



Universidad de Buenos Aires

FACULTAD DE INGENIERÍA

LABORATORIO DE CONTROL (86.22)

Trabajo Practico N°1 - Grupo 4

2°C 2024

Alumno: Milidoni, Cristian Julian

Padrón: 107647

Alumno: Nobili, Nicolas

Padrón: 107540

Septiembre 2024

Contents

1	Introducción	2
2	Modelado e Identificación del Sistema	3
2.1	Diagrama de la planta y magnitudes de interés	3
2.2	Péndulo	3
2.2.1	Identificación	4
2.2.2	Validación de Resultados	6
2.3	Servomotor	6
2.3.1	Identificación	6
2.3.2	Validación de Resultados	8
2.4	Planta total	8
2.4.1	Función de transferencia	8
2.4.2	Espacio de Estados	9
2.4.3	Retardo (Delay)	10
2.4.4	Validación de Resultados:	11
3	Controlador	12
3.1	Limitaciones de Diseño	12
3.2	Diseño de los Controladores	13
3.3	Control Proporcional	13
3.4	Control Proporcional / Integral	15
3.4.1	Respuesta al escalón de $u(t)$	16
3.5	Control Proporcional / Derivativo	17
3.6	Conclusión	20

1 Introducción

El objetivo de este trabajo es modelar e identificar la dinámica de una planta compuesta por un péndulo que pivota sobre un brazo acoplado a un servomotor, como se ilustra en la Fig. 1. Una vez identificada la planta, se diseñaron controladores de tipo P, PI y PD, considerando las posibles restricciones de diseño. El desempeño del sistema en lazo cerrado fue evaluado implementando los controladores mediante las discretizaciones backward y Tustin, contrastando los resultados con el comportamiento observado en la realidad.

