

# Memo: Symmetrische Darstellungstheorie

Simon Kapfer

7. März 2014

## Teil I

# Symmetrische Funktionen

Was im Stanley [4] drüber steht.

## 1 Definitionen

Wir arbeiten über  $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Dabei ist  $n$  beliebig, aber hinreichend groß. Es sollen  $\lambda, \nu, \mu$  Partitionen sein. Partitionen in Multiindex-Schreibweise werden fett  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  notiert. Permutationen werden mit  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  bezeichnet.

### 1.1. Sonstige Bezeichnungen.

$\delta := (n-1, n-2, \dots, 0)$ ,  $n$  ist Anzahl der Variablen

$$z_\lambda := z_{\mathbf{i}} := \prod_k k^{i_k} i_k!$$

$\Delta_\lambda(x) := \det(x_i^{\lambda_j})_{i,j}$  (schiefsymmetrisch in  $x_i$ )

$\Delta(x) := \Delta_\delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$  Vandermonde-Determinante

$K_{\lambda\mu}$  Kostka-Zahlen

$N_{\lambda\mu}^\nu$  Littlewood-Richardson Zahlen

### 1.2. Standardbasen.

- **Monomial** symmetrische Funktionen werden über  $\mathbf{m}_\lambda = (x^\lambda)^{\text{Sym}}$  definiert.
- **Schurpolynome** sind über Determinanten definiert, [4, 7.15]:

$$\mathbf{s}_\lambda := \frac{\Delta_{\lambda+\delta}}{\Delta_\delta}$$

Die anderen Basen werden über Produkte definiert:

$$\mathbf{e}_\lambda = \prod_i \mathbf{e}_{\lambda_i}, \quad \mathbf{h}_\lambda = \prod_i \mathbf{h}_{\lambda_i}, \quad \mathbf{p}_\lambda = \prod_i \mathbf{p}_{\lambda_i}.$$

- **Elementar- und vollständige** symmetrische Funktionen  $\mathbf{e}_k$  und  $\mathbf{h}_k$ :

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad \mathbf{h}_k = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

- **Potenzsummen**  $\mathbf{p}_k := x_1^k + x_2^k + \dots$

### 1.3. Erzeugende Funktionen.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mathbf{e}_k t^k &= \prod_i (1 + x_i t) = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{-(-1)^k}{k} \mathbf{p}_k t^k \right) \\ \sum_{k \geq 0} \mathbf{h}_k t^k &= \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathbf{p}_k t^k \right) \end{aligned}$$

## 2 Skalarprodukt und Involution

**2.1. Skalarprodukt.** Das Skalarprodukt wird so definiert, daß gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{m}_\lambda, \mathbf{h}_\mu \rangle &= \delta_{\lambda\mu} = \langle \mathbf{s}_\lambda, \mathbf{s}_\mu \rangle \\ \langle \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{p}_\mu \rangle &= \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \end{aligned}$$

**2.2. Adjungierte Multiplikationsoperatoren.** (7.15.2, und [2], S. 44.)

$$\langle \mathbf{s}_\nu f, \mathbf{s}_\lambda \rangle = \langle f, \mathbf{s}_{\lambda/\nu} \rangle$$

Bezeichne mit  $D(\_)$  den adjungierten Operator zur Multiplikation. Dann:

$$D(\mathbf{p}_n) = \sum_{r \geq 0} \mathbf{h}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}_{n+r}} = (-1)^{n-1} \sum_{r \geq 0} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{n+r}} = n \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_n}$$

**2.3. Involution.** Definiere eine Involution  $\omega$  durch

$$\omega \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{h}_\lambda.$$

Dann hat  $\omega$  folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \text{id} \\ \langle \omega f, \omega g \rangle &= \langle f, g \rangle \\ \omega \mathbf{p}_\lambda &= \deg(\lambda) \mathbf{p}_\lambda\end{aligned}\tag{7.7.5}$$

$$\omega \mathbf{s}_{\lambda/\nu} = \mathbf{s}_{\lambda'/\nu'}\tag{7.15.6}$$

**2.4. Duale Basen.**  $\{\mathbf{u}_\lambda\}$ ,  $\{\mathbf{v}_\lambda\}$  seien zwei duale Basen für symmetrische Funktionen, d. h.  $\langle \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}_\nu \rangle = \delta_{\lambda\nu}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda} \mathbf{u}_\lambda(x) \mathbf{v}_\lambda(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\ \sum_{\lambda} \mathbf{u}_\lambda(x) \omega_y \mathbf{v}_\lambda(y) &= \prod_{i,j} 1 + x_i y_j\end{aligned}$$

