Tagebuch

Simon Kapfer

27. August 2015

Zusammenfassung

Was mir an mathematisch Interessantem einfällt.

p-adische Approximation mit erzeugenden Funktionen Eine Potenzreihe $F(x) = \sum c_n x^n$ konvergiert (wenn die c_n nicht zu schlecht sind, also z.B. ganze Zahlen) im p-adischen Sinne in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $\mathbb{Q}_p$ für alle x, die Vielfache von p sind. Für $x_0 = a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$ konvergieren die Koeffizienten der Reihe

$$\frac{F(a_1 p t + a_2 p^2 t^2 + \ldots)}{1-t}$$

gegen $F(x_0)$. Idee dazu kam von folgender Frage: Gegeben ein modulo $p^n \ \forall n$ surjektives Polynom P (vgl. Hensel Lemma), wie kann man eine Folge (r_n) finden, so daß $P(r_n)$ durch p^n teilbar ist? Man muß die Nullstellen von P nämlich p-adisch approximieren, z.B. mittels Newton-Verfahren, oder direkt eine Potenzreihe für die Wurzel nehmen.

Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem Die universell einhüllende Algebra einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist der Quotient der freien Tensoralgebra durch die Relationen $\langle a \otimes b - b \otimes a - [a,b] \rangle$. Die Aussage des sog. Theorems ist, daß $U(\mathfrak{g})$ als Vektorraum von den (linear unabhängigen) geordneten Tensoren der $\mathfrak{g}$-Basiselemente $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k},\ i_1 \leq \ldots \leq i_k$ aufgespannt wird. Die lineare Unabhängigkeit ist der nichttriviale Teil.
Meine Beweisidee: $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus U^k$ wobei $U^k = \langle e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k},\ i_1 \leq \ldots \leq i_k \rangle$ und die Erzeuger von U^k sind linear unabhängig. Bleibt zu zeigen, daß $U^k \cap U^l = 0$ für verschiedene k und l. Die Relationen der Einhüllenden vermischen nur zwei benachbarte Grade, d. h. es reicht zu zeigen, daß $U^k \cap U^{k-1} = 0$. Mit anderen Worten, die Vertauschung von zwei Basisvektoren in U^k soll sich zu einer Gruppenwirkung von $\mathfrak{S}_k$ auf $U^k \oplus U^{k-1}$ fortsetzen lassen. S_k wird von Transpositionen benachbarter Elemente σ_i erzeugt, die den Relationen $\sigma_i^2 = 1,\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$

falls $|i-j|>1$ und $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ gehorchen. Die erste Gleichung gilt wegen Antikommutativität der Lieklammer, die zweite trivialerweise, die dritte braucht Jacobi. Gezeigt ist nun: egal, in welcher Reihenfolge man ein Element in U^k in Normalform (durch Vertauschen) bringt, man wird stets dieselbe Korrektur in U^{k-1} erhalten. Insbesondere wird Umformen eines Elements in Normalform in sich selbst keine Korrekturterme produzieren.

Dimension von metrischen Graphen Ein metrischer Raum aus $n+1$ Punkten kann stets als Eckenmenge eines n-Simplex dargestellt werden. Dieses Simplex ist manchmal entartet, was eine Reduzierung der Dimension bedeutet. Wie weit kann man die Dimension reduzieren, wenn man für die Abstände einen Fehler von bestimmter Größe zuläßt? Möglicherweise gehts mit einer Eigenraumzerlegung der darstellenden Matrix à la Carina.

Faktorisierungen in der Symmetrischen Gruppe Bezeichne mit $f_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Identität in $\mathfrak{S}_n$ als k-faches Produkt n-Zykeln zu schreiben (unter Berücksichtigung der Reihenfolge). Dann gilt für die erzeugenden Funktionen $F_n(x) := \sum_{k\geq 0} f_{n,k}x^k$:

$$\begin{aligned}
F_0(x) &= 1\\
F_1(x) &= \frac{1}{1-x}\\
F_2(x) &= \frac{1}{1-x^2}\\
F_3(x) &= \frac{1-x}{1-x-2x^2}\\
F_4(x) &= \frac{1-34x^2+24x^4}{1-40x^2+144x^4}\\
F_5(x) &= \frac{1-22x-72x^2+384x^3+384x^4}{1-22x-96x^2+432x^3+1536x^4}\\
F_6(x) &= \frac{1-19320x^2+43720704x^4-18345277440x^6+300589056000x^8}{1-19440x^2+42418944x^4-16334438400x^6+303906816000x^8}\\
F_7(x) &= \frac{\text{Polynom vom Grad 7}}{\text{Polynom vom Grad 7}}, \quad F_8(x) = \frac{\text{Polynom vom Grad 14}}{\text{Polynom vom Grad 14}}
\end{aligned}$$

