Memo: Symmetrische Darstellungstheorie

Simon Kapfer

6. September 2014

Teil I
Symmetrische Funktionen

Was im Stanley [7] drüber steht.

1 Definitionen

Wir arbeiten über $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Dabei ist n beliebig, aber hinreichend groß. Es sollen λ, ν, μ Partitionen sein. Partitionen in Multiindex–Schreibweise werden fett $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ notiert. Permutationen werden mit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ bezeichnet.

1.1. *Sonstige Bezeichnungen.*

$$\delta := (n-1, n-2, \ldots, 0), \quad n \text{ ist Anzahl der Variablen}$$

$$\mathrm{z}_\lambda := \mathrm{z}_{\mathbf{i}} := \prod_k k^{i_k} i_k!$$

$$\Delta_\lambda(x) := \det(x_i^{\lambda_j})_{ij} \quad \text{(schiefsymmetrisch in } x_i\text{)}$$

$$\Delta(x) := \Delta_\delta(x) = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \quad \text{Vandermonde–Determinante}$$

$$K_{\lambda\mu} \quad \text{Kostka-Zahlen}$$

$$N^\nu_{\lambda\mu} \quad \text{Littlewood-Richardson Zahlen}$$

1.2. *Standardbasen.*

- **Monomial** symmetrische Funktionen werden über $\mathbf{m}_\lambda = (x^\lambda)^{\mathrm{Sym}}$ definiert.
- **Schurpolynome** sind über Determinanten definiert, [7, 7.15]:

$$\mathbf{s}_\lambda := \frac{\Delta_{\lambda+\delta}}{\Delta_\delta}$$

Die anderen Basen werden über Produkte definiert:

$$\mathbf{e}_\lambda = \prod_i \mathbf{e}_{\lambda_i}, \quad \mathbf{h}_\lambda = \prod_i \mathbf{h}_{\lambda_i}, \quad \mathbf{p}_\lambda = \prod_i \mathbf{p}_{\lambda_i}.$$

- **Elementar–** und **vollständige** symmetrische Funktionen $\mathbf{e}_k$ und $\mathbf{h}_k$:

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \qquad \mathbf{h}_k = \sum_{i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

- **Potenzsummen** $\mathbf{p}_k := x_1^k + x_2^k + \ldots$

1.3. ***Erzeugende Funktionen.***

$$\sum_{k\geq 0} \mathbf{e}_k t^k = \prod_i (1 + x_i t) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \tfrac{-(-1)^k}{k} \mathbf{p}_k t^k\right)$$
$$\sum_{k\geq 0} \mathbf{h}_k t^k = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k} \mathbf{p}_k t^k\right)$$

2 Skalarprodukt und Involution

2.1. ***Skalarprodukt.*** Das Skalarprodukt wird so definiert, daß gilt:

$$\langle \mathbf{m}_\lambda, \mathbf{h}_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} = \langle \mathbf{s}_\lambda, \mathbf{s}_\mu \rangle$$
$$\langle \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{p}_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$$

2.2. ***Adjungierte Multiplikationsperatoren.*** (7.15.2, und [5], S. 44.)

$$\langle \mathbf{s}_\nu f, \mathbf{s}_\lambda \rangle = \langle f, \mathbf{s}_{\lambda/\nu} \rangle$$

Bezeichne mit $D(\_)$ den adjungierten Operator zur Multiplikation. Dann:

$$D(\mathbf{p}_n) \;=\; \sum_{r\geq 0} \mathbf{h}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}_{n+r}} \;=\; (-1)^{n-1} \sum_{r\geq 0} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{n+r}} \;=\; n \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_n}$$

2.3. ***Involution.*** Definiere eine Involution ω durch

$$\omega\, \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{h}_\lambda.$$

Dann hat ω folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \mathrm{id} \\ \langle \omega f, \omega g\rangle &= \langle f, g\rangle \\ \omega\,\mathbf{p}_\lambda &= \deg(\lambda)\mathbf{p}_\lambda && (7.7.5) \\ \omega\,\mathbf{s}_{\lambda/\nu} &= \mathbf{s}_{\lambda'/\nu'} && (7.15.6) \end{aligned}$$

