Memo: Interessante Sachen

Simon Kapfer

26. Mai 2014

Zusammenfassung

Merkzettel zu diversen Sachen und Mottos, die nicht in einen anderen Kontext eingebettet sind.

1 Kohomologisches

1.1. ***Gruppenkohomologie*** einer Gruppe G soll die (singuläre) Kohomologie eines Raumes sein, dessen Fundamentalgruppe gleich G ist und dessen andere Homotopiegruppen trivial sind. Den Raum kann man konstruieren: er heißt 'Eilenberg–MacLane Raum'.

1.2. ***Tensorprodukt über Gruppenringen*** M, N seien Links-G-Moduln. $M \otimes_G N$ ist so definiert, daß $mg \otimes gn = m \otimes n$. Dann ist $M \otimes_G N \cong (M \otimes N)_G$.

1.3. ***Welche Kohomologieklassen können als Chernklassen realisiert werden?*** Für X eine projektive Kurve kann jede Klasse aus $H^2(X,\mathbb{Z})$ als erste Chernklasse eines Vektorbündels geschrieben werden.
Für X eine komplexe Fläche geht das auch für beliebiges $c_1 \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ und $c_2 \in H^4(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (Satz von Schwarzenberger).

1.4. ***Äquivariante Kohomologie*** Wenn eine kompakte Liegruppe G auf einem Raum X wirkt, so wird die Äquivariante Kohomologie $H^*_G(X;\mathbb{R}) := H^*(\frac{X \times EG}{G};\mathbb{R})$ über den folgenden (Totalkomplex des Doppel-)Komplex berechnet:

$$\Omega^i_G(X) \ = \ \bigoplus \Big(S^j(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^{i-2j}(X) \Big)^G$$

1.5. ***Charakteristische Klassen*** Insbesondere hat man für $X = \{\mathrm{pt}\}$ und $G = U(n)$

$$H^*_G(X) = H^*(BG) = S^*(\mathfrak{g}^*)^G = \mathbb{R}[c_1,\ldots,c_n], \qquad \det(\lambda - A) = \sum_i (-1)^i c_i(A) \lambda^{n-i}$$

wobei die c_i die Chernklassen sind. Für $G = O(n)$ erhält man Pontrjagin–Klassen. Für V ein Vektorbündel über einem beliebigen X hat man durch Wahl von lokalen Rahmen die Struktur eines G–Hauptfaserbündels und damit eine Abbildung $X \to BG$. Die charakteristischen Klassen des Bündels ergeben sich dann durch Rückzug von BG.

1.6. ***Riemann–Roch*** Der Cherncharakter ist eine natürliche Transformation zwischen dem Grothendieckschen K-Funktor und dem Chowring-Funktor (über $\mathbb{C}$: rationale Kohomologie), der Pullbacks respektiert. Pushforwards entlang eigentlicher Morphismen werden respektiert, wenn man mit der Toddklasse malnimmt und $\mathrm{ch}(\alpha)\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)$ benutzt.

1.7. ***Picardgruppe*** einer glatten Varietät sind die Isomorphismenklassen von Geradenbündeln mit Tensorprodukt als Gruppenoperation. Äquivalent Cartierdivisoren modulo lineare Äquvalenz. Äquivalent $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

2 Algebraisches

2.1. ***Lieableitung und Intuition.*** Seien $f(x)$, $g(x)$ parameterabhängige, lineare Operatoren (z. B. einfach Multiplikation mit Zahlen: $f(x) \in \mathbb{R}$). Differentialoperatoren wie $\frac{d}{dx}$ fallen auch in diese Kategorie. Es gilt

$$\frac{d}{dx} f g = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) g + f \frac{d}{dx} g$$

Daher macht es Sinn, den abgeleiteten Operator $f' := \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$ zu definieren als:

$$f' \quad = \quad \frac{d}{dx} f - f \frac{d}{dx} \quad = \quad \left[\frac{d}{dx}, f\right]$$

Hier also eine Möglichkeit, die Lieklammer zu verstehen. Die Jacobi-Identität wird dann zu einem Spezialfall der Leibnizregel:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Die blauen Klammern stehen jeweils für Ableitung nach x, die schwarzen Klammern sind einfach nur eine Bilinearform, die hier zufällig gleich der Lieklammer ist.

2.2. ***Über*** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$**.** Erzeuger: H, X, Y mit $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Vorstellung: H, X, Y haben Grad 0, 2, -2 und H zählt den Grad. Jede irreduzible

Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sieht aus wie $V_{-n} \oplus \ldots \oplus V_n$ mit $V_k \cong \mathbb{C}$ Eigenraum von H zum Eigenwert k. Ein Modell dafür ist $\mathrm{Sym}^n\mathbb{C}^2$ mit Koordinaten x vom Grad 1 und y vom Grad -1.

2.3. Es gibt keinen Körper, der als $\mathbb{Z}$–Modul frei ist.

3 Exakte Sequenzen

3.1. ***Eulersequenz*** Auf $\mathbb{P}^n$ hat man

$$\begin{aligned} 0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}(1)^{\oplus n+1} \to \mathscr{T} \to 0 \quad \text{bzw.} \\ 0 \to \Omega \to \mathscr{O}(-1)^{\oplus n+1} \to \mathscr{O} \to 0 \end{aligned}$$

3.2. ***Exponentialsequenz*** Auf komplexen Räumen liefert die exp–Funktion

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}^\times \to 0$$

Dazu die lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\to H^1(X, \mathscr{O}^\times) \to H^2(X, 2\pi i\mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathscr{O}) \to$$

$H^1(X, \mathscr{O}^\times)$ ist die Picardgruppe. Der erste Pfeil ist die erste Chernklasse. Deren Bild (oder der Kern des nächsten Pfeils) ist die Néron-Severi Gruppe.

3.3. ***Koszul-Komplex*** Angenommen, ein Ideal $I \subset A$, wird von einer regulären Sequenz $(a_1, \ldots, a_n)$ aufgespannt (d. h. a_i ist kein Nullteiler in $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$) und $d : A^n \to A$ schickt die kanonische Basis auf die Erzeuger, dann ist

$$0 \to \Lambda^n A^n \to \ldots \to \Lambda^1 A^n \to A \to 0$$

eine Auflösung von A/I, die (außer bei A) exakt ist.