

Etude de système proie-prédateur et applications à l'équilibre biologique des écosystèmes

Nicolas Makaroff

Lycée Descartes

2017-2018

- ▶ Hausse de la population des loups dans les alpes française.
- ▶ crainte des bergers face à une augmentation des attaques de loups
- ▶ crainte des scientifiques quant à la viabilité de l'espèce.

Afin de modéliser efficacement les interactions, nous partirons du plus simple au plus complexe.

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

- ▶ Population homogène d'une seule espèce animale
- ▶ On néglige :
 - ▶ l'âge
 - ▶ la taille
 - ▶ la périodicité de naissance et de mort
- ▶ Elle vit dans un milieu invariant soit seul ou sans relation de coexistence avec d'autres espèces

Principe

On suppose que la croissance de la densité de population de l'espèce considérée est proportionnel à la densité pendant un court intervalle de temps.

Définition

On appelle "croissance Malthusienne" :

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

où:

- ▶ $N(t)$ est la densité de l'espèce au cours du temps.
- ▶ $k \in \mathbb{R}_+$ le coefficient d'accroissement

Remarque

Le modèle de Malthus ne prend pas en compte la capacité maximale d'un territoire qui imposerait une limite à la croissance.

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

- ▶ population homogène d'une seule espèce animale
- ▶ on néglige:
 - ▶ l'âge
 - ▶ la taille
 - ▶ la périodicité de naissance et de mort
- ▶ vit dans un milieu invariant seul ou sans interactions avec d'autres espèces

Principe

En opposition au modèle de Malthus, on considère que le taux de croissance change avec la densité de la population.

Definition

On appelle **équation logistique de Verhulst**, l'équation différentielle:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{I}\right)$$

où:

- ▶ $N(t)$ est la densité de l'espèce au cours du temps
- ▶ $k \in \mathbb{R}_+$ le coefficient d'accroissement
- ▶ $I \in \mathbb{R}_+^*$ la capacité du milieu à supporter la croissance i.e. population limite

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Definition

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre ssi $f(\bar{x}) = 0$

Definition

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre, \bar{x} est stable ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x_0 - \bar{x}\| < \eta \implies \forall t > 0, \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$$

On dit que \bar{x} est asymptotiquement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

Propriété

L'équation logistique de Verhulst admet deux points d'équilibre $a_0 = 0$ et $a_1 = l$.

Propriété

Un seul des points d'équilibre est stable : $a_1 = l$

Preuve

On note \bar{N} un point d'équilibre quelconque. Alors

$$\frac{d}{dt}N = k\left(1 - \frac{2}{l}\bar{N}\right)N + o(\|\bar{N} - N\|)$$

On linéarise et on a:

$$\frac{d}{dt}N \sim k\left(1 - \frac{2}{l}\bar{N}\right)N$$

en 0:

$$\frac{d}{dt}N \sim kN$$

en l:

$$\frac{d}{dt}N \sim -kN$$

Figure: Portrait de phase

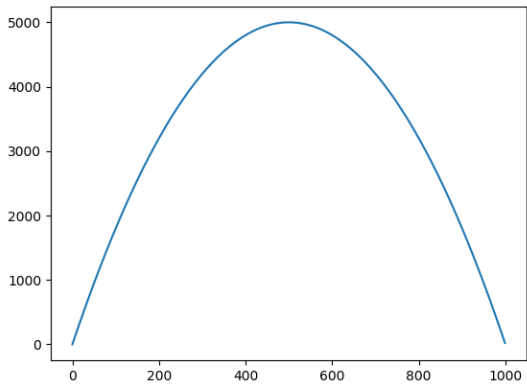
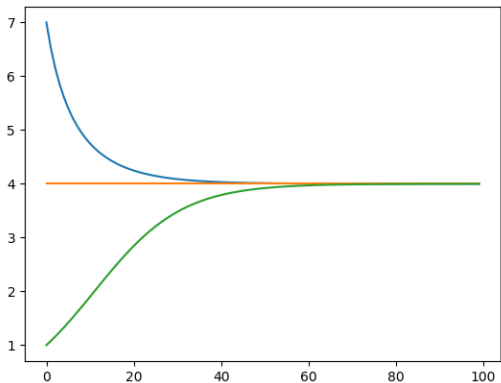


