Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Schuljahr 2013/2014
Jahrgangsstufen 6/7/8
Christian Nolde 10.02.2014

Themen: Fortsetzung Binärsystem und faires Teilen

1 Ein Rätsel zum Binärsystem

Das Gift
Ein böser König hat tausend (1000) Flaschen Wein. Eine benachbarte Fürstin plant, den schlechten Herrscher zu beseitigen, und schickt einen Lakaien um den Wein zu vergiften. Leider fassen des Königs Wachen den Lakaien, der lediglich Gelegenheit hatte nur eine Flasche des Weins zu vergiften. Die Wachen wissen zwar nicht welche Flasche vergiftet ist, aber sie haben herausbekommen, dass das Gift selbst millionenfach verdünnt noch tödlich wirken wird. Außerdem tritt der Tod erst einen Monat nach Genuss des Giftes ein. Der König beschließt, einige seiner Gefangenen in seinen weitläufigen Kerkern den Wein kosten zu lassen. Anstatt nun pro Flasche einen Gefangenen (und damit insgesamt 1000 Gefangene) einzusetzen, weiß der König, dass er mit 10 Gefangenen auskommen kann, um die vergiftete Flasche zu finden und den Rest des Weins in 5 Wochen genießen zu können. Wie stellt er das an?

Zunächst nummeriert man alle Flaschen im Weinkeller im Binärsystem (mit 0 startend):

Nummer im Dezimalsystem:	0	1	2	3	$\cdots$	999

Nummer im Binärsystem:	0	1	10	11	$\cdots$	$\underbrace{1111100111}_{\text{10 Stellen}}$

Da $2^{10} = 1024$, wir aber nur 1000 Flaschen nummerieren müssen, kommen wir also mit maximal 10-stelligen Binärzahlen aus.

Jetzt benötigen wir 10 nummerierte Gläser:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

In Glas Nummer 1 kommt nun von jeder Flasche ein Tropfen, die an erster Stelle (von rechts aus gesehen) eine 1 hat. Also z.B. aus den Flaschen: 1, 11, 101, 10011, ...
In Glas Nummer 2 kommt ein Tropfen aus jeder Flasche die an zweiter Stelle eine 1 hat und so weiter für alle Flaschen.
Nummern die weniger als 10 Stellen besitzen füllt man mit führenden Nullen auf. Zum Beispiel wird aus Nummer 11 (also im Dezimalsystem Nummer 3) mit führenden Nullen die Nummer 0000000011.

Nun nummeriert man auch die 10 Gefangenen und lässt sie jeweils das Glas mit der entsprechenden Nummer trinken. Also Gefangener 1 trinkt Glas 1, Gefangener 2 trinkt Glas 2, usw.

Nach 4 Wochen überprüft man nun welche Gefangenen gestorben sind. Da in ihren Gläsern das Gift war, muss die Nummer der Flasche mit dem Gift also an den jeweiligen Stellen eine 1 haben. Genauso für die noch lebenden Gefangenen. Da in deren Gläser kein Gift war, kann die Nummer der Flasche mit dem Gift an diesen Stellen **keine** 1 haben. Im Binärsystem bleibt dann aber nur noch die 0 übrig. Dadurch ist die Nummer der vergifteten Flasche eindeutig bestimmt.

Sterben z.B. die Gefangenen Nummer 1,4,5 und 9 dann ist Flasche Nummer 100011001 vergiftet.

Frage: Wenn kein Gefangener stirbt, welche Flasche war dann vergiftet?

2 Das Problem des fairen und neidfreien Teilens

Jeder der Geschwister hat kennt das Problem, wenn man Dinge untereinander "gerecht" aufteilen soll. Jeder erachtet etwas anderes als "gerecht" und wenn jemand einen seiner Meinung nach "größeren" bzw. "besseren" Teil bekommt, ist der Neid und damit der Ärger groß.

In der Spieltheorie versucht man für dieses Problem (und sehr vielen anderen) Verfahren zu finden, die ein faires und neidfreies Teilen ermöglichen. Dazu muss man aber zunächst, wie in der Mathematik üblich, die Begriffe die man verwendet eindeutig erklären (In der Mathematik verwendet man dafür den Ausdruck Definition, was nichts anderes bedeutet als "Begriffserklärung").

Ein Verfahren ist **proportional fair**, wenn bei N Teilnehmern jeder der Meinung ist mindestens einen Anteil von $\frac{1}{N}$ bekommen zu haben.

Ein Verfahren ist **neidfrei**, wenn kein Teilnehmer der Meinung ist, dass ein Anderer mehr bekommen hat als er selbst.

