



Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE INGENIERÍA

LABORATORIO DE CONTROL (86.22)

Trabajo Practico N°1 - Grupo 4

2°C 2024

Alumno: Milidoni, Cristian Julian

Padrón: 107647

Alumno: Nobili, Nicolas

Padrón: 107540

Septiembre 2024

Contents

1	Modelado del sistema	2
1.1	Descripción de la dinámica del sistema	2
1.2	Identificación de la planta	4
1.3	Representación del sistema en variables de estado	4
1.4	Transferencia de la planta en el punto de trabajo	5
1.5	Transferencia de la planta para distintos punto de trabajo	6
2	Diseño en Matlab	7
2.1	Simulación a lazo abierto	7
2.2	Diseño de un Controlador	7
2.3	Perturbación de flujo de entrada Q_i	10

1 Modelado del sistema

1.1 Descripción de la dinámica del sistema

El objetivo es encontrar un modelo matemático que describa el funcionamiento de la planta que se muestra en la Fig. 1, esta consta de una entrada de flujo constante de agua por medio de una bomba, un tanque cónico piramidal y una válvula que se abre o cierra completamente para controlar el flujo de agua de salida. El control se ejerce sobre el área efectiva de la válvula de salida por medio de una acción de control $u \in [0, 1]$.

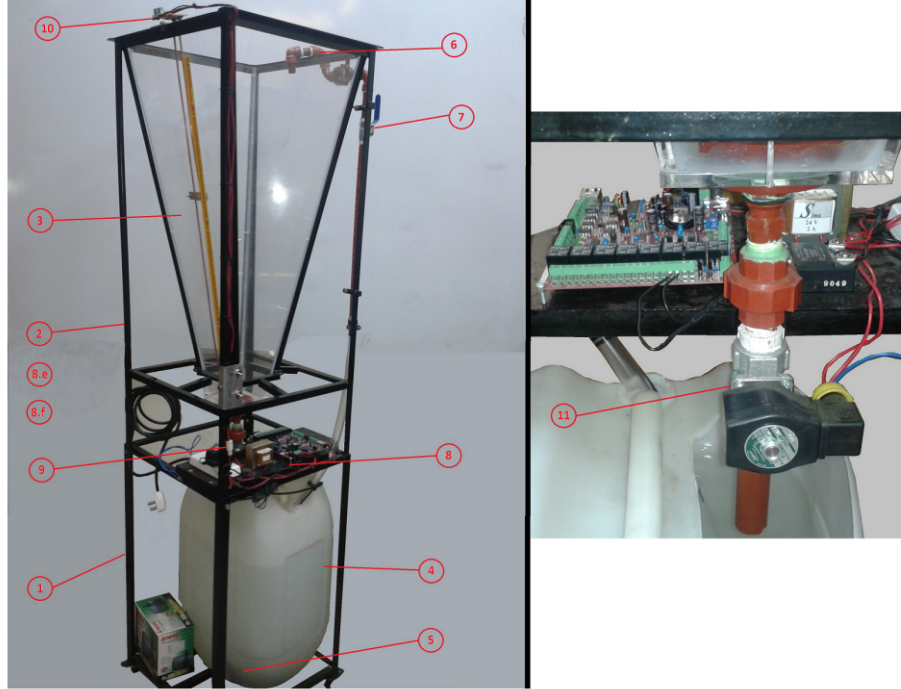


Figure 1: Circuito esquemático.

Para encontrar una ecuación diferencial que describa este sistema partimos de la variación diferencial del volumen, que es igual a la diferencia entre el caudal entrante y el caudal saliente.

$$\frac{dV}{dt} = Q_i - Q_o \quad (1)$$

El volumen de una pirámide truncada viene dado por la siguiente ecuación:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab) \quad (2)$$

Donde a es la base mayor de la pirámide truncada y b la base menor.

Para poder derivar la expresión del volumen, es necesario reformular la ecuación (2) de manera que dependa únicamente de la altura del líquido, h . Dado que b es constante en nuestro problema, buscamos expresar la base mayor a en función de h .

En la Fig. 2, se observa un diagrama del problema junto con todas sus variables dimensionales.

