Memo: Komplexe Geometrie

Simon Kapfer

11. Juni 2014

Zusammenfassung

Merkzettel zu komplexer Geometrie.

1 Komplexe Strukturen

Sei X eine reelle C^∞–Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

1.1. ***Notation.*** T_X, Ω_X bezeichnet die reellen Tangential–, Kotangentialbündel, $\mathscr{T}_X$ (oder $T_X^{1,0}$) sowie $\Omega_X^{1,0}$ die holomorphen Versionen. Das Subskript–X wird gelegentlich auch weggelassen. Die Garben der C^∞–Schnitte werden mit $C^\infty(\ldots)$ bezeichnet, die Garben holomorpher Schnitte mit $\mathscr{O}(\ldots)$.

1.2. ***Fast komplexe Struktur.*** Eine fast komplexe Struktur auf X ist eine lineare (Bündel–)Abbildung $J : T_X \to T_X$, so daß $J^2 = -\mathrm{id}$ gilt. Alternativ kann man auch $J \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(T_X)$ schreiben. J induziert eine duale Abbildung $J : \Omega_X \to \Omega_X$, deren Quadrat ebenfalls die negative Identität ist.

1.3. ***Holomorphe (Ko-)Tangentialbündel.*** Setzt man J komplex auf $T_X \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ fort, so kann man eine Eigenraumzerlegung zu den Eigenwerten i und $-i$ machen:

$$\begin{aligned} T \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} &= \mathscr{T} \oplus \overline{\mathscr{T}} = T^{1,0} \oplus T^{0,1} \\ \Omega \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} &= \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1} \\ \Omega^k \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} &= \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p \Omega^{1,0} \wedge \Lambda^q \Omega^{0,1} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q} \end{aligned}$$

Man kürzt außerdem gern $T_X \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$, $\Omega_X^k \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ durch $T_{X,\mathbb{C}}$, $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k$ ab.

1.4. ***Holomorphie.*** Eine diff'bare Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ heißt holomorph, falls $\frac{\partial}{\partial y} f = i \frac{\partial}{\partial x} f$ und antiholomorph, falls $\frac{\partial}{\partial y} f = -i \frac{\partial}{\partial x} f$.
Die Identität $\mathrm{id} : (x, y) \longmapsto x + iy$ und Polynome in $x + iy$ sind holomorph, die komplexe Konjugation $(x, y) \longmapsto x - iy$ und Polynome darin sind antiholomorph.

Bei einer C^∞–Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ kann man bei Vorhandensein einer fast komplexen Struktur J auf X ganz entsprechend von Holomorphie reden: f heißt holomorph, falls für jedes Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial w} \in T_X$ gilt: $\left(J\frac{\partial}{\partial w}\right) f = i\frac{\partial}{\partial w} f$ und antiholomorph, falls für jedes Vektorfeld $\left(J\frac{\partial}{\partial w}\right) f = -i\frac{\partial}{\partial w} f$ ist. Jedes f kann eindeutig als Summe einer holomorphen und einer antiholomorphen Funktion geschrieben werden. Wenn die Garbe aller holomorphen Funktionen mit $\mathscr{O}_X$ bezeichnet wird und die der komplexwertigen glatten Funktionen mit $C^\infty_{X,\mathbb{C}}$, hat man also

$$C^\infty_{X,\mathbb{C}} = \mathscr{O}_X \oplus \overline{\mathscr{O}_X}$$

Definiert man die Dolbeault–Operatoren $\partial, \overline{\partial}$ durch $\partial f = \frac{1}{2}(df - i\,df \circ J)$ bzw. $\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(df + i\,df \circ J)$ (beides lebt in $C^\infty(\Omega_{X,\mathbb{C}})$), so ist f genau dann holomorph, falls $\overline{\partial} f = 0$. Diese Definition von läßt sich allerdings nicht auf Formen fortsetzen[1]. Dazu braucht man schon eine

1.5. ***Komplexe Struktur.*** J ist eine komplexe Struktur, d. h. integrierbar, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Es gibt einen Atlas von Karten nach $\mathbb{C}^n$ mit holomorphen Übergangsabbildungen (holomorphe Koordinaten), so daß J auf den Tangentialräumen von $\mathbb{C}^n$ genauso wirkt wie die dort übliche komplexe Struktur, nämlich Multiplikation mit der imaginären Einheit i.
- Die Bündel $\mathscr{T}_X$, bzw. $\overline{\mathscr{T}_X}$ sind abgeschlossen unter Lieklammerbildung.
- (Satz von Newlander–Nirenberg) Der Nijenhuistensor

$$[\tfrac{\partial}{\partial v}, \tfrac{\partial}{\partial w}] + J[J\tfrac{\partial}{\partial v}, \tfrac{\partial}{\partial w}] + J[\tfrac{\partial}{\partial v}, J\tfrac{\partial}{\partial w}] - [J\tfrac{\partial}{\partial v}, J\tfrac{\partial}{\partial w}]$$

  verschwindet für je zwei Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial v}$ und $\frac{\partial}{\partial w}$.

