Motivation für Differentialformen

Simon Kapfer

18. Januar 2014

Zusammenfassung

Es sollen Konzepte und Motivationen vermittelt werden, die hinter dem Differentialformenkalkül stehen, der in der Vorlesung behandelt wird. Definitionen oder andere technische Details lassen wir deshalb außen vor.

1 Glatte Mannigfaltigkeiten

1.1. ***Koordinaten.*** Wir wollen glatte Mannigfaltigkeiten studieren, also geometrische Objekte M, die in der Umgebung U eines Punktes[1] $p \in M$ *diffeomorph* zum $\mathbb{R}^n$ sind. Das bedeutet, wir haben einen Satz von Koordinatenfunktionen[2] $x_1, \ldots, x_n : U \to \mathbb{R}$, (genannt *Karte*), so daß der Punkt p eindeutig durch seine n Koordinaten $x_i(p)$ bestimmt ist.

1.2. ***Koordinatenunabhängigkeit.*** Nun hat man auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit keine kanonische Wahl von Koordinatenfunktionen wie im $\mathbb{R}^n$ [3]. Jede Wahl von Koordinaten soll gleichberechtigt sein[4] und Koordinatentransformationen dürfen keine Eigenschaften ändern, die nur von M abhängen.

1.3. ***Differenzierbare Struktur.*** Um ableiten zu können, benötigen wir eine Richtung, in die wir gehen. Die Menge aller Richtungen wird *Tangentialraum* an p genannt. Wenn man sagt: "x_1–Richtung", meint man die Richtung, wo alle Koordinaten außer x_1 konstant bleiben. Das variiert natürlich an jedem Punkt[5].

---

[1] Man sagt dafür auch: lokal um p

[2] Diese Koordinatenfunktionen müssen für glatte Mannigfaltigkeiten in einem geeigneten Sinne differenzierbar sein.

[3] Falls M zufällig als Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ drinliegt, sollen die kanonischen Koordinaten trotzdem keine Sonderrolle innehaben.

[4] Man könnte auch sagen, wir konzentrieren uns nur auf die Information, die nicht durch irgendeine Karte erst entsteht, sondern bereits "geometrisch"vorhanden ist.

[5] Vornehme Leute nennen solch eine Wahl einer Richtung für jedes p ein *Vektorfeld.*

2 Einsformen

Wir machen uns hier keine Sorgen über Differenzierbarkeit, alles soll C^∞ sein.

2.1. ***Einsformen.*** Die Richtungsableitung einer C^∞–Funktion, $\frac{\partial}{\partial v} f\Big|_p$, ist linear in der Richtung v. Es bietet sich daher an, wie in Analysis II ein totales Differential df zu definieren, das jeder Richtung die entsprechende Ableitung zuweist. df lebt im Dualraum zum Tangentialraum. Wenn $f(p) = f(x_1(p), \ldots, x_(p))$ über die Koordinaten berechnet wird[6], so auch das Differential $df = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i$.

2.2. ***Konvention.*** Die Abhängigkeit vom Punkt p wird normalerweise nicht geschrieben, da fast immer klar ist, wo man sich gerade befindet. Auswertungen an verschiedenen Punkten innerhalb derselben Formel kommen praktisch nicht vor[7]. Um die Auswertung am Punkt zu beeinflussen, benutzt man Pullbacks.

2.3. ***Wie man Formen ableitet.*** Die Ableitung einer C^∞–Funktion ergibt eine Einsform. Wie geht es nun weiter? Sei der Einfachheit halber $M = \mathbb{R}^2$. Wir definieren eine kleine Verschiebung

$$\phi_\epsilon : M \longrightarrow M, \quad p \longmapsto p + \epsilon v$$

für eine beliebige Richtung $v \in \mathbb{R}^2$. Die Richtungsableitung einer 1–Form ω nach v definieren wir durch:

$$\frac{\partial}{\partial v}\omega := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\phi_\epsilon^*(\omega) - \omega}{\epsilon}$$

wobei der Pullback für $\omega = f dx_1 + g dx_2$ gegeben ist durch:

$$\phi_\epsilon^*(\omega) := (f \circ \phi_\epsilon) d(x_1 \circ \phi_\epsilon) + (g \circ \phi_\epsilon) d(x_2 \circ \phi_\epsilon)$$

Für die kanonischen Koordinaten x_1 und x_2 stellen wir fest, daß $\phi_\epsilon^*(dx_i) = dx_i$ und damit $\frac{\partial}{\partial v} dx_i = 0$ für beliebiges v.
Außerdem überprüft man schnell, daß $\frac{\partial}{\partial v}\omega$ linear von v abhängt. Beim Übergang von der partiellen zur totalen Ableitung werden wir deshalb etwas erhalten, was bilinear von zwei Tangentialvektoren abhängt. Man rechnet nach:

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx \odot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \odot dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \odot dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \odot dy$$

(Es steht $\odot$ dabei für eine bilineare Verknüpfung, die wir noch genauer bestimmen werden.)

[6] Ich entschuldige mich für die zweimalige Verwendung des Buchstabens f. Die Schreibweise zeigt an, daß es sich um dasselbe Objekt handelt.

[7] Man kann auch behaupten, man betreibe lediglich multilineare Algebra, wo die Objekte noch vom Zusatzparameter p abhängen.

3 Höhere Formen

3.1. ***Die Gleichung*** $d^2 = 0$**.** Die zweite Ableitung der kanonischen Koordinatenfunktion x_i ist konstant Null, d. h. es gilt $d(dx_i) = 0$. Allerdings hatten wir vorher ja vereinbart, daß Koordinatenwahlen keine Rolle spielen dürfen. Wir müssen die Gleichung $d(du) = 0$ demnach für beliebige Koordinaten u fordern. Da eine Koordinate nichts anderes ist als eine C^∞–Funktion[8], muß die Gleichung $d^2 = 0$ von allen C^∞–Funktionen erfüllt werden.

3.2. ***Antikommutativität.*** Beispielsweise könnte man u so wählen, daß $u = x_1 x_2$. Dann ist $du = x_2 dx_1 + x_1 dx_2$ und dementsprechend

$$d^2 u \;=\; 0 \;=\; dx_2 \odot dx_1 + dx_1 \odot dx_2$$

Analog erhält man für die Wahl $u = \frac{1}{2} x_1^2$ die Bedingung $dx_1 \odot dx_1 = 0$.
Die Definition der äußeren Ableitung ergibt sich daher aus der Forderung, nur den Teil zu betrachten, der koordinatenunabhängig ist.

[8] mit nichtverschwindender Ableitung, aber das ist eine offene Bedingung