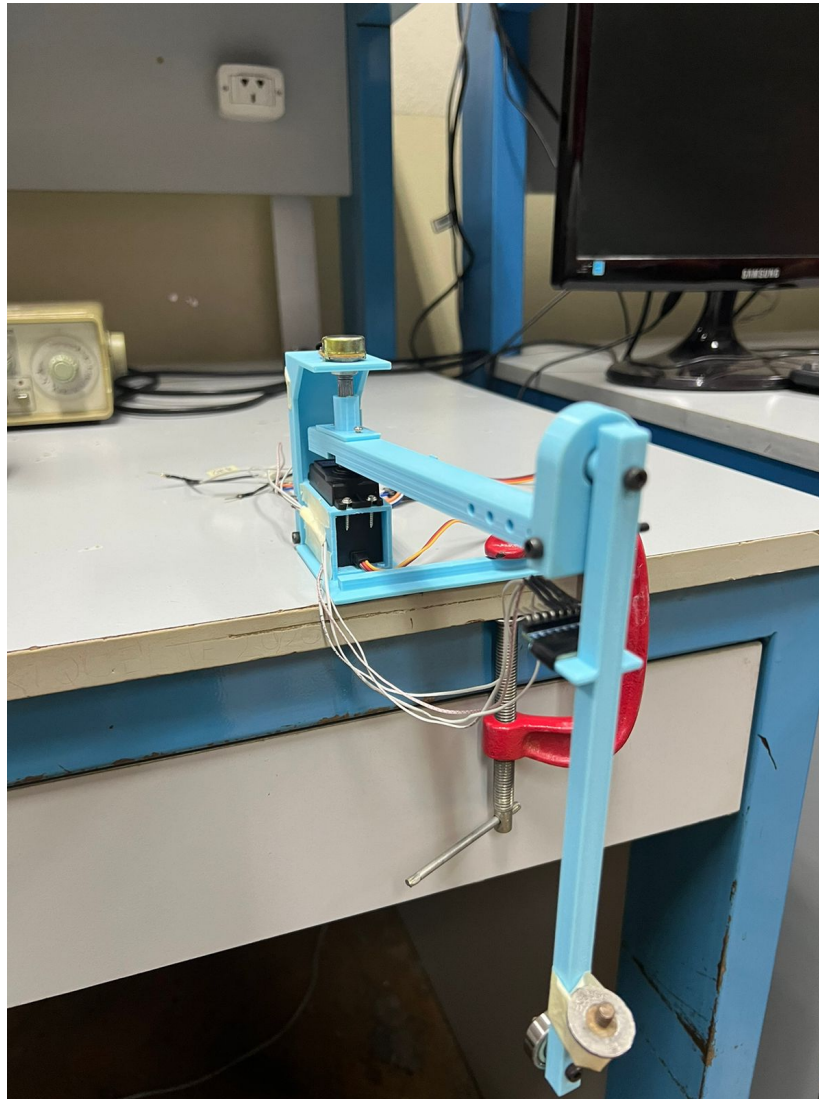


Figure 1: Planta a identificar y controlar

2 Modelado e Identificación del Sistema

El objetivo de esta sección es identificar el modelo de la planta a controlar. La sección está organizada en cuatro partes: en la primera, se presenta un diagrama de la planta a identificar y se definen las magnitudes de interés del sistema; en la segunda, se lleva a cabo la identificación de la dinámica interna del péndulo; en la tercera, se identifica la función de transferencia del servomotor; y finalmente, en la cuarta parte, se combinan ambos modelos identificados para obtener el modelo completo de la planta.

2.1 Diagrama de la planta y magnitudes de interés

A partir del diagrama de la planta mostrado en la Fig. 2, se definen las siguientes magnitudes de interés para el control del sistema:

- θ : Ángulo del péndulo medido en sentido antihorario, que corresponde a la salida del sistema. Este ángulo se mide en radianes y se obtiene procesando los datos proporcionados por los acelerómetros y giróscopos de la IMU. Debido a que se empleará un modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio, se asume que estas aproximaciones son válidas en un rango de $\pm 30^\circ$, es decir, $\pm \frac{\pi}{6}$ rad.
- ϕ : Ángulo del brazo del servomotor, también medido en sentido antihorario. Este ángulo se mide en radianes y se obtiene procesando la tensión de salida de un potenciómetro. Los valores límite para este ángulo se establecen en $\pm 60^\circ$, es decir, $\pm \frac{\pi}{3}$ rad, debido a las limitaciones físicas de la planta.
- u : Señal de control enviada al servomotor, que actúa como entrada del sistema. Esta señal corresponde al ángulo de referencia ϕ_{ref} para el brazo del servomotor, medido en radianes. Internamente, esta señal se transforma en un t_{on} que ajusta el ciclo de trabajo (duty cycle) de la señal PWM que controla la posición del servomotor. Los valores límite de u coinciden con los límites de ϕ , es decir, $\pm \frac{\pi}{3}$ rad.