### 3 Beziehungen zwischen den Basen

**3.1. Darstellung durch  $\mathbf{m}_\lambda$ .** Siehe [4, 7.4.1, 7.5.1., 7.7.1.]

$$\mathbf{s}_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} \mathbf{m}_\mu\tag{3.1.1}$$

**3.2. Durch Potenzsummen.** Siehe [4, 7.7.6.]

**3.3. Durch Schur.** [4, 7.12.4, 7.15.3, 7.17.3]

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{h}_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda/\nu\mu} \mathbf{s}_\lambda\tag{3.3.1}$$

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{e}_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda'/\nu'\mu} \mathbf{s}_\lambda\tag{3.3.2}$$

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{p}_\mu = \sum_{\lambda} \chi^{\lambda/\nu}(\mu) \mathbf{s}_\lambda\tag{3.3.3}$$

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{s}_\mu = \sum_{\lambda} C_{\nu\mu}^\lambda \mathbf{s}_\lambda\tag{3.3.4}$$

Gleichung 3.3.3 heißt Murnaghan-Nakayama Regel.  $\chi$  wird in [4, 7.17.3] definiert. Dort auch Border-Strip-Tableaus.

**3.4. Durch Matrizen.** Siehe [2] S. 56.  $K$  ist die Matrix aus Kostka-Zahlen.  $M^\top$  bedeutet Transposition,  $M^{-\top}$  bedeutet Transposition plus Inversion.  $J_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda'\mu}$ .

	<b>e</b>	<b>h</b>	<b>m</b>	<b>s</b>
<b>e</b>	1	$K^\top JK^{-\top}$	$K^\top JK$	$K^\top J$
<b>h</b>	$K^\top JK^{-\top}$	1	$K^\top K$	$K^\top$
<b>m</b>	$K^{-1} JK^{-\top}$	$K^{-1} K^{-\top}$	1	$K^{-1}$
<b>s</b>	$JK^{-\top}$	$K^{-\top}$	$K$	1

**3.5. Jacobi-Trudy.** (Stanley 7.16.1)

$$\mathbf{s}_{\lambda/\mu} = \det(\mathbf{h}_{\lambda_i - \mu_j + i - j})$$

## 4 Plethysmen

**4.1. Definition.** Für  $f$  eine symmetrische Funktion ist der Plethysmus mit einer Potenzsumme definiert durch:  $f[\mathbf{p}_n](x_1, x_2, \dots) = f(x_1^n, x_2^n, \dots) = \mathbf{p}_n[f](x_1, x_2, \dots)$  und der Forderung, daß  $f[g]$  ein Ringhomomorphismus in  $f$  ist. In  $g$  hat man nicht mal Linearität. Plethysmen haben was mit Verkettung zu tun.

**4.2. Plethystische Identitäten.** Siehe [4, S. 447ff].

$$\mathbf{h}_n[-\mathbf{p}_1] = (-1)^n \mathbf{e}_n \quad (4.2.1)$$

$$f[-\mathbf{p}_1] = (-1)^n \omega(f) \quad (4.2.2)$$

$$\sum_n \mathbf{h}_n[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2] = \sum_\lambda \mathbf{s}_\lambda \quad (4.2.3)$$

## Teil II

# Darstellungstheorie

Orientiert sich an Fulton–Harris, [1]. Im Stanley, [4, 7.18, 7.A2], steht auch was.

## 5 Allgemeines über Charaktere

Folgendes gilt für beliebige (endliche) Gruppen  $G$ , welche auf  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen wirken.

**5.1. Definition.** Eine Darstellung ist ein Algebrenhomomorphismus:  $\mathbb{C}[G] \rightarrow \text{End} V$ . Der Charakter  $\chi_V$  ist die Verkettung der Darstellung mit der Spurbildung, also eine lineare Abbildung:  $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$ .

Charaktere sind Klassenfunktionen, d. h. der Wert des Charakters hängt nur von der Konjugationsklasse ab. Zwei Darstellungen sind gleich, falls ihre Charaktere gleich sind.

**5.2. Rechenregeln für Charaktere.** Für die induzierten Darstellungen gilt:

$$\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W \quad (5.2.1)$$

$$\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W \quad (5.2.2)$$

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)} = \overline{\chi_V} \chi_W \quad (5.2.3)$$

$$\sum_{k \geq 0} \chi_{\text{Sym}^k V}(g) t^k = \exp \left( \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \chi_V(g^j) t^j \right) \quad (5.2.4)$$

$$\sum_{k \geq 0} \chi_{\wedge^k V}(g) t^k = \exp \left( \sum_{j \geq 1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \chi_V(g^j) t^j \right) \quad (5.2.5)$$

Man beweist das mit Potenzsummen, vollständigen und elementarsymmetrischen Polynomen in den Eigenwerten der darstellenden Matrizen.