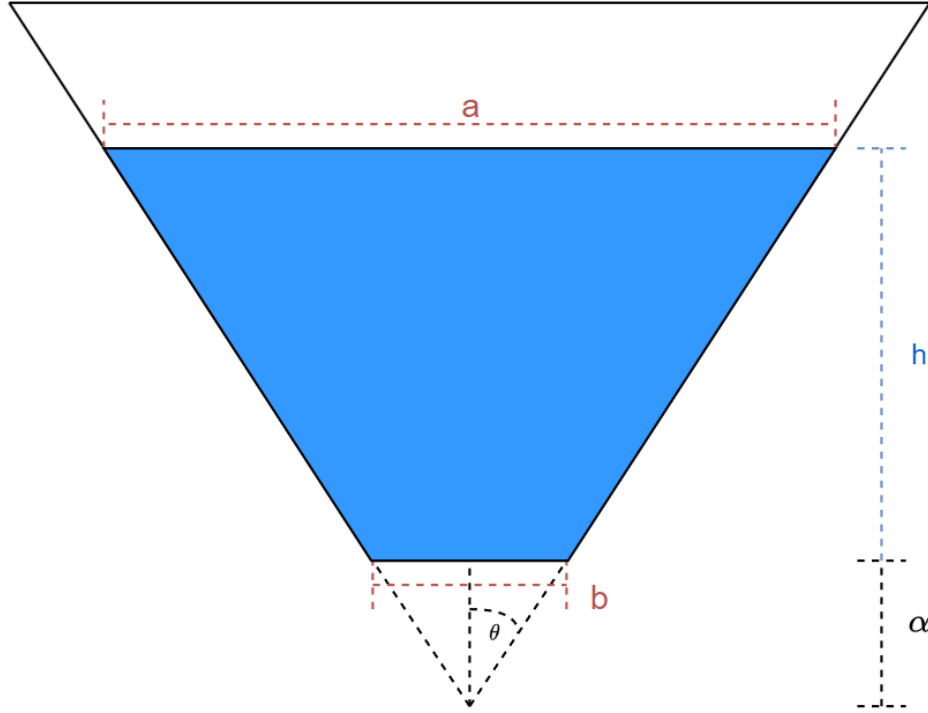


Figure 2: Esquema del tanque piramidal cónico

La variable a , que corresponde al lado de la base mayor del tanque, se relaciona con la altura h del líquido a través de la tangente del ángulo θ , como se muestra en la Fig. 2.

$$\tan \theta = \frac{\frac{a}{2}}{h + \alpha}$$

Despejando a en función de h , se obtiene la ecuación (3), que muestra una relación lineal entre ambas magnitudes, con pendiente $m = 2 \tan \theta$ y ordenada al origen $B = 2\alpha \tan \theta$.

$$2h \tan \theta + 2\alpha \tan \theta = a \longrightarrow a = mh + B \quad (3)$$

Conociendo los límites físicos del problema, es posible determinar la pendiente y la ordenada al origen de la función lineal. Cuando el tanque está vacío, el ancho de la base mayor a coincide con el ancho de la base menor b , que es constante. Por lo tanto, $B = b$.

Luego para la pendiente observamos que:

$$h = h_{max} \longrightarrow a(h_{max}) = a_{max}$$

$$h = 0 \longrightarrow a(0) = b$$

Con estos dos puntos despejamos la pendiente de la recta $m = \frac{a_{max} - b}{h_{max}}$ y podemos escribir la base mayor del tanque a en función de la altura del líquido h como:

$$a(h) = \frac{a_{max} - b}{h_{max}} h + b \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (2) llegamos a una expresión para el volumen que depende únicamente de la altura del líquido h :

$$V = \frac{1}{3}m^2h^3 + bmh^2 + b^2h \quad (5)$$

Luego, derivando (5) y reemplazando en (1) obtenemos la ecuación que describe la dinámica de nuestra planta.

$$m^2h^2\dot{h} + 2bmh\dot{h} + b^2\dot{h} = Q_i - Q_o u \quad (6)$$

Finalmente, planteando el teorema de Toricelli despreciando efectos de fricción y contracción del líquido con el tanque, podemos describir el caudal de salida como $Q_o = A\sqrt{2gh} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}$ y despejamos \dot{h} .

$$\dot{h} = \frac{Q_i - \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} u}{(b + mh)^2} \quad (7)$$

1.2 Identificación de la planta

Para describir la dinámica de la planta, es necesario identificar los parámetros a_{max} , h_{max} , b , Q_i y el área efectiva de la válvula de salida A .

Los parámetros a_{max} , h_{max} , d y b se pueden medir utilizando instrumentos adecuados para la medición de longitudes, como cintas métricas, minimizando los errores de medición.

El caudal de entrada Q_i se puede estimar conectando la fuente de agua constante a un recipiente de volumen conocido. Una vez lleno el recipiente, el caudal se calcula dividiendo el volumen entre el tiempo que tomó llenarse, proporcionando una estimación de Q_i .

El área efectiva de la válvula de salida, A , es uno de los parámetros más complejos de estimar, ya que puede verse afectado por el rozamiento y otros factores relacionados con las características internas de la válvula, como la resistencia al flujo dentro del sistema de tuberías. Estos fenómenos impiden que el área efectiva de la válvula se pueda calcular directamente a partir de sus dimensiones físicas y la ecuación $A = \frac{\pi d^2}{4}$.

Por lo tanto, para estimar A , se propone realizar una regresión lineal sobre datos obtenidos experimentalmente. El proceso consiste en llenar el tanque hasta alcanzar la altura h_{max} y colocar un recipiente cuadrado de volumen conocido en la salida de la válvula. Al abrir completamente la válvula ($u = 1$), se toman mediciones periódicas de la altura del líquido en ambos tanques, h y h_2 , obteniendo un total de n muestras.

A partir de estas mediciones de la altura h_2 , se puede calcular la variación temporal del volumen en el tanque cuadrado. Al derivar numéricamente estas mediciones utilizando el método de Euler, obtenemos $n - 1$ estimaciones de la tasa de cambio del volumen, que coinciden con el caudal de salida Q_o .

