Code sujet : 285

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS

MATHEMATIQUES T

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

Mercredi 26 avril 2023, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

On suppose que la librairie `numpy` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy as np` et que la librairie `numpy.random` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy.random as rd`.

En bleu, ce qui est dur mais faisable.

En rouge tu as pas encore le cours

Exercice 1

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I, puis déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

2) a) Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

b) Utiliser le polynôme annulateur trouvé pour montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

3) On considère les vecteurs $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits AU, AV et AW et en déduire que les valeurs propres possibles de A trouvées à la question 2a) sont effectivement valeurs propres de A.

b) On pose $Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Montrer que $AQ=QD$.

c) On donne $R=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$.

Calculer QR puis en déduire que Q est inversible et exprimer Q^{-1} en fonction de R.

d) En déduire que A est diagonalisable.

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n=QD^nQ^{-1}$.

b) Vérifier que la première ligne de la matrice A^n est $\frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n \quad 2^n-(-1)^n \quad 2^n-(-1)^n\right)$.

5) Un jeton se déplace sur les trois sommets numérotés 1, 2, 3 d'un triangle selon la règle suivante : s'il est sur un sommet, il se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres.
Au départ, le jeton se trouve sur le sommet 1. On pose $X_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le jeton après le n-ième déplacement.

a) Donner la loi de X_1 puis vérifier que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2=1)=\frac{1}{2} \qquad P(X_2=2)=\frac{1}{4} \qquad P(X_2=3)=\frac{1}{4}$$

b) On considère la matrice à une ligne et trois colonnes $L_n=\left(P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, utiliser la formule des probabilités totales pour établir la relation :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3)$$

c) Donner sans démonstration les égalités analogues concernant $P(X_{n+1}=2)$ et $P(X_{n+1}=3)$, puis en déduire la matrice carrée B, proportionnelle à A, telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ L_{n+1}=L_nB$$

d) Vérifier que la relation précédente reste valable pour $n=0$ et $n=1$.

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $L_n=L_0B^n$.

f) En déduire, grâce à la question 4b), la loi de X_n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

1) Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ 4x(1-x^2) & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{si } x>1\end{cases}$.

Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X de densité f et on note F_X sa fonction de répartition.

2) a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

b) Montrer que X possède une variance et vérifier qu'elle est égale à $\dfrac{11}{225}$.

3) Montrer que l'on a : $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-(1-x^2)^2 & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$.

4) Soit U et V deux variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M=\min(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, on a $P(M>x)=P(U>x)P(V>x)$. On admet que M est une variable aléatoire à densité et on note F_M sa fonction de répartition.

a) En notant G la fonction de répartition commune à U et V, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x<0$, $0\leq x\leq 1$ ou $x>1$.

b) En déduire, pour tout réel x, les expressions de $P(M>x)$ et de $F_M(x)$ en fonction de $G(x)$.

c) Donner enfin explicitement $F_M(x)$ selon que $x<0$, $0\leq x\leq 1$ ou $x>1$.

5) On considère la variable aléatoire Z définie par $Z=\sqrt{M}$ et on note F_Z sa fonction de répartition.

a) Déterminer $F_Z(x)$ selon que $x<0$, $0\leq x\leq 1$ ou $x>1$.

b) En déduire que X et Z suivent la même loi.

c) Compléter le script `Python` suivant qui simule la variable M à la ligne L3, afin qu'il simule la variable X à la ligne L4.

```
L1    U=rd.random()
L2    V=rd.random()
L3    M=np.min(U,V)
L4    X=---
```

Tu sauras bientôt faire ça (chapitre le plus dur ...)

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi donnée par :

$$P(X=0)=\frac{1}{4},\ P(X=1)=\frac{1}{4} \text{ et } P(X=2)=\frac{1}{2}$$

On a donc également :

$$P(Y=0)=\frac{1}{4},\ P(Y=1)=\frac{1}{4} \text{ et } P(Y=2)=\frac{1}{2}$$

On pose $S=X+Y$ et $T=XY$ et on admet que S et T sont des variables aléatoires.

1) a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S, puis déterminer la loi de S.

b) En déduire que l'espérance de S est égale à $\frac{5}{2}$.

c) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit S.

2) a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.

b) Vérifier que $P(T=0)=\frac{7}{16}$, puis déterminer la loi de T.

c) En déduire que l'espérance de T est égale à $\frac{25}{16}$.

d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit T.

3) Déterminer la loi du couple (S,T) puis retrouver les lois de S et de T.

4) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

5) Vérifier que $E(ST)=\frac{45}{8}$, puis calculer $\mathrm{Cov}(S,T)$.

Exercice 4

On pose $u_1=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{2(n+1)u_n+1}$$

1) a) Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs.

