

# Memo: Interessante Sachen

Simon Kapfer

22. Juni 2014

## Zusammenfassung

Merkzettel zu diversen Sachen und Mottos, die nicht in einen anderen Kontext eingebettet sind.

## 1 Kohomologisches

**1.1. Gruppenkohomologie** einer Gruppe  $G$  soll die (singuläre) Kohomologie eines Raumes sein, dessen Fundamentalgruppe gleich  $G$  ist und dessen andere Homotopiegruppen trivial sind. Den Raum kann man konstruieren: er heißt 'Eilenberg–MacLane Raum'.

**1.2. Tensorprodukt über Gruppenringen**  $M, N$  seien Links- $G$ -Moduln.  $M \otimes_G N$  ist so definiert, daß  $mg \otimes gn = m \otimes n$ . Dann ist  $M \otimes_G N \cong (M \otimes N)_G$ .

**1.3. Welche Kohomologieklassen können als Chernklassen realisiert werden?**

Für  $X$  eine projektive Kurve kann jede Klasse aus  $H^2(X, \mathbb{Z})$  als erste Chernklasse eines Vektorbündels geschrieben werden.

Für  $X$  eine komplexe Fläche geht das auch für beliebiges  $c_1 \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$  und  $c_2 \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  (Satz von Schwarzenberger).

**1.4. Äquivariante Kohomologie** Wenn eine kompakte Liegruppe  $G$  auf einem Raum  $X$  wirkt, so wird die Äquivariante Kohomologie  $H_G^*(X; \mathbb{R}) := H^*\left(\frac{X \times EG}{G}; \mathbb{R}\right)$  über den folgenden (Totalkomplex des Doppel-)Komplex berechnet:

$$\Omega_G^i(X) = \bigoplus \left( S^j(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^{i-2j}(X) \right)^G$$

**1.5. Charakteristische Klassen** Insbesondere hat man für  $X = \{\text{pt}\}$  und  $G = U(n)$

$$H_G^*(X) = H^*(BG) = S^*(\mathfrak{g}^*)^G = \mathbb{R}[c_1, \dots, c_n], \quad \det(\lambda - A) = \sum_i (-1)^i c_i(A) \lambda^{n-i}$$

wobei die  $c_i$  die Chernklassen sind. Für  $G = O(n)$  erhält man Pontrjagin-Klassen. Für  $V$  ein Vektorbündel über einem beliebigen  $X$  hat man durch Wahl von lokalen Rahmen die Struktur eines  $G$ -Hauptfaserbündels und damit eine Abbildung  $X \rightarrow BG$ . Die charakteristischen Klassen des Bündels ergeben sich dann durch Rückzug von  $BG$ .

**1.6. Riemann–Roch** Der Cherncharakter ist eine natürliche Transformation zwischen dem Grothendieckschen  $K$ -Funktorkomplex und dem Chowring-Funktorkomplex (über  $\mathbb{C}$ : rationale Kohomologie), der Pullbacks respektiert. Pushforwards entlang eigentlicher Morphismen werden respektiert, wenn man mit der Todd-Klasse multipliziert und  $\text{ch}(\alpha)\text{td}(\mathcal{T}_X)$  benutzt.

**1.7. Picardgruppe** einer glatten Varietät sind die Isomorphismenklassen von Geradenbündeln mit Tensorprodukt als Gruppenoperation. Äquivalent Cartier-divisoren modulo lineare Äquivalenz. Äquivalent  $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ .

**1.8. Residuum**  $V \subset M$  sei die Verschwindungsmenge einer Funktion  $f$  auf der komplex  $n$ -dimensionalen Mnf.  $M$ . Das Residuum von  $f$  lebt dann in  $H^n(M \setminus V, \mathbb{C})$ . Wie ist es definiert?

## 2 Algebraisches

**2.1. Lieableitung und Intuition.** Seien  $f(x)$ ,  $g(x)$  parameterabhängige, lineare Operatoren (z. B. einfach Multiplikation mit Zahlen:  $f(x) \in \mathbb{R}$ ). Differentialoperatoren wie  $\frac{d}{dx}$  fallen auch in diese Kategorie. Es gilt

$$\frac{d}{dx}fg = \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)g + f\frac{d}{dx}g$$

Daher macht es Sinn, den abgeleiteten Operator  $f' := \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)$  zu definieren als:

$$f' = \frac{d}{dx}f - f\frac{d}{dx} = \left[\frac{d}{dx}, f\right]$$

Hier also eine Möglichkeit, die Lieklammer zu verstehen. Die Jacobi-Identität wird dann zu einem Spezialfall der Leibnizregel:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Die blauen Klammern stehen jeweils für Ableitung nach  $x$ , die schwarzen Klammern sind einfach nur eine Bilinearform, die hier zufällig gleich der Lieklammer ist.

**2.2. Über  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .** Erzeuger:  $H, X, Y$  mit  $[X, Y] = H$ ,  $[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = -2Y$ . Vorstellung:  $H, X, Y$  haben Grad 0, 2, -2 und  $H$  zählt den Grad. Jede irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  sieht aus wie  $V_{-n} \oplus \dots \oplus V_n$  mit  $V_k \cong \mathbb{C}$  Eigenraum von  $H$  zum Eigenwert  $k$ . Ein Modell dafür ist  $\text{Sym}^n \mathbb{C}^2$  mit Koordinaten  $x$  vom Grad 1 und  $y$  vom Grad -1.

**2.3.** Es gibt keinen Körper, der als  $\mathbb{Z}$ -Modul frei ist.

**2.4. Klassifikation von indefiniten unimodularen Gittern** [Mil73] Wenn es einen Gitterpunkt  $x$  gibt, so daß  $\langle x, x \rangle$  ungerade ist, so heißt das Gitter ungerade und ist isomorph zu  $(1) \oplus (-1)^n$ , ansonsten heißt das Gitter gerade und ist isomorph zu  $E_8(\pm 1)^m \oplus U^n$ . In jedem indefiniten Gitter gibt es einen Vektor  $x \neq 0$  mit  $\langle x, x \rangle = 0$ .

### 3 Exakte Sequenzen

**3.1. Eulersequenz** Auf  $\mathbb{P}^n$  hat man

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \\ 0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**3.2. Exponentialsequenz** Auf komplexen Räumen liefert die exp-Funktion

$$0 \rightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

Dazu die lange exakte Sequenz in Kohomologie:

$$\rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^\times) \rightarrow H^2(X, 2\pi i \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \rightarrow$$

$H^1(X, \mathcal{O}^\times)$  ist die Picardgruppe. Der erste Pfeil ist die erste Chernklasse. Deren Bild (oder der Kern des nächsten Pfeils) ist die Néron-Severi Gruppe.

**3.3. Koszul-Komplex** Angenommen, ein Ideal  $I \subset A$ , wird von einer regulären Sequenz  $(a_1, \dots, a_n)$  aufgespannt (d. h.  $a_i$  ist kein Nullteiler in  $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$ ) und  $d: A^n \rightarrow A$  schickt die kanonische Basis auf die Erzeuger, dann ist

$$0 \rightarrow \Lambda^n A^n \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 A^n \rightarrow A \rightarrow 0$$

eine Auflösung von  $A/I$ , die (außer bei  $A$ ) exakt ist.

## Literatur

- [Mil73] John W. Milnor. *Symmetric bilinear forms*. Number Bd. 73 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1973.