Wir haben immer rationale Funktionen, auch wenn die Koeffizienten mit wachsendem n regelrecht explodieren. Die Frage, $f_{n,k}$ zu bestimmen, kam von Kai. Mit dem Paper von Goupil und Schaeffer kommt man an eine Berechnungsmethode dafür über Matrixpotenzen. Damit bekommt man auch obere Schranken für den Nennergrad der F_n, nämlich die Partitionszahlen $1,1,2,3,5,7,11,15,22,\ldots$.

Die Tatsache, daß für gerade n nur gerade Funktionen auftauchen, sieht man, sobald man das Signum der Permutationen anschaut. $\deg F_{2n} = 2\deg F_{2n-1}$ folgt möglicherweise auch daraus.

Charakteristische Polynome von Matrixpotenzen Die Koeffizienten c_k des charakteristischen Polynoms einer $d \times d$-Matrix A sind bis aufs Vorzeichen die elementarsymmetrischen Funktionen in den Eigenwerten: $\mathrm{e}_k = (-1)^k c_k$. Was sind die charakteristischen Polynome von A^n?

$$S_A(x) := \sum_n \mathrm{Spur}(A^n)x^n = \frac{\mathrm{Rev}\left(\frac{\partial}{\partial x}\chi_A(x)\right)}{\mathrm{Rev}\left(\chi_A(x)\right)}$$

Dabei steht $\mathrm{Rev} : P(x) \longmapsto x^{\deg P} P\left(\frac{1}{x}\right)$ für das rückwärts gelesene Polynom. S_A ist natürlich eine symmetrische Funktion in den Eigenwerten, daher kann man von Plethysmus sprechen und es gilt:

$$(-1)^k \sum_n c_k(A^n)x^n = S_A[\mathrm{e}_k](x)$$

Also braucht man, um χ_{A^n} auszurechnen, nichts weiter als χ_A und die plethystischen Formeln für $\mathrm{e}_j[\mathrm{e}_k]$. Falls $\det A = 1$, hat man außerdem eine nette Dualität, die man durch Betrachtung der Eigenwerte beweist, nämlich

$$(-1)^{d-1} \sum_n c_{d-1}(A^n)x^n = \frac{\mathrm{Rev}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Rev}\left(\chi_A(x)\right)\right)}{\chi_A(x)}$$

Diese Dualität wird von Plethysmen respektiert, und so haben dann die erzeugenden Funktionen von $c_k(A^n)$ und $c_{d-k}(A^n)$ jeweils rückwärts gelesene Nenner.

Ordinalzahlen Betrachte alle abzählbaren, nicht endliche Mengen, welche total geordnet sind. Führe eine Relation zwischen diesen ein: $M \trianglelefteq N$, falls eine injektive, monotone (steigende oder fallende) Abbildung : $M \to N$ existiert. Diese Relation besitzt ein kleinstes Element, nämlich $\mathbb{N}$, sowie ein größtes Element, nämlich $\mathbb{Q}$.

Eulercharakteristik von symmetrischen Potenzen Wenn $V = V^+ \oplus V^-$ ein Supervektorraum ist und $\chi(V) := \dim V^+ - \dim V^-$, dann ist

$$\sum \chi(\mathrm{Sym}^n V)x^n = (1-x)^{-\chi(V)}.$$

Das sollte auch mit beliebigen gewichteten Zerlegungen von V funkionieren und aus der entsprechenden Formel für Charaktere von Darstellungen folgen.