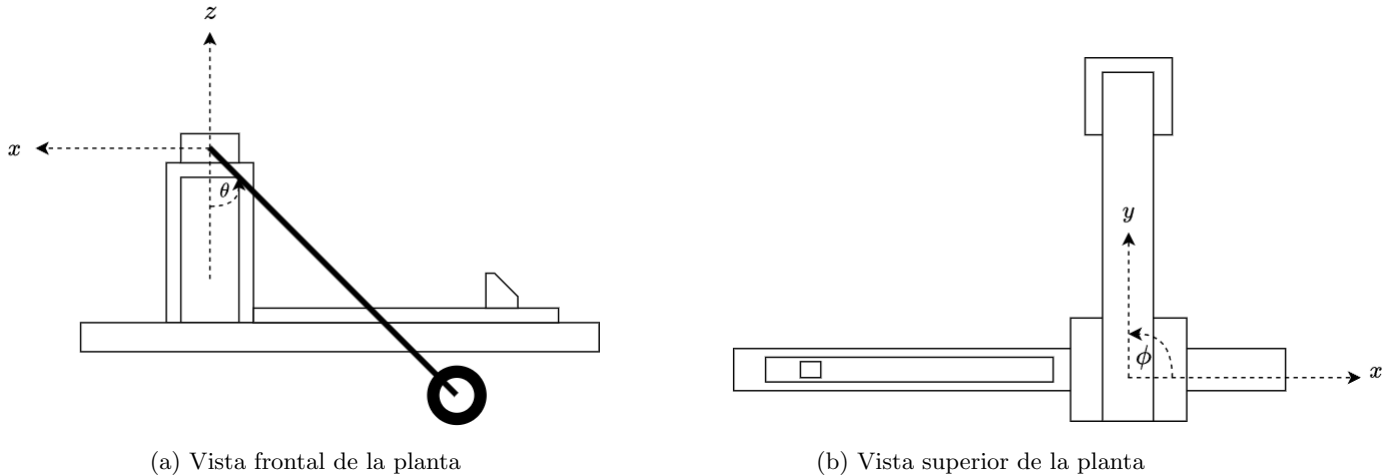


Figure 2: Diagrama de la planta

2.2 Péndulo

El comportamiento dinámico de un péndulo simple, sujeto a un torque externo y con rozamiento, se describe mediante la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = \tau_{ext}$$

Donde:

- $I = ml^2$ es el momento de inercia del péndulo respecto al punto de suspensión.
- b es el coeficiente de fricción.

- m es la masa del péndulo (kg).
- l es la longitud del péndulo (m).
- g es la aceleración de la gravedad (m/s^2).
- τ_{ext} es el torque externo aplicado (Nm).
- θ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical (rad).

Linealizando la ecuación alrededor del punto de equilibrio $[\theta, \dot{\theta}] = [0, 0]$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{1}{ml^2}\tau_{\text{ext}}$$

La representación en espacio de estados de dicha ecuación es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau_{\text{ext}}$$

donde la salida del sistema está dada por:

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, se obtiene la siguiente función de transferencia que corresponde a un sistema de segundo orden con amortiguamiento.

$$\frac{\Theta(s)}{\tau_{\text{ext}}(s)} = \frac{\frac{1}{ml^2}}{s^2 + \frac{b}{ml^2}s + \frac{g}{l}}$$

2.2.1 Identificación

Al momento de querer hacer la identificación de la transferencia del péndulo completa, resulta impracticable realizarla mediante la respuesta al escalón del sistema ya que no se dispone de una forma directa de aplicar un torque. Por lo tanto, se optó por realizar la identificación de los polos del sistema utilizando la respuesta del péndulo a condiciones iniciales. La identificación de dichos polos permite obtener el denominador de la transferencia buscada.

Para un sistema lineal y tiempo invariante, la solución a las ecuaciones del estado con condiciones iniciales puede ser expresada mediante la matriz de transición de estados e^{At} , que se obtiene a partir de la matriz A :

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estado en el tiempo t y $x(0)$ son las condiciones iniciales. Los polos del sistema están directamente relacionados con los autovalores de la matriz A , que determinan la estabilidad y la velocidad de respuesta del sistema.

En este caso, dado que la respuesta del péndulo bajo condiciones iniciales refleja su comportamiento dinámico sin la necesidad de aplicar un torque externo, fue posible estimar los polos observando la evolución temporal de la respuesta angular $\theta(t)$. A partir de esta respuesta, se determinaron los autovalores asociados con la matriz A , permitiendo así obtener una representación precisa de la dinámica del péndulo. A partir de los polos de A , se obtiene el denominador de la transferencia $\frac{\Theta(s)}{\tau_{\text{ext}}(s)}$. Luego la constante restante se estimara al momento de juntar los modelos del péndulo y del servomotor.

La identificación se realizó discretizando la transferencia del péndulo utilizando *Zero-Order Hold* y realizando una regresión lineal sobre los n datos medidos del ángulo θ . Este método es particularmente útil en sistemas discretos, ya

que permite modelar el comportamiento dinámico del sistema en función de las condiciones iniciales y los valores de entrada.

