Ganzzahlige Kohomologie von irreduziblen holomorph symplektischen Varietäten

Simon Kapfer

Universität Augsburg

29. Juni 2016



Überblick



- IHS Mannigfaltigkeiten
 - Einführung
 - Beauville-Bogomolov Form
 - Diskriminantenformel
- 2 Beispiele
 - Hilbertschemata von Punkten auf Flächen
 - Verallgemeinerte Kummersche Varietäten
- 3 Singuläre IS Varietäten



Satz (Beauville-Bogomolov)

Jede kompakte Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chernklasse läßt sich bis auf endliche Überlagerungen schreiben als Produkt von

- komplexen Tori,
- Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten,
- Hyperkählermannigfaltigkeiten.

IHS Mannigfaltigkeiten Beispiele Singuläres Einführung Beauville-Bogomolov Form Diskriminantenformel

Kählermannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Geradenbündel



Satz (Beauville-Bogomolov)

Jede kompakte Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chernklasse läßt sich bis auf endliche Überlagerungen schreiben als Produkt von

- komplexen Tori,
- Calabi–Yau Mannigfaltigkeiten,
- Hyperkählermannigfaltigkeiten.

Bemerkung

Die Unterscheidung erfolgt anhand der Holonomiegruppen der zugehörigen Riemannschen Metrik. Der Hyperkähler-Fall entspricht der symplektischen Gruppe Sp(n).

Einführung Beauville–Bogomolov Form Diskriminantenformel

MA

IHS Mannigfaltigkeiten

Die quaternionale Interpretation der Holonomiegruppe Sp(n) führt auf die Existenz einer \mathbb{S}^2 -Schar komplexer Strukturen, die alle mit der Metrik verträglich sind. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "Hyperkähler" für solche Mannigfaltigkeiten.



Die quaternionale Interpretation der Holonomiegruppe Sp(n) führt auf die Existenz einer \mathbb{S}^2 -Schar komplexer Strukturen, die alle mit der Metrik verträglich sind. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "Hyperkähler" für solche Mannigfaltigkeiten.

Definition

Eine Kählermannigfaltigkeit X heißt IHS (irreduzibel holomorph symplektisch), wenn sie einfach zusammenhängend ist und $H^0(X,\Omega_X^2)$ von einer nichtdegenerierten holomorphen 2-Form σ aufgespannt wird.

IHS Mannigfaltigkeiten Beispiele Singuläres Einführung Beauville-Bogomolov Form Diskriminantenformel

IHS Mannigfaltigkeiten



Die quaternionale Interpretation der Holonomiegruppe Sp(n) führt auf die Existenz einer \mathbb{S}^2 -Schar komplexer Strukturen, die alle mit der Metrik verträglich sind. Dies rechtfertigt die Bezeichnung "Hyperkähler" für solche Mannigfaltigkeiten.

Definition

Eine Kählermannigfaltigkeit X heißt IHS (irreduzibel holomorph symplektisch), wenn sie einfach zusammenhängend ist und $H^0(X,\Omega^2_X)$ von einer nichtdegenerierten holomorphen 2-Form σ aufgespannt wird.

Satz (Beauville)

Die IHS- und die Hyperkählereigenschaft sind äquivalent.

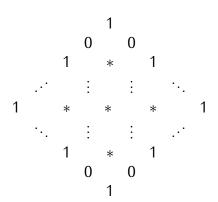
Beispiel

Die zweidimensionalen IHSM sind genau die K3 Flächen.

Hodge-Diamant



Der Hodge-Diamant einer IHSM hat folgende Gestalt:



Insbesondere ist die komplexe Dimension stets geradzahlig.

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?



Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer \mathbb{Z} -wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?



Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer \mathbb{Z} -wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

Diese Form ist von überragender Bedeutung für die Theorie:

Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$



Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer \mathbb{Z} -wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$
- Automorphismen von X von endlicher Primordnung können über ihre Wirkungen auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ studiert werden

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?



Satz (Beauville–Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer \mathbb{Z} -wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$
- Automorphismen von X von endlicher Primordnung können über ihre Wirkungen auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ studiert werden
- Auch die höheren Kohomologiegruppen werden benötigt

Warum sich überhaupt für ganzzahlige Kohomologie interessieren?



Satz (Beauville-Bogomolov)

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist frei und mit einer \mathbb{Z} -wertigen nichtentarteten quadratischen Form q_X ausgestattet.