Hilbertschema von Punkten auf K3 Sei X eine K3. Dann ist die Torsion der Cup-Produkt-Bilder von

- $\mathrm{Sym}^2(H^2(X^{[2]};\mathbb{Z}))$ in $H^4(X^{[2]};\mathbb{Z})$ gleich $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2}\right)^{23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5}$.
- $\mathrm{Sym}^3(H^2(X^{[2]};\mathbb{Z}))$ in $H^6(X^{[2]};\mathbb{Z})$ gleich $\frac{\mathbb{Z}}{2}$.
- $\mathrm{Sym}^2(H^2(X^{[3]};\mathbb{Z}))$ in $H^4(X^{[3]};\mathbb{Z})$ gleich 3. Dabei kann $\frac{1}{3}\mathfrak{a}_3(1)\,|0\rangle$ nicht getroffen werden, sondern nur das Dreifache.
- $h^6(X^{[3]}) = 2554$.
$$\frac{H^6(X^{[3]};\mathbb{Z})}{H^4(X^{[3]};\mathbb{Z}) \cup H^2(X^{[3]};\mathbb{Z})} = \left(\frac{\mathbb{Z}}{3}\right)^{23}$$

Primfaktoren zählen Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Bezeichne $o(n)$ die Anzahl von p-Faktoren in $n!$. Dann ist $o(n) \leq \frac{n}{p-1}$ linear beschränkt und es gibt keinen kleineren Faktor als $\frac{1}{p-1}$, der es auch tut.

p-adischer Arcustangens Der Arcustangens, definiert über die übliche Potenzreihe, konvergiert im p-adischen nur für Argumente vom Betrag kleiner 1. Mit der Formel
$$2\arctan x = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$
läßt er sich jedoch für Primzahlen $p \in \{2\} \cup \{2^n - 1\}$ auf ganz $\mathbb{Q}_p \backslash \{\pm 1\}$ fortsetzen. Dort ist er nicht mehr injektiv, es gilt z. B. in $\mathbb{Q}_2$: $\arctan(8n \pm 1) = \arctan\left(\pm\frac{4n}{4n\pm 1}\right)$. Die Machinsche Formel für $\frac{\pi}{4}$ entartet zu: $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = 0$.
Nachtrag: Man hat allgemein die Formel: $\arctan(x) = \Im\log(1 + ix)$ und daher:
$$\arctan(x) = \frac{1}{m}\Im\log((1+ix)^m) = \frac{1}{m}\Im\log\left(1 + i\frac{\sum_k (-1)^k\binom{m}{2k+1}x^{2k+1}}{\sum_k (-1)^k\binom{m}{2k}x^{2k}}\right)$$
bis auf Addition von π-Vielfachen. So lassen sich für $p = 2$ oder $p = 4n-1$ alle Argumente in etwas transformieren, wo die Potenzreihe konvergiert, zum Beispiel, in dem man $m := p + 1$ nimmt. Für $p = 4n + 1$ und $m := p - 1$ geht es auch fast überall gut, mit Ausnahme von $\pm i \in \mathbb{Q}_p$. Da kann man aber auch gleich $\arctan(x) := \frac{1}{2i}\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$ setzen, so daß die beiden Definitionslücken offensichtlich werden.

Monotonie und Stetigkeit Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone Funktionen, so daß $g \circ f = \mathrm{id}$. Dann ist g stetig. Es reicht für die Stetigkeit von g sogar: g ist monoton und surjektiv.
Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen Monotonie von g ist $g^{-1}([a,b])$ ein Intervall. Setze $I := \inf(g^{-1}([a,b]))$. Falls $I > -\infty$ und $g(I) < a$ wäre, so wäre g nicht surjektiv. Also $g(I) = a \in [a,b]$. Also ist $g^{-1}([a,b])$ abgeschlossen. Also ist g stetig.

Idempotente Permutationen Sei $m(r,n)$ die Anzahl aller Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, für die gilt: $\sigma^r = \mathrm{id}$. Dann hat man

$$\sum_n \frac{m(r,n)}{n!} x^n = \prod_{i|r} \exp\left(\frac{x^i}{i}\right).$$

Signatur von Hilbertschemata von Punkten auf einer K3 Bezeichne mit s_n die Signatur von $H^{2n}(S^{[n]}, \mathbb{Z})$. Dann gilt:

$$\sum_n s_n x^n = \left[(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots\right]^{-16} \left[(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots\right]^{-20}$$

Zum Beweis kann man eine Formel von Ellingsrud/Göttsche/Lehn für das χ_y-Geschlecht benutzen, die hier zu finden ist.