On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

b) Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    u=1/2
    for k in range(2,n+1):
        u=......
    return u
```

2) Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3=\frac{1}{12}$.

3) a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<u_{n+1}<\frac{1}{2(n+1)}$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4) Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k=\frac{1}{u_k}$.

a) Établir l'égalité :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ v_{k+1}-v_k=2(k+1)$$

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question 4a), établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n(n+1)$$

d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5) a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$$

b) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\sum_{n=1}^{N} u_n$.

c) En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

6) a) Expliquer pourquoi on peut maintenant considérer une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = u_n$$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n+1}$$

c) En déduire l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \ge \ln(N+2) - \ln(2)$$

d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 1 :

1). $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$

On a donc $A^2 = A + 2I$ $A^2 - A - 2I = 0$ et $f(x) = x^2 - x - 2$ est un polynôme annulateur de degré 2.

2) a) Les valeurs propres possibles sont (cours) les racines de $f(x)$

Or $f(x) = (x-2)(x+1)$ (fait le Δ) donc les valeurs propres possibles sont 2 et -1

b) $A^2 = A + 2I$ par 1)

D'où $A^2 - A = 2I$ $A(A - I) = 2I$ $A \times \frac{1}{2}(A - I) = I$

Alors $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

3) a) $AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U$

$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times V$

$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times W$

On a 3 vecteurs propres qui ont comme valeurs propres associés 2 ou -1 ce qui est conforme à 2.a)

b) $AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$QD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $QR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

D'où $Q^{-1} = \frac{1}{3} R$

Or $AQ = QD$ $\quad AQQ^{-1} = QDQ^{-1}$ $\quad A = Q\underset{\text{Diagonale}}{D}Q^{-1}$

4) a) (Pour moi c'est immédiat mais on va le faire pour de vrai)

Montrons sur $\mathbb{N}$ la propriété P_n : " $A^n = QD^nQ^{-1}$ "

<u>initialisation:</u> On a déjà répondu en 3.c) $A^1 = QD^1Q^{-1}$

<u>hérédité:</u> Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie

$A^{n+1} = A^n \times A \overset{HR}{=} QD^nQ^{-1}A \overset{3.c)}{=} QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$

et P_{n+1} est vérifiée.

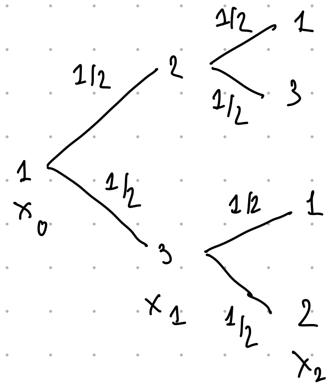
<u>Bilan:</u> P_n est vraie sur $\mathbb{N}$.

<u>Remarque:</u> Le jour du concours si tu as pas de temps et que tu peux répondre trivialement $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} = \underbrace{QD\cancel{Q^{-1}}\cancel{Q}DQ^{-1} \cdots \cancel{Q}DQ^{-1}}_{n \text{ fois}} = QD^nQ^{-1}$ fais le!

4. b) Calcul que je ne ferais pas c'est mort.

5) a) Au rang 0 la pièce est en 1. Elle peut donc aller en 2 ou en 3 avec proba $\frac{1}{2}$.

$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_1 = 3)$



$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) \times \mathbb{P}_{X_1=2}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 3)\,\mathbb{P}_{X_1=3}(X_2 = 1) + \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)}_{\text{impossible}}\,\underbrace{\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1)}_{\text{impossible}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \ldots =$ seulement possible si $X_1 = 1$ ou 3 et $X_1 = 1$ est impossible comme $X_0 = 1$

$= \mathbb{P}(X_1 = 3) \times \mathbb{P}_{X_1=3}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X_2 = 3) =$ pareil $= \frac{1}{4}$

b) $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) \times \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3) \times \mathbb{P}_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X_n = 3) \times \frac{1}{2}$

c) $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 3)$ $\quad$ $\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2)$

$$L_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A L_n \text{ d'où } B = \frac{1}{2} A$$

d) Juste calcul mais point donné

e) Comme au dernier cours tu peux faire une récurrence immédiate.

$$L_{n+1} = B L_n \quad L_{n-1} = B L_{n-2}$$

$$L_n = B L_{n-1} = B B L_{n-2} = \dots = B^n L_0 = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sinon récurrence à la main (normalement facile)

f) $L_n = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (A^n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times$ " première colonne de A^n "

or A^n est symétrique comme A est symétrique d'où par 4.b)

$$L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

Pas demandé mais ça tend vers $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ce qui semble cohérent avec le problème

Exercice 3 :

$S = X + Y \qquad S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1) a) $\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0)) \overset{ind}{=} \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\mathbb{P}(S=1) = \mathbb{P}(((X=0)\cap(Y=1))\cup((X=1)\cap(Y=0)))$

$\overset{ind}{=} \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(S=2) = \dots = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=2)\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

$\mathbb{P}(S=3) = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2)\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(S=4) = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{4}$

PPo : Pleins de remarques :

- Tu peux faire avec le tableau horrible, moi je trouve pas ça facile.
- Vérifie ! $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+2+5+4+4}{16} = \frac{16}{16} = 1$
- C'est horrible à écrire mais faut réfléchir à voix haute :
  " Comment je peux faire 2 ? $X=0$ et $Y=2$ ou ... " et les "et" deviennent $\cap$ les "ou" $\cup$
- Oublie pas de préciser l'indépendance.

b) Calcul mais donné

c) $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \overset{\text{même loi}}{=} 2\mathbb{E}[X] = 2 \times \frac{5}{4}$

2) a) $T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$

b) $\mathbb{P}(T=0) =$ vraiment relou...

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=0)}_{\triangle \text{ pas le compter 2 fois}} + \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}(X=2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

$$\mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(T=2) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(T=4) = \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{4}$$

c) Calcul mais donné

d) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y] = (\mathbb{E}[X])^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

3)

T \ S	0	1	2	3	4	
0	1/16	1/8	4/16	0	0	7/16
1	0	0	1/16	0	0	1/16
2	0	0	0	1/4	0	1/4
4	0	0	0	0	1/4	1/4
	1/16	1/8	5/16	1/4	1/4	

Là pareil réfléchis à voix haute

$S = 3$ ça veut dire $X=2$ $Y=1$ ou l'inverse

donc T est forcément égal à 2

$S=4$ ça veut dire $X=2$ et $Y=2$

$S=2$ $X=1$ et $Y=1 \Rightarrow T=1$

ou $X=2$ et $Y=0 \Rightarrow T=0$

$X=0$ et $Y=2 \Rightarrow T=0$

et après tu peux compléter avec les lois marginales

4) $\mathbb{P}(S=2 \cap T=0) = 4/16 = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(S=2) \times \mathbb{P}(T=0) = \frac{5}{16} \times \frac{7}{16} = \frac{35}{16^2}$ ≠ pas indépendants.

5) $\mathbb{E}[ST] =$ calcul

$Cov(ST) = \mathbb{E}[S]\mathbb{E}(T) - \mathbb{E}[ST]$ (ou l'inverse je sais jamais)

$= \frac{5}{2}\frac{25}{16} - \frac{45}{8} = \frac{125}{32} - \frac{180}{32} = \frac{-55}{32}$ (ça devait être l'inverse...)

Exercice 4:

1.a) Montrons par récurrence P_n: " u_n existe et il est positif " sur $\mathbb{N}^*$

initialisation: $u_1 = \frac{1}{2} > 0$

Hérédité: Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie.

$u_n > 0 \quad 2(n+1)u_n + 1 > 0 \quad \frac{u_n}{2(n+1)u_n+1} > 0$

Donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n+1} > 0$ et P_{n+1} est vérifié.

Bilan: ok.

1. b)

