Ganzzahlige Kohomologie von irreduziblen holomorph symplektischen Varietäten

Simon Kapfer

Universität Augsburg

29. Juni 2016

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Überblick

1. IHS Mannigfaltigkeiten
   - Einführung
   - Beauville–Bogomolov Form
   - Diskriminantenformel
2. Beispiele
   - Hilbertschemata von Punkten auf Flächen
   - Verallgemeinerte Kummersche Varietäten
3. Singuläre IS Varietäten

Kählermannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Geradenbündel

Satz (Beauville–Bogomolov)

Jede kompakte Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chernklasse läßt sich bis auf endliche Überlagerungen schreiben als Produkt von

- *komplexen Tori,*
- *Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten,*
- *Hyperkählermannigfaltigkeiten.*

Kählermannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Geradenbündel

Satz (Beauville–Bogomolov)

Jede kompakte Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chernklasse läßt sich bis auf endliche Überlagerungen schreiben als Produkt von

- *komplexen Tori,*
- *Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten,*
- *Hyperkählermannigfaltigkeiten.*

Bemerkung

Die Unterscheidung erfolgt anhand der Holonomiegruppen der zugehörigen Riemannschen Metrik. Der Hyperkähler-Fall entspricht der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n)$.

IHS Mannigfaltigkeiten

Die quaternionale Interpretation der Holonomiegruppe $\mathrm{Sp}(n)$ führt auf die Existenz einer $\mathbb{S}^2$-Schar komplexer Strukturen, die alle mit der Metrik verträglich sind. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "Hyperkähler" für solche Mannigfaltigkeiten.

IHS Mannigfaltigkeiten

Die quaternionale Interpretation der Holonomiegruppe $\mathrm{Sp}(n)$ führt auf die Existenz einer $\mathbb{S}^2$-Schar komplexer Strukturen, die alle mit der Metrik verträglich sind. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "Hyperkähler" für solche Mannigfaltigkeiten.

Definition

Eine Kählermannigfaltigkeit X heißt IHS (irreduzibel holomorph symplektisch), wenn sie einfach zusammenhängend ist und $H^0(X, \Omega_X^2)$ von einer nichtdegenerierten holomorphen 2-Form σ aufgespannt wird.

IHS Mannigfaltigkeiten

Die quaternionale Interpretation der Holonomiegruppe $\mathrm{Sp}(n)$ führt auf die Existenz einer $\mathbb{S}^2$-Schar komplexer Strukturen, die alle mit der Metrik verträglich sind. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "Hyperkähler" für solche Mannigfaltigkeiten.

Definition

Eine Kählermannigfaltigkeit X heißt IHS (irreduzibel holomorph symplektisch), wenn sie einfach zusammenhängend ist und $H^0(X, \Omega_X^2)$ von einer nichtdegenerierten holomorphen 2-Form σ aufgespannt wird.

Satz (Beauville)

Die IHS- und die Hyperkählereigenschaft sind äquivalent.

Beispiel

Die zweidimensionalen IHSM sind genau die K3 Flächen.

Hodge-Diamant

Der Hodge-Diamant einer IHSM hat folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 1 & & * & & 1 & & \\
 & \iddots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
1 & & * & & * & & * & & 1 \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & \\
 & & 1 & & * & & 1 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Insbesondere ist die komplexe Dimension stets geradzahlig.

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?

Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer $\mathbb{Z}$-wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Diese Form ist von überragender Bedeutung für die Theorie:

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?

Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer $\mathbb{Z}$-wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Diese Form ist von überragender Bedeutung für die Theorie:

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?

Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer $\mathbb{Z}$-wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Diese Form ist von überragender Bedeutung für die Theorie:

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$
- Automorphismen von X von endlicher Primordnung können über ihre Wirkungen auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ studiert werden

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?

Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X, \mathbb{Z})$ ist frei und mit einer $\mathbb{Z}$-wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Diese Form ist von überragender Bedeutung für die Theorie:

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{C})$
- Automorphismen von X von endlicher Primordnung können über ihre Wirkungen auf $H^2(X, \mathbb{Z})$ studiert werden
- Auch die höheren Kohomologiegruppen werden benötigt

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?

Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer $\mathbb{Z}$-wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Diese Form ist von überragender Bedeutung für die Theorie:

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$
- Automorphismen von X von endlicher Primordnung können über ihre Wirkungen auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ studiert werden
- Auch die höheren Kohomologiegruppen werden benötigt
- Anwendungen auf singuläre IS Varietäten

Beauville–Bogomolov Form

Die Beauville–Bogomolov Form q_X kann über ein Integral ausgedrückt werden:

Satz (Fujiki)

$$q_X(\alpha)^n = c_X \int_X \alpha^{2n},$$

wobei die Fujiki-Konstante $c_X \in \mathbb{R}$ nur von X abhängt.

Beauville–Bogomolov Form

Die Beauville–Bogomolov Form q_X kann über ein Integral ausgedrückt werden:

Satz (Fujiki)

$$q_X(\alpha)^n = c_X \int_X \alpha^{2n},$$

wobei die Fujiki-Konstante $c_X \in \mathbb{R}$ nur von X abhängt.

Korollar

Wir erhalten ein Untergitter

$$\mathrm{Sym}^n(H^2(X, Z)) \subset H^{2n}(X, \mathbb{Z}),$$

das im allgemeinen aber nicht primitiv ist.

Diskriminantenformel

Theorem

Seien $d+1$ der Rang von $H^2(X,\mathbb{Z})$ und c_X die Fujiki-Konstante. Die Diskriminante von $\mathrm{Sym}^n H^2(X,\mathbb{Z})$ ist gleich

$$\left(\operatorname{discr}\left(H^2(X,\mathbb{Z})\right)\right)^{\binom{d+n}{d+1}} \cdot c_X^{\binom{d+n}{d}} \cdot \prod_{i=1}^{n} i^{\binom{n-i+d}{d}d} \cdot C,$$

$$mit \quad C = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \ odd}}^{2n+d-1} i^{\binom{n-i+d}{d}} & \textit{für } d+1 \textit{ ungerade}, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n+\frac{d-1}{2}} i^{\binom{n-i+d}{d}-\binom{n-2i+d}{d}} & \textit{für } d+1 \textit{ gerade}. \end{cases}$$

Die bekannten Beispiele

Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

Die bekannten Beispiele

Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,

Die bekannten Beispiele

Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,
- verallgemeinerte Kummersche Varietäten $A^{[[n]]}$, $n \in \mathbb{N}$,

Die bekannten Beispiele

Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,
- verallgemeinerte Kummersche Varietäten $A^{[[n]]}$, $n \in \mathbb{N}$,
- zwei weitere Beispiele in Dimension 6 bzw. 10,

beziehungsweise deren Deformationsklassen.

Die bekannten Beispiele

Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,
- verallgemeinerte Kummersche Varietäten $A^{[[n]]}$, $n \in \mathbb{N}$,
- zwei weitere Beispiele in Dimension 6 bzw. 10,

beziehungsweise deren Deformationsklassen.

Es gibt Ansätze, das Konzept IHSM in verschiedene Richtungen zu verallgemeinern:

- Virtuelle IHSM, die nur als derivierte Kategorie existieren
- IS Varietäten mit Singularitäten [3]

Was sind Hilbertschemata?

Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein $\mathbb{C}$-Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von n Punkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Was sind Hilbertschemata?

Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein $\mathbb{C}$-Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von n Punkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Wichtige Fakten:

- Ist X zweidimensional und nichtsingulär, so ist $X^{[n]}$ $2n$-dimensional und nichtsingulär.

Was sind Hilbertschemata?

Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein $\mathbb{C}$-Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von n Punkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Wichtige Fakten:

- Ist X zweidimensional und nichtsingulär, so ist $X^{[n]}$ $2n$-dimensional und nichtsingulär.
- Damit ist $X^{[n]}$ eine Auflösung der Singularitäten von $\mathrm{Sym}^n(X)$.

Was sind Hilbertschemata?

Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein $\mathbb{C}$-Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von n Punkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Wichtige Fakten:

- Ist X zweidimensional und nichtsingulär, so ist $X^{[n]}$ $2n$-dimensional und nichtsingulär.
- Damit ist $X^{[n]}$ eine Auflösung der Singularitäten von $\mathrm{Sym}^n(X)$.
- Es existiert eine gute Beschreibung der Kohomologie durch Nakajima-Operatoren.

