

# Sätze mit Fibonaccizahlen, dem goldenen Schnitt und der Zahl 5

4. Juli 2014

## Zusammenfassung

Eine Sammlung hübscher und teilweise überraschender Ergebnisse, worin Fibonaccizahlen, der goldene Schnitt oder die Zahl 5 eine besondere Rolle spielen. Keine Beweise.

## 1 Fibonaccizahlen

*Definition 1.* Die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  der Fibonaccizahlen ist rekursiv gegeben durch:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Die Folge beginnt mit

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

*Satz 1.* Die gewöhnliche und die exponentiell erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen  $G_f$  resp.  $E_f$  sind:

$$G_f(x) := \sum_{n \geq 0} f_{n+1} x^n = \frac{1}{1 - x - x^2},$$
$$E_f(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} x\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} x\right)$$

*Satz 2.* Erzeugende Funktionen von Potenzen der Fibonaccizahlen:

$$\sum_{n \geq 0} f_{n+1}^2 x^n = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3-2x}{1-3x+x^2}$$
$$\sum_{n \geq 0} f_{n+1}^3 x^n = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1+x-x^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-4x-x^2}$$
$$\sum_{n \geq 0} f_{n+1}^4 x^n = \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{4}{25} \cdot \frac{3+2x}{1+3x+x^2} + \frac{1}{25} \cdot \frac{7-2x}{1-7x+x^2}$$
$$\sum_{n \geq 0} f_{n+1}^5 x^n = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-x-x^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+4x-x^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-11x-x^2}$$

Die einzelnen Summanden haben alle eine besondere Bedeutung. Welche? Wie lautet die erzeugende Funktion einer beliebigen Potenz von Fibonaccizahlen?

*Satz 3.* (Wallsche Vermutung)

$$f_5 = 5$$

Allgemeiner gibt es für jede positive Zahl  $k$  eine positive Zahl  $r$ , so daß gilt:

$$f_{r\mathbb{N}} \subset k\mathbb{N}$$

Bezeichnet man die kleinste solche Zahl mit  $r(k)$ , so gilt für Primzahlen  $p$  vermutlich

$$r(p^l) = p^{l-1}r(p)$$

Insbesondere ist  $f_{5^l}$  stets durch  $5^l$  teilbar.

*Satz 4.* Sei  $B_n$  eine  $n \times n$ -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Permanente von  $B_n$  gleich  $f_{n+1}$ .

*Satz 5.* (Danke an Andrei Okunkow.) Sei  $E$  ein Vektorbündel auf  $\mathbb{CP}^2$ , das in eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}(1)^{r+s} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

paßt. ( $M$  ist eine allgemeine Matrix aus Linearformen.) Dann ist  $E$  semistabil (d.h.  $\frac{\chi(U(n))}{\dim U} \leq \frac{\chi(E(n))}{\dim E}$  für Unterbündel  $U$  von  $E$  und große  $n$ ) genau dann, wenn

$$\frac{s}{r} \in \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \dots \right\} \cup \left\{ \alpha \mid \alpha > \frac{1}{\Phi} \right\}$$

## 2 Goldener Schnitt

*Definition 2.* Der goldene Schnitt  $\Phi$  ist definiert als  $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

*Satz 6.* Der goldene Schnitt erfüllt die Gleichungen

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \quad \Phi^{n+1} = f_{n+1}\Phi + f_n.$$

*Satz 7.* Sei  $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  diejenige differenzierbare und bijektive Funktion, deren erste Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist. Dann ist  $f$  gegeben durch:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{1}{\Phi}} x^{\Phi}.$$

*Satz 8.* Sei einem regelmäßigen Ikosaeder ein regelmäßiges Dodekaeder eingeschrieben (Seitenflächenmittelpunkte auf Ecken). Dann ist das Verhältnis der Kantenlängen beider Objekte gleich  $3 : \Phi$ .

*Satz 9.* Die dreidimensionale Rotation um  $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$  hat Spur  $\Phi$ . Die zweidimensionale Rotation um  $72^\circ$  hat Spur  $\frac{1}{\Phi}$ .

### 3 Die Zahl 5

*Definition 3.* Die Zahl 5 ist die Anzahl nichtähnlicher platonischer Körper.

*Satz 10.* (Pentagonalzahlensatz.) Die Pentagonalzahlen sind definiert durch  $p_n := \frac{3n^2 - n}{2}$  und berechnen die Anzahl der Steine, die benötigt werden, um  $n$  ineinander liegende regelmäßige Fünfecke zu legen, welche eine Ecke gemeinsam haben.

Die Partitionszahlen werden bezeichnet durch  $p(n)$  und zählen die Möglichkeiten, die Zahl  $n$  als Summe positiver ganzer Zahlen zu schreiben. Dann gilt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} = \sum_{n \geq 0} p(n) x^n \quad \text{und} \\ (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n x^{p_n}.$$

*Satz 11.* (Fünferschritte bei Partitionszahlen.)

$$\frac{5 \left( (1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\dots \right)^5}{\left( (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots \right)^6} = \sum_{n \geq 1} p(5n-1) x^n$$

*Satz 12.* (Danke an Vadim Gorin.) Sei  $D$  ein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und einem rechten Winkel. Dann ist die kleinstmögliche Hypothenusenlänge gleich 5.

*Satz 13.* Sachen, die ab  $n \geq 5$  bösartig werden:

- Faktorisieren von Polynomen vom Grad  $n$  über  $\mathbb{C}$ ,
- Klassifizieren von  $n$ -Tupeln von Untervektorräumen eines gegebenen Vektorraums.