Wenn X mit einer komplexen Struktur J ausgestattet ist, heißt X komplexe Mannigfaltigkeit. Das soll ab jetzt der Fall sein.

1.6. ***(p,q)–Formen.*** Die Garbe der C^∞–Schnitte von $\Omega^{p,q}$ werde mit $\mathscr{A}^{p,q}$ bezeichnet. Dann ist $C^\infty(\Omega^k_{\mathbb{C}}) =: \mathscr{A}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{A}^{p,q}$. Definiere darauf nun die Dolbeault–Operatoren $\partial : \mathscr{A}^{p,q} \to \mathscr{A}^{p+1,q}$ und $\overline{\partial} : \mathscr{A}^{p,q} \to \mathscr{A}^{p,q+1}$ durch Projizieren nach Anwenden des Differentials d. Für holomorphe Koordinaten $z^j = x^j +$

[1] Die Setzung für k–Formen $\alpha = f\, dx^{j_1} \dots dx^{j_k}$, $\partial\alpha := (\partial f) \wedge dx^{j_1} \dots dx^{j_k}$ bzw. $\overline{\partial}\alpha := (\overline{\partial} f) \wedge dx^{j_1} \dots dx^{j_k}$ wäre nicht koordinatenunabhängig, sprich auf Bündeln nicht wohldefiniert, wenn auch in der gewählten Karte die schöne Gleichung $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$ gälte. Für eine mögliche Definition, bei der $\overline{\partial}^2 = 0$ ohne Integrierbarkeit von J nicht mehr gilt, siehe 1.6.

iy^j definiere $dz^j := dx^j - i dy^j$ und $d\overline{z}^j := dx^j + i dy^j$. Dann spannen die dz^j und die $d\overline{z}^j$ jeweils die Unterbündel $\Omega_X^{1,0}$ und $\Omega_X^{0,1}$ von $\Omega_{X,\mathbb{C}}$ auf und es gilt: $\partial\left(f\, dz_I \wedge d\overline{z}_K\right) = \left(\partial f\right) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_K$ bzw. $\overline{\partial}\left(f\, dz_I \wedge d\overline{z}_K\right) = \left(\overline{\partial} f\right) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_K$. Dann gilt auch $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

1.7. ***Dolbeaultkohomologie.*** Wir können nun auch von holomorphen Schnitten reden.

1.8. ***Gegenbeispiel.*** Eine fast komplexe Struktur, welche nicht integrierbar ist: Fasse die S^6 als die Menge der imaginären normierten Oktonionen auf. Dann ist $T_{S^6,x} = \{h | xh + hx = 0\}$. Für J nehme die Linksmultiplikation mit x.
Auf einer riemannschen Fläche ist jede fast komplexe Struktur integrierbar.

2 Riemannsche Geometrie

Sei X eine reelle C^∞–Mannigfaltigkeit der Dimension n.

2.1. ***Zusammenhang.*** Für ein Vektorbündel E auf X ist ein Zusammenhang eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\nabla : E \to \Omega_X^1 \otimes E$, welche eine Leibnizregel erfüllt: $\nabla f s = f \nabla s + df \otimes s$. Das läßt sich zu einem Differential $d^\nabla : \Omega_X^n \otimes E \to \Omega_X^{n+1} \otimes E$ ausbauen. Allerdings gilt i. A. $\left(d^\nabla\right)^2 \neq 0$, sondern $\left(d^\nabla\right)^2 \beta = R \dot\wedge \beta$ für ein $R \in \Omega_X^2 \otimes \mathrm{End}(E)$. R heißt Krümmung des Zusammenhangs. Ein Schnitt $s \in E$ heißt flach[2], falls $d^\nabla s = 0$.
Sei ∇' ein Zusammenhang auf F. Dann gibt es kanonische Zusammenhänge auf

- $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$: $\nabla(s \otimes t) = \nabla s \otimes t + s \otimes \nabla t$
- $\mathscr{H}om(\mathscr{E}, \mathscr{F})$: $(\nabla u)(s) = \nabla' u(s) - u(\nabla(s))$

Ein Zusammenhang ∇ auf Ω_X^1 oder T_X heißt affin. Für affine Zusammenhänge ist die Torsion $T^\nabla := d^\nabla \mathrm{id} \in \Omega_X^2 \otimes T_X$ erklärt.

