Sätze mit Fibonaccizahlen, dem goldenen Schnitt und der Zahl 5

17. März 2014

Zusammenfassung

Eine Sammlung hübscher und teilweise überraschender Ergebnisse, worin Fibonaccizahlen, der goldene Schnitt oder die Zahl 5 eine besondere Rolle spielen. Keine Beweise.

1 Fibonaccizahlen

Definition 1. Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ der Fibonaccizahlen ist rekursiv gegeben durch:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Die Folge beginnt mit

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$

Satz 1. Die gewöhnliche und die exponentiell erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen G_f resp. E_f sind:

$$G_f(x) := \sum_{n\geq 0} f_{n+1} x^n = \frac{1}{1-x-x^2},$$

$$E_f(x) := \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!} f_n x^n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\, x\right) - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\, x\right)$$

Satz 2. Erzeugende Funktionen von Potenzen der Fibonaccizahlen:

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^2 x^n = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+x} \;+\; \frac{1}{5}\cdot\frac{3-2x}{1-3x+x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^3 x^n = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1+x-x^2} \;+\; \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-4x-x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^4 x^n = \frac{6}{25}\cdot\frac{1}{1-x} \;+\; \frac{4}{25}\cdot\frac{3+2x}{1+3x+x^2} \;+\; \frac{1}{25}\cdot\frac{7-2x}{1-7x+x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1}^5 x^n = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-x-x^2} \;+\; \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+4x-x^2} \;+\; \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-11x-x^2}$$

Die einzelnen Summanden haben alle eine besondere Bedeutung. Welche? Wie lautet die erzeugende Funktion einer beliebigen Potenz von Fibonaccizahlen?

Satz 3. (Wallsche Vermutung)

$$f_5 = 5$$

Allgemeiner gibt es für jede positive Zahl k eine positive Zahl r, so daß gilt:

$$f_{r\mathbb{N}} \subset k\mathbb{N}$$

Bezeichnet man die kleinste solche Zahl mit $r(k)$, so gilt für Primzahlen p vermutlich

$$r(p^l) = p^{l-1} r(p)$$

Insbesondere ist f_{5^l} stets durch 5^l teilbar.

Satz 4. Sei B_n eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \mbox{\Huge 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & \mbox{\Huge 0} & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Permanente von B_n gleich f_{n+1}.

Satz 5. (Danke an Andrei Okunkow.) Sei E ein Vektorbündel auf $\mathbb{CP}^2$, das in eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}(1)^{r+s} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

paßt. (M ist eine allgemeine Matrix aus Linearformen.) Dann ist E semistabil (d.h. $\frac{\chi(U(n))}{\dim U} \leq \frac{\chi(E(n))}{\dim E}$ für Unterbündel U von E und große n) genau dann, wenn

$$\frac{s}{r} \in \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \dots \right\} \cup \left\{ \alpha \mid \alpha > \frac{1}{\Phi} \right\}$$

2 Goldener Schnitt

Definition 2. Der goldene Schnitt Φ ist definiert als $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Satz 6. Der goldene Schnitt erfüllt die Gleichungen

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \qquad \Phi^{n+1} = f_{n+1}\Phi + f_n.$$

Satz 7. Sei $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ diejenige differenzierbare und bijektive Funktion, deren erste Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist. Dann ist f gegeben durch:

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^{\frac{1}{\Phi}} x^{\Phi}.$$

Satz 8. Sei einem regelmäßigen Ikosaeder ein regelmäßiges Dodekaeder einbeschrieben (Seitenflächenmittelpunkte auf Ecken). Dann ist das Verhältnis der Kantenlängen beider Objekte gleich $3 : \Phi$.

Satz 9. Die dreidimensionale Rotation um $72° = \frac{2\pi}{5}$ hat Spur Φ. Die zweidimensionale Rotation um $72°$ hat Spur $\frac{1}{\Phi}$.

3 Die Zahl 5

Definition 3. Die Zahl 5 ist die Anzahl nichtähnlicher platonischer Körper.

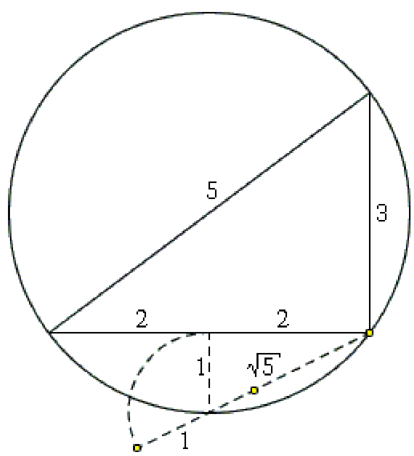
Satz 10. (Pentagonalzahlensatz.) Die Pentagonalzahlen sind definiert durch $p_n := \frac{3n^2-n}{2}$ und berechnen die Anzahl der Steine, die benötigt werden, um n ineinander liegende regelmäßige Fünfecke zu legen, welche eine Ecke gemeinsam haben.
Die Partitionszahlen werden bezeichnet durch $p(n)$ und zählen die Möglichkeiten, die Zahl n als Summe positiver ganzer Zahlen zu schreiben. Dann gilt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} = \sum_{n\geq 0} p(n)\, x^n \qquad \text{und}$$
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{p_n}.$$

Satz 11. (Fünferschritte bei Partitionszahlen.)

$$\frac{5\left((1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\dots\right)^5}{((1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots)^6} = \sum_{n\geq 1} p(5n-1)\, x^n$$

Satz 12. (Danke an Vadim Gorin.) Sei D ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und einem rechten Winkel. Dann ist die kleinstmögliche Hypothenusenlänge gleich 5.


5
3
2
2
1
$\sqrt{5}$
1