- Lokales Torelli-Theorem: Infinitesimale Deformationen von X entsprechen einer bestimmten Klasse von infinitesimalen Deformationen der Gitterstruktur relativ zur Hodgestruktur von $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$
- Automorphismen von X von endlicher Primordnung können über ihre Wirkungen auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ studiert werden
- Auch die höheren Kohomologiegruppen werden benötigt
- Anwendungen auf singuläre IS Varietäten

Beauville-Bogomolo<u>v Form</u>

Die Beauville-Bogomolov Form q_X kann über ein Integral ausgedrückt werden:

Satz (Fujiki)

$$q_X(\alpha)^n = c_X \int_X \alpha^{2n},$$

wobei die Fujiki-Konstante $c_X \in \mathbb{R}$ nur von X abhängt.

Beauville-Bogomolov Form



Die Beauville-Bogomolov Form q_X kann über ein Integral ausgedrückt werden:

Satz (Fujiki)

$$q_X(\alpha)^n = c_X \int_X \alpha^{2n},$$

wobei die Fujiki-Konstante $c_X \in \mathbb{R}$ nur von X abhängt.

Korollar

Wir erhalten ein Untergitter

$$\operatorname{Sym}^n(H^2(X,Z)) \subset H^{2n}(X,\mathbb{Z}),$$

das im allgemeinen aber nicht primitiv ist.

Theorem

Seien d+1 der Rang von $H^2(X,\mathbb{Z})$ und c_X die Fujiki-Konstante. Die Diskriminante von Symⁿ $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist gleich

$$(\operatorname{discr} \left(H^2(X,\mathbb{Z})\right))^{\binom{d+n}{d+1}} \cdot c_X^{\binom{d+n}{d}} \cdot \prod_{i=1}^n i^{\binom{n-i+d}{d}d} \cdot C,$$

$$\operatorname{mit} \ C = \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{i=1}^{2n+d-1} i^{\binom{n-i+d}{d}} & \text{für } d+1 \text{ ungerade}, \\ \prod_{i=1}^{i+d-1} i^{\binom{n-i+d}{d}} - \binom{n-2i+d}{d} & \text{für } d+1 \text{ gerade}. \end{array} \right.$$



Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:



Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

■ Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,



Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,
- lacksquare verallgemeinerte Kummersche Varietäten $A^{[[n]]}$, $n\in\mathbb{N}$,



Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,
- verallgemeinerte Kummersche Varietäten $A^{[[n]]}$, $n \in \mathbb{N}$,
- zwei weitere Beispiele in Dimension 6 bzw. 10,

beziehungsweise deren Deformationsklassen.



Nur relativ wenige Beispiele von IHSM sind bisher bekannt:

- Hilbertschemata $K3^{[n]}$ von Punkten auf K3 Flächen, $n \in \mathbb{N}$,
- lacksquare verallgemeinerte Kummersche Varietäten $A^{[[n]]}$, $n\in\mathbb{N}$,
- zwei weitere Beispiele in Dimension 6 bzw. 10,

beziehungsweise deren Deformationsklassen.

Es gibt Ansätze, das Konzept IHSM in verschiedene Richtungen zu verallgemeinern:

- Virtuelle IHSM, die nur als derivierte Kategorie existieren
- IS Varietäten mit Singularitäten [3]



Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein \mathbb{C} -Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von n Punkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.



Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein \mathbb{C} -Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von nPunkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Wichtige Fakten:

Ist X zweidimensional und nichtsingulär, so ist $X^{[n]}$ 2*n*-dimensional und nichtsingulär.



Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein C-Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von n Punkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Wichtige Fakten:

- Ist X zweidimensional und nichtsingulär, so ist $X^{[n]}$ 2*n*-dimensional und nichtsingulär.
- Damit ist $X^{[n]}$ eine Auflösung der Singularitäten von $\operatorname{Sym}^n(X)$.



Definition (oder zumindest eine Idee davon)

Sei X ein \mathbb{C} -Schema. Das Hilbertschema $X^{[n]}$ von nPunkten auf X ist der Modulraum aller endlichen Unterschemata von X der Länge n.

Wichtige Fakten:

- Ist X zweidimensional und nichtsingulär, so ist $X^{[n]}$ 2*n*-dimensional und nichtsingulär.
- Damit ist $X^{[n]}$ eine Auflösung der Singularitäten von $\operatorname{Sym}^n(X)$.
- Es existiert eine gute Beschreibung der Kohomologie durch Nakajima-Operatoren.