Nakajima-Operatoren

Sei $\Xi \subset X^{[n]} \times X \times X^{[n+m]}$ das Inzidenzschema $\{(\xi_1, x, \xi_2) \mid \xi_1 \subset \xi_2, \operatorname{supp}(\xi_2 \backslash \xi_1) = x\}$. Dann sind die Nakajima-Operatoren $\mathfrak{q}_m(\alpha)$ für $\alpha \in H^*(X, \mathbb{Q})$ über eine Korrespondenz definiert:

Nakajima-Operatoren

Sei $\Xi \subset X^{[n]} \times X \times X^{[n+m]}$ das Inzidenzschema $\{(\xi_1, x, \xi_2) \mid \xi_1 \subset \xi_2, \operatorname{supp}(\xi_2 \backslash \xi_1) = x\}$. Dann sind die Nakajima-Operatoren $\mathfrak{q}_m(\alpha)$ für $\alpha \in H^*(X, \mathbb{Q})$ über eine Korrespondenz definiert:

$$\begin{tikzcd}
\Xi \arrow[r, hook] & X^{[n]} \times X \times X^{[n+m]} \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_3"] & \\
X^{[n]} & X & X^{[n+m]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_m(\alpha) : H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q}) &\longrightarrow H^{*+2m-2+|\alpha|}(X^{[n+m]}, \mathbb{Q}) \\
y &\longmapsto \mathrm{PD}\left(pr_{3*}\left(\Xi \cap pr_1^*(y) \cdot pr_2^*(\alpha)\right)\right)
\end{aligned}$$

Mittels dieser Operatoren läßt sich jede Klasse in $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ erzeugen.

Cup-Produkte

Es gibt effektive Algorithmen, um Multiplikationen in $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ durch Nakajima–Operatoren auszudrücken [2]. Falls $K_X = 0$, erhält man elegante Beschreibungen

- mit dem Gruppenring der Permutationen (Lehn, Sorger)
- oder mittels W-Algebren (Li, Qin und Wang).

Cup-Produkte

Es gibt effektive Algorithmen, um Multiplikationen in $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ durch Nakajima–Operatoren auszudrücken [2]. Falls $K_X = 0$, erhält man elegante Beschreibungen

- mit dem Gruppenring der Permutationen (Lehn, Sorger)
- oder mittels W-Algebren (Li, Qin und Wang).

Bemerkung

Bei den von uns betrachteten Beispielen ist $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Z})$ torsionsfrei, daher genügt es, mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten zu rechnen.

Falls X eine K3-Fläche ist, so ist $X^{[n]}$ eine IHSM.

Cup-Produkte

Es gibt effektive Algorithmen, um Multiplikationen in $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ durch Nakajima–Operatoren auszudrücken [2]. Falls $K_X = 0$, erhält man elegante Beschreibungen

- mit dem Gruppenring der Permutationen (Lehn, Sorger)
- oder mittels W-Algebren (Li, Qin und Wang).

Bemerkung

Bei den von uns betrachteten Beispielen ist $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Z})$ torsionsfrei, daher genügt es, mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten zu rechnen.

Falls X eine K3-Fläche ist, so ist $X^{[n]}$ eine IHSM. Von besonderem Interesse sind Produkte von Grad-2-Klassen und man studiert die durch das Cup-Produkt gegebene Einbettung

$$\mathrm{Sym}^k H^2(X^{[n]}, \mathbb{Z}) \subset H^{2k}(X^{[n]}, \mathbb{Z}),$$

etwa, um Aussagen über Automorphismen zu treffen.

Resultate über $H^*(K3^{[n]}, \mathbb{Z})$

Beispiel (Boissière–Nieper-Wißkrichen–Sarti [1])

$$\frac{H^4(K3^{[2]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(K3^{[2]}, \mathbb{Z})} \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

Resultate über $H^*(K3^{[n]}, \mathbb{Z})$

Beispiel (Boissière–Nieper-Wißkrichen–Sarti [1])

$$\frac{H^4(K3^{[2]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(K3^{[2]}, \mathbb{Z})} \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

Beispiel

$$\frac{H^6(K3^{[3]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^3 H^2(K3^{[3]}, \mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 254} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 230} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{36\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 22} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{72\mathbb{Z}}$$

Resultate über $H^*(K3^{[n]}, \mathbb{Z})$

Beispiel (Boissière–Nieper-Wißkrichen–Sarti [1])

$$\frac{H^4(K3^{[2]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(K3^{[2]}, \mathbb{Z})} \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

Beispiel

$$\frac{H^6(K3^{[3]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^3 H^2(K3^{[3]}, \mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 254} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 230} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{36\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 22} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{72\mathbb{Z}}$$