Finalmente, utilizando estas $n - 1$ muestras de Q_o y h , se generan $n - 1$ ecuaciones basadas en la ecuación de Torricelli, que permiten realizar una regresión lineal para estimar el área efectiva A . Una ventaja de aplicar la regresión lineal sobre los $n - 1$ puntos es que se mitiga el efecto del ruido presente en las mediciones, obteniendo así una estimación más precisa del área efectiva de la válvula.

1.3 Representación del sistema en variables de estado

Buscaremos una descripción en espacio de estados de nuestro sistema. Para esto, se linealizara el sistema en torno al punto de equilibrio $h_0 = 0.45m$. El sistema queda descrito por una variable de estado $x = h$, es decir, la altura del líquido en el tanque y una entrada $u \in [0, 1]$ que regula el área efectiva de la cañería de salida. La salida del sistema es nuestra variable a controlar, es decir, la altura h del líquido en el tanque.

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x, u) &= \dot{h} = \frac{Q_i - \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} u}{(b + mh)^2} \\ y = g(x, u) &= h \end{aligned}$$

Podemos escribir a nuestras variables de interes como:

$$x = x_e + \delta_x \quad u = u_e + \delta_u \quad y = y_e + \delta_y$$

Donde δ_x , δ_u y δ_y son apartamientos del equilibrio x_e , u_e e y_e . Luego, podemos aproximar linealmente la variación en los apartamientos del punto de equilibrio a partir del polinomio de Taylor:

$$\dot{\delta}_x \approx \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{x=x_e} \delta_x + \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{u=u_e} \delta_u = A \delta_x + B \delta_u$$

$$\delta_y \approx \left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{x=x_e} \delta_x + \left. \frac{\delta g}{\delta u} \right|_{u=u_e} \delta_u = C \delta_x + D \delta_u$$

Donde A, B, C y D son las matrices que definen la representación del sistema en variables de estado. Como en este sistema hay solo una variable de estado, h , las matrices A, B, C y D serán solo escalares.

Realizando las cuentas obtenemos que:

$$A = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{x=x_e} = -\frac{(2bm + 2m^2 x_e) \left(Q_i - \frac{\pi d^2 u_e \sqrt{g x_e}}{2\sqrt{2}} \right)}{(b + m x_e)^4} - \frac{\pi d^2 u_e g}{4\sqrt{2} g x_e (b + m x_e)^2} = -\frac{\pi d^2 u_e g}{4\sqrt{2} g x_e (b + m x_e)^2}$$

$$B = \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{u=u_e} = -\frac{\frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 g x_e} u_e}{(b + m x_e)^2} \quad C = \left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{x=x_e} = 1 \quad D = \left. \frac{\delta g}{\delta u} \right|_{u=u_e} = 0$$

El primer termino de A se anula ya que contiene a $\dot{x}(x_e) = \dot{h}(h_e) = 0$.

Sabiendo que $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$, que nuestro punto de equilibrio es $h_0 = 0.45m$ y conociendo las dimensiones de nuestra planta expresadas en el sistema métrico internacional: $a_{max} = 0.4m$, $h_{max} = 0.9m$, $b = 0.1m$ y $Q_i = 1.333 \frac{m^3}{s}$, calculamos $m = \frac{a_{max} - b}{h_{max}} = 0.333$ y obtenemos las constantes para nuestra representación lineal en variables de estado del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_x &\approx -0.0024 \frac{1}{s} \delta_x + -0.0042 \frac{m}{s} \delta_u \\ \delta_y &\approx \delta_x \end{aligned} \tag{8}$$

Con $A = -0.0024 \cdot \frac{1}{s}$, $B = -0.0042 \frac{m}{s}$, $C = 1$ y $D = 0$

1.4 Transferencia de la planta en el punto de trabajo

Para diseñar un controlador para nuestra planta necesitamos mas información sobre la misma. Por esto, a partir de la transformada de Laplace obtenemos cuales son sus singularidades. Para esto aplicamos transformada de Laplace sobre la ecuación de estado bajo condiciones iniciales nulas. Luego, despejamos el cociente entre la variable a controlar de nuestra planta, la altura del liquido h , y la acción de control u de la planta. Esta relación está descripta por las matrices A, B, C y D de la representación del sistema en variables de estado de la siguiente forma:

$$P(s) = \frac{H(s)}{U(s)} = C(s.I - A)^{-1}B + D$$

Reemplazando las matrices A, B, C y D por sus expresiones genéricas en variables dimensionales del sistema y evaluadas en el punto de equilibrio, obtenemos una expresión de P(s).

$$P(s) = -\frac{\frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 g x_e} u_e}{(b + m x_e)^2} \left(s + \frac{\pi d^2 u_e g}{4\sqrt{2} g x_e (b + m x_e)^2} \right)$$

Finalmente, reemplazando por los valores numericos de cada variable obtenemos la transferencia de la planta para el punto de trabajo x_e y u_e .

