Potenzen von Fibonaccizahlen

Simon Kapfer

6. Januar 2014

Die Fibonaccizahlen f_n definiert durch $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ f_1 = 1,\ f_0 = 0$. Die Lucaszahlen l_n sind so definiert, daß $l_{n+2} = l_{n+1} + l_n,\ l_1 = 1,\ l_0 = 2$. Definiere die überspringenden Fibonaccireihen ohne konstanten Term:

$$F_{(k)}(x) := \frac{f_k}{1 - l_k x - x^2} = \sum_{n \geq 0} f_{k(n+1)} x^n \tag{1}$$

und die modifizierten überspringenden Lucasreihen:

$$\tilde{L}_{(k)}(x) := \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & k = 0 \\ \\ \frac{l_k - 2x}{1 - l_k x + x^2}, & k > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Bemerkung: Es gilt für $k \geq 1$:

$$\tilde{L}_{(2k)}(x) = \sum_{n \geq 0} l_{k(n+1)} x^n$$

Definiere die erzeugenden Funktionen der Potenzen der Fibonaccizahlen:

$$F^p(x) := \sum_{n \geq 0} f_{n+1}^p x^n$$

Satz 1. Es gilt für gerade Fibonacci–Potenzen:

$$F^{2p}(x) = \frac{1}{5^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{p-k} \tilde{L}_{(2k)}((-1)^{p-k} x) \tag{3}$$

und für ungerade Fibonacci–Potenzen:

$$F^{2p+1}(x) = \frac{1}{5^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{p-k} F_{(2k+1)}((-1)^{p-k} x) \tag{4}$$