

# Tagebuch

Simon Kapfer

7. November 2014

## Zusammenfassung

Was mir an mathematisch Interessantem einfällt.

**p-adische Approximation mit erzeugenden Funktionen** Eine Potenzreihe  $F(x) = \sum c_n x^n$  konvergiert (wenn die  $c_n$  nicht zu schlecht sind, also z.B. ganze Zahlen) im p-adischen Sinne in  $\mathbb{Z}_p$  bzw.  $\mathbb{Q}_p$  für alle  $x$ , die Vielfache von  $p$  sind. Für  $x_0 = a_1 p + a_2 p^2 + \dots$  konvergieren die Koeffizienten der Reihe

$$\frac{F(a_1 p t + a_2 p^2 t^2 + \dots)}{1 - t}$$

gegen  $F(x_0)$ . Idee dazu kam von folgender Frage: Gegeben ein modulo  $p^n \forall n$  surjektives Polynom  $P$  (vgl. Hensel Lemma), wie kann man eine Folge  $(r_n)$  finden, so daß  $P(r_n)$  durch  $p^n$  teilbar ist? Man muß die Nullstellen von  $P$  nämlich p-adisch approximieren, z.B. mittels Newton-Verfahren, oder direkt eine Potenzreihe für die Wurzel nehmen.

**Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem** Die universell einhüllende Algebra einer Liealgebra  $\mathfrak{g}$  ist der Quotient der freien Tensoralgebra durch die Relationen  $\langle a \otimes b - b \otimes a - [a, b] \rangle$ . Die Aussage des sog. Theorems ist, daß  $U(\mathfrak{g})$  als Vektorraum von den (linear unabhängigen) geordneten Tensoren der  $\mathfrak{g}$ -Basiselemente  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ ,  $i_1 \leq \dots \leq i_k$  aufgespannt wird. Die lineare Unabhängigkeit ist der nichttriviale Teil.

Meine Beweisidee:  $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus U^k$  wobei  $U^k = \langle e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}, i_1 \leq \dots \leq i_k \rangle$  und die Erzeuger von  $U^k$  sind linear unabhängig. Bleibt zu zeigen, daß  $U^k \cap U^l = 0$  für verschiedene  $k$  und  $l$ . Die Relationen der Einhüllenden vermischen nur zwei benachbarte Grade, d. h. es reicht zu zeigen, daß  $U^k \cap U^{k-1} = 0$ . Mit anderen Worten, die Vertauschung von zwei Basisvektoren in  $U^k$  soll sich zu einer Gruppenwirkung von  $\mathfrak{S}_k$  auf  $U^k \oplus U^{k-1}$  fortsetzen lassen.  $S_k$  wird von Transpositionen benachbarter Elemente  $\sigma_i$  erzeugt, die den Relationen  $\sigma_i^2 = 1$ ,  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  falls

$|i - j| > 1$  und  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  gehorchen. Die erste Gleichung gilt wegen Antikommutativität der Lieklammer, die zweite trivialerweise, die dritte braucht Jacobi. Gezeigt ist nun: egal, in welcher Reihenfolge man ein Element in  $U^k$  in Normalform (durch Vertauschen) bringt, man wird stets dieselbe Korrektur in  $U^{k-1}$  erhalten. Insbesondere wird Umformen eines Elements in Normalform in sich selbst keine Korrekturterme produzieren.

**Dimension von metrischen Graphen** Ein metrischer Raum aus  $n+1$  Punkten kann stets als Eckenmenge eines  $n$ -Simplex dargestellt werden. Dieses Simplex ist manchmal entartet, was eine Reduzierung der Dimension bedeutet. Wie weit kann man die Dimension reduzieren, wenn man für die Abstände einen Fehler von bestimmter Größe zulässt? Möglicherweise gehts mit einer Eigenraumzerlegung der darstellenden Matrix à la Carina.

**Faktorisierungen in der Symmetrischen Gruppe** Bezeichne mit  $f_{n,k}$  die Anzahl der Möglichkeiten, die Identität in  $\mathfrak{S}_n$  als  $k$ -faches Produkt  $n$ -Zykeln zu schreiben (unter Berücksichtigung der Reihenfolge). Dann gilt für die erzeugenden Funktionen  $F_n(x) := \sum_{k \geq 0} f_{n,k} x^k$ :

$$\begin{aligned}
 F_0(x) &= 1 \\
 F_1(x) &= \frac{1}{1-x} \\
 F_2(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\
 F_3(x) &= \frac{1-x}{1-x-2x^2} \\
 F_4(x) &= \frac{1-34x^2+24x^4}{1-40x^2+144x^4} \\
 F_5(x) &= \frac{1-22x-72x^2+384x^3+384x^4}{1-22x-96x^2+432x^3+1536x^4} \\
 F_6(x) &= \frac{1-19320x^2+43720704x^4-18345277440x^6+300589056000x^8}{1-19440x^2+42418944x^4-16334438400x^6+303906816000x^8} \\
 F_7(x) &= \frac{\text{Polynom vom Grad 7}}{\text{Polynom vom Grad 7}}, \quad F_8(x) = \frac{\text{Polynom vom Grad 14}}{\text{Polynom vom Grad 14}}
 \end{aligned}$$