Ein großes Problem beim Teilen ist, dass nicht jeder die aufzuteilenden Dinge gleich bewertet. Angenommen Albert, Birgit und Christian haben 6 Gummibären, drei rote zwei grüne und ein oranges, und sollen diese fair aufteilen.
So ist die naheliegende Lösung, dass jeder zwei Gummibären bekommt. Also zum Beispiel:

Albert	Birgit	Christian
rot, rot	grün, rot	grün, orange

Nehmen wir nun an, Birgit steht total auf rote Gummibären. So sehr, dass für sie nur rote Gummibären zählen. Dann schaut ihre Bewertung der Verteilung folgendermaßen aus:

Es gibt 3 rote Gummibären und 3 Teilnehmer. Also erwartet sie einen Anteil von $\frac{3}{3} = 1$ roten Gummibären. Da sie ein rotes Gummibärchen bekommen hat, ist die Verteilung also für sie proportional fair. Da Albert aber zwei rote Gummibärchen bekommen hat, ist sie auf ihn neidisch. Die Verteilung ist also nicht neidfrei.

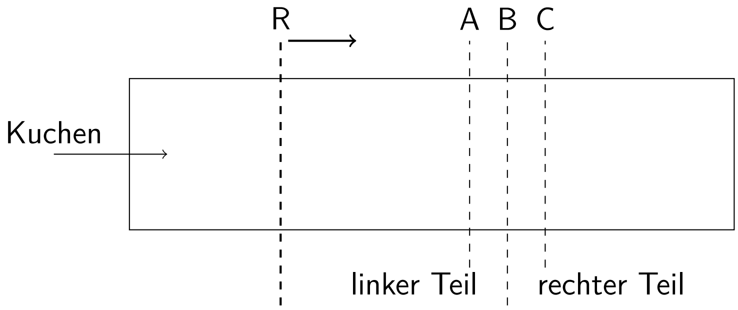
Ein Verfahren zu erstellen, welches garantiert neidfreie Verteilungen erzeugt ist im Allgemeinen auch wesentlich komplizierter als Verfahren zu finden, die "nur" proportional fair sind. Und je mehr Teilnehmer man hat, umso schwerer wird es.
Wenn man nur 2 Teilnehmer hat, kann man zeigen, dass in diesem Fall neidfrei und proportional fair gleichbedeutend sind. Findet ihr eine Begründung dafür? Und warum ist ein neidfreies Verfahren immer proportional fair?

2.1 Beispiele

2.1.1 Kuchen teilen bei 3 Teilnehmern

Die meisten kennen wohl das Verfahren, wenn man einen Kuchen auf **zwei** Personen verteilen will. Einer schneidet, der Andere sucht sich ein Stück aus. Dieses Verfahren ist proportional fair / neidfrei (Warum?).

Bei **drei** Teilnehmern kann man, um etwas neidfrei zu verteilen, folgendes Verfahren anwenden:



Ein Schiedsrichter **R** und jeder der drei Teilnehmer **A**, **B** und **C** bekommen ein Messer.

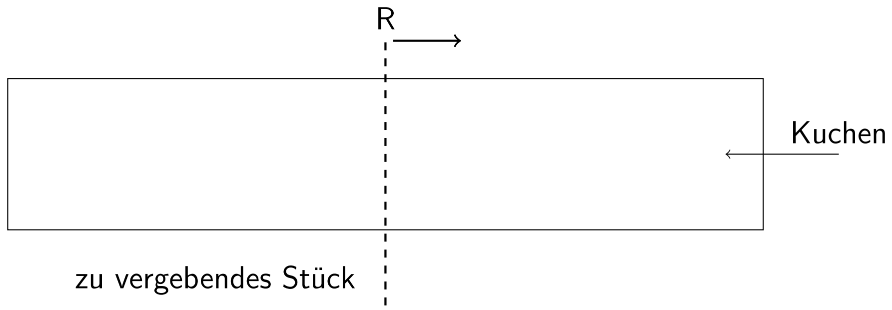
Der Schiedsrichter bewegt sein Messer vom linken Ende des Kuchens in Richtung des rechten. Die Teilnehmer **A**, **B** und **C** sollen dabei mit ihren Messern jeweils den Bereich zwischen dem Messer des Schiedsrichters und dem rechten Rand markieren, der ihrer Meinung nach der Mitte entspricht.
Sobald einer der Teilnehmer der Meinung ist, dass das Stück vom linken Rand bis zum Messer des Schiedsrichters für ihn ein fairer Anteil ist, ruft er "Stopp". Der Schiedsrichter schneidet an dieser Stelle und der Teilnehmer der gerufen hat, bekommt das Stück. Zusätzlich wird der verbleibende Teil an der Stelle des mittleren der drei Messer von **A**, **B** und **C** durchgeschnitten (in der Skizze **B**). Nun entfernt man gedanklich die Linie (Messer) des Teilnehmers der gestoppt hat. Der linke Teil geht dann an den Spieler der von den verbleibenden zwei Linien am weitesten links war und der rechte Teil an den Anderen, beziehungsweise den der am weitesten rechts war.

Angenommen in unserer Skizze ruft C Stopp. Dann bekommt C den Teil vom linken Rand bis zu **R**. Da **B** die mittlere Linie ist, wird der verbliebene Rest dort durchgeschnitten. Nun erhält **A** davon den linken Teil und **B** den rechten Teil.

Warum ist dieses Verfahren proportional fair / neidfrei?