Satz

Für alle $n \geq k+2$ ist der Quotient

$$\frac{H^{2k}(K3^{[n]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^k H^2(K3^{[n]}, \mathbb{Z})}$$

ein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

Verallgemeinerte Kummer-Varietäten

Definition

Sei A ein zweidimensionaler komplexer Torus und $A^{[n]}$ das Hilbertschema. Bezeichne $\Sigma : A^{[n]} \to A$ die Summationsabbildung. Dies ist eine Faserung über A und die verallgemeinerte Kummersche Varietät $A^{[[n]]}$ ist dann definiert als Faser eines Punktes (und daher von Dimension $2n-2$).

$$\begin{tikzcd} A^{[[n]]} \arrow[r, hook, "\theta"] \arrow[d] & A^{[n]} \arrow[d, "\Sigma"] \\ 0 \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd}$$

Verallgemeinerte Kummer-Varietäten

Definition

Sei A ein zweidimensionaler komplexer Torus und $A^{[n]}$ das Hilbertschema. Bezeichne $\Sigma : A^{[n]} \to A$ die Summationsabbildung. Dies ist eine Faserung über A und die verallgemeinerte Kummersche Varietät $A^{[[n]]}$ ist dann definiert als Faser eines Punktes (und daher von Dimension $2n-2$).

$$\begin{tikzcd} A^{[[n]]} \arrow[r, hook, "\theta"] \arrow[d] & A^{[n]} \arrow[d, "\Sigma"] \\ 0 \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd}$$

Beispiel

Für $n = 2$ erhält man eine K3-Fläche.

Ein etwas größeres Diagramm

Der Morphismus θ paßt in ein etwas größeres Faserdiagramm:

$$\begin{tikzcd} A^{[[n]]} \arrow[r, hook, "0\times\mathrm{id}"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\theta"] & A \times A^{[[n]]} \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "pr_1"] & A^{[n]} \arrow[d, "\Sigma"] \\ 0 \arrow[r, hook] & A \arrow[r, "n\cdot"] & A \end{tikzcd}$$

wobei der Mophismus Θ eine n^4-fache Überlagerung wird.

Ein etwas größeres Diagramm

Der Morphismus θ paßt in ein etwas größeres Faserdiagramm:

$$\begin{tikzcd} A^{[[n]]} \arrow[r, hook, "0\times\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend left, hook, "\theta"] \arrow[d] & A \times A^{[[n]]} \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "pr_1"] & A^{[n]} \arrow[d, "\Sigma"] \\ 0 \arrow[r, hook] & A \arrow[r, "n\cdot"] & A \end{tikzcd}$$

wobei der Mophismus Θ eine n^4-fache Überlagerung wird.

Zwei Zutaten, um $H^*(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$ zu bestimmen:

- Kohomologie der Hilbertschemata und Rückzug entlang θ

Ein etwas größeres Diagramm

Der Morphismus θ paßt in ein etwas größeres Faserdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
A^{[[n]]} \arrow[r, hook, "0\times\mathrm{id}"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\theta"] & A \times A^{[[n]]} \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "pr_1"] & A^{[n]} \arrow[d, "\Sigma"] \\
0 \arrow[r, hook] & A \arrow[r, "n\cdot"] & A
\end{tikzcd}$$

wobei der Mophismus Θ eine n^4-fache Überlagerung wird.

Zwei Zutaten, um $H^*(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$ zu bestimmen:

- Kohomologie der Hilbertschemata und Rückzug entlang θ
- Ein paar zusätzliche Klassen mit Träger an den 3-Torsionspunkten von A

Rückzug vom Hilbertschema

Satz

Der Kern von $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ *ist das (zweiseitige) Ideal* $\mathcal{I}$ *in* $H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z})$ *erzeugt von* $H^1(A^{[n]}, \mathbb{Z})$.

Rückzug vom Hilbertschema

Satz

Der Kern von $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ ist das (zweiseitige) Ideal $\mathcal{I}$ in $H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z})$ erzeugt von $H^1(A^{[n]}, \mathbb{Z})$.