Partitionszahlen und 5, 7, 11 Unter den Partitionszahlen $\{p_0, \dots, p_N\}$ kommen (für große n) solche, welche durch 5, 7 oder 11 teilbar sind, deutlich häufiger vor als man erwarten würde. Bezeichne $D_{p,N}$ die Anzahl aller Partitionszahlen p_0 bis p_N, welche durch p teilbar sind. Existiert $L_p := \lim \frac{1}{N} D_{p,N}$ und wenn ja, wie groß ist er? $D_{5,150k} \approx 0.36$, $D_{7,150k} \approx 0.27$, $D_{11,150k} \approx 0.174$. Siehe auch `ericaklarreich.com/pieces%20of%20numbers%20b&w%20compressed.PDF`.

Differenzieren mit Zufallsvariablen über $\mathbb{Z}$ Um eine $\mathbb{R}$-wertige Koordinatenfunktion auf $\mathbb{Z}$ zu beschränken, gleichzeitig aber das Gefühl des Kontinuums nicht aufzugeben, ersetzen wir Koordinaten durch Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Wir definieren für jede derartige Zufallsvariable X und jeden Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ affine Translationen T_α derart, daß $T_\alpha T_\beta X = T_{\alpha+\beta} X$ und, falls $\alpha \in \mathbb{Z}$, $T_\alpha X = X + \alpha$ gelten sollen. Vielleicht ist es auch gut, $\mathbb{E}[T_\alpha X] = \mathbb{E}[X] + \alpha$ im Falle der Existenz zu fordern. Das Differential $\frac{dY}{dX}$ soll dann was wie $\lim_{h\to 0} \frac{T_h Y - Y}{T_h X - X}$ sein. Vielleicht sollte man besser $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}\left[\left\| \frac{dY}{dX} \cdot (T_h X - X) - (T_h Y - Y) \right\|\right] = 0$ verlangen. Für ein Polynom f und $Y = f(X)$ hat man dann $\frac{dY}{dX} = f'(X)$.

Flächentreue lineare Abbildungen Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir suchen die Bedingung dafür, daß A Flächeninhalte erhält. Der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von u und v im $\mathbb{R}^n$ aufgespannt wird, ist gleich $\sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2} = \|u\wedge v\|$ mit dem induzierten Skalarprodukt auf $\Lambda^2\mathbb{R}^n$. Also erhält A genau dann Flächen, wenn die induzierte Abbildung auf $\Lambda^2\mathbb{R}^n$ orthogonal ist. Für $n=1$ ist das immer der Fall, für $n=2$ genau dann, wenn $\det A = \pm 1$, für $n=3$ ist die induzierte Abbildung gleich der Adjunkten Matrix, also bis auf eine Determinante gleich A^{-1}, also muß A^{-1} bzw. A orthogonal sein. Störungstheoretisch kann man $A = 1 + tR$ setzen und beobachtet, daß für $n \geq 3$ Flächentreue in erster Näherung Antisymmetrie von R bedeutet, d. h. durch $A = \exp(R)$ bekommt man eine Zusammenhangskomponente der gesuchten Matrizengruppe, isomorph zu $\mathrm{SO}(n)$. Also ist die Bedingung allgemein, daß A orthogonal ist.

Elementarer kann man zeigen, daß, falls $n \geq 3$ und eine nichttriviale orthogonale Zerlegung $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ existiert, die von A respektiert wird, Flächentreue gleich Orthogonalität ist. Wähle dazu normierte Vektoren $v_1 \in V_1,\ v_2, v_3 \in V_2$. Dann muß wegen Flächentreue $\|Av_1\|\|Av_2\| = 1 = \|Av_1\|\|Av_3\|$ sein, also insbesondere $\|Av_2\| = \|Av_3\|$. Also ist $A|_{V_2}$ ein Vielfaches einer orthogonalen Matrix, also orthogonal. Also ist A orthogonal.