Wir haben immer rationale Funktionen, auch wenn die Koeffizienten mit wachsendem  $n$  regelrecht explodieren. Die Frage,  $f_{n,k}$  zu bestimmen, kam von Kai. Mit dem Paper von Goupil und Schaeffer kommt man an eine Berechnungsmethode dafür über Matrixpotenzen. Damit bekommt man auch obere Schranken für den Nennergrad der  $F_n$ , nämlich die Partitionszahlen 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, ...

Die Tatsache, daß für gerade  $n$  nur gerade Funktionen auftauchen, sieht man, sobald man das Signum der Permutationen anschaut.  $\deg F_{2n} = 2 \deg F_{2n-1}$  folgt möglicherweise auch daraus.

**Charakteristische Polynome von Matrixpotenzen** Die Koeffizienten  $c_k$  des charakteristischen Polynoms einer  $d \times d$ -Matrix  $A$  sind bis aufs Vorzeichen die elementarsymmetrischen Funktionen in den Eigenwerten:  $e_k = (-1)^k c_k$ . Was sind die charakteristischen Polynome von  $A^n$ ?

$$S_A(x) := \sum_n \text{Spur}(A^n) x^n = \frac{\text{Rev}\left(\frac{\partial}{\partial x} \chi_A(x)\right)}{\text{Rev}(\chi_A(x))}$$

Dabei steht  $\text{Rev} : P(x) \mapsto x^{\deg P} P\left(\frac{1}{x}\right)$  für das rückwärts gelesene Polynom.  $S_A$  ist natürlich eine symmetrische Funktion in den Eigenwerten, daher kann man von Plethysmus sprechen und es gilt:

$$(-1)^k \sum_n c_k(A^n) x^n = S_A[e_k](x)$$

Also braucht man, um  $\chi_{A^n}$  auszurechnen, nichts weiter als  $\chi_A$  und die plethystischen Formeln für  $e_j[e_k]$ . Falls  $\det A = 1$ , hat man außerdem eine nette Dualität, die man durch Betrachtung der Eigenwerte beweist, nämlich

$$(-1)^{d-1} \sum_n c_{d-1}(A^n) x^n = \frac{\text{Rev}\left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Rev}(\chi_A(x))\right)}{\chi_A(x)}$$

Diese Dualität wird von Plethysmen respektiert, und so haben dann die erzeugenden Funktionen von  $c_k(A^n)$  und  $c_{d-k}(A^n)$  jeweils rückwärts gelesene Nenner.

**Ordinalzahlen** Betrachte alle abzählbaren, nicht endliche Mengen, welche total geordnet sind. Führe eine Relation zwischen diesen ein:  $M \trianglelefteq N$ , falls eine injektive, monotone (steigende oder fallende) Abbildung  $M \rightarrow N$  existiert. Diese Relation besitzt ein kleinstes Element, nämlich  $\mathbb{N}$ , sowie ein größtes Element, nämlich  $\mathbb{Q}$ .

**Eulercharakteristik von symmetrischen Potenzen** Wenn  $V = V^+ \oplus V^-$  ein Supervektorraum ist und  $\chi(V) := \dim V^+ - \dim V^-$ , dann ist

$$\sum \chi(\text{Sym}^n V) x^n = (1-x)^{-\chi(V)}.$$

Das sollte auch mit beliebigen gewichteten Zerlegungen von  $V$  funktionieren und aus der entsprechenden Formel für Charaktere von Darstellungen folgen.

**Hilbertschema von Punkten auf K3** Sei  $X$  eine K3. Dann ist die Torsion der Cup-Produkt-Bilder von

- $\text{Sym}^2(H^2(X^{[2]}; \mathbb{Z}))$  in  $H^4(X^{[2]}; \mathbb{Z})$  gleich  $(\frac{\mathbb{Z}}{2})^{23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5}$ .
- $\text{Sym}^3(H^2(X^{[2]}; \mathbb{Z}))$  in  $H^6(X^{[2]}; \mathbb{Z})$  gleich  $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ .
- $\text{Sym}^2(H^2(X^{[3]}; \mathbb{Z}))$  in  $H^4(X^{[3]}; \mathbb{Z})$  gleich 3. Dabei kann  $\frac{1}{3}a_3(1)|0\rangle$  nicht getroffen werden, sondern nur das Dreifache.
- $h^6(X^{[3]}) = 2554$ .

$$\frac{H^6(X^{[3]}; \mathbb{Z})}{H^4(X^{[3]}; \mathbb{Z}) \cup H^2(X^{[3]}; \mathbb{Z})} = \left(\frac{\mathbb{Z}}{3}\right)^{23}$$

**Primfaktoren zählen** Sei  $p \geq 3$  eine Primzahl. Bezeichne  $o(n)$  die Anzahl von  $p$ -Faktoren in  $n!$ . Dann ist  $o(n) \leq \frac{n}{p-1}$  linear beschränkt und es gibt keinen kleineren Faktor als  $\frac{1}{p-1}$ , der es auch tut.