Figure: densité de population



$$N(0) = I$$

$$N(0) > I$$

$$N(0) < I$$

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

On considère deux espèces:

- ▶ mouton notée m
- ▶ loup notée l

Leurs quantités seront données respectivement par $t \mapsto m(t)$ et $t \mapsto l(t)$

- ▶ les moutons ont accès à une quantité illimitée de nourriture
- ▶ seul les loups s'opposent à leur croissance
- ▶ quantité de loups limitée par le nombre de moutons
- ▶ croissance et décroissance des loups proportionnelles aux rencontres

Definition

$$\begin{cases} m'(t) = am(t) - bm(t)l(t) \\ l'(t) = -cl(t) + dl(t)m(t) \\ (m(0), l(0)) = (m_0, l_0), m_0, l_0 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

- ▶ a : taux d'accroissement des moutons
- ▶ b : taux de mortalité des moutons en fonction des rencontres
- ▶ c : taux de mortalité des loups
- ▶ d : taux de reproduction des loups en fonction des rencontres

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

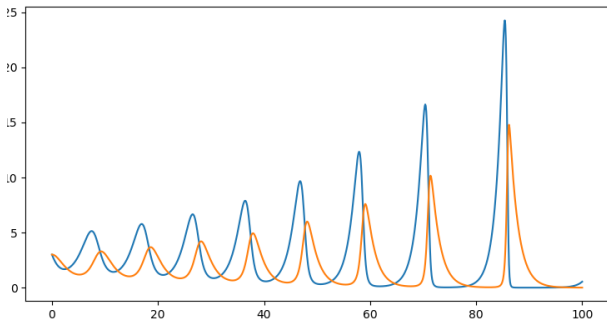
Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Solution

- ▶ *deux solutions triviales:*
 - ▶ $(0, I(t_0) \exp(-ct))$
 - ▶ $(m(t_0) \exp(at), 0)$
- ▶ *deux solutions constantes:*
 - ▶ $(0, 0)$
 - ▶ $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

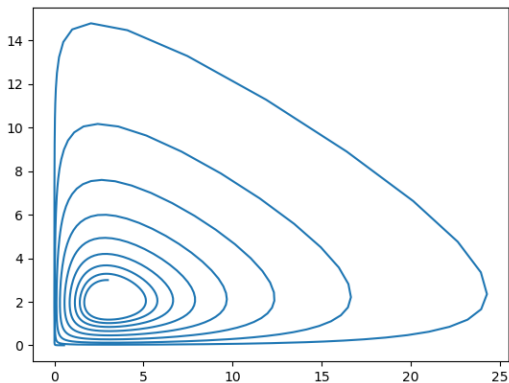
Figure: Graphe des effectifs des moutons(en) et des loups dans le cas où $M(0)=3$ et $L(0)=2$



Théorème

Les solutions de Lotka-Volterra sont périodiques.

Figure: trajectoire dans le portrait de phase où $M(0)=3$ et $L(0)=2$



Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

On peut écrire (1) comme le système suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \begin{pmatrix} m_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

avec $f \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(a - by) \\ l(-c + dm) \end{pmatrix}$

où (1):

$$\begin{cases} m'(t) = am(t) - bm(t)l(t) \\ l'(t) = -cl(t) + dl(t)m(t) \\ (m(0), l(0)) = (m_0, l_0), m_0, l_0 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Autour des positions d'équilibre, on peut linéariser:

On note \bar{x} un point d'équilibre alors $f(\bar{x}) = 0$ On suppose que f est différentiable en \bar{x} .