2.4. ***Duale Basen.*** $\{\mathbf{u}_\lambda\}$, $\{\mathbf{v}_\lambda\}$ seien zwei duale Basen für symmetrische Funktionen, d. h. $\langle \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}_\nu\rangle = \delta_{\lambda\nu}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \mathbf{u}_\lambda(x)\mathbf{v}_\lambda(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\ \sum_\lambda \mathbf{u}_\lambda(x)\,\omega_y \mathbf{v}_\lambda(y) &= \prod_{i,j} 1 + x_i y_j \end{aligned}$$

3 Beziehungen zwischen den Basen

3.1. ***Darstellung durch*** $\mathbf{m}_\lambda$**.** Siehe [7, 7.4.1, 7.5.1., 7.7.1.]

$$\mathbf{s}_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu}\mathbf{m}_\mu \tag{3.1.1}$$

3.2. ***Durch Potenzsummen.*** Siehe [7, 7.7.6.]

3.3. ***Durch Schur.*** [7, 7.12.4, 7.15.3, 7.17.3]

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{h}_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda/\nu\,\mu}\,\mathbf{s}_\lambda \tag{3.3.1}$$

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{e}_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\nu'\,\mu}\,\mathbf{s}_\lambda \tag{3.3.2}$$

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{p}_\mu = \sum_\lambda \chi^{\lambda/\nu}(\mu)\,\mathbf{s}_\lambda \tag{3.3.3}$$

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{s}_\mu = \sum_\lambda C^\lambda_{\nu\mu}\mathbf{s}_\lambda \tag{3.3.4}$$

Gleichung 3.3.3 heißt Murnagham-Nakayama Regel. χ wird in [7, 7.17.3] definiert. Dort auch Border-Strip-Tableaus.

3.4. *Durch Matrizen.* Siehe [5] S. 56. K ist die Matrix aus Kostka–Zahlen. $M^\top$ bedeutet Transposition, $M^{-\top}$ bedeutet Transposition plus Inversion. $J_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda'\mu}$.

	e	**h**	**m**	**s**
e	1	$K^\top JK^{-\top}$	$K^\top JK$	$K^\top J$
h	$K^\top JK^{-\top}$	1	$K^\top K$	$K^\top$
m	$K^{-1}JK^{-\top}$	$K^{-1}K^{-\top}$	1	K^{-1}
s	$JK^{-\top}$	$K^{-\top}$	K	1

3.5. *Jacobi-Trudy.* (Stanley 7.16.1)

$$\mathbf{s}_{\lambda/\mu} = \det\left(\mathbf{h}_{\lambda_i - \mu_j + i - j}\right)$$

4 Plethysmen

4.1. *Definition.* Für f eine symmetrische Funktion ist der Plethysmus mit einer Potenzsumme definiert durch: $f[\mathbf{p}_n](x_1, x_2, \ldots) = f(x_1^n, x_2^n, \ldots) = \mathbf{p}_n[f](x_1, x_2, \ldots)$ und der Forderung, daß $f[g]$ ein Ringhomomorphismus in f ist. In g hat man nicht mal Linearität. Plethysmen haben was mit Verkettung zu tun. Man kann sich auch den Plethysmus mit $\mathbf{e}_n$ bzw. $\mathbf{h}_n$ so vorstellen, daß man die Variablen $x_1, x_2, \ldots$ durch die Monome ersetzt, die in $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ vorkommen. Das gilt nicht für jede beliebige symmetrische Funktion, nur wenn man einen Funktor von Darstellungen finden kann, welcher die Charaktere entsprechend transformiert, siehe auch 8.4.

4.2. *Plethystische Identitäten.* Siehe [7, S. 447ff].

$$\mathbf{h}_n[-\mathbf{p}_1] = (-1)^n \mathbf{e}_n \tag{4.2.1}$$

$$f[-\mathbf{p}_1] = (-1)^n \omega(f) \tag{4.2.2}$$

$$\sum_n \mathbf{h}_n[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2] = \sum_\lambda \mathbf{s}_\lambda \tag{4.2.3}$$

5 Hopfalgebren

Der Ring der symmetrischen Funktionen trägt mehrere Hopfalgebren-Strukturen.