**5.3. Komposition von Darstellungen.** Wirkt eine Gruppe  $G$  auf  $V$  und die Gruppe  $\text{GL}(V)$  auf  $W$ , so gilt für die induzierte Wirkung auf  $W$  (siehe [4, S. 448]):

$$\chi_{G, W} = \chi_{\text{GL}(V), W}[\chi_{G, V}]$$

**5.4. Ring der Darstellungen.** Durch Hinzufügen formaler additiver Inverser werden die Darstellungen einer festen Gruppe mit  $\oplus, \otimes$  ein Ring mit der trivialen Darstellung als 1. Die Abbildungen  $\chi_V(g) \mapsto \chi_V(g^k)$  sind Ringhomomorphismen und heißen auch Adams-Operationen.

**5.5. Irreduzible Darstellungen.** Es gibt genauso viele irreduzible Darstellungen wie Konjugationsklassen. Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen bilden eine Orthonormalbasis der Klassenfunktionen bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g)$$

Jede Darstellung von  $G$  zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen. [1, 2.13]

**5.6. Darstellungen, die Namen haben und Konstruktionen.**

- Die **triviale** Darstellung: Eindimensional, irreduzibel, jedes Gruppenelement wirkt wie die Identität.  $V^G$  ist isomorph zu einer direkten Summe trivialer Darstellungen.
- Die **reguläre** Darstellung ist  $\mathbb{C}[G]$  mit Linksmultiplikation. Jede irreduzible Darstellung taucht in der Zerlegung der regulären mit einer Vielfachheit auf, die gleich ihrer Dimension ist.
- Wirkt  $H$  auf  $W$  und  $G$  auf  $V$ , so wirkt  $H \times G$  auf  $W \otimes V$ . Diese Konstruktion heißt äußeres Tensorprodukt und wird  $W \boxtimes V$  geschrieben.
- Sei  $H \leq G$  eine Untergruppe,  $W$  eine Darstellung von  $H$ . Die **induzierte** Darstellung von  $G$  ist

$$\text{Ind}_H^G W = \bigoplus_{\gamma \in G/H} \gamma \cdot W \quad (5.6.1)$$

und ist adjungiert zur Einschränkung der Darstellung bezüglich  $\text{Hom}_G, \text{Hom}_H$ , sowie des Skalarprodukts von Klassenfunktionen im Sinne von [1, 3.20]:

$$\langle \chi_{\text{Ind}_H^G W}, \chi_V \rangle = \langle \chi_W, \chi_{\text{Res}_H^G V} \rangle \quad (5.6.2)$$

**5.7. Invarianten.** Der Mittelungs-Operator

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

projiziert  $V$  auf  $V^G$ , den Teil der unter  $G$ -Wirkung invariant bleibt. Das entspricht dem Summand, der von der trivialen (irreduziblen) Darstellung kommt.

## 6 Irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{S}_d$

**6.1. Young-Symmetrisierer.** Die Projektion auf die irreduzible Darstellung, die einer (beliebig numerierten) Partition  $\lambda$  zugeordnet wird, lautet:  $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$  wobei  $a_\lambda = \sum \sigma$  und  $b_\lambda = \sum \text{sgn}(\sigma) \sigma$ . Die erste Summe durchläuft die Permutationen, die die Reihen, die zweite die, die die Spalten auf sich abbilden. Wenn man die Reihenfolge von  $a_\lambda$  und  $b_\lambda$  vertauscht, so erhält man für jeden Summanden sein Inverses (Antipode).

**6.2. Frobenius Abbildung.** [4, S. 351] Bilde Klassenfunktionen auf symmetrische Polynome ab durch:

$$\begin{aligned} \text{ch} : \bigoplus \text{CF}(\mathfrak{S}_n) &\longrightarrow \Lambda \\ \text{ch} f &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma) \mathbf{p}_{\lambda(\sigma)} = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}} f(\lambda) \mathbf{p}_{\lambda} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear und bezüglich der Skalarprodukte eine Isometrie. Für Darstellungen  $V, W$  von  $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m$  definiert  $(V, W) \mapsto \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V \boxtimes W)$  eine Multiplikation auf  $\bigoplus \text{CF}(\mathfrak{S}_n)$ , bezüglich der  $\text{ch}$  ein Isomorphismus von Ringen wird.

