Université de Poitiers
Séminaire des doctorants
Simon Kapfer

Exercices aux représentations du groupe symétrique

A faire comme préparation

Exercice 1 : Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations sur n éléments. Lis l'article sur la décomposition des permutations en cycles sur `http://fr.wikipedia.org/wiki/Permutation#D.C3.A9composition_en_produit_de_cycles_.C3.A0_supports_disjoints`.

a) Liste les éléments de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ en termes de décompositions en cycles.

b) Soit $\pi \in S_n$. Nous définissons $\chi(\pi)$ comme trace de la matrice de permutation associée à π. Liste $\chi(\pi)$ pour $\pi \in \mathfrak{S}_3$ et $\pi \in \mathfrak{S}_4$. Comment déterminer $\chi(\pi)$, si la décomposition en cycles est connue ?

c) Comment énumérer les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 2 : Soit G un groupe et V un espace vectoriel complexe. Une réprésentation de G est un homomorphisme : $G \to \mathsf{Aut}(V)$. Le caractère d'une représentation $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ est défini comme trace de la matrice correspondante.

a) Vérifie que la valeur de $\chi_V(g)$ ne depend que de la classe de conjugaison de g.

b) Lis `http://fr.wikipedia.org/wiki/Signature_d'une_permutation`. Verifie que $\mathsf{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^*$ est une représentation.

Exercice 3 : *Foncteurs de Schur.* Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n. On a une représentation de $\mathfrak{S}_2$ sur $V \otimes V$ qui échange les deux facteurs.

a) Considère $V \otimes V$ comme espace des matrices quadratiques. Vérifie que $V \otimes V$ est isomorphe à $\mathsf{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$. Ça donne deux sous-représentations de $\mathfrak{S}_2$. Peux-tu les décrire ?

b) On a une représentation de $\mathfrak{S}_3$ sur $V \otimes V \otimes V$ qui échange les deux facteurs. Démontre qu'il existe une décomposition de $V \otimes V \otimes V$ comme $\mathsf{Sym}^3 V \oplus \Lambda^3 V \oplus S$. Quelle est la dimension de S ?