5.1. ***Klassische Hopfalgebrenstruktur.*** [2] Mit den Setzungen

$$\Delta(\mathbf{e}_n) := \sum \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{n-i}, \qquad \varepsilon(\mathbf{e}_n) := \delta_{0,n}$$

und der bekannten Involution als Antipode. Man hat für die Komultiplikation:

$$\Delta(\mathbf{h}_n) = \sum \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_{n-i}, \quad \Delta(\mathbf{s}_\mu) = \sum \mathbf{s}_\lambda \otimes \mathbf{s}_{\mu/\lambda}, \quad \Delta(\mathbf{p}_n) = 1 \otimes \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n \otimes 1$$

Die $\mathbf{p}_n$ spannen die primitiven Elemente der Komultiplikation. S. [4, Kap. 10]. Außerdem hat man die Adjunktionsformel $\langle x \otimes y, \Delta(z)\rangle = \langle xy, z\rangle$.

5.2. ***Produkt–Bialgebra.*** [4, 1] Mit der Setzung

$$\Delta(\mathbf{p}_n) := \mathbf{p}_n \otimes \mathbf{p}_n, \text{ bzw. } \Delta(\mathbf{h}_n) = \sum_{\|\lambda\|=n} \mathbf{h}_\lambda \otimes \mathbf{m}_\lambda = \sum_{\|\lambda\|=n} \mathbf{s}_\lambda \otimes \mathbf{s}_\lambda$$

ist eine andere Bialgebren-Struktur erklärt.

5.3. ***Faà di Bruno Algebra.*** [1] Auch die Setzung

$$\Delta(\mathbf{h}_n) := \sum_k \mathbf{h}_k \otimes \mathbf{h}_{n-k}\left[(1+k)\mathbf{p}_1\right], \quad \varepsilon(\mathbf{h}_n) := \delta_{0,n}, \quad \psi(\mathbf{h}_n) := \frac{\mathbf{h}_n\left[-(1+n)\mathbf{p}_n\right]}{1+n}$$

definiert eine Hopfalgebra.

Teil II
Darstellungstheorie

Orientiert sich an Fulton–Harris, [3]. Im Stanley, [7, 7.18, 7.A2], steht auch was.

6 Allgemeines über Charaktere

Folgendes gilt für beliebige (endliche) Gruppen G, welche auf $\mathbb{C}$–Vektorräumen wirken.

6.1. ***Definition.*** Eine Darstellung ist ein Algebrenhomomorphismus: $\mathbb{C}[G] \longrightarrow \operatorname{End} V$. Der Charakter χ_V ist die Verkettung der Darstellung mit der Spurbildung, also eine lineare Abbildung: $\mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathbb{C}$.
Charaktere sind Klassenfunktionen, d. h. der Wert des Charakters hängt nur von der Konjugationsklasse ab. Zwei Darstellungen sind gleich, falls ihre Charaktere gleich sind.

6.2. *Rechenregeln für Charaktere.* Für die induzierten Darstellungen gilt:

$$\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W \tag{6.2.1}$$

$$\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W \tag{6.2.2}$$

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W \tag{6.2.3}$$

$$\sum_{k\geq 0} \chi_{\mathrm{Sym}^k V}(g)\, t^k = \exp\left(\sum_{j\geq 1} \tfrac{1}{j}\chi_V(g^j)\, t^j\right) \tag{6.2.4}$$

$$\sum_{k\geq 0} \chi_{\Lambda^k V}(g)\, t^k = \exp\left(\sum_{j\geq 1} \tfrac{(-1)^{j+1}}{j}\chi_V(g^j)\, t^j\right) \tag{6.2.5}$$

Man beweist das mit Potenzsummen, vollständigen und elementarsymmetrischen Polynomen in den Eigenwerten der darstellenden Matrizen.

6.3. *Komposition von Darstellungen.* Wirkt eine Gruppe G auf V und die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ auf W, so gilt für die induzierte Wirkung auf W (siehe [7, S. 448]):

$$\chi_{G,W} = \chi_{\mathrm{GL}(V),W}[\chi_{G,V}]$$

6.4. *Ring der Darstellungen.* Durch Hinzufügen formaler additiver Inverser werden die Darstellungen einer festen Gruppe mit $\oplus$, $\otimes$ ein Ring mit der trivialen Darstellung als 1. Die Abbildungen $\chi_V(g) \mapsto \chi_V(g^k)$ sind Ringhomomorphismen und heißen auch Adams–Operationen.