Nakajima-Operatoren

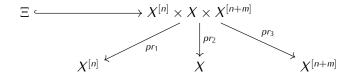


Sei $\Xi \subset X^{[n]} \times X \times X^{[n+m]}$ das Inzidenzschema $\{(\xi_1, x, \xi_2) \mid \xi_1 \subset \xi_2, \sup(\xi_2 \setminus \xi_1) = x\}$. Dann sind die Nakajima-Operatoren $\mathfrak{q}_m(\alpha)$ für $\alpha \in H^*(X, \mathbb{Q})$ über eine Korrespondenz definiert:

Nakajima-Operatoren



Sei $\Xi \subset X^{[n]} \times X \times X^{[n+m]}$ das Inzidenzschema $\{(\xi_1, x, \xi_2) \mid \xi_1 \subset \xi_2, \sup (\xi_2 \setminus \xi_1) = x\}$. Dann sind die Nakajima-Operatoren $\mathfrak{q}_m(\alpha)$ für $\alpha \in H^*(X, \mathbb{Q})$ über eine Korrespondenz definiert:



$$\mathfrak{q}_{m}(\alpha): H^{*}(X^{[n]}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{*+2m-2+|\alpha|}(X^{[n+m]}, \mathbb{Q})$$
$$y \longmapsto \mathsf{PD}\left(\rho r_{3*}\left(\Xi \cap \rho r_{1}^{*}(y) \cdot \rho r_{2}^{*}(\alpha)\right)\right)$$

Mittels dieser Operatoren läßt sich jede Klasse in $H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ erzeugen.

Cup-Produkte



Es gibt effektive Algorithmen, um Multiplikationen in $H^*(X^{[n]},\mathbb{Q})$ durch Nakajima-Operatoren auszudrücken [2]. Falls $K_X=0$, erhält man elegante Beschreibungen

- mit dem Gruppenring der Permutationen (Lehn, Sorger)
- oder mittels W-Algebren (Li, Qin und Wang).

Cup-Produkte



Es gibt effektive Algorithmen, um Multiplikationen in $H^*(X^{[n]},\mathbb{Q})$ durch Nakajima-Operatoren auszudrücken [2]. Falls $K_X=0$, erhält man elegante Beschreibungen

- mit dem Gruppenring der Permutationen (Lehn, Sorger)
- oder mittels W-Algebren (Li, Qin und Wang).

Bemerkung

Bei den von uns betrachteten Beispielen ist $H^*(X^{[n]},\mathbb{Z})$ torsionsfrei, daher genügt es, mit \mathbb{Q} -Koeffizienten zu rechnen.

Falls X eine K3-Fläche ist, so ist $X^{[n]}$ eine IHSM.

Cup-Produkte



Es gibt effektive Algorithmen, um Multiplikationen in $H^*(X^{[n]},\mathbb{Q})$ durch Nakajima-Operatoren auszudrücken [2]. Falls $K_X=0$, erhält man elegante Beschreibungen

- mit dem Gruppenring der Permutationen (Lehn, Sorger)
- oder mittels W-Algebren (Li, Qin und Wang).

Bemerkung

Bei den von uns betrachteten Beispielen ist $H^*(X^{[n]},\mathbb{Z})$ torsionsfrei, daher genügt es, mit \mathbb{Q} -Koeffizienten zu rechnen.

Falls X eine K3-Fläche ist, so ist $X^{[n]}$ eine IHSM. Von besonderem Interesse sind Produkte von Grad-2-Klassen und man studiert die durch das Cup-Produkt gegebene Einbettung

$$\operatorname{Sym}^k H^2(X^{[n]},\mathbb{Z}) \subset H^{2k}(X^{[n]},\mathbb{Z}),$$

etwa, um Aussagen über Automorphismen zu treffen.

Resultate über $H^*(K3^{[n]}, \mathbb{Z})$



Beispiel (Boissière-Nieper-Wißkrichen-Sarti [1])

$$\frac{H^4(K3^{[2]},\mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(K3^{[2]},\mathbb{Z})} \cong \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

Resultate über $H^*(K3^{[n]}, \mathbb{Z})$



Beispiel (Boissière-Nieper-Wißkrichen-Sarti [1])

$$\frac{\mathit{H}^{4}(\mathit{K3}^{[2]},\mathbb{Z})}{\mathsf{Sym}^{2}\mathit{H}^{2}(\mathit{K3}^{[2]},\mathbb{Z})}\cong\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 23}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