$$P(s) = \frac{-0.004233}{s + 0.0237} \quad (9)$$

1.5 Transferencia de la planta para distintos punto de trabajo

Por ultimo, se planteo nuevamente la función de transferencia de la planta para distintos puntos de trabajo. En la tabla 1 se muestran los puntos de trabajo junto a las transferencias obtenidas.

h_0	u_0	$P(s)$
0.10m	1.0691	$\frac{-0.007015}{s+0.0375}$
0.20m	0.7560	$\frac{-0.006349}{s+0.012}$
0.30m	0.6172	$\frac{-0.0054}{s+0.005556}$
0.40m	0.5346	$\frac{-0.004581}{s+0.003061}$
0.50m	0.4781	$\frac{-0.003922}{s+0.001875}$
0.60m	0.4365	$\frac{-0.003394}{s+0.001235}$
0.70m	0.4041	$\frac{-0.00297}{s+0.0008571}$
0.80m	0.3780	$\frac{-0.002624}{s+0.0006198}$

Table 1: Puntos de trabajo y plantas

Una vez obtenidas las funciones de transferencia, se procedió a graficar sus diagramas de Bode en la Fig. 3. En primer lugar, se observa que todas las plantas son estables, ya que poseen un único polo en el semiplano izquierdo. Además, se nota que a mayor altura de equilibrio, la planta se vuelve más lenta, lo cual se refleja en la disminución del valor absoluto de los polos. Esta variación afecta directamente el ancho de banda de cada planta. Por lo tanto, al diseñar un controlador con especificaciones de velocidad de respuesta, las plantas más lentas requerirán mayores esfuerzos de control para lograr el mismo desempeño. Esto podría llevar a la saturación del actuador, lo que limitaría el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

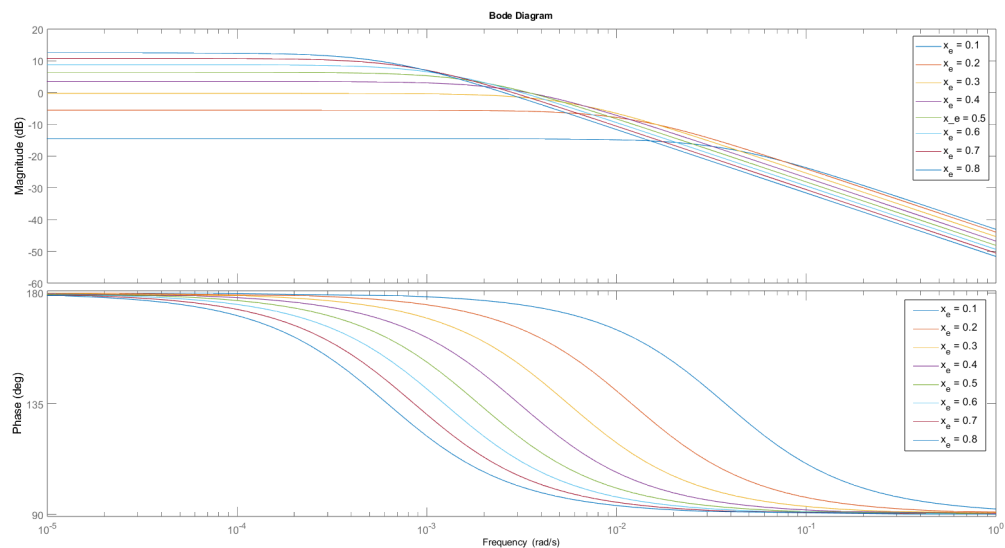


Figure 3: Bodes de plantas linealizadas para distintos equilibrios

2 Diseño en Matlab

2.1 Simulación a lazo abierto

Se armaron los modelos de la planta no lineal y linealizada en Simulink y se obtuvieron las respuestas al escalón para $h_0 = 0.45\text{m}$ y $u_0 = 0.504$ cuando la entrada de control pasa a valer $1.1u_0$. En la Fig. 4 se muestra el diagrama utilizando en Simulink y en la Fig. 5 los resultados de las simulaciones. Se observa un error en estado estacionario del 2,7% entre la respuesta de la planta no lineal y la de la planta linealizada. La diferencia entre la respuesta de la planta no lineal y la planta linealizada se debe a la simplificación inherente al proceso de linealización. La planta linealizada solo es una aproximación local del comportamiento real de la planta no lineal, válida cerca del punto de operación.