6.5. *Irreduzible Darstellungen.* Es gibt genauso viele irreduzible Darstellungen wie Konjugationsklassen. Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen bilden eine Orthonormalbasis der Klassenfunktionen bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle \alpha, \beta\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g)$$

Jede Darstellung von G zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen. [3, 2.13]

6.6. *Darstellungen, die Namen haben und Konstruktionen.*

- Die **triviale** Darstellung: Eindimensional, irreduzibel, jedes Gruppenelement wirkt wie die Identität. V^G ist isomorph zu einer direkten Summe trivialer Darstellungen.

- Die **reguläre** Darstellung ist $\mathbb{C}[G]$ mit Linksmultiplikation. Jede irreduzible Darstellung taucht in der Zerlegung der regulären mit einer Vielfachheit auf, die gleich ihrer Dimension ist.

- Wirkt H auf W und G auf V, so wirkt $H \times G$ auf $W \otimes V$. Diese Konstruktion heißt äußeres Tensorprodukt und wird $W \boxtimes V$ geschrieben.
- Sei $H \le G$ eine Untergruppe, W eine Darstellung von H. Die **induzierte** Darstellung von G ist

$$\operatorname{Ind}_H^G W = \bigoplus_{\gamma \in G/H} \gamma \cdot W \tag{6.6.1}$$

und ist adjungiert zur Einschränkung der Darstellung bezüglich $\operatorname{Hom}_G, \operatorname{Hom}_H$, sowie des Skalarprodukts von Klassenfunktionen im Sinne von [3, 3.20]:

$$\langle \chi_{\operatorname{Ind}_H^G W}, \chi_V \rangle = \langle \chi_W, \chi_{\operatorname{Res}_H^G V} \rangle \tag{6.6.2}$$

6.7. ***Invarianten.*** Der Mittelungs–Operator

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

projiziert V auf V^G, den Teil der unter G–Wirkung invariant bleibt. Das entspricht dem Summand, der von der trivialen (irreduziblen) Darstellung kommt.

7 Irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{S}_d$

7.1. ***Young–Symmetrisierer.*** Die Projektion auf die irreduzible Darstellung, die einer (beliebig numerierten) Partition λ zugeordnet wird, lautet: $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ wobei $a_\lambda = \sum \sigma$ und $b_\lambda = \sum \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$. Die erste Summe durchläuft die Permutationen, die die Reihen, die zweite die, die die Spalten auf sich abbilden.
Wenn man die Reihenfolge von a_λ und b_λ vertauscht, so erhält man für jeden Summanden sein Inverses (Antipode).

7.2. ***Frobenius Abbildung.*** [7, S. 351] Bilde Klassenfunktionen auf symmetrische Polynome ab durch:

$$\operatorname{ch} : \bigoplus \operatorname{CF}(\mathfrak{S}_n) \longrightarrow \Lambda$$
$$\operatorname{ch} f = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma)\, \mathbf{p}_{\lambda(\sigma)} = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda} f(\lambda)\, \mathbf{p}_\lambda$$

Diese Abbildung ist linear und bezüglich der Skalarprodukte eine Isometrie. Für Darstellungen V, W von $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_m$ definiert $(V, W) \mapsto \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V \boxtimes W)$ eine Multiplikation auf $\bigoplus \operatorname{CF}(\mathfrak{S}_n)$, bezüglich der ch ein Isomorphismus von Ringen wird.

7.3. ***Frobenius Formel.*** Bezeichnen $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$ und $\mathbf{i}$ Partitionen, wobei $\mathbf{i}$ durch Multiplizitäten gegeben ist. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 1.1:

$$\mathbf{p_i} = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mathbf{i})\,\mathbf{s}_\lambda \quad \text{bzw.} \quad \chi_\lambda(C_\mathbf{i}) \;=\; \left[x^{\lambda+\delta}\right] \Delta(x)\mathbf{p_i}(x)$$

7.4. ***Hakenlängenformel.*** Für die irreduzible Darstellung zur Partition λ gilt:

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod(\text{Längen der Haken})}$$

7.5. ***Standard–Darstellung.*** $\mathbb{C}^d = 1 + V_{(d-1,1)}$, direkte Summe aus trivialer Darstellung und sog. Standarddarstellung. Die äußere Potenz $\Lambda^k V_{(d-1,1)} = V_{(d-k,1,1,\dots)}$ ergibt die Darstellung, die zu einem Haken gehört. [3, 4.6]
Siehe auch [6].

