Künneth Formel

Simon Kapfer

31. März 2014

Künneth Formel Seien C, C' Komplexe aus Projektiven / Freien übre einem Hauptidealbereich. Dann hat man eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow HC \otimes HC' \longrightarrow H(C \otimes C') \longrightarrow \operatorname{Tor}(HC, HC')[-1] \longrightarrow 0$$

Beweis: Bezeichne ZC' und BC' den geschlossenen, bzw. exakten Subkomplex von C' (Kern und Bild vom Differential). Dann hat man (per Definition von H) eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow BC' \longrightarrow ZC' \longrightarrow HC' \longrightarrow 0$$

Als Unterkomplexe sind ZC' und BC' auch frei und damit flach. Da Tensorieren rechtsexakt ist und $\operatorname{Tor}(\ , BC') = \operatorname{Tor}(\ , ZC') = 0$, hat man:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}(HC, HC') \longrightarrow HC \otimes BC' \longrightarrow HC \otimes ZC' \longrightarrow HC \otimes HC' \longrightarrow 0$$

Da H ein Deltafunktor ist, hat man eine lange exakte Sequenz:

$$\longrightarrow (C \otimes ZC') \longrightarrow H(C \otimes HC') \longrightarrow H(C \otimes BC)[-1] \longrightarrow H(C \otimes ZC')[-1] \longrightarrow$$

Da C, ZC' und BC' Komplexe aus frei sind und damit flach, sind isomorph:

$$H(C \otimes C') \cong H(C \otimes HC'), \quad H(C \otimes ZC') \cong HC \otimes ZC' \quad \text{und} \quad H(C \otimes BC') \cong HC \otimes BC'$$

Kombiniert man nun beide Sequenzen, und benutzt, daß $H(C \otimes C') = H(C \otimes HC')$, erhält man Faktorisierungen

$$\begin{tikzcd}
HC \otimes BC' \arrow[r] \arrow[d, equal] & HC \otimes ZC' \arrow[r] \arrow[d, equal] & HC \otimes HC' \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 & \\
HC \otimes BC' \arrow[r] & H(C \otimes ZC') \arrow[r] \arrow[ur, two heads] & H(C \otimes HC') \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H(C \otimes BC')[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & H(C \otimes ZC')[-1] \arrow[d, equal] \\
 & 0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}(HC, HC')[-1] \arrow[r] \arrow[ur, hook] & HC \otimes BC'[-1] \arrow[r] & HC \otimes ZC'[-1]
\end{tikzcd}$$

Betrachte nun die mittlere vertikale Sequenz.