La función de transferencia discreta se expresa como:

$$\frac{\Theta(z)}{\tau_{\text{ext}}(z)} = \frac{P(z)}{z^2 + az + b}$$

Al establecer $\tau_{\text{ext}}(z) = 0$ y aplicar la antitransformada Z, se obtiene la ecuación en diferencias que representa la dinámica del sistema y define la respuesta ante condiciones iniciales:

$$\Theta(z)(z^2 + az + b) = 0 \xrightarrow{Z^{-1}} \theta(k+2) = -a\theta(k+1) - b\theta(k)$$

A través de esta ecuación, se establecen $n-2$ relaciones entre los ángulo en diferentes instantes de tiempo. Esta relación se puede expresar en forma matricial, facilitando el proceso de ajuste de los parámetros:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \theta(2) \\ \theta(3) \\ \vdots \\ \theta(k+2) \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \theta(0) & \theta(1) \\ \theta(2) & \theta(3) \\ \vdots & \vdots \\ \theta(k) & \theta(k+1) \end{bmatrix}$$

La estimación de los parámetros $-a$ y $-b$ se obtiene mediante la fórmula de mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y} \longrightarrow \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9902 \\ -0.9964 \end{bmatrix}$$

A partir de los valores de a y b , se puede construir el polinomio característico del sistema discretizado y obtener los polos discretos:

$$p_{d1} = 0.9951 + 0.0785i \quad \wedge \quad p_{d2} = 0.9951 - 0.0785i$$

Considerando la relación $z = e^{sT_s}$, se calculan los polos del sistema en tiempo continuo:

$$p_d = e^{T_s p_c} \implies p_{c1} = -0.1792 + 7.8748i \quad \wedge \quad p_{c2} = -0.1792 - 7.8748i$$

Se observa que el péndulo posee un par de polos complejos conjugados en el semiplano izquierdo por lo que se trata de un sistema de segundo orden, estable y subamortiguado.

Finalmente, se reemplaza con los valores obtenidos y se consigue la función de transferencia del péndulo con un troque externo y su representación en espacio de estados con una constante k desconocida.

$$\frac{\Theta(s)}{\tau_{\text{ext}}(s)} = \frac{k}{s^2 + 0.3585s + 62.04}$$

\wedge

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -62.04 & -0.3585 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \tau_{\text{ext}}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

2.2.2 Validación de Resultados

Se comparo el modelo del péndulo obtenido con los datos experimentales. Para ello se cargo el modelo en MATLAB y se simulo la respuesta del sistema a condiciones iniciales; en la Fig. 3 se muestran los resultados de dicha simulación junto con las mediciones.