2.2. ***Paralleltransport.*** Gegeben eine stückweis glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ und ein Vektor $e \in E_{\gamma(0)}$. Dann gibt es einen Schnitt $s \in \gamma^* E$ mit $s(0) = e$ und $\nabla_{\dot\gamma} s = 0$, mit dem man e entlang γ parallel transportieren kann.

2.3. ***Holonomiegruppe.*** Paralleltransport entlang geschlossener Kurven ergibt eine Gruppenwirkung auf den Fasern von E. Diese Gruppe heißt Holonomiegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{hol}$. Für die Krümmung gilt: $R \in \Omega_X^2 \otimes \mathfrak{hol}$. Bergers Theorem klassifiziert die Holonomiegruppen von Levi-Civita-Zusammenhängen.

[2] Beziehung zur Flachheit von Moduln: Es scheint keine zu geben.

2.4. ***Riemannsche Struktur.*** Wenn X eine riemannsche Metrik, d. h. eine symmetrische, positive, nichtentartete Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ oder $g : S^2 T_X \to \mathbb{R}$ bzw. $g \in \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes \Omega^1_X)$ besitzt, so heißt X riemannsche Mannigfaltigkeit.

2.5. ***Levi–Civita.*** Es gibt einen eindeutig bestimmten affinen Zusammenhang ∇ auf T_X (X eine riemannsche Mannigfaltigkeit), der $\nabla g = 0$ und $T^\nabla = 0$ erfüllt.

2.6. ***Ricci–Tensor.*** Der (symmetrische) Ricci-Tensor ist definiert als die Spur der Krümmung: $\mathrm{Ric} := \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial x^i} R, dx^i \rangle \ \in\ \Gamma(X, \Omega^1_X \otimes \Omega^1_X)$

3 Symplektische Strukturen

Sei X eine reelle oder komplexe C^∞–Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

3.1. ***Symplektische Gruppe.*** Ein symplektischer Vektorraum V ist einer von Dimension $2n$ (reell oder komplex), der ausgestattet ist mit einer nichtentarteten antisymmetrischen Bilinearform ω. Die symplektische Gruppe ist die Menge aller Matrizen, die $\omega(M\_, M\_) = \omega(\_,\_)$ erfüllen. Sie ist eine nichtkompakte, zusammenhängende Liegruppe von Dimension $n(2n+1)$. Die zugehörige Liealgebra $\mathfrak{sp}_{2n}$ ist die Menge aller Matrizen X, die $\omega(X\_,\_) + \omega(\_, X\_) = 0$ erfüllen.

3.2. ***Fast symplektische Struktur.*** Eine 2–Form $\omega \in \Omega^2_X$, welche überall nichtentartet ist (d.h. $\omega\left(\frac{\partial}{\partial v}, \_\right) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial v} = 0$), heißt fast symplektische Struktur.

3.3. ***Volumenform.*** Aus der Nichtentartung von ω folgt sofort, daß $\omega^n \in \Omega^{2n}_X$ nirgends verschwindet, d. h. eine Volumenform ist.

3.4. ***Symplektische Struktur.*** Gilt $d\omega = 0$, so heißt ω symplektische Form.

4 Kählergeometrie und Hodgetheorie

Sei (X, J, g) eine komplexe und riemannsche Mannigfaltigkeit, so daß J bezüglich g orthogonal ist.

4.1. ***Hermitesche Metrik und Kählerform.*** Setze $\omega := g(J\_,\_) \in \Omega^{1,1}_X$ (Kählerform) und $h := g - i\omega$ (Hermitesche Metrik). Falls $d\omega = 0$, oder, was äquivalent ist, $\nabla J = J\nabla$, so heißt X Kählermannigfaltigkeit.

5 Hyperkähler vs. holomorph symplektisch

5.1. ***Hyperkählersche Definition.*** (X, g) riem. Mnf. von Dim. $4m$ heißt Hyperkähler, wenn die Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Sp}(m)$ gleich der symplektischen Gruppe ist.

5.2. ***HS-Definition.*** Eine holomorph symplektische Struktur auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine geschlossene Form $\sigma \in \Omega^{2,0}$, so daß σ^m nirgends verschwindet.