

Exercices aux représentations du groupe symétrique

A faire comme préparation

Exercice 1 : Soit \mathfrak{S}_n le groupe des permutations sur n éléments. Lis l'article sur la décomposition des permutations en cycles sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Permutation#D.C3.A9composition_en_produit_de_cycles_.C3.A0_supports_disjoints.

- a) Liste les éléments de \mathfrak{S}_3 et \mathfrak{S}_4 en termes de décompositions en cycles.
- b) Soit $\pi \in S_n$. Nous définissons $\chi(\pi)$ comme trace de la matrice de permutation associée à π . Liste $\chi(\pi)$ pour $\pi \in \mathfrak{S}_3$ et $\pi \in \mathfrak{S}_4$. Comment déterminer $\chi(\pi)$, si la décomposition en cycles est connue ?
- c) Comment énumérer les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n ?

Exercice 2 : Soit G un groupe et V un espace vectoriel complexe. Une représentation de G est un homomorphisme : $G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

- a) Définis la représentation triviale.
- b) Soit $W \subset V$ un sous-espace. Définis la notion d'une sous-représentation de G .
- c) Vérifie que l'application qui attribue $\pi \in \mathfrak{S}_n$ à sa matrice de permutation est une représentation de \mathfrak{S}_n .
- d) Lis http://fr.wikipedia.org/wiki/Signature_d'une_permutation. Vérifie que $\text{sgn} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{Aut}(\mathbb{C})$ est une représentation.
- e) Le caractère d'une représentation $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$ est défini comme trace de la matrice correspondante. Vérifie que la valeur de $\chi_V(g)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g .

Exercice 3 : *Foncteurs de Schur*. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n . On a une représentation de \mathfrak{S}_2 sur $V \otimes V$ qui échange les deux facteurs.

- a) Considère $V \otimes V$ comme espace des matrices quadratiques. Vérifie que $V \otimes V$ est isomorphe à $\text{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$. Ça donne deux sous-représentations de \mathfrak{S}_2 . Peux-tu les décrire ?
- b) On a une représentation de \mathfrak{S}_3 sur $V \otimes V \otimes V$ qui échange les trois facteurs. Démontre qu'il existe une décomposition en sous-représentations $V \otimes V \otimes V = \text{Sym}^3 V \oplus \Lambda^3 V \oplus S$. Quelle est la dimension de S ?

Références

- [1] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. GTM 129. Springer, 1991.
- [2] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 2*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge university press, Cambridge, New York, 1999. Errata et addenda : p. 583-585.