Divisibilität durch 2^n unter affinen Abbildungen

Simon Kapfer

9. April 2014

Betrachte die Mengen $B_0, B_1, B_2, \ldots$, gegeben durch

$$B_n := \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \equiv 2^n \bmod 2^{n+1} \right\}, \quad n \geq 0$$

Da B_n nichts anderes ist als die Teilmenge der ganzen Zahlen, deren Binärdarstellung auf genau n Nullen endet, zerfällt die Menge $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ offensichtlich in die disjunkte Vereinigung dieser B_n. Da $2^n \in B_n$, ist $\frac{1}{1-2x} = \sum 2^n x^n$ eine erzeugende Funktion einer Folge von Elementen dieser Mengen B_n.
Betrachte die affine, injektive Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \;\; x \mapsto ax + 1, \quad \text{für ein ungerades, positives } a.$$

Nun suchen wir eine Folge (r_n) mit $f(r_n) \in B_n$.
Vermutung: Sei $a = 1 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \ldots$ die Binärdarstellung von a. Dann ist eine mögliche Folge (r_n) durch folgende erzeugende Funktion gegeben:

$$\sum r_n x^n \;=\; \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)(1 + 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + \ldots)}$$