Ein Satz über Teilbarkeit

Simon Kapfer

11. April 2014

Gegeben eine beliebige natürliche Zahl, deren letzte Ziffer gleich 1 ist, etwa 5821. Definiere die Folge $(c_n)_n$ über die erzeugende Funktion

$$\sum_{n\geq 0} c_n x^n \;=\; \frac{1}{1-x}\left(\frac{5821}{1+20x+800x^2+5000x^3}-1\right)$$

Dann gilt: c_n ist durch 10^{n+1} teilbar.

Wie die Aussage für andere Zahlen als 5821 lauten muß, sollte klar sein.
Statt dem Dezimalsystem kann man auch ein beliebiges anderes nehmen, wenn man 10^{n+1} durch das Entsprechende ersetzt.

Beweis: (Peter Uebele sei Dank)

$$\begin{aligned}
\sum c_n x^n &= \frac{1}{1-x}\left(\frac{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i + 1}{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i x^i + 1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-x}\,\frac{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i - \sum_{i\geq 1}^N a_i d^i x^i}{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i x^i + 1} \\
&= \frac{1}{1-x}\,\frac{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i \left(1-x^i\right)}{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i x^i + 1} \\
&= \frac{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i \left(x^{i-1}+x^{i-2}+\ldots+1\right)}{\sum_{i\geq 1}^N a_i d^i x^i + 1} \\
&= \sum_{i\geq 1}^N a_i d^i \left(x^{i-1}+x^{i-2}+\ldots+1\right)\cdot \sum_{m\geq 0}\left(-\sum_{i=1}^N a_i d^i x^i\right)^m
\end{aligned}$$