Memo: Interessante Sachen

Simon Kapfer

21. Juli 2014

Zusammenfassung

Merkzettel zu diversen Sachen und Mottos, die nicht in einen anderen Kontext eingebettet sind.

1 Kohomologisches

1.1. ***Gruppenkohomologie*** einer Gruppe G soll die (singuläre) Kohomologie eines Raumes sein, dessen Fundamentalgruppe gleich G ist und dessen andere Homotopiegruppen trivial sind. Den Raum kann man konstruieren: er heißt 'Eilenberg–MacLane Raum'. Für diskrete Gruppen ist das der klassifizierende Raum BG.

1.2. ***Tensorprodukt über Gruppenringen*** M, N seien Links-G-Moduln. $M \otimes_G N$ ist so definiert, daß $mg \otimes gn = m \otimes n$. Dann ist $M \otimes_G N \cong (M \otimes N)_G$.

1.3. ***Welche Kohomologieklassen können als Chernklassen realisiert werden?*** Für X eine projektive Kurve kann jede Klasse aus $H^2(X,\mathbb{Z})$ als erste Chernklasse eines Vektorbündels geschrieben werden.
Für X eine komplexe Fläche geht das auch für beliebiges $c_1 \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ und $c_2 \in H^4(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (Satz von Schwarzenberger).

1.4. ***Äquivariante Kohomologie*** Wenn eine kompakte Liegruppe G auf einem Raum X wirkt, so wird die Äquivariante Kohomologie $H^*_G(X;\mathbb{R}) := H^*(\frac{X\times EG}{G};\mathbb{R})$ über den folgenden (Totalkomplex des Doppel-)Komplex berechnet:

$$\Omega^i_G(X) \;=\; \bigoplus \Big(S^j(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^{i-2j}(X)\Big)^G$$

1.5. ***Charakteristische Klassen*** Insbesondere hat man für $X = \{\mathrm{pt}\}$ und $G = U(n)$

$$H^*_G(X) = H^*(BG) = S^*(\mathfrak{g}^*)^G = \mathbb{R}[c_1,\dots,c_n], \qquad \det(\lambda - A) = \sum_i (-1)^i c_i(A)\lambda^{n-i}$$

wobei die c_i die Chernklassen sind. Für $G = O(n)$ erhält man Pontrjagin–Klassen. Für V ein Vektorbündel über einem beliebigen X hat man durch Wahl von lokalen Rahmen die Struktur eines G–Hauptfaserbündels und damit eine Abbildung $X \to BG$. Die charakteristischen Klassen des Bündels ergeben sich dann durch Rückzug von BG.

1.6. ***Eulercharakteristik des symmetrischen Produkts*** G endlich wirke auf X lokal kompakt. Bezeichne X^g die Menge der Fixpunkte. Dann:

$$\chi\left(\frac{X}{G}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi\left(X^g\right)$$

Insbesondere gilt für das symmetrische Produkt:

$$\sum_n \chi\left(\mathrm{Sym}^n X\right) q^n = (1-q)^{-\chi(X)}$$

1.7. ***Riemann–Roch*** Der Cherncharakter ist eine natürliche Transformation zwischen dem Grothendieckschen K-Funktor und dem Chowring-Funktor (über $\mathbb{C}$: rationale Kohomologie), der Pullbacks respektiert. Pushforwards entlang eigentlicher Morphismen werden respektiert, wenn man mit der Toddklasse malnimmt und $\mathrm{ch}(\alpha)\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)$ benutzt.

1.8. ***Picardgruppe*** einer glatten Varietät sind die Isomorphismenklassen von Geradenbündeln mit Tensorprodukt als Gruppenoperation. Äquivalent Cartierdivisoren modulo lineare Äquvalenz. Äquivalent $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

1.9. ***K-Theorie*** $K^\cdot(X)$ wird erzeugt von lokal freien Garben auf X und bildet einen Ring, $K_\cdot(X)$ von den kohärenten Garben (kohärent = Garbe und erste Syzygie sind lokal endlich erzeugt) und bildet einen $K^\cdot(X)$-Modul. Wenn X regulär (jede Garbe besitzt freie Auflösung endlicher Länge) und noethersch ist, außerdem ein amples Geradenbündel besitzt, so stimmen $K^\cdot(X)$ und $K_\cdot(X)$ überein.

1.10. ***Residuum*** $V \subset M$ sei die Verschwindungsmenge einer Funktion f auf der komplex n-dimensionalen Mnf. M. Das Residuum von f lebt dann in $H^n(M\setminus V, \mathbb{C})$. Wie ist es definiert?