Beweis

Es genügt, $\mathbb{Q}$-Koeffizienten zu betrachten. Klarerweise wird H^1 auf Null abgebildet, also $\mathcal{I} \subset \ker \theta^*$. Weil nun der Morphismus

$$\Theta : A \times A^{[[n]]} \to A^{[n]}$$

eine endliche Überlagerung ist, muß $\ker \theta^*$ der Annihilator der Klasse $A^{[[n]]}$ in $H^*(A^{[n]}, \mathbb{Q})$ sein. Dann kann man zeigen, daß dies gleich dem Ideal erzeugt von H^1 ist. □

Zur Surjektivität des Rückzugs

Satz

Für $n = 3$ ist $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ surjektiv in allen Graden außer dem mittleren. Dort ist das Bild von θ^* ein primitives Untergitter von Kodimension $n^4 - 1$.

Zur Surjektivität des Rückzugs

Satz

Für $n = 3$ ist $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ surjektiv in allen Graden außer dem mittleren. Dort ist das Bild von θ^* ein primitives Untergitter von Kodimension $n^4 - 1$.

Vermutung

Obiger Satz gilt für alle n, die Primzahlen sind.

Zur Surjektivität des Rückzugs

Satz

Für $n = 3$ ist $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ surjektiv in allen Graden außer dem mittleren. Dort ist das Bild von θ^* ein primitives Untergitter von Kodimension $n^4 - 1$.

Vermutung

Obiger Satz gilt für alle n, die Primzahlen sind.

Proposition

$$\frac{H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})}{\mathrm{Sym}^2 H^2(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 80} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 7} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 8}$$

Insbesondere ist also $\mathrm{Sym}^2 H^2(A^{[[3]]}, \mathbb{Z}) \subset \theta^*(H^4(A^{[3]}, \mathbb{Z}))$ ein Untergitter von vollem Rang.

Weitere Klassen mittleren Grades

Proposition (Hassett und Tschinkel)

Die Briançon Schemata mit Träger an einem 3-Torsionspunkt $\tau \in A[3]$ liefern 81 weitere Klassen $W_\tau \in H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$, die zusammen mit den schon betrachteten ganz $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$ aufspannen.

Darüber hinaus bestimmen Hassett und Tschinkel einige zusätzliche Klassen in $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$.

Weitere Klassen mittleren Grades

Proposition (Hassett und Tschinkel)

Die Briançon Schemata mit Träger an einem 3-Torsionspunkt $\tau \in A[3]$ liefern 81 weitere Klassen $W_\tau \in H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$, die zusammen mit den schon betrachteten ganz $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$ aufspannen.

Darüber hinaus bestimmen Hassett und Tschinkel einige zusätzliche Klassen in $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$.

Proposition (mit Gr. Menet)

Durch die Wirkung der Monodromiegruppe $\operatorname{Sp} A[3] \rtimes A[3]$ auf diese zusätzliche Klassen erhält man eine Basis von $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$.

Anwendung auf Quotienten

Die Abbildung $-\mathrm{id}$ auf A induziert eine Involution ι auf $A^{[[3]]}$, welche (gem. Tari) eine K3-Fläche und 36 Punkte fixiert. Sei

$$K' \longrightarrow A^{[[3]]}/\iota$$

die Aufblasung der K3-Fläche im Quotienten.

Anwendung auf Quotienten

Die Abbildung $-\mathrm{id}$ auf A induziert eine Involution ι auf $A^{[[3]]}$, welche (gem. Tari) eine K3-Fläche und 36 Punkte fixiert. Sei

$$K' \longrightarrow A^{[[3]]}/\iota$$

die Aufblasung der K3-Fläche im Quotienten.

Satz (Menet)

Es ist K' eine irreduzible symplektische V-Mannigfaltigkeit mit Singularitäten von Kodimension vier. Der Isomorphietyp des Beauville–Bogomolov-Gitters $H^2(K', \mathbb{Z})$ ist $U(3)^3 \oplus \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, und die Fujiki-Konstante $c_{K'}$ ist gleich 8.

Das Ende des Vortrags

Danke, daß ihr da seid!!

Zum Weiterlesen

- S. Boissière, M. Nieper-Wisskirchen, and A. Sarti.
  Smith theory and irreducible holomorphic symplectic manifolds.
  Journal of Topology 6(2), April 2012.
- M. Lehn and C. Sorger.
  The cup product of the Hilbert scheme for K3 surfaces.
  Inventiones Mathematicae, December 2003.
- G. Menet.
  On the integer cohomology of quotients of Kähler manifolds.
  ArXiv e-prints, December 2013.