2.1.2 Kuchen teilen bei beliebig vielen Teilnehmern

In dieser Variante ist es prinzipiell egal, unter wie vielen Teilnehmern der Kuchen aufgeteilt werden soll.
Es gibt wieder einen Schiedsrichter **R** der mit seinem Messer langsam vom linken Rand in Richtung des rechten Randes fährt.



Sobald ein Teilnehmer der Meinung ist, dass der Teil vom linken Rand des Kuchens bis zur Stelle an der das Messer ist einem fairen Anteil entspricht, ruft er "Stopp" und bekommt dieses Stück. Dieses Verfahren wird nun so lange fortgesetzt bis jeder ein Stück hat.

Warum ist dieses Verfahren zwar proportional fair aber nicht neidfrei?

2.1.3 Ein Erbe verteilen

Nun wollen wir ein Erbe bestehend aus ■, ▲, ♣ und ★ (jeder stellt sich darunter jetzt am besten Gegenstände vor, die er sich wünschen würde) unter den vier Erben A, B, C und D verteilen.
Für das Verfahren an sich, ist die Anzahl der Erbstücke und Erben egal.

Als ersten Schritt muss jeder Erbe die einzelnen Erbstücke bewerten, also angeben was dieses Erbstück ihm an Geld wert wäre. Das ganze sollte geheim stattfinden, um taktisches Verhalten zu verhindern. In unserem Beispiel ist das Erbstück ■ Erbe A 150 Euro wert, Erbe B aber nur 10. Diese Bewertungen trägt man nun in eine Tabelle ein.

	■	▲	♣	★	Gesamt	Anteil erwartet
A	150	30	150	70	400	100
B	10	200	90	100	400	100
C	200	0	0	200	400	100
D	180	100	140	180	600	150

- Die Spalte *Gesamt* beinhaltet den Wert des gesamten Erbes, wie es die jeweiligen Erben einschätzen (also die Summe aus allen Spalten davor).
- *Anteil erwartet* ist der Wert aus *Gesamt* geteilt durch die Anzahl der Erben. Also der faire Anteil den der jeweilige Erbe erwartet.

Nun werden die Erbstücke verteilt. Es bekommt immer der Erbe einen Gegenstand , für den er am meisten Wert ist. Sollte ein Erbstück für mehrere Erben gleich viel wert sein, so kann man es einem beliebigen zuteilen (keine Angst, die Anderen gehen nicht leer aus)

	■	▲	♣	★	Gesamt	Anteil erwartet	Anteil bekommen	Differenz
A	150	30	150	70	400	100	150	$+50$
B	10	200	90	100	400	100	200	$+100$
C	200	0	0	200	400	100	400	$+300$
D	180	100	140	180	600	150	0	-150

- In die Spalte *Anteil bekommen* trägt man nun die Summe der Werte der Erbstücke ein die ein Erbe bekommen hat.
  In unserem Beispiel hat Erbe C die Erbstücke ■ und ★ bekommen die für ihn jeweils einen Wert von 200 haben. Also hat er in seinen Augen einen Anteil im Wert von 400 vom gesamten Erbe bekommen.
- Die Spalte *Differenz* ist die Differenz zwischen *Anteil bekommen* und *Anteil erwartet*. Ist dieser Wert positiv, so muss der Erbe diesen Betrag in Euro zahlen. Ist er negativ, so bekommt er den Betrag in Euro. Das Geld das dabei übrig bleibt wird zu gleichen teilen auf die Erben aufgeteilt (hoffentlich hat Geld für alle den gleichen Wert).

Dieses Verfahren geht immer auf. Es ist nicht möglich, dass am Ende mehr Geld an Erben gezahlt werden muss, als andere Erben einzahlen. Auch stellt dieses Verfahren sicher, dass jeder genau den, seiner Meinung nach, fairen Anteil bekommt. Es ist also proportional fair. Doch ist es auch neidfrei? Dazu müssen wir untersuchen, wie die einzelnen Erben das Erbe der Anderen bewerten.

Zum Beispiel ergibt sich die erste Zeile wie folgt:
A hat seiner Meinung nach ein Erbe im Wert von 100 bekommen.
B hat ▲ bekommen, was aber für A nur einen Wert von 30 besitzt und musste zusätzlich noch 100 zahlen. Das ergibt für den Anteil von B, in den Augen von A, einen Wert von $30 - 100 = -70$.
C hat nach der Meinung von A Gegenstände im Wert von 220 bekommen und musste 300 zahlen. Macht zusammen einen Wert von -80. D hat nur die 150 Euro bekommen.

	A	B	C	D
A	100	−70	−80	150
B	40	100	−190	150
C	−50	−100	100	150
D	90	0	60	150

Sowohl A, als auch B und C bewerten also den Anteil von D höher als ihren eigenen. Es gibt also Neid.

Bemerkung: Bei diesem Verfahren muss es nicht zu Neid kommen, aber es kann.
(Wie habe ich die Zahlen gewählt, damit es zu Neid kam?)