**p-adischer Arcustangens** Der Arcustangens, definiert über die übliche Potenzreihe, konvergiert im p-adischen nur für Argumente vom Betrag kleiner 1. Mit der Formel

$$2 \arctan x = \arctan \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

läßt er sich jedoch für Primzahlen  $p \in \{2\} \cup \{2^n - 1\}$  auf ganz  $\mathbb{Q}_p \setminus \{\pm 1\}$  fortsetzen. Dort ist er nicht mehr injektiv, es gilt z. B. in  $\mathbb{Q}_2$ :  $\arctan(8n \pm 1) = \arctan(\pm \frac{4n}{4n \pm 1})$ . Die Machinsche Formel für  $\frac{\pi}{4}$  entartet zu:  $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = 0$ .

Nachtrag: Man hat allgemein die Formel:  $\arctan(x) = \Im \log(1 + ix)$  und daher:

$$\arctan(x) = \frac{1}{m} \Im \log((1 + ix)^m) = \frac{1}{m} \Im \log \left( 1 + i \frac{\sum_k (-1)^k \binom{m}{2k+1} x^{2k+1}}{\sum_k (-1)^k \binom{m}{2k} x^{2k}} \right)$$

bis auf Addition von  $\pi$ -Vielfachen. So lassen sich für  $p = 2$  oder  $p = 4n - 1$  alle Argumente in etwas transformieren, wo die Potenzreihe konvergiert, zum Beispiel, in dem man  $m := p + 1$  nimmt. Für  $p = 4n + 1$  und  $m := p - 1$  geht es auch fast überall gut, mit Ausnahme von  $\pm i \in \mathbb{Q}_p$ . Da kann man aber auch gleich  $\arctan(x) := \frac{1}{2i} \log\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$  setzen, so daß die beiden Definitionslücken offensichtlich werden.

**Monotonie und Stetigkeit** Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotone Funktionen, so daß  $g \circ f = \text{id}$ . Dann ist  $g$  stetig. Es reicht für die Stetigkeit von  $g$  sogar:  $g$  ist monoton und surjektiv.

*Beweis.* Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig. Wegen Monotonie von  $g$  ist  $g^{-1}([a, b])$  ein Intervall. Setze  $I := \inf(g^{-1}([a, b]))$ . Falls  $I > -\infty$  und  $g(I) < a$  wäre, so wäre  $g$  nicht surjektiv. Also  $g(I) = a \in [a, b]$ . Also ist  $g^{-1}([a, b])$  abgeschlossen. Also ist  $g$  stetig.

**Idempotente Permutationen** Sei  $m(r, n)$  die Anzahl aller Permutationen  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , für die gilt:  $\sigma^k = \text{id}$ . Dann hat man

$$\sum_n \frac{m(r, n)}{n!} x^n = \prod_{i|r} \exp\left(\frac{x^i}{i}\right).$$

**Signatur von Hilbertschemata von Punkten auf einer K3** Bezeichne mit  $s_n$  die Signatur von  $H^{2n}(S^{[n]}, \mathbb{Z})$ . Dann gilt:

$$\sum_n s_n x^n = [(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots]^{-16} [(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots]^{-20}$$

Zum Beweis kann man eine Formel von Ellingsrud/Göttsche/Lehn für das  $\chi_y$ -Geschlecht benutzen, die hier zu finden ist.

**Partitionszahlen und 5, 7, 11** Unter den Partitionszahlen  $\{p_0, \dots, p_N\}$  kommen (für große  $n$ ) solche, welche durch 5, 7 oder 11 teilbar sind, deutlich häufiger vor als man erwarten würde. Bezeichne  $D_{p,N}$  die Anzahl aller Partitionszahlen  $p_0$  bis  $p_N$ , welche durch  $p$  teilbar sind. Existiert  $L_p := \lim \frac{1}{N} D_{p,N}$  und wenn ja, wie groß ist er?  $D_{5,150k} \approx 0.36$ ,  $D_{7,150k} \approx 0.27$ ,  $D_{11,150k} \approx 0.174$ . Siehe auch [ericaklarreich.com/pieces%20of%20numbers%20b&w%20compressed.PDF](http://ericaklarreich.com/pieces%20of%20numbers%20b&w%20compressed.PDF).