7.6. ***Regel von Young.*** Seien $U_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]a_\lambda,\; V_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]c_\lambda$. Dann ist V_λ irreduzibel und (vergleiche mit 3.4):

$$U_\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda} V_\mu$$

8 Schur–Funktoren

8.1. ***Definition.*** Auf $V^{\otimes d}$ wirkt $\mathfrak{S}_d$ durch Vertauschung der Faktoren. Dann ist der Schurfunktor definiert durch $\mathbb{S}^\lambda V := c_\lambda(V^{\otimes d})$. Insbesondere also: $\mathbb{S}^{(1^d)} = \Lambda^d$ und $\mathbb{S}^{(d)} = \mathrm{Sym}^d$. Man hat:

$$V^{\otimes d} = \bigoplus (\mathbb{S}^\lambda V)^{\oplus \dim V_\lambda}$$

8.2. ***Link zu symmetrischen Funktionen.*** Sei G Gruppe, die auf V wirkt. Dann ist $\chi_{\mathbb{S}^\lambda V}$ das Schurpolynom s_λ in den Eigenwerten der korrespondierenden Matrix. Insbesondere hat man die Formeln:

$$\dim \mathbb{S}^\lambda V = s_\lambda(1,1,\dots) = \prod_{1\leq i<j\leq \dim V} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} \tag{8.2.1}$$

$$\mathbb{S}^\lambda V \otimes \mathbb{S}^\mu V = \bigoplus_\nu N^\nu_{\lambda\mu} \mathbb{S}^\nu V \tag{8.2.2}$$

8.3. *Weitere Analogien.* Die Funktoren

$$V \longmapsto a_\lambda(V^{\otimes d}) = \mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \ldots$$
$$V \longmapsto b_{\lambda'}(V^{\otimes d}) = \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V \otimes \ldots$$

verhalten sich wie die vollständigen und elementarsymmetrischen Polynome:

$$\Lambda^{\lambda_1} V \otimes \ldots \otimes \Lambda^{\lambda_r} V = \bigoplus K_{\mu\lambda} \mathbb{S}^{\mu'} V \tag{8.3.1}$$

und die analogen Identitäten gelten auch.

8.4. *Plethysmen.* Es gilt (?): Die Charaktere von $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{S}^\mu V)$ sind als symmetrische Funktionen in den Eigenwerten gleich $\mathbf{s}_\lambda[\mathbf{s}_\mu]$.

8.5. *Andere Rechenregeln.* Siehe [3, S. 79ff]. Für das äußere Produkt von Darstellungen hat man:

$$\mathbb{S}^\nu(V \oplus W) = \bigoplus N^\nu_{\lambda\mu} \left(\mathbb{S}^\lambda V \boxtimes \mathbb{S}^\mu W\right) \tag{8.5.1}$$
$$\mathbb{S}^\nu(V \boxtimes W) = \bigoplus C_{\lambda\mu\nu} \left(\mathbb{S}^\lambda V \boxtimes \mathbb{S}^\mu W\right) \tag{8.5.2}$$
$$\mathrm{Sym}^d(V \boxtimes W) = \bigoplus_{\lambda \vdash d} \mathbb{S}^\lambda V \boxtimes \mathbb{S}^\lambda W \tag{8.5.3}$$

Literatur

[1] Jean-Paul Bultel. A one-parameter deformation of the farahat-higman algebra. *Europ. J. of Combinatorics*, 2011.

[2] Grinberg Dari. mathoverflow. `http://mathoverflow.net/questions/85985/symmetric-polynoms-are-hopf-algebra-what-for-one-needs-co-product`, 2012.

[3] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. GTM 129. Springer, 1991.

[4] M. Hazewinkel. Witt vectors. Part 1. *ArXiv e-prints*.

[5] Ian G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Clarendon Press, Oxford, 1979.

[6] Ivan Marin. Hooks generate the representation ring of the symmetric group. 2010.

[7] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 2*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge university press, Cambridge, New York, 1999. Errata et addenda : p. 583-585.