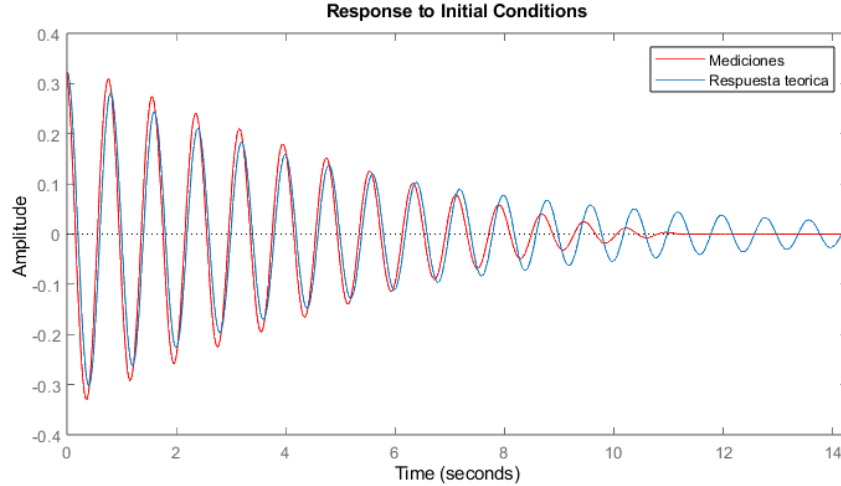


Figure 3: Respuesta a condiciones iniciales del péndulo

Se observa que el modelo estimado presenta una aproximación muy cercana a la realidad durante las primeras oscilaciones. Posteriormente, el modelo muestra que el sistema se detiene, mientras que las mediciones experimentales aún detectan pequeñas oscilaciones residuales mostrando un menor amortiguamiento. Este comportamiento sugiere que podría ser necesario un modelo más complejo para capturar completamente esta dinámica o que las oscilaciones residuales podrían deberse a efectos no lineales en el sistema. A pesar de esto, el modelo actual es suficientemente preciso para el modelado de la planta y el diseño de un controlador.

2.3 Servomotor

Para el modelado e identificación de la función de transferencia del servomotor, se adoptó un enfoque diferente al utilizado con el péndulo, ya que en este caso fue posible medir directamente la respuesta al escalón de $u(t)$ a $\phi(t)$ mediante el uso de un potenciómetro. Cabe mencionar que las mediciones se realizaron con el péndulo montado, aunque su presencia no afectó el comportamiento del sistema debido a su bajo peso. Además, no se consideró la existencia de un retardo o delay en el modelado del servomotor, aunque este será tenido en cuenta al integrar el sistema completo de la planta.

2.3.1 Identificación

Se asumió inicialmente una función de transferencia y, a partir de ella, se estimaron los parámetros correspondientes utilizando MATLAB. El servomotor fue modelado como un sistema de segundo orden, cuya función de transferencia posee únicamente dos polos.

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\gamma}{s^2 + \beta s + \alpha}$$

En primer lugar, se utilizó el **MATLAB Identification Toolbox** para la estimación de la transferencia. A partir de los datos de las mediciones de la respuesta al escalón se construyó una estructura de datos de identificación y posteriormente se utilizó la función `TFEST()` para estimar los parámetros de la transferencia, la cual utiliza estimación por mínimos cuadrados. La función obtenida fue la siguiente:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{162.2}{s^2 + 17.93s + 153.3}$$

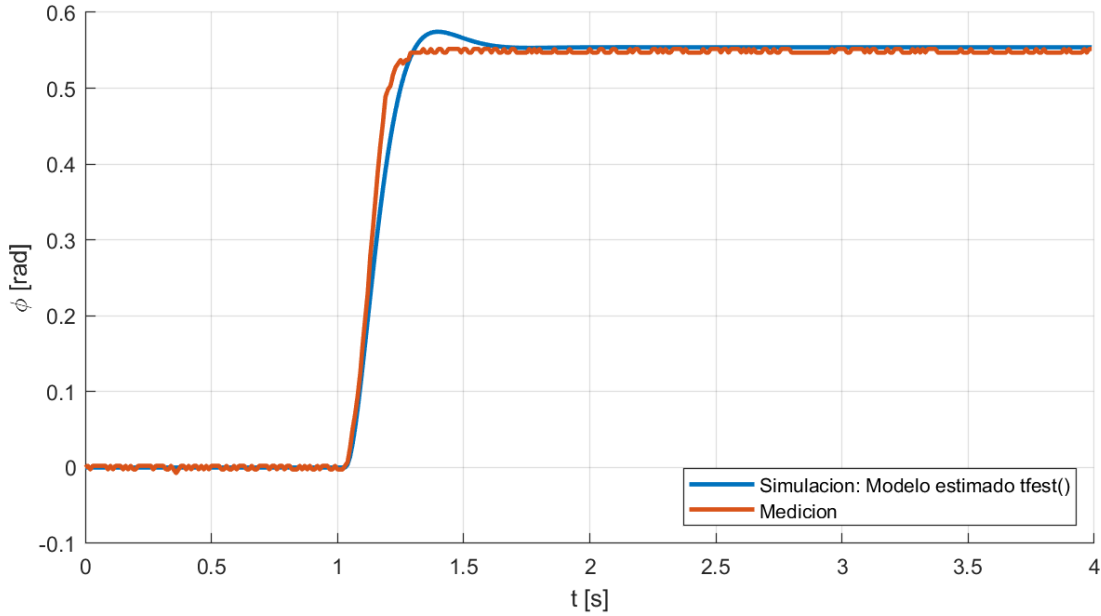


Figure 4: Respuesta al escalón: Medición vs Modelo MATLAB TFEST()