Beispiel

$$\frac{\mathit{H}^{6}(\mathit{K3}^{[3]},\mathbb{Z})}{\mathsf{Sym}^{3}\mathit{H}^{2}(\mathit{K3}^{[3]},\mathbb{Z})}\cong\mathbb{Z}^{\oplus 254}\oplus\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 230}\oplus\left(\frac{\mathbb{Z}}{36\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 22}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{72\mathbb{Z}}$$



Resultate über $H^*(K3^{[n]}, \mathbb{Z})$

Beispiel (Boissière-Nieper-Wißkrichen-Sarti [1])

$$\frac{\mathit{H}^{4}(\mathit{K3}^{[2]},\mathbb{Z})}{\mathsf{Sym}^{2}\mathit{H}^{2}(\mathit{K3}^{[2]},\mathbb{Z})}\cong\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 23}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

Beispiel

$$\frac{\mathit{H}^{6}(\mathit{K3}^{[3]},\mathbb{Z})}{\mathsf{Sym}^{3}\mathit{H}^{2}(\mathit{K3}^{[3]},\mathbb{Z})}\cong\mathbb{Z}^{\oplus 254}\oplus\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 230}\oplus\left(\frac{\mathbb{Z}}{36\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 22}\oplus\frac{\mathbb{Z}}{72\mathbb{Z}}$$

Satz

Für alle $n \ge k + 2$ ist der Quotient

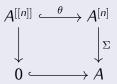
$$\frac{H^{2k}(K3^{[n]},\mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^k H^2(K3^{[n]},\mathbb{Z})}$$

ein freier Z-Modul.

Verallgemeinerte Kummer-Varietäten

Definition

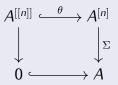
Sei A ein zweidimensionaler komplexer Torus und $A^{[n]}$ das Hilbertschema. Bezeichne $\Sigma: A^{[n]} \to A$ die Summationsabbildung. Dies ist eine Faserung über A und die verallgemeinerte Kummersche Varietät $A^{[[n]]}$ ist dann definiert als Faser eines Punktes (und daher von Dimension 2n - 2).



Verallgemeinerte Kummer-Varietäten

Definition

Sei A ein zweidimensionaler komplexer Torus und $A^{[n]}$ das Hilbertschema. Bezeichne $\Sigma: A^{[n]} \to A$ die Summationsabbildung. Dies ist eine Faserung über A und die verallgemeinerte Kummersche Varietät $A^{[[n]]}$ ist dann definiert als Faser eines Punktes (und daher von Dimension 2n - 2).

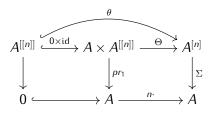


Beispiel

Für n = 2 erhält man eine K3-Fläche.

Ein etwas größeres Diagramm

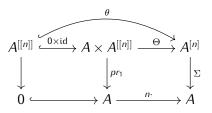
Der Morphismus θ paßt in ein etwas größeres Faserdiagramm:



wobei der Mophismus Θ eine n^4 -fache Überlagerung wird.

Ein etwas größeres Diagramm

Der Morphismus θ paßt in ein etwas größeres Faserdiagramm:



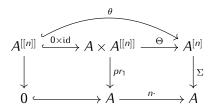
wobei der Mophismus Θ eine n^4 -fache Überlagerung wird.

Zwei Zutaten, um $H^*(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$ zu bestimmen:

Nohomologie der Hilbertschemata und Rückzug entlang θ



Der Morphismus θ paßt in ein etwas größeres Faserdiagramm:



wobei der Mophismus Θ eine n^4 -fache Überlagerung wird.

Zwei Zutaten, um $H^*(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$ zu bestimmen:

- $lue{}$ Kohomologie der Hilbertschemata und Rückzug entlang heta
- Ein paar zusätzliche Klassen mit Träger an den 3-Torsionspunkten von *A*

Rückzug vom Hilbertschema



Satz

Der Kern von $\theta^*: H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ ist das (zweiseitige) Ideal \mathcal{I} in $H^*(A^{[n]},\mathbb{Z})$ erzeugt von $H^1(A^{[n]},\mathbb{Z})$.

Rückzug vom Hilbertschema



Satz

Der Kern von $\theta^*: H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ ist das (zweiseitige) Ideal \mathcal{I} in $H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z})$ erzeugt von $H^1(A^{[n]}, \mathbb{Z})$.