Multiplikative Sequenzen, Differentiale Seien p_n Potenzsummen und (u_n) eine multiplikative Sequenz symmetrischer Polynome in Variablen $\{x_i\}$, d. h.

$$U(t) := \sum_n u_n t^n = \exp\left(\sum_i f(x_i t)\right) \quad \text{mit} \quad f(t) = \sum_{k\geq 1} a_k t^k.$$

Dann ist die Wirkung des Differentialoperators $\frac{\partial}{\partial p_m} u_n = a_m u_{n-m}$, bzw.

$$\text{mit } D(q) := \sum_{m\geq 1} \frac{\partial}{\partial p_m} q^m \quad \text{ist} \quad D(q)U(t) = f(qt)U(t).$$

Sei nun $V(t) := \sum_n v_n t^n = \exp\left(\sum_i g(x_i t)\right)$ mit $g(t) = \sum_{k\geq 1} b_k t^k$ eine weitere multiplikative Sequenz. Wenn nun $a_1 \neq 0 \neq b_1$, so sind f und g durch eine lineare Transformation L miteinander verwandt, d. h. es gibt Koeffizienten γ_i, so daß $L[f] := \sum_k \gamma_k t^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} f = g$. Damit haben wir offensichtlich eine Formel,

$$V(t) = \exp\left(L\left[\log(U(t))\right]\right),$$

die uns die Basen ineinander umrechnet. Mit $\overline{U}(q) := \sum_{m\geq 1} \frac{\partial}{\partial u_m} q^m$ folgt:

$$\overline{U}(q)V(t) \;=\; L\left[\frac{1}{U(t)(1-qt)}\right] V(t) \;=\; L\left[\frac{\exp\left(-L^{-1}\left[\log(V(t))\right]\right)}{1-qt}\right] V(t),$$

so daß wir auch v_n nach u_m ableiten können.

Quadratsummen Sei $Q = \{n^2 - 1 \mid n \geq 1\}$ die Menge der Quadratzahlen minus 1. Die Zahlen, welche sich nicht als Summe von Elementen aus Q darstellen lassen, sind $\{1,2,4,5,7,10,13\}$. Allgemeiner kann man definieren $Q(a) := \{n^2 - a^2 \mid n \geq a\}$ und die Zahlen betrachten, die sich nicht als Summen von Elementen aus $Q(a)$ schreiben lassen. Sie scheinen durch $(a+7)^2$ beschränkt zu sein und ihre Anzahl durch $(a+3)^2$.

Aufgabe von Nikulin Sei A endliche abelsche Gruppe, $H \subset A$ eine Untergruppe und $b : A \times A \longrightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ eine symmetrische Bilinearform, so daß $b|_H$ nichtdegeneriert ist. Dann ist $A = H \oplus H^\perp$.
Beweis: Daß $H \cap H^\perp = \{0\}$, ist klar. Nach einem Theorem von Wall ist A die Diskriminantengruppe eines Gitters L mit Bilinearform $\tilde{b}$, also $A = \frac{L^*}{L}$. Sei $\tilde{H}$ das Urbild von H unter der Quotientenabbildung. Dann ist auch $\tilde{b}\big|_{\tilde{H}}$ nichtdegeneriert. Damit ist die von $\tilde{b}$ induzierte Einbettung $\tilde{H} \otimes \mathbb{Q} \to \left(\tilde{H} \otimes \mathbb{Q}\right)^*$ wegen der endlichen Dimensionen ein Isomorphismus und wir haben $L^* \otimes \mathbb{Q} = (\tilde{H} \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\tilde{H}^\perp \otimes \mathbb{Q})$. Andererseits ist $\tilde{H} \subset L^*$ eine primitive Einbettung, da sonst $b|_H$ degeneriert wäre. Damit gilt $L^* = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^\perp$ und entsprechend auch $A = H \oplus H^\perp$.

Maximale Ordnung (Danke an François Courtès.) Sei X eine (nicht unbedingt abzählbare) Menge und $\leq \subset X \times X$ eine partielle Ordnung. Dann existiert eine totale Ordnung $\preceq \subset X \times X$ mit $\leq \subset \preceq$.
Beweis: (Transfinite) Induktion. Sei $\leq \subset R$ schon eine Erweiterung der Relation und $(x,y),(y,x) \notin R$. Dann enthält höchstens eines von $R \cup \{(x,y)\}$ und $R \cup \{(y,x)\}$ einen gerichteten Kreis. Wir machen mit einer kreisfreien Relation weiter.