**6.3. Frobenius Formel.** Bezeichnen  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$  und  $\mathbf{i}$  Partitionen, wobei  $\mathbf{i}$  durch Multiplizitäten gegeben ist. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 1.1:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{i}} = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}(\mathbf{C}_{\mathbf{i}}) \mathbf{s}_{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \chi_{\lambda}(\mathbf{C}_{\mathbf{i}}) = \left[ x^{\lambda+\delta} \right] \Delta(x) \mathbf{p}_{\mathbf{i}}(x)$$

**6.4. Hakenlängenformel.** Für die irreduzible Darstellung zur Partition  $\lambda$  gilt:

$$\dim V_{\lambda} = \frac{d!}{\prod (\text{Längen der Haken})}$$

**6.5. Standard-Darstellung.**  $\mathbb{C}^d = 1 + V_{(d-1,1)}$ , direkte Summe aus trivialer Darstellung und sog. Standarddarstellung. Die äußere Potenz  $\Lambda^k V_{(d-1,1)} = V_{(d-k,1,1,\dots)}$  ergibt die Darstellung, die zu einem Haken gehört. [1, 4.6]  
Siehe auch [3].

**6.6. Regel von Young.** Seien  $U_{\lambda} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d] a_{\lambda}$ ,  $V_{\lambda} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d] c_{\lambda}$ . Dann ist  $V_{\lambda}$  irreduzibel und (vergleiche mit 3.4):

$$U_{\lambda} = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} V_{\mu}$$

## 7 Schur-Funktoren

**7.1. Definition.** Auf  $V^{\otimes d}$  wirkt  $\mathfrak{S}_d$  durch Vertauschung der Faktoren. Dann ist der Schurfunktor definiert durch  $\mathbb{S}^{\lambda} V := c_{\lambda}(V^{\otimes d})$ . Insbesondere also:  $\mathbb{S}^{(1^d)} = \Lambda^d$  und  $\mathbb{S}^{(d)} = \text{Sym}^d$ . Man hat:

$$V^{\otimes d} = \bigoplus (\mathbb{S}^{\lambda} V)^{\oplus \dim V_{\lambda}}$$

**7.2. Link zu symmetrischen Funktionen.** Sei  $G$  Gruppe, die auf  $V$  wirkt. Dann ist  $\chi_{\mathbb{S}^\lambda V}$  das Schurpolynom  $s_\lambda$  in den Eigenwerten der korrespondierenden Matrix. Insbesondere hat man die Formeln:

$$\dim \mathbb{S}^\lambda V = s_\lambda(1, 1, \dots) = \prod_{1 \leq i < j \leq \dim V} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \quad (7.2.1)$$

$$\mathbb{S}^\lambda V \otimes \mathbb{S}^\mu V = \bigoplus_{\nu} N_{\lambda\mu}^{\nu} \mathbb{S}^{\nu} V \quad (7.2.2)$$

**7.3. Weitere Analogien.** Die Funktoren

$$\begin{aligned} V &\longmapsto a_\lambda(V^{\otimes d}) = \text{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \text{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \dots \\ V &\longmapsto b_{\lambda'}(V^{\otimes d}) = \Lambda^{\lambda_1} V \otimes \Lambda^{\lambda_2} V \otimes \dots \end{aligned}$$

verhalten sich wie die vollständigen und elementarsymmetrischen Polynome:

$$\Lambda^{\lambda_1} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_r} V = \bigoplus K_{\mu\lambda} \mathbb{S}^{\mu'} V \quad (7.3.1)$$

und die analogen Identitäten gelten auch.

**7.4. Plethysmen.** Es gilt (?): Die Charaktere von  $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{S}^\mu V)$  sind als symmetrische Funktionen in den Eigenwerten gleich  $\mathbf{s}_\lambda[\mathbf{s}_\mu]$ .

**7.5. Andere Rechenregeln.** Siehe [1, S. 79ff]. Für das äußere Produkt von Darstellungen hat man:

$$\mathbb{S}^\nu(V \oplus W) = \bigoplus N_{\lambda\mu}^{\nu} \left( \mathbb{S}^\lambda V \boxtimes \mathbb{S}^\mu W \right) \quad (7.5.1)$$

$$\mathbb{S}^\nu(V \boxtimes W) = \bigoplus C_{\lambda\mu\nu} \left( \mathbb{S}^\lambda V \boxtimes \mathbb{S}^\mu W \right) \quad (7.5.2)$$

$$\text{Sym}^d(V \boxtimes W) = \bigoplus_{\lambda \vdash d} \mathbb{S}^\lambda V \boxtimes \mathbb{S}^\lambda W \quad (7.5.3)$$

## Literatur

- [1] FULTON, W., AND HARRIS, J. *Representation Theory*. GTM 129. Springer, 1991.
- [2] MACDONALD, I. G. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Clarendon Press, Oxford, 1979.



- [3] MARIN, I. Hooks generate the representation ring of the symmetric group.
- [4] STANLEY, R. P. *Enumerative combinatorics. Volume 2*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge university press, Cambridge, New York, 1999. Errata et addenda : p. 583-585.