La transferencia estimada inicialmente posee un par de polos complejos conjugados $p_{1-2} = -8.9646 \pm 8.5406i$, lo que indica que el sistema es subamortiguado. En la Fig. 4, se muestra la respuesta al escalón para una entrada de $u = \frac{\pi}{6}$, comparando la respuesta medida con la simulada a partir del modelo estimado. Aunque la respuesta del modelo minimiza el error cuadrático medio, no representa adecuadamente el comportamiento real del sistema, debido a la presencia de un sobrepico causado por los polos complejos conjugados.

Dado que este modelo permitía que los polos tomaran cualquier valor para minimizar el error, se descartó por su falta de precisión y fidelidad al reflejar el comportamiento real del servomotor. Se decidió entonces realizar una nueva estimación, esta vez imponiendo la condición de que el sistema sea críticamente amortiguado para evitar la aparición de un sobre pico y que la respuesta sea la mas rápida posible, es decir, que su función de transferencia tenga la forma:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\gamma}{(s - p)^2}$$

Para obtener este nuevo modelo, se calculó el valor del polo doble que generaría un amortiguamiento crítico basado en los datos experimentales. En este caso, no se utilizó el método de mínimos cuadrados, ya que el problema no es lineal en los parámetros al forzar polos iguales. En lugar de eso, se utilizó el tiempo de establecimiento de las respuestas al escalón, dado que para un sistema críticamente amortiguado, el tiempo de establecimiento se puede calcular con la expresión $t_s = \frac{4}{\omega}$, donde ω es la frecuencia natural del polo, y el polo está dado por $p = -\omega$.

Promediando el tiempo de establecimiento entre las mediciones, se obtuvo un valor de $t_s = 1.3025s$, lo que llevó a un polo estimado de $p = -14.6789$. Además, también se calculó la constante γ para que los valores finales de las respuestas al escalón medidas coincidieran con los simulados, promediando los resultados para los distintos casos disponibles y obteniendo $\gamma = 240.9646$.

Se decidió utilizar promedios tanto para el cálculo del polo como para la constante γ , debido a las variaciones observadas en estos parámetros para diferentes escalones. Estas variaciones podrían deberse a que el modelo no logra capturar completamente la dinámica del servomotor, además de fenómenos físicos como la banda elástica, que influyen en su comportamiento dinámico.

Finalmente, la transferencia del servomotor estimada es:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{240.9646}{(s + 14.6789)^2}$$

2.3.2 Validación de Resultados

Se validó el comportamiento del modelo final del servomotor comparándolo con los datos experimentales. En la Fig. 5 se graficaron las respuestas al escalón medidas junto con sus contrapartes simuladas. El comportamiento general muestra que el modelo propuesto no se ajusta de forma perfecta a ninguna de las respuestas reales, pero en promedio logra un buen ajuste para todas. Como se mencionó anteriormente, esto puede deberse a la banda elástica, que facilita el movimiento del servo en sentido antihorario y lo dificulta en sentido horario, o a la presencia de dinámica oculta que no se ha considerado en el modelo simplificado utilizado.