Ein alter Hut Sei $\underline{x} = \underline{x}\left(\underline{y}\right)$ eine glatte Koordinatentransformation. Dann:

$$\partial \underline{x} = \mathbf{M}\, \partial \underline{y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \underline{x}} = \mathbf{M}^{-\mathbf{T}} \frac{\partial}{\partial \underline{y}}$$

Skalarprodukt auf symmetrischen Potenzen Sei auf einem Vektorraum V der Dimension n eine symmetrische Bilinearform mit Signatur (p,q) erklärt. Definiere eine symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{Sym}^k V$ durch

$$(a_1 \dots a_k\,,\, b_1 \dots b_k) := \sum_{\mathscr{P}} \prod_{(x,y)\in\mathscr{P}} \big(x, y\big)$$

wobei $\mathscr{P}$ alle Partitionen der Menge $\{a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_k\}$ in Paare durchläuft. Für den Index i_k gilt dann, wie es sich gehört:

$$\sum_{k\geq 0} i_k x^k = \frac{1}{(1-x)^p(1+x)^q}$$

Sei d_n die Diskriminante der Bilinearform auf V und $d_{n,k} = \det(G_k)$ diejenige der induzierten Bilinearform, G_k die zugehörige Grammatrix. Dann gilt

$$d_{n,k} = d_n^{\binom{n+k-1}{n}} (-1)^{\binom{n+k-1}{k}} a_{n,k}.$$

Über die Konstanten $a_{n,k}$ denke ich:

$$a_{n,1} = 1, \qquad a_{n,2} = 2^{n-1}(n+2),$$
$$a_{1,k} = (2k-1)!!, \qquad a_{2,k} = (k!)^{k+1},$$
$$a_{n,k} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} i^{(n-1)\binom{k-i+n-1}{n-1}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ ungerade}}}^{2k-2+n} i^{\binom{k-i+n-1}{n-1}} & \text{für ungerades } n, \\ \prod_{i=1}^{k} i^{(n-1)\binom{k-i+n-1}{n-1}} \prod_{i=1}^{k-1+\frac{n}{2}} i^{\binom{k-i+n-1}{n-1}-\binom{k-2i+n-1}{n-1}} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Außerdem gilt für die Spur mit $f(t) = 1+t+3t^2+15t^3+105t^4+\ldots$ der erzugenden Funktion der doppelten Faktoriellen und x_i den Eigenwerten der Bilinearform:

$$\sum_k \mathrm{Spur}(G_k)\, t^k = \prod_{i=1}^{n} f(x_i t),$$

Äußeres Skalarprodukt auf symmetrischen Potenzen Alternativ kann man auch definieren:

$$\langle a_1 \ldots a_k, b_1 \ldots b_k \rangle := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \prod_{i \in \{1 \ldots k\}} \langle a_i, b_{\pi(i)} \rangle$$

Dann hat man kurioserweise die selbe Formel für den Index: $\hat{i}_k = i_k$. Für die Konstanten $\hat{a}_{n,k}$ jedoch:

$$\hat{a}_{n,k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (k-i)!^{\binom{i+n-2}{i}} \right)^n$$

Orthogonale homogene Polynome auf der Sphäre Sei eine Familie von Polynomen p_n^m, mit $0 \le 2n \le m+1$ definiert durch:

$$p_0^m(x) = 1, \qquad p_1^m(x) = x,$$
$$p_{n+1}^m(x) = x p_n^m(x) - \frac{n(m-n+1)}{(m-2n)(m-2n+2)} p_{n-1}^m(x)$$

Sei $(x)_k := x(x-1)\dots(x-k+1)$ und $(x)_{!k} := x(x-2)\dots(x-2k+2)$. Dann ist

$$p_n^m(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n)_{2k}}{(m-2n+2k)_{!k}(2k)!!} x^{n-2k} = \sum_{\substack{l=0 \\ n-l \text{ gerade}}}^{n} \frac{n!\,(m-2n)!!\,(-1)^{\frac{n-l}{2}}}{l!\,(m-n-l)!!\,(n-l)!!} x^l$$

und p_n^m erfüllt die folgende Differentialgleichung:

$$(x^2+1)xf'(x) = (nx^2-m+n-1)f(x) + (m-n+1)(m-n+2)\int_0^1 f\left(\tfrac{x}{s}\right) s^{m-n+1}\,ds,$$

folgende tolle Identität für $n \geq 1$:

$$\frac{d}{d\omega}\Big[\cos^{m-1}(\omega)\, p_{n-1}^{m-2}\big(\tan\omega\big)\Big] = (n-m)\cos^{m-1}(\omega)\, p_n^m\big(\tan\omega\big)$$

und folgende Orthogonalrelation:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty y^{m-1} p_n^m\left(\frac{x}{y}\right) p_{n'}^m\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \\ = \delta_{n\,n'} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-n+1\right)\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m-n+1)} 2^{\frac{3m-1}{2}-2n}$$