Ainsi, on peut écrire que (3) est environ équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = Df(\bar{x})x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème

On suppose f différentiable en \bar{x} et $f(\bar{x}) = 0$, alors

- ▶ *Si pour tout $\lambda \in Sp(Df(0))$ tq $Re(\lambda) < 0$ alors \bar{x} est asymptotiquement stable.*
- ▶ *Si il existe $\lambda \in Sp(Df(0))$ tq $Re(\lambda) > 0$ alors \bar{x} est instable.*

On a comme position d'équilibre deux points $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

f est différentiable en chacun de ses points

On note $J_{\bar{x}}(f)$ la matrice dans la base canonique de $Df(\bar{x})$, c'est la jacobienne de f en \bar{x} . Pour (2) elle s'écrit :

$$Df(\bar{m}, \bar{l}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial l} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m} & \frac{\partial f_2}{\partial l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b\bar{l} & -b\bar{m} \\ d\bar{l} & -c + d\bar{m} \end{pmatrix}$$

On en déduit que (4) s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} a - b\bar{l} & -b\bar{m} \\ d\bar{l} & -c + d\bar{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

en $(0,0)$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} am \\ -cl \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(t_0) \exp(at) \\ l(t_0) \exp(-ct) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont:

$$\lambda = a \text{ et } \lambda = -c$$

Alors en appliquant le théorème, on en déduit que $(0,0)$ est instable.

On sait même que $(0,0)$ est asymptotiquement stable selon l et instable selon m .

en $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$$

diagonalisation

$$\chi_{J_{\begin{pmatrix} c & a \\ \frac{c}{d} & \frac{a}{b} \end{pmatrix}}(f) = \det(XI_2 - J_{\begin{pmatrix} c & a \\ \frac{c}{d} & \frac{a}{b} \end{pmatrix}}(f)) = X^2 - ac$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda = \pm i\sqrt{ac}$$

donc $\lambda \in i\mathbb{R}$

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

On obtient le modèle amélioré suivant:

$$\begin{cases} m'(t) = m(t)(a - em(t) - bl(t)) \\ l'(t) = -cl(t) + dl(t)m(t) \end{cases} \quad (5)$$

- capacité d'accueil

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X = \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(X) \\ g(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(a - em - bl) \\ -cl + dlm \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

Propriété

Les points d'équilibre de ce système sont:

$$(0, 0), \left(\frac{a}{e}, 0\right) \text{ et } \left(\frac{c}{d}, \frac{da - ec}{db}\right)$$

Preuve

Un point d'équilibre vérifie $f(\bar{X}) = 0$ i.e.

$$\begin{cases} m(a - em - bl) = 0 \\ -cl + dlm = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ l = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a - em - bl = 0 \\ l = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a - em - bl = 0 \\ -c + bl = 0 \end{cases}$$

□

Introduction

Modèle de Malthus

Présentation et hypothèse

Modèle de Verhulst

Présentation et hypothèse

Etude de l'équation fonctionnelle

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle non régulé

Présentation et hypothèses

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

Modèle de Lotka-Volterra-Modèle régulé

Complément du modèle précédent

Résolution et étude de la périodicité

Stabilité des positions d'équilibre

On peut écrire (5):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \sim J_{(\bar{m}, \bar{l})}(f, g) \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$$

avec

$$J_{(\bar{m}, \bar{l})}(f, g) = \begin{pmatrix} a - 2e\bar{m} - b\bar{l} & -b\bar{m} \\ d\bar{l} & -c + d\bar{m} \end{pmatrix}$$

en $(0,0)$:

$$J_{(0,0)}(f, g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

On obtient les mêmes résultats que pour le modèle non régulé.

en $(\frac{a}{e}, 0)$:

$$J_{\left(\frac{a}{e}, 0\right)}(f, g) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ba}{e} \\ 0 & -c + \frac{da}{e} \end{pmatrix}$$

On a:

$$\chi_J = \det(XI_2 - J) = (X + a)\left(X - \left(-c + \frac{da}{e}\right)\right)$$

On obtient une condition nécessaire de stabilité:

$$-c + \frac{da}{e} < 0 \iff e > \frac{da}{c}$$

$$\underline{\text{en } \left(\frac{c}{d}, \frac{da - ec}{db} \right)}$$

$$J(f, g) = \begin{pmatrix} a - 2e\frac{c}{d} - \frac{da - ec}{d} & -b\frac{c}{d} \\ \frac{da - ec}{b} & 0 \end{pmatrix}$$