Memo: Gruppenkohomologie

Simon Kapfer

19. März 2014

Zusammenfassung

Merkzettel zu [Bro82].

1 Komplexe

1.1. ***Inneres Hom.*** [Bro82, S. 5, 9]. Seien C und C' Kettenkomplexe. Dann ist $\mathcal{H}om(C,C')_n := \prod_q \mathrm{Hom}(C_q, C'_{q+n})$. Der Randoperator ist $D_n(f) := d'f - (-1)^n f d$. Das ist am besten in der Form $d'\langle f,u\rangle = \langle Df,u\rangle + (-1)^n \langle f, du\rangle$ zu merken. Kettenabbildungen zwischen Komplexen sind dann Elemente von $\ker D_0$, nullhomotope Kettenabbildungen sind exakt. Die Homologie des Hom–Komplexes im Grad 0 sind die Homotopieklassen von Kettenabbildungen.
Eine Konstruktion mit Kokettenkomplexen geht analog.

1.2. ***Gruppenmoduln.*** Eine Wirkung von G auf M ist eine $\mathbb{Z}G$–Modulstruktur. $M^G = \ker(g-1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ sind die Invarianten, $M_G = M/\langle g-1\rangle = \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}G} M$ sind die Koinvarianten. Der Invariantenfunktor ist linksexakt, der Koinvariantenfunktor ist rechtsexakt. In Charakteristik 0 gibt es für endliches G einen Isomorphismus $M_G \longrightarrow M^G$. In diesem Fall haben wir Exaktheit. Wenn M ein G–Links– und N ein G–Rechtsmodul ist, so ist $M \otimes_G N = M \otimes_{\mathbb{Z}G} N := (M\otimes N)_G$ Einen Linksmodul M' kann man durch $g \mapsto g^{-1}$ künstlich zu einem Rechtsmodul machen. $\mathrm{Hom}_G(M, M') = (\mathrm{Hom}(M, M'))^G$.

1.3. ***(Ko-)Skalarerweiterungen.*** [Bro82, III.3] Gegeben ein Ringhomomorphismus $\iota : R \to S$ und ein R-Modul M. Skalarerweiterung ist der Funktor $M \mapsto S \otimes_R M$, Koskalarerweiterung ist $M \mapsto \mathrm{Hom}_R(S, M)$. Diese Funktoren sind links– bzw. rechtsadjungiert zur Skalareinschränkung: $\mathrm{Hom}_S(S\otimes_R M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \iota^* N)$ und $\mathrm{Hom}_R(\iota^* N, M) \cong \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M))$. Für $R = \mathbb{Z}G$ und $S = \mathbb{Z}$ ist Erweiterung gleich Koinvariantenbildung und Koerweiterung gleich Invariantenbildung.

2 Kohomologie

2.1. ***Definition.*** A und B seien Komplexe mit einer G–Wirkung. P sei eine $\mathbb{Z}[G]$–projektive Auflösung von A. (Projektiv impliziert flach, d. h. $P \otimes_G \_$ ist exakt.) $\operatorname{Tor}_*^G(A,B) := H_*(P \otimes_G B)$ und $\operatorname{Ext}_G^*(A,B) := H^*(\mathcal{H}om_G(P,B))$. Gruppenhomologie mit Werten in einem Modul M (interpretiert als Komplex im Grad 0) ist definiert als $H_*(G;M) := \operatorname{Tor}_*^G(\mathbb{Z},M)$. Gruppenkohomologie entsprechend als $H^*(G;M) := \operatorname{Ext}_G^*(\mathbb{Z},M)$.

2.2. ***Abbildungskegel.***

Literatur

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups.* GTM 87. Springer, 1982.