Seien $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_d)$ und $\alpha' = (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1})$ Multiindizes. Setze $r := \sqrt{x_0^2 + \dots + x_{d-1}^2}$. Definiere homogene Polynome h_α durch $h_{(\alpha_0)} = x_0^{\alpha_0}$ und

$$h_\alpha := p_{\alpha_d}^{2|\alpha|+d}\left(\tfrac{x_d}{r}\right) r^{\alpha_d} h_{\alpha'}.$$

Dann bilden die h_α, für festes $|\alpha|$, eine Orthogonalbasis bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x)g(x)e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\,dx \propto \int_{S^d} fg,$$

die durch einen Gram-Schmidt-Prozeß, angewandt auf die Monomialbasis in lexikographischer Reihenfolge, entsteht. Es gilt:

$$\langle h_\alpha, x^\alpha\rangle = \langle h_\alpha, h_\alpha\rangle = \frac{\Gamma\left(|\alpha'| + \frac{d}{2} + 1\right)\Gamma\left(|\alpha| + \frac{d+1}{2}\right)\alpha_d!}{\sqrt{\pi}\,(|\alpha'| + |\alpha| + d)!} 2^{|\alpha'|+|\alpha|+d} \langle h_{\alpha'}, h_{\alpha'}\rangle.$$

Ein paar Formeln mit Binomialkoeffizienten

$$\prod_{j=0}^{k} (j!)^{\binom{k-j+d}{d}} = \prod_{i=1}^{k} i^{\binom{k-i+d+1}{d+1}}$$

$$\prod_{j=0}^{k} (j!)^{\binom{j+b}{d}} = \prod_{i=1}^{k} i^{\binom{k+b+1}{d+1}-\binom{i+b}{d+1}} = \frac{(k!)^{\binom{k+b+1}{d+1}}}{\prod_{i=1}^{k} i^{\binom{i+b}{d+1}}}$$

$$\prod_{j=0}^{k} (j+m)!^{\binom{j+d}{d}} = \prod_{i=1}^{k+m} i^{\binom{k+d+1}{k}-\binom{i+d-m}{i-m-1}}$$

Operator von Goulden Auf $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ definiere lineare Operatoren

$$q_n := \begin{cases} n\dfrac{\partial}{\partial p_n}, & n \le 0, \\ p_{-n}, & n < 0, \end{cases} \qquad \Delta := \frac{1}{2}\sum_{i,j\ge 1} \left(q_{-i-j} q_i q_j + q_{-i} q_{-j} q_{i+j}\right).$$

Dann gilt $[q_n, q_m] = n\delta_{n,-m}$, sowie $[q_n, \Delta] = \frac{n}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} : q_i q_{n-i} :$ (Normalordnung ordnet Indizes aufsteigend) und $[q_m, [q_n, \Delta]] = nm\, q_{n+m}$. Insbesondere läßt sich jeder Operator q_n durch Kommutatoren von $q_1,\ q_{-1}$ und Δ darstellen.

Aus meiner Masterarbeit Definiere einen Operator, so ähnlich wie Goulden, $\Psi : \bigoplus \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$, der eine Klassensumme K_λ auf $\frac{p^\lambda}{z_\lambda}$ schickt. Dann ist

$$\Psi^{-1}\left(\exp\left(\sum_{k\ge 1} \frac{a_k}{k!}\frac{p_k}{k} t^k\right)\right) \cup \Psi^{-1}\left(\exp\left(\sum_{k\ge 1} \frac{b_k}{k!}\frac{p_k}{k} t^k\right)\right) = \Psi^{-1}\left(\exp\left(\sum_{k\ge 1} \frac{c_k}{k!}\frac{p_k}{k} t^k\right)\right)$$