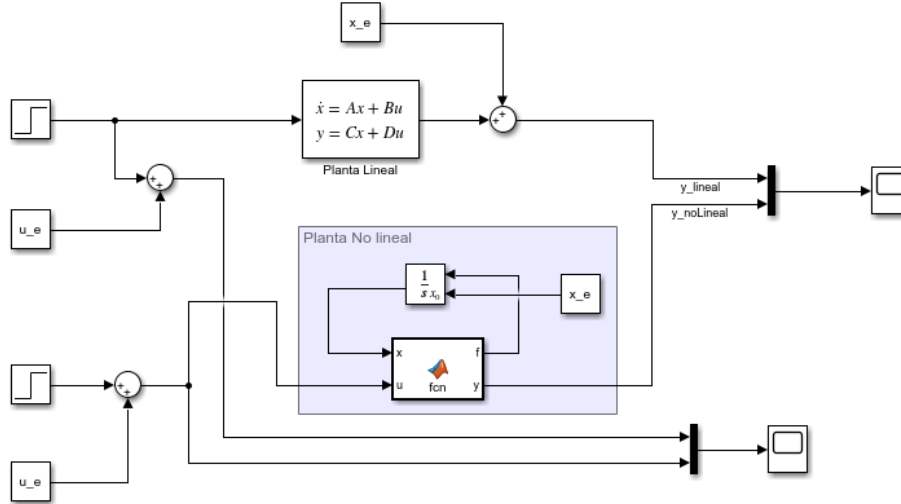


Figure 4: Diagrama en bloques de Simulink

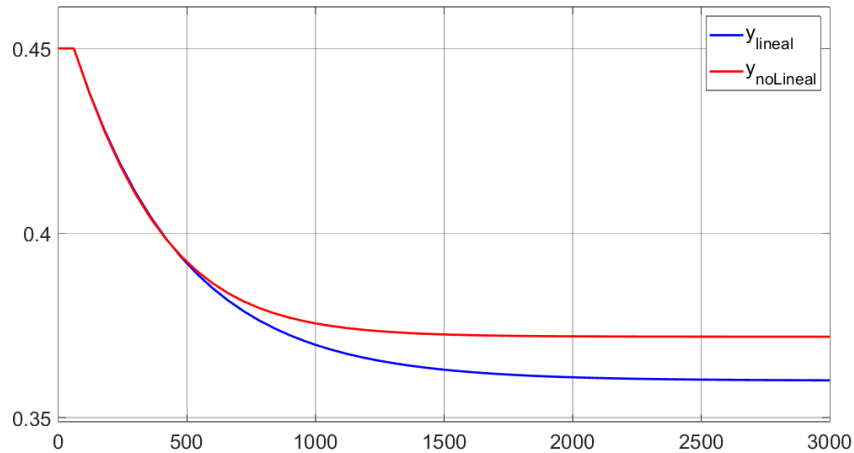


Figure 5: Respuesta al escalón planta lineal y planta no lineal

2.2 Diseño de un Controlador

El controlador fue diseñado utilizando la técnica de *loop shaping*, partiendo de la linealización de la planta en torno al punto de equilibrio $h = h_0$ y $u = u_0$ dada por la ecuación (9). Dado que el controlador es lineal y la planta es no lineal, se manejan incrementos sobre el punto de equilibrio para ajustar el control a variaciones de la salida. Para las pruebas,

se consideraron transiciones de una referencia de $h = 0.45$ m a $h = 0.35$ m y de $h = 0.45$ m a $h = 0.55$ m, buscando que el tiempo de establecimiento fuese menor a 8 minutos sin que el actuador alcanzara su límite de saturación en ningún momento. Además, el controlador fue diseñado para lograr error nulo en estado estacionario ante cambios en la referencia tipo escalón. Se realizó la simulación de la respuesta del sistema y se graficaron tanto las curvas del escalón como la acción de control para evaluar el rendimiento final.

En primer lugar, para simplificar el diseño del controlador, se definió una planta ficticia $\hat{P}(s)$ que incorpora los elementos del controlador previamente establecidos por las condiciones del problema y de diseño. Estos elementos incluyen el signo negativo, que invierte la fase de la planta, y un integrador, que garantiza un error nulo en estado estacionario frente a referencias de tipo escalón.

$$\hat{P}(s) = -\frac{P(s)}{s}$$

Posteriormente, se diseñará el controlador $\hat{C}(s)$, y al final se incorporarán los elementos adicionales en $\hat{P}(s)$ para obtener el controlador final $C(s)$.

$$C(s) = -\frac{\hat{C}(s)}{s}$$

En este caso, dado que no hay polos inestables ni ceros de fase no mínima y la dinámica de la planta es sencilla, conteniendo solo una singularidad, la forma más práctica de diseñar el controlador es cancelar toda la planta $P(s)$ y luego ajustar la ganancia para lograr la frecuencia de cruce por cero deseada. Aunque la frecuencia de cruce por cero no representa directamente el ancho de banda del sistema a lazo cerrado, está proporcionalmente relacionada con él. Es crucial ajustar el ancho de banda del lazo para que se mantenga dentro de los límites operativos del actuador, evitando saturación y garantizando que la entrada u se mantenga en un rango seguro. Si el ancho de banda del lazo es considerablemente mayor que el de la planta $P(s)$, la transferencia $S_u(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$ se amplificará a altas frecuencias, lo que puede provocar sobrepicos y saturar el actuador. Esto se puede observar al escribir $S_u(s)$ de la siguiente manera:

$$S_u(s) = \frac{T(s)}{P(s)}$$

Este comportamiento tiene sentido físico ya que al querer lograr un sistema a lazo cerrado rápido sobre una planta mas lenta o con menor ancho de banda, se deben aplicar altas fuerzas de control para lograr que la planta reaccione a la velocidad que impone el lazo.

