

Memo: Interessante Sachen

Simon Kapfer

22. Juli 2014

Zusammenfassung

Merkzettel zu diversen Sachen und Mottos, die nicht in einen anderen Kontext eingebettet sind.

1 Kohomologisches

1.1. Gruppenkohomologie einer Gruppe G soll die (singuläre) Kohomologie eines Raumes sein, dessen Fundamentalgruppe gleich G ist und dessen andere Homotopiegruppen trivial sind. Den Raum kann man konstruieren: er heißt 'Eilenberg–MacLane Raum'. Für diskrete Gruppen ist das der klassifizierende Raum BG .

1.2. Tensorprodukt über Gruppenringen M, N seien Links- G -Moduln. $M \otimes_G N$ ist so definiert, daß $mg \otimes gn = m \otimes n$. Dann ist $M \otimes_G N \cong (M \otimes N)_G$.

1.3. Welche Kohomologieklassen können als Chernklassen realisiert werden?
Für X eine projektive Kurve kann jede Klasse aus $H^2(X, \mathbb{Z})$ als erste Chernklasse eines Vektorbündels geschrieben werden.
Für X eine komplexe Fläche geht das auch für beliebiges $c_1 \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$ und $c_2 \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (Satz von Schwarzenberger).

1.4. Äquivariante Kohomologie Wenn eine kompakte Liegruppe G auf einem Raum X wirkt, so wird die Äquivariante Kohomologie $H_G^*(X; \mathbb{R}) := H^*(\frac{X \times EG}{G}; \mathbb{R})$ über den folgenden (Totalkomplex des Doppel-)Komplex berechnet:

$$\Omega_G^i(X) = \bigoplus \left(S^j(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^{i-2j}(X) \right)^G$$

1.5. Charakteristische Klassen Insbesondere hat man für $X = \{\text{pt}\}$ und $G = U(n)$

$$H_G^*(X) = H^*(BG) = S^*(\mathfrak{g}^*)^G = \mathbb{R}[c_1, \dots, c_n], \quad \det(\lambda - A) = \sum_i (-1)^i c_i(A) \lambda^{n-i}$$

wobei die c_i die Chernklassen sind. Für $G = O(n)$ erhält man Pontrjagin-Klassen. Für V ein Vektorbündel über einem beliebigen X hat man durch Wahl von lokalen Rahmen die Struktur eines G -Hauptfaserbündels und damit eine Abbildung $X \rightarrow BG$. Die charakteristischen Klassen des Bündels ergeben sich dann durch Rückzug von BG .

1.6. Eulercharakteristik des symmetrischen Produkts G endlich wirke auf X lokal kompakt. Bezeichne X^G die Menge der Fixpunkte. Dann:

$$\chi\left(\frac{X}{G}\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(X^g)$$

Insbesondere gilt für das symmetrische Produkt:

$$\sum_n \chi(\text{Sym}^n X) q^n = (1 - q)^{-\chi(X)}$$

1.7. Riemann-Roch Der Cherncharakter ist eine natürliche Transformation zwischen dem Grothendieckschen K -Funktorkomplex und dem Chowring-Funktorkomplex (über \mathbb{C} : rationale Kohomologie), der Pullbacks respektiert. Pushforwards entlang eigentlicher Morphismen werden respektiert, wenn man mit der Todd-Klasse multipliziert und $\text{ch}(\alpha)\text{td}(\mathcal{T}_X)$ benutzt.

1.8. Picardgruppe einer glatten Varietät sind die Isomorphismenklassen von Geradenbündeln mit Tensorprodukt als Gruppenoperation. Äquivalent Cartier-divisoren modulo lineare Äquivalenz. Äquivalent $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

1.9. K-Theorie $K^*(X)$ wird erzeugt von lokal freien Garben auf X und bildet einen Ring, $K_*(X)$ von den kohärenten Garben (kohärent = Garbe und erste Syzygie sind lokal endlich erzeugt) und bildet einen $K^*(X)$ -Modul. Wenn X regulär (jede Garbe besitzt freie Auflösung endlicher Länge) und noethersch ist, außerdem ein amples Geradenbündel besitzt, so stimmen $K^*(X)$ und $K_*(X)$ überein.

1.10. Residuum $V \subset M$ sei die Verschwindungsmenge einer Funktion f auf der komplex n -dimensionalen Mnf. M . Das Residuum von f lebt dann in $H^n(M \setminus V, \mathbb{C})$. Wie ist es definiert?

