Warum definiert man das äußere Differential so wie man es tut?

Simon Kapfer

18. Januar 2014

1 Koordinatenunabhängigkeit

Für M eine abstrakte C^∞–Mannigfaltigkeit hat man keine kanonische Wahl von Koordinatenfunktionen wie im $\mathbb{R}^n$. Jede Wahl von Koordinaten sollte also gleichwertig sein, sofern nur lokal jeder Punkt eindeutig durch seine Koordinaten definiert ist. Für eine offene Menge im $\mathbb{R}^2$, die hier stets als Beispiel dienen wird, sollen die Koordinaten $x,\ y$ gegenüber anderen, etwa $u,\ v$ gleichberechtigt sein.

2 Wie kann man Formen ableiten?

Aus Analysis II sollte klar sein, daß die Ableitung einer C^∞–Funktion eine Linearform ergibt. Wie geht es nun weiter?
Sei der Einfachheit halber $M = \mathbb{R}^2$. Wir definieren eine kleine Verschiebung

$$\phi_\epsilon : M \longrightarrow M, \quad p \longmapsto p + \epsilon v$$

für eine beliebige Richtung $v \in \mathbb{R}^2$. Die partielle Ableitung einer 1–Form ω nach v definieren wir durch:

$$\frac{\partial}{\partial v}\omega \ := \ \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\phi_\epsilon^*(\omega) - \omega}{\epsilon}$$

wobei der Pullback für $\omega = f\,dx + g\,dy$ gegeben ist durch:

$$\phi_\epsilon^*(\omega) \ := \ (f \circ \phi_\epsilon) d(x \circ \phi_\epsilon) + (g \circ \phi_\epsilon) d(y \circ \phi_\epsilon)$$

Für die speziellen Koordinaten x und y stellen wir fest, daß $\phi_\epsilon^*(dx) = dx$ und damit $\frac{\partial}{\partial v} dx = 0 = \frac{\partial}{\partial v} dy$ für beliebiges v.
Außerdem sieht man ein, daß $\frac{\partial}{\partial v}\omega$ linear von v abhängt. Beim Übergang von der

partiellen zur totalen Ableitung werden wir deshalb etwas erhalten, was bilinear von zwei Tangentialvektoren abhängt. Man rechnet nach:

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx \odot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \odot dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \odot dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \odot dy$$

(Es steht $\odot$ dabei für eine bilineare Verknüpfung, die wir noch genauer bestimmen werden.)

3 Die Gleichung $d^2 = 0$

Die zweite Ableitung der Koordinatenfunktion x ist offensichtlich konstant Null, d. h. es gilt $d(dx) = 0$. Allerdings hatten wir vorher ja vereinbart, daß Koordinatenwahlen keine Rolle spielen dürfen. Wir müssen die Gleichung $d(du) = 0$ demnach für beliebige Koordinaten u fordern. Da eine Koordinate nichts anderes ist als eine C^∞–Funktion (mit nichtverschwindender Ableitung, aber das ist eine offene Bedingung), muß die Gleichung $d^2 = 0$ von allen C^∞–Funktionen erfüllt werden.

4 Antikommutativität

Beispielsweise könnte man u und v so wählen, daß $u = xy$. Dann ist $du = ydx + xdy$ und dementsprechend

$$d^2 u \;=\; 0 \;=\; dy \odot dx + dx \odot dy$$

Analog erhält man für die Wahl $u = \frac{1}{2}x^2$ die Bedingung $dx \odot dx = 0$.
Die Definition der äußeren Ableitung ergibt sich daher aus der Forderung, nur das zu betrachten, was koordinatenunabhängig ist.