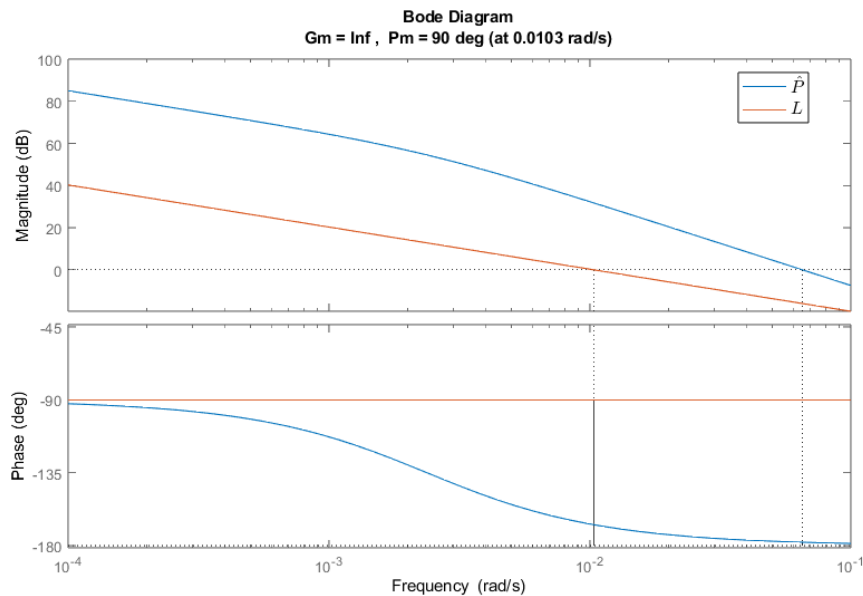


Figure 6: Diagramas de bode de $L(s)$ y $\hat{P}(s)$

Teniendo en cuenta estas consideración, se fija la frecuencia de cruce por cero de forma empírica con el objetivo de que se cumplan las especificaciones dadas. El controlador $\hat{C}(s)$ diseñado es:

$$\hat{C}(s) = 2.438(s + 0.0024)$$

Por lo tanto, el controlador final obtenido para el control del tanque no lineal es:

$$C(s) = -\frac{\hat{C}(s)}{s} = -\frac{2.438(s + 0.0024)}{s}$$

Este ultimo equivale a un controlador PI con ganancias $K_i = -2.438$ y $K_p = 0.005778$

En la Fig. 6 se graficaron los diagramas de bode de la planta modificada $\hat{P}(s)$ y de la transferencia de lazo $L(s) = P(s) \cdot C(s)$. Se observa que se obtiene un margen de fase de 90 grados para el lazo y que este es independiente de la frecuencia de cruce por cero ya que $L(s)$ posee un único polo en el origen y no tiene ceros.

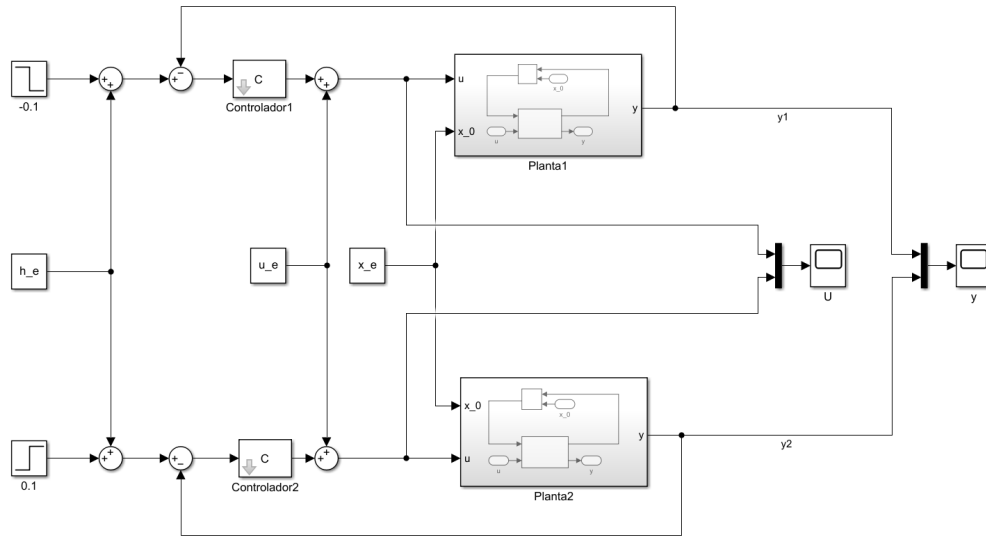


Figure 7: Diagrama en bloques: Planta no lineal + controlador lineal

Por otro lado, una vez diseñado el controlador lineal, se realizaron simulaciones en Simulink para analizar las respuestas al escalón solicitadas, con el fin de verificar el comportamiento de la planta no lineal en términos de tiempo de establecimiento y saturación del actuador. En la Fig. 7 se muestra el diagrama de bloques utilizado, mientras que en las Fig. 8 y 9 se presentan las salidas del sistema para un escalón que varía de h_0 a $h_0 - 0.1$ m y $h_0 + 0.1$ m, respectivamente, junto con las acciones de control correspondientes. La simulación se realizó durante un total de 20 minutos, aplicándose el escalón transcurrido un minuto desde su inicio. Se observa que las acciones de control no superan los límites impuestos por el actuador, manteniéndose dentro del rango acotado (0,1). Además, se observa un error nulo en estado estacionario para la referencia, y que el tiempo de establecimiento es inferior a 8 minutos, considerando que se alcanza cuando la diferencia entre y_0 y y_{final} es menor al 2%.

