_\infty \neq 0$ et/ou $\lim_{t\to\infty} l'(t) = l'_\infty \neq 0$ alors $m \sim m'_\infty t$ donc m ne peut pas converger et/ou de même pour l.

Or m est croissant donc $m_\infty > 0$ de même parce que l décroît, on a $l_\infty < \dfrac{a}{b}$. Ceci est absurde car les seuls points stationnaires sont $(0,0)$ et $(\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b})$.

On en déduit que $\tau(t)$ sort de la zone 1.

Figure 6: Déterminations des champs de vecteurs:



□

Montrons maintenant que après un tour la trajectoire repasse par un même point i.e. $\tau(t_1) = \tau(t_5)$.

On sait déjà que $m(t_1) = m(t_5)$. Il reste à montrer que $l(t_1) = l(t_5)$.

Par définition de H, on a:

$$H(m(t_1), l(t_1)) = H(m(t_5), l(t_5))$$

On introduit:

$$h : l \mapsto \ln(l) - bl$$

Alors:

$$h(l(t_1)) = h((t_5))$$

Par injectivité de h:

$$l(t_1) = l(t_5)$$

<u>Périodicité:</u> On note :

$$\begin{array}{rr} m_1(t) = m(t_1 + t) & m_5(t) = m(t_5 + t) \\ l_1(t) = l(t_1 + t) & l_5(t) = l(t_5 + t) \end{array}$$

Alors (m_1, l_1) et (m_5, l_5) vérifie un même problème de Cauchy.

Par unicité dû au théorème de Cauchy , on peut conclure à l'égalité de $(m_1, l_1) = (m_5, l_5)$.

Ainsi,

$$T(t_1 + t_5 + t) = T(t)$$

□

3.3 Stabilité des positions d'équilibre

Autour des positions d'équilibre, on peut linéariser:

On note $\bar{x}$ un point d'équilibre alors $f(\bar{x}) = 0$ On suppose que f est différentiable en $\bar{x}$.

Ainsi, on peut écrire que (3) est environ équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = Df(\bar{x})x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème 3.3. *On suppose f différentiable en $\bar{x}$ et $f(\bar{x}) = 0$, alors*

- *Si pour tout $\lambda \in Sp(Df(0))$ tq $Re(\lambda) < 0$ alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.*
- *Si il existe $\lambda \in Sp(Df(0))$ tq $Re(\lambda) > 0$ alors $\bar{x}$ est instable.*

On a comme position d'équilibre deux points $(0,0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

f est différentiable en chacun de ses points

On note $J_{\bar{x}}(f)$ la matrice dans la base canonique de $Df(\bar{x})$, c'est la jacobienne de f en $\bar{x}$. Pour (2) elle s'écrit :

$$Df(\bar{m}, \bar{l}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial l} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m} & \frac{\partial f_2}{\partial l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b\bar{l} & -b\bar{m} \\ d\bar{l} & -c + d\bar{m} \end{pmatrix}$$

On en déduit que (4) s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} a - b\bar{l} & -b\bar{m} \\ d\bar{l} & -c + d\bar{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

<u>en $(0,0)$:</u>

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} am \\ -cl \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(t_0)\exp(at) \\ l(t_0)\exp(-ct) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont:

$$\lambda = a \text{ et } \lambda = -c$$

Alors en appliquant le théorème, on en déduit que $(0,0)$ est instable.

On sait même que $(0,0)$ est asymptotiquement stable selon l et instable selon m.

<u>en $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$:</u>

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$$

diagonalisation

$$\chi_{J_{(\frac{c}{d},\frac{a}{b})}(f)} = det(XI_2 - J_{(\frac{c}{d},\frac{a}{b})}(f)) = X^2 - ac$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda = \pm i\sqrt{ac}$$

donc $\lambda \in i\mathbb{R}$

4 Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

4.1 Complément du modèle précédent

On obtient le modèle amélioré suivant:

$$\begin{cases} m'(t) = m(t)(a - em(t) - bl(t)) \\ l'(t) = -cl(t) + dl(t)m(t)) \end{cases} \quad (5)$$

- capacité d'accueil

4.2 Résolution et étude de la périodicité

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ X = \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(X) \\ g(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(a - em - bl) \\ -cl + dlm \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

Propriété 4.1. *Les points d'équilibre de ce système sont:*

$$(0,0),\ (\frac{a}{e},0)\ et\ (\frac{c}{d},\frac{da-ec}{db})$$

Preuve 7. *Un point d'équilibre vérifie $f(\bar{X}) = 0$ i.e.*

$$\begin{cases} m(a - em - bl) = 0 \\ -cl + dlm = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m = 0 \\ l = 0 \end{cases} \quad ou \begin{cases} a - em - bl = 0 \\ l = 0 \end{cases} \quad ou \begin{cases} a - em - bl = 0 \\ -c + bl = 0 \end{cases}$$

□

4.3 Stabilité des positions d'équilibre

On peut écrire (5):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim J_{(\bar{m},\bar{l})}(f,g)\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$$

avec

$$J_{(\bar{m},\bar{l})}(f,g) = \begin{pmatrix} a - 2e\bar{m} - b\bar{l} & -b\bar{m} \\ d\bar{l} & -c + d\bar{m} \end{pmatrix}$$

en (0,0):

$$J_{(0,0)}(f,g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

On obtient les mêmes résultats que pour le modèle non régulé.

en $(\frac{a}{e}, 0)$:

$$J_{(\frac{a}{e},0)}(f,g) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ba}{e} \\ 0 & -c + \frac{da}{e} \end{pmatrix}$$

On a:

$$\chi_J = det(XI_2 - J) = (X+a)(X - (-c + \frac{da}{e}))$$

On obtient une condition nécessaire de stabilité:

$$-c + \frac{da}{e} < 0 \Longleftrightarrow e > \frac{da}{c}$$

en $(\frac{c}{d}, \frac{da-ec}{db})$

$$J(f,g) = \begin{pmatrix} a - 2e\frac{c}{d} - \frac{da-ec}{d} & -b\frac{c}{d} \\ \frac{da-ec}{b} & 0 \end{pmatrix}$$