```
def suite(n):
    u=1/2
    for k in range(2,n+1):
        u=.u/(2(k)u +1)
    return u
```

⚠ comme k commence à 2 on écrit 2k et pas 2(k+1)

$u_2 = \frac{u_1}{2(1+1)u_1+1}$

2) $u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} + 1} = \frac{1}{6}$ $\quad u_3 = \frac{1}{12}$

3) a) $u_{n+1} > 0$ ça on le sait déjà

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n+1} = \frac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} \times \frac{1}{2(n+1)+\underbrace{\frac{1}{u_n}}_{>0}}$$

or $u_n > 0$ d'où $\frac{1}{u_n} > 0$ $2(n+1) + \frac{1}{u_n} > 2(n+1)$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+\frac{1}{u_n}} < \frac{1}{2(n+1)}$$

3. b) Par théorème des gendarmes la suite converge vers 0

4. a) $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2(n+1)u_n+1}{u_n} = 2(n+1) + \frac{1}{u_n}$

$$v_{n+1} - v_n = 2(n+1) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 2(n+1)$$

4. b) non $v_2 - v_1 = 2\times 2 = 4$ $v_3 - v_2 = 2\times 3 = 6$

4. c) $v_n - v_{n-1} = 2n$ $v_n = 2n + v_{n-1}$

$v_{n-1} - v_{n-2} = 2(n-1)$ d'où $v_n = 2n + 2(n-1)$

et ainsi de suite...

$v_n = 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + \dots + 2\times 1 = 2\times(1+2+\dots+n) = 2\times\frac{n(n+1)}{2}$

$v_n = n(n+1)$

Sinon par récurrence.

4. d) On a $v_n = \frac{1}{u_n}$ d'où $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n(n+1)}$

5. a) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

5. b) $\sum_{n=1}^{N} u_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$

$+ \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)$

$+ \dots$

$+ \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right)$

5. c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $\sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n = 1$

6. a) Parce que $\sum \mathbb{P}(X=n) = \sum u_n = 1$

6. b) si $t > n+1$ $\frac{1}{t} < \frac{1}{n+1}$

d'où $\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1}\,dt = \frac{1}{n+1} \times (n+2-(n+1)) = \frac{1}{n+1}$

c) $\int_{2}^{N+2} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{N} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$

or $\int_{2}^{N+2} \frac{1}{t}\,dt = \ln(N+2) - \ln(2)$

d) Si $\mathbb{E}[X]$ existait alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$

Or $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \infty$

alors $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1}$ diverge et X n'a pas d'espérance.