Para confirmar este último punto, se extrajo el valor exacto del tiempo de establecimiento para la transferencia $T(s)$ utilizando la función `stepinfo` de Matlab, obteniéndose un resultado de 379.2 segundos, es decir, 6 minutos y 29.2 segundos. Si bien este cálculo se basa en la planta lineal y no en la planta real, que es no lineal, dado que la simulación se realizó en las cercanías del punto de equilibrio y el tiempo obtenido es significativamente menor que 8 minutos, se puede concluir que se cumple con el comportamiento requerido.

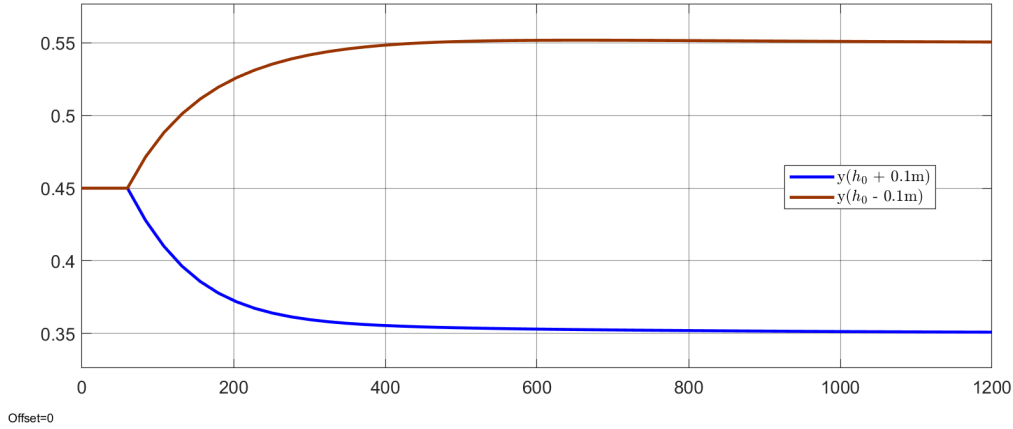
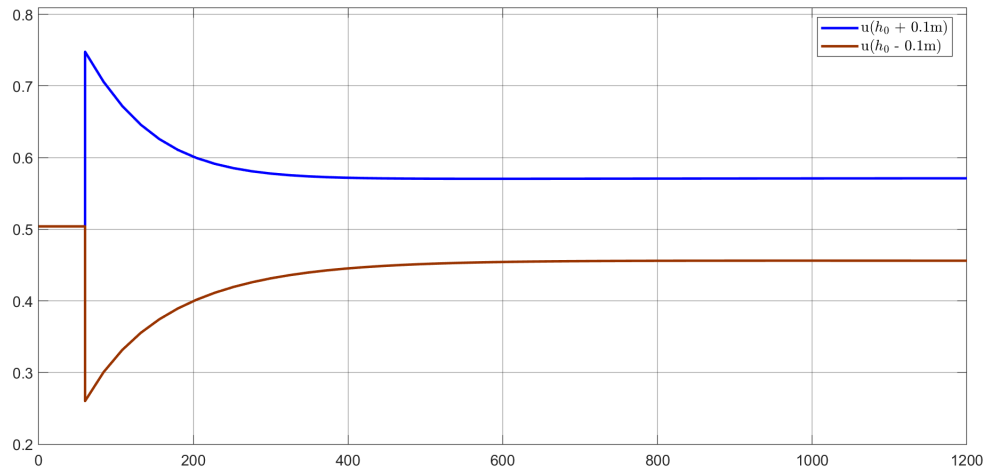


Figure 8: Respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado

Figure 9: Acciones de control $u(t)$ para las respuestas al escalón del sistema a lazo cerrado

A pesar de que el diseño del controlador se basa en una planta linealizada, se obtuvo un buen desempeño al aplicarlo a la planta no lineal, como se observa en las Fig. 8 y 9. Esto es esperable dado que las variaciones de altura solicitadas se encuentran cerca del punto de equilibrio h_0 , donde la linealización de la planta es válida. Sin embargo, en situaciones donde las variaciones sean mayores o el comportamiento no lineal de la planta sea más predominante, se podría requerir un ajuste adicional del controlador para garantizar el cumplimiento de las especificaciones. Además, si bien el ancho de banda del lazo cerrado fue ajustado para evitar la saturación del actuador, un incremento en la magnitud de las variaciones de h podría llevar a fuerzas de control más elevadas que excedan las capacidades del actuador.