2 Algebraisches

2.1. Lieableitung und Intuition. Seien $f(x), g(x)$ parameterabhängige, lineare Operatoren (z. B. einfach Multiplikation mit Zahlen: $f(x) \in \mathbb{R}$). Differentialope-

ratoren wie $\frac{d}{dx}$ fallen auch in diese Kategorie. Es gilt

$$\frac{d}{dx}fg = \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)g + f\frac{d}{dx}g$$

Daher macht es Sinn, den abgeleiteten Operator $f' := \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)$ zu definieren als:

$$f' = \frac{d}{dx}f - f\frac{d}{dx} = \left[\frac{d}{dx}, f\right]$$

Hier also eine Möglichkeit, die Lieklammer zu verstehen. Die Jacobi-Identität wird dann zu einem Spezialfall der Leibnizregel:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Die blauen Klammern stehen jeweils für Ableitung nach x , die schwarzen Klammern sind einfach nur eine Bilinearform, die hier zufällig gleich der Lieklammer ist.

2.2. Über $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Erzeuger: H, X, Y mit $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Vorstellung: H, X, Y haben Grad 0, 2, -2 und H zählt den Grad. Jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sieht aus wie $V_{-n} \oplus \dots \oplus V_n$ mit $V_k \cong \mathbb{C}$ Eigenraum von H zum Eigenwert k . Ein Modell dafür ist $\text{Sym}^n \mathbb{C}^2$ mit Koordinaten x vom Grad 1 und y vom Grad -1.

2.3. Bialgebren

- Die gruppenartigen Elemente einer Bialgebra (d. h. $\Delta g = g \otimes g$) sind alle linear unabhängig. Ihr Spann bildet eine Unterbialgebra.
- Die primitiven Elemente einer Bialgebra (d. h. $\Delta c = c \otimes 1 + 1 \otimes c$) bilden eine Liealgebra mit dem Kommutator als Lieklammer.
- Auf den linearen Endomorphismen einer Bialgebra wird eine Algebrenstruktur (Faltung) erklärt durch $f * g := \mu \circ (t \otimes g) \circ \Delta$. Die Bialgebra ist eine Hopfalgebra, wenn eine Antipode S mit $S * \text{id} = \text{id} * S = \eta \circ \epsilon$ existiert.

2.4. Es gibt keinen Körper, der als \mathbb{Z} -Modul frei ist.

2.5. Klassifikation von indefiniten unimodularen Gittern [?] Wenn es einen Gitterpunkt x gibt, so daß $\langle x, x \rangle$ ungerade ist, so heißt das Gitter ungerade und ist isomorph zu $(1) \oplus (-1)^n$, ansonsten heißt das Gitter gerade und ist isomorph zu $E_8(\pm 1)^m \oplus U^n$. In jedem indefiniten Gitter gibt es einen Vektor $x \neq 0$ mit $\langle x, x \rangle = 0$.

3 Exakte Sequenzen

3.1. Eulersequenz Auf \mathbb{P}^n hat man

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \\ 0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

3.2. Exponentialsequenz Auf komplexen Räumen liefert die exp-Funktion

$$0 \rightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

Dazu die lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^\times) \rightarrow H^2(X, 2\pi i\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \rightarrow$$

$H^1(X, \mathcal{O}^\times)$ ist die Picardgruppe. Der erste Pfeil ist die erste Chernklasse. Deren Bild (oder der Kern des nächsten Pfeils) ist die Néron-Severi Gruppe.

3.3. Koszul-Komplex Angenommen, ein Ideal $I \subset A$, wird von einer regulären Sequenz (a_1, \dots, a_n) aufgespannt (d. h. a_i ist kein Nullteiler in $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$) und $d: A^n \rightarrow A$ schickt die kanonische Basis auf die Erzeuger, dann ist

$$0 \rightarrow \Lambda^n A^n \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 A^n \rightarrow A \rightarrow 0$$

eine Auflösung von A/I , die (außer bei A) exakt ist.

Analog sei $Y \rightarrow X$ eine reguläre Einbettung mit Idealgarbe \mathcal{I} . Dann ist $\Lambda^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ eine lokal freie Auflösung von $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Die Idee ist, daß man zum Auflösen von \mathcal{O}_Y nur das Konormalenbündel / eine tubulare Umgebung von Y braucht.

3.4. Beilinson Auflösung