$$\text{wobei} \quad A(t) = \sum_{k\ge 1} \frac{a_k}{k!} t^k, \quad B(t) = \sum_{k\ge 1} \frac{b_k}{k!} t^k, \quad C(t) = \sum_{k\ge 1} \frac{c_k}{k!} t^k$$

$$\text{und} \quad t \cdot C^{-1}(t) = A^{-1}(t) B^{-1}(t).$$

Zusammenhangskoeffizienten via Charaktere Sei f^ν die Dimension der irreduziblen Darstellung der symmetrischen Gruppe zur Partition ν und die Zusammenhangskoeffizienten, wie üblich: $\prod_{i=1}^k K_{\lambda^i} = \sum_\mu c^\mu_{\lambda^1\ldots\lambda^k} K_\mu$. Dann ist

$$z_{\lambda^1} \ldots z_{\lambda^k} c^\mu_{\lambda^1\ldots\lambda^k} = \sum_\nu \left(\frac{n!}{f^\nu}\right)^{k-1} \chi^\nu_{\lambda^1} \ldots \chi^\nu_{\lambda^k} \chi^\nu_\mu$$

Theorem von Cantor–Bendixson Sei X ein polnischer Raum, also metrisch, vollständig und separiert ($\exists$ eine abzählbare dichte Teilmenge $Q \subset X$). Dann läßt sich jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ eindeutig als disjunkte Vereinigung $A = P \cup Z$ schreiben, wobei Z abzählbar und P perfekt ist (das heißt, abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte enthält).
Mein Beweis (ohne transfinite Induktion): Setze

$$Z := \{x \in A \mid \exists \text{offener Ball } B \text{ um } x \text{ vom Radius } r_x, \text{ so daß } B \cap A \text{ abzählbar ist}\}$$

und $P := A \backslash Z$. Zunächst zeigen wir, daß Z abzählbar ist. Wähle dazu für jeden Punkt $x \in Z$ einen Punkt $q \in Q$ mit $|x-q| < \min\{1, \frac{r_x}{4}\}$, wir haben also eine Funktion $f : Z \to Q$. Dann wird jeder Punkt q nur abzählbar oft ausgewählt: Für solch ein q betrachten wir nämlich für alle Punkte $x \in f^{-1}(q)$ den Abstand $|x-q|$. Dieser hat ein Supremum $s \leq 1$ und wir nehmen einen Punkt $y \in f^{-1}(q)$, dessen Abstand mindestens $\frac{s}{2}$ beträgt. Dann enthält der Ball um y vom Radius r_y nur abzählbar viele Punkte $x \in A$ und außerdem alle $x \in f^{-1}(q)$. Also ist $f^{-1}(q)$ abzählbar und damit auch $Z = f^{-1}(Q)$.
Zeige nun, daß P abgeschlossen ist. Sei $(x_n)_n \subset$ eine Cauchyfolge mit Limes $x \in A$. Angenommen, $x \in Z$. Dann wählen wir n so, daß $|x - x_n| < \frac{r_x}{2}$. Dann ist $B_{\frac{r_x}{2}}(x)$ eine offene Umgebung von x_n, die nur abzählbar viele Punkte $y \in A$ enthält, Widerspruch. Also $x \in P$. Also ist P abgeschlossen.
Zeige nun, daß P keine isolierten Punkte enthält: Angenommen, $p \in P$ sei isoliert, das heißt, es gibt eine offene Umgebung U von p, die keinen weiteren Punkt aus P enthält. Nach Definiton enthält U überabzählbar viele Punkte aus A, die offenbar alle in Z liegen müssen. Das ist unmöglich. Also ist P perfekt.
Zur Eindeutigkeit: Sei $A = P' \cup Z'$ eine weitere disjunkte Zerlegung. Sei indirekt $p \in P' \cap Z$ und U eine offene Umgebung von p mit $U \cap A$ abzählbar. Dann ist $U \cap A \subset Z$. Sei B ein kleiner offener Ball in U um p. Dann ist der Abschluß von $B \cap P'$ perfekt, nichtleer und abzählbar, ein Widerspruch. (Nichtleere perfekte Mengen sind überabzählbar nach `https://proofwiki.org/wiki/Real_Numbers_are_Uncountable/Cantor%27s_Second_Proof`). Andererseits ist auch $P \cap Z'$ leer nach Definition von P. Also $P = P'$ und $Z = Z'$.