2.3 Perturbación de flujo de entrada Q_i

En este ejercicio, se buscó enriquecer la simulación previamente realizada añadiendo una perturbación a la señal Q_i que redujera el flujo en un 10% en un momento específico, distinto al instante en el que se produjo el cambio de referencia de altura. La integración de esta perturbación se llevó a cabo de manera que los efectos de ambos eventos no se superpusieran; es decir, la respuesta al escalón había completado su transitorio antes de introducir la perturbación. Para lograr esto, se realizó la simulación sobre el modelo no lineal, facilitando así el acceso al punto de entrada de Q_i .

La simulación en Simulink se llevó a cabo durante 2000 segundos, con la perturbación aplicada a Q_i en el segundo 1000. El diagrama en bloques del modelo de Simulink se presenta en la Fig. 10. Posteriormente, se graficó la respuesta al escalón, que se muestra en la Fig. 11, así como las acciones de control, representadas en la Fig. 12. Se observa que,

aunque el controlador no fue diseñado específicamente para manejar perturbaciones en el flujo de entrada, la salida se estabiliza, logrando un error nulo en estado estacionario. Esto es posible gracias a que el controlador diseñado incluye una acción integral, la cual corrige de manera automática este tipo de desviaciones acumuladas en la salida, compensando la perturbación.

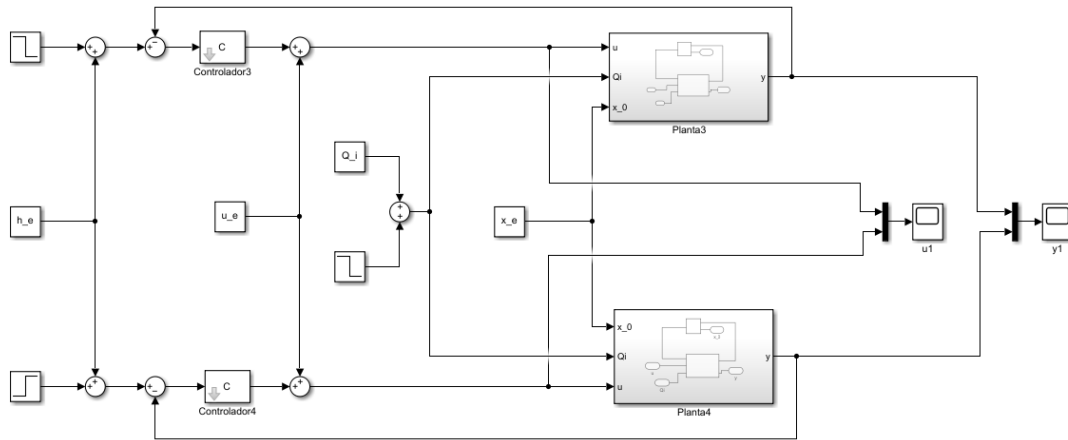


Figure 10: Diagrama en bloques del modelo en Simulink.

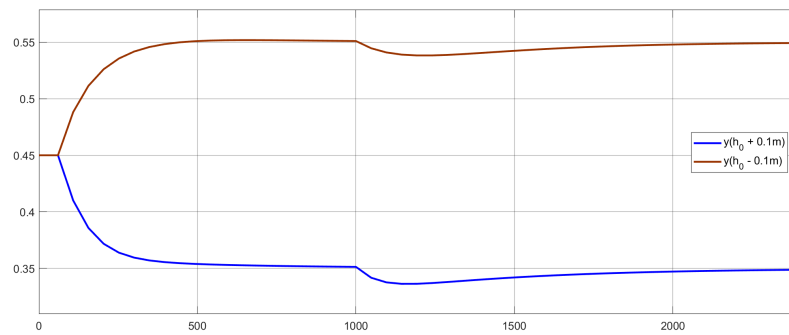


Figure 11: Respuesta al escalón.

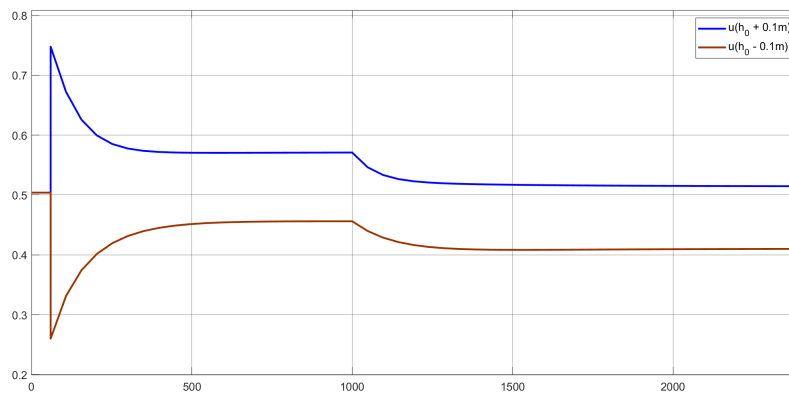


Figure 12: Acciones de control.