Memo: Eigenschaften symmetrischer Funktionen

Simon Kapfer

4. März 2014

Zusammenfassung

Was im Stanley [Sta99] dazu steht.

1 Definitionen

Wir arbeiten über $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dabei ist n beliebig, aber groß. Es sollen λ, ν, μ Partitionen oder auch Multi-Indizes sein. Die Darstellungen werden munter gemixt. Permutationen werden mit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ bezeichnet.

1.1. ***Sonstige Bezeichnungen.***

$$\begin{aligned}
\delta &:= (n-1, n-2, \dots, 0)\\
z_\lambda &:= \prod i^{\lambda_i} \lambda_i!\\
K_{\lambda\mu} &\quad \text{Kostka-Zahlen}
\end{aligned}$$

1.2. ***Monomial symmetrische Funktionen.*** Werden als einzige über $\mathbf{m}_\lambda = (x^\lambda)^{\mathrm{Sym}}$ definiert. Die anderen alle über Produkte.

1.3. ***Schur-Funktionen und Determinanten.*** .

$$a_\lambda := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma \sigma(x^\lambda) = \det\left(x_i^{\lambda_j}\right) \quad \text{(antisymmetrisch)}$$

$$\mathbf{s}_\lambda := \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \quad \text{(symmetrisch)}$$

Insbesondere ist a_δ die Vandermonde-Determinante.

1.4. ***Erzeugende Funktionen.***

$$\sum_k \mathbf{e}_k t^k = \prod_i (1 + x_i t)$$

$$\sum_k \mathbf{h}_k t^k = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \exp\left(\sum_k \tfrac{1}{k} \mathbf{p}_k t^k\right)$$

2 Skalarprodukt und Involution

2.1. ***Skalarprodukt.*** Das Skalarprodukt wird so definiert, daß gilt:

$$\langle \mathbf{m}_\lambda, \mathbf{h}_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} = \langle \mathbf{s}_\lambda, \mathbf{s}_\mu \rangle$$
$$\langle \mathbf{p}_\lambda, \mathbf{p}_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$$

2.2. ***Adjungierte Multiplikationsperatoren.*** (7.15.2, und [Mac79], S. 44.)

$$\langle \mathbf{s}_\nu f, \mathbf{s}_\lambda \rangle = \langle f, \mathbf{s}_{\lambda/\nu} \rangle$$

Bezeichne mit $D(\_)$ den adjungierten Operator zur Multiplikation. Dann:

$$D(\mathbf{p}_n) \;=\; \sum_{r\geq 0} \mathbf{h}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}_{n+r}} \;=\; (-1)^{n-1} \sum_{r\geq 0} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{n+r}} \;=\; n \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_n}$$

2.3. ***Involution.*** Definiere eine Involution ω durch

$$\omega\, \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{h}_\lambda.$$

Dann hat ω folgende Eigenschaften:

$$\omega^2 = \mathrm{id}$$
$$\langle \omega f, \omega g \rangle = \langle f, g \rangle$$
$$\omega\, \mathbf{p}_\lambda = \deg(\lambda) \mathbf{p}_\lambda \qquad (7.7.5)$$
$$\omega\, \mathbf{s}_{\lambda/\nu} = \mathbf{s}_{\lambda'/\nu'} \qquad (7.15.6)$$

2.4. ***Duale Basen.*** $\{\mathbf{u}_\lambda\}$, $\{\mathbf{v}_\lambda\}$ seien zwei duale Basen für symmetrische Funktionen, d. h. $\langle \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v}_\nu \rangle = \delta_{\lambda\nu}$. Dann gilt:

$$\sum_\lambda \mathbf{u}_\lambda(x) \mathbf{v}_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$
$$\sum_\lambda \mathbf{u}_\lambda(x)\, \omega_y \mathbf{v}_\lambda(y) = \prod_{i,j} 1 + x_i y_j$$

3 Beziehungen zwischen den Basen

3.1. ***Darstellung durch*** $\mathbf{m}_\lambda$**.** Siehe 7.4.1, 7.5.1., 7.7.1.

3.2. ***Durch Potenzsummen.*** Siehe 7.7.6.

3.3. ***Durch Schur.*** (7.12.4, 7.15.3, 7.17.3)

$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{h}_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda/\nu\,\mu}\, \mathbf{s}_\lambda$$
$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{e}_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\nu'\,\mu}\, \mathbf{s}_\lambda$$
$$\mathbf{s}_\nu \mathbf{p}_\mu = \sum_\lambda \chi^{\lambda/\nu}(\mu)\, \mathbf{s}_\lambda$$

Die letzte Gleichung heißt Murnagham-Nakayama Regel. χ wird in 7.17.3 definiert. Dort auch Border-Strip-Tableaus.

3.4. ***Durch Matrizen.*** Siehe [Mac79] S. 56.

3.5. ***Jacobi-Trudy.*** (Stanley 7.16.1)

$$\mathbf{s}_{\lambda/\mu} = \det\left(\mathbf{h}_{\lambda_i - \mu_j + i - j}\right)$$

Literatur

[Mac79] Ian G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Clarendon Press, Oxford, 1979.

[Sta99] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 2.* Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge university press, Cambridge, New York, 1999. Errata et addenda : p. 583-585.