Beweis

Es genügt, \mathbb{Q} -Koeffizienten zu betrachten. Klarerweise wird H^1 auf Null abgebildet, also $\mathcal{I} \subset \ker \theta^*$. Weil nun der Morphismus

$$\Theta: A \times A^{[[n]]} \to A^{[n]}$$

eine endliche Überlagerung ist, muß ker θ^* der Annihilator der Klasse $A^{[[n]]}$ in $H^*(A^{[n]}, \mathbb{Q})$ sein. Dann kann man zeigen, daß dies gleich dem Ideal erzeugt von H^1 ist.



Satz

Für n = 3 ist $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ surjektiv in allen Graden außer dem mittleren. Dort ist das Bild von θ^* ein primitives Untergitter von Kodimension $n^4 - 1$.

Zur Surjektivität des Rückzugs

Satz

Für n = 3 ist $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ surjektiv in allen Graden außer dem mittleren. Dort ist das Bild von θ^* ein primitives Untergitter von Kodimension $n^4 - 1$.

Vermutung

Obiger Satz gilt für alle n, die Primzahlen sind.

Zur Surjektivität des Rückzugs



Satz

Für n = 3 ist $\theta^* : H^*(A^{[n]}, \mathbb{Z}) \to H^*(A^{[[n]]}, \mathbb{Z})$ surjektiv in allen Graden außer dem mittleren. Dort ist das Bild von θ^* ein primitives Untergitter von Kodimension $n^4 - 1$.

Vermutung

Obiger Satz gilt für alle n, die Primzahlen sind.

Proposition

$$\frac{H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})} \cong \mathbb{Z}^{\oplus 80} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 7} \oplus \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^{\oplus 8}$$

Insbesondere ist also $\operatorname{Sym}^2 H^2(A^{[[3]]}, \mathbb{Z}) \subset \theta^*(H^4(A^{[3]}, \mathbb{Z}))$ ein Untergitter von vollem Rang.



Proposition (Hassett und Tschinkel)

Weitere Klassen mittleren Grades

Die Briançon Schemata mit Träger an einem 3-Torsionspunkt $\tau \in A[3]$ liefern 81 weitere Klassen $W_{\tau} \in H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$, die zusammen mit den schon betrachteten ganz $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$ aufspannen.

Darüber hinaus bestimmen Hassett und Tschinkel einige zusätzliche Klassen in $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$.



Proposition (Hassett und Tschinkel)

Die Briançon Schemata mit Träger an einem 3-Torsionspunkt $\tau \in A[3]$ liefern 81 weitere Klassen $W_{\tau} \in H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Z})$, die zusammen mit den schon betrachteten ganz $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$ aufspannen.

Darüber hinaus bestimmen Hassett und Tschinkel einige zusätzliche Klassen in $H^4(A^{[[3]]}, \mathbb{Q})$.

Proposition (mit Gr. Menet)

Durch die Wirkung der Monodromiegruppe $\operatorname{Sp} A[3] \rtimes A[3]$ auf diese zusätzliche Klassen erhält man eine Basis von $H^4(A^{[[3]]},\mathbb{Z})$.

Anwendung auf Quotienten



Die Abbildung $-\mathrm{id}$ auf A induziert eine Involution ι auf $A^{[[3]]}$, welche (gem. Tari) eine K3-Fläche und 36 Punkte fixiert. Sei

$$K' \longrightarrow A^{[[3]]}/\iota$$

die Aufblasung der K3-Fläche im Quotienten.

Anwendung auf Quotienten



Die Abbildung $-\mathrm{id}$ auf A induziert eine Involution ι auf $A^{[[3]]}$, welche (gem. Tari) eine K3-Fläche und 36 Punkte fixiert. Sei

$$K' \longrightarrow A^{[[3]]}/\iota$$

die Aufblasung der K3-Fläche im Quotienten.

Satz (Menet)

Es ist K' eine irreduzible symplektische V-Mannigfaltigkeit mit Singularitäten von Kodimension vier. Der Isomorphietyp des Beauville-Bogomolov-Gitters $H^2(K',\mathbb{Z})$ ist $U(3)^3 \oplus \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, und die Fujiki-Konstante $c_{K'}$ ist gleich 8.

Das Ende des Vortrags



Danke, daß ihr da seid!!

Zum Weiterlesen



S. Boissière, M. Nieper-Wisskirchen, and A. Sarti. Smith theory and irreducible holomorphic symplectic manifolds.

Journal of Topology 6(2), April 2012.

M. Lehn and C. Sorger.
The cup product of the Hilbert scheme for K3 surfaces. *Inventiones Mathematicae*, December 2003.

G. Menet.
On the integer cohomology of quotie

On the integer cohomology of quotients of Kähler manifolds.

ArXiv e-prints, December 2013.