2 Algebraisches

2.1. ***Lieableitung und Intuition.*** Seien $f(x)$, $g(x)$ parameterabhängige, lineare Operatoren (z. B. einfach Multiplikation mit Zahlen: $f(x) \in \mathbb{R}$). Differentialoperatoren wie $\frac{d}{dx}$ fallen auch in diese Kategorie. Es gilt

$$\frac{d}{dx} fg = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g + f \frac{d}{dx} g$$

Daher macht es Sinn, den abgeleiteten Operator $f' := \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$ zu definieren als:

$$f' \quad = \quad \frac{d}{dx} f - f \frac{d}{dx} \quad = \quad \left[\frac{d}{dx}, f\right]$$

Hier also eine Möglichkeit, die Lieklammer zu verstehen. Die Jacobi-Identität wird dann zu einem Spezialfall der Leibnizregel:

$$\color{blue}{[}x, [y, z]\color{blue}{]} = [\color{blue}{[}x, y\color{blue}{]}, z] + [y, \color{blue}{[}x, z\color{blue}{]}]$$

Die blauen Klammern stehen jeweils für Ableitung nach x, die schwarzen Klammern sind einfach nur eine Bilinearform, die hier zufällig gleich der Lieklammer ist.

2.2. ***Über*** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$**.** Erzeuger: H, X, Y mit $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Vorstellung: H, X, Y haben Grad $0, 2, -2$ und H zählt den Grad. Jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sieht aus wie $V_{-n} \oplus \ldots \oplus V_n$ mit $V_k \cong \mathbb{C}$ Eigenraum von H zum Eigenwert k. Ein Modell dafür ist $\mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2$ mit Koordinaten x vom Grad 1 und y vom Grad -1.

2.3. ***Bialgebren***

- Die gruppenartigen Elemente einer Bialgebra (d. h. $\Delta g = g \otimes g$) sind alle linear unabhängig. Ihr Spann bildet eine Unterbialgebra.

- Die primitiven Elemente einer Bialgebra (d. h. $\Delta c = c \otimes 1 + 1 \otimes c$) bilden eine Liealgebra mit dem Kommutator als Lieklammer.

- Auf den linearen Endomorphismen einer Bialgebra wird eine Algebrenstruktur erklärt durch $f * g := \mu \circ t \otimes g) \circ \Delta$. Die Bialgebra ist eine Hopfalgebra, wenn eine Antipode S mit $S * \mathrm{id} = \mathrm{id} * S = \eta \circ \epsilon$ existiert.

2.4. Es gibt keinen Körper, der als $\mathbb{Z}$–Modul frei ist.

2.5. ***Klassifikation von indefiniten unimodularen Gittern*** [Mil73] Wenn es einen Gitterpunkt x gibt, so daß $\langle x, x \rangle$ ungerade ist, so heißt das Gitter ungerade und ist isomorph zu $(1) \oplus (-1)^n$, ansonsten heißt das Gitter gerade und ist isomorph zu $E_8(\pm 1)^m \oplus U^n$. In jedem indefiniten Gitter gibt es einen Vektor $x \neq 0$ mit $\langle x, x \rangle = 0$.

3 Exakte Sequenzen

3.1. ***Eulersequenz*** Auf $\mathbb{P}^n$ hat man

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \to \mathcal{T} \to 0 \quad \text{bzw.}$$
$$0 \to \Omega \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus n+1} \to \mathcal{O} \to 0$$

3.2. ***Exponentialsequenz*** Auf komplexen Räumen liefert die exp–Funktion

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times \to 0$$

Dazu die lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\to H^1(X,\mathcal{O}^\times) \to H^2(X,2\pi i\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}) \to$$

$H^1(X,\mathcal{O}^\times)$ ist die Picardgruppe. Der erste Pfeil ist die erste Chernklasse. Deren Bild (oder der Kern des nächsten Pfeils) ist die Néron-Severi Gruppe.

3.3. ***Koszul-Komplex*** Angenommen, ein Ideal $I \subset A$, wird von einer regulären Sequenz $(a_1,\dots,a_n)$ aufgespannt (d. h. a_i ist kein Nullteiler in $A/(a_1,\dots,a_{i-1})$) und $d: A^n \to A$ schickt die kanonische Basis auf die Erzeuger, dann ist

$$0 \to \Lambda^n A^n \to \dots \to \Lambda^1 A^n \to A \to 0$$

eine Auflösung von A/I, die (außer bei A) exakt ist.

Literatur

[Mil73] John W. Milnor. *Symmetric bilinear forms.* Number Bd. 73 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1973.