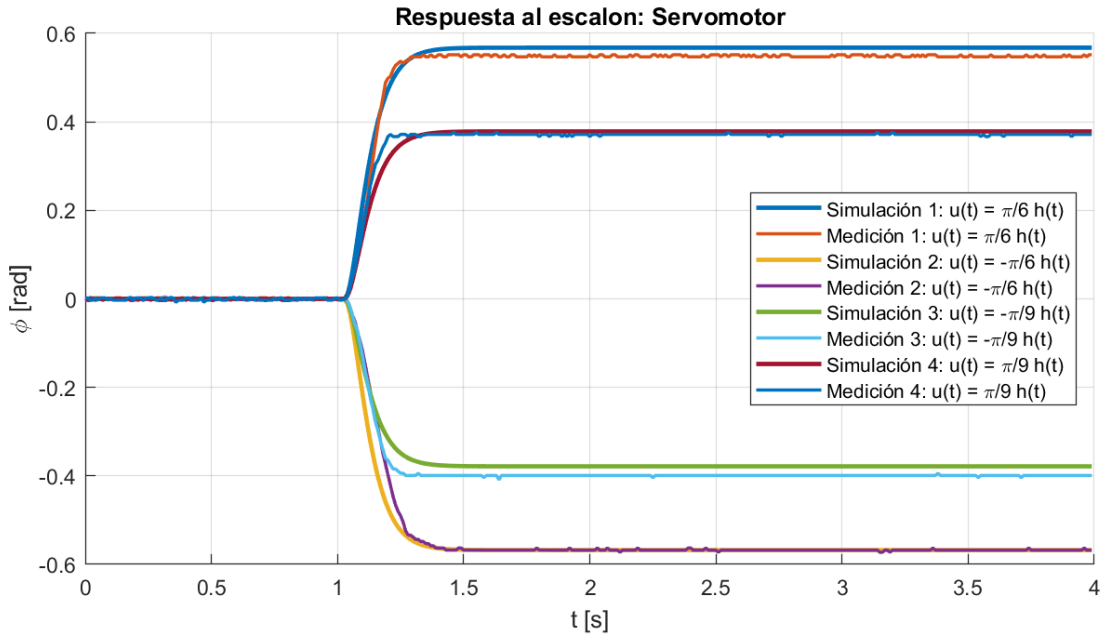


Figure 5: Respuesta al escalón del servomotor: Mediciones y Simulaciones

2.4 Planta total

Una vez identificados los sistemas del péndulo sin acción de entrada y del servomotor, se puede construir el sistema completo en espacio de estados, así como su función de transferencia asociada, para realizar una identificación final de los parámetros restantes del modelo. Además, como se mencionó anteriormente, se analizó la existencia de un retardo (delay) en la planta, el cual deberá ser considerado especialmente al diseñar un controlador. Al igual que con el servomotor, se cuenta con mediciones experimentales de la respuesta al escalón de la entrada $u(t)$ y la salida $\theta(t)$.

2.4.1 Función de transferencia

El objetivo es determinar la función de transferencia $\frac{\Theta(s)}{U(s)}$. Para ello, se la descompone en factores con términos conocidos de la siguiente manera:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\Theta(s)}{T_{ext}(s)} \cdot \frac{T_{ext}(s)}{\ddot{\Phi}(s)} \cdot \frac{\ddot{\Phi}(s)}{\Phi(s)} \cdot \frac{\Phi(s)}{U(s)}$$

Se conocen las expresiones de tres de estas transferencias: dos de ellas han sido identificadas previamente y la tercera es una relación de derivada segunda. En cuanto a la transferencia restante, la aceleración en el punto de pivote del

péndulo es directamente proporcional a la aceleración angular $\ddot{\phi}$ linealizando a primer orden, lo que implica que el torque sobre el péndulo también es proporcional a dicha aceleración angular. Entonces, se tiene:

$$\frac{\Theta(s)}{T_{ext}(s)} = \frac{k_1}{s^2 + 0.3585s + 62.04}$$

$$\frac{\ddot{\Phi}(s)}{\Phi(s)} = s^2$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{240.9646}{(s + 14.6789)^2}$$

$$\frac{T_{ext}(s)}{\ddot{\Phi}(s)} = k_2$$

Juntando todos los factores, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{240.9646 \cdot k_1 k_2 s^2}{(s + 19.0476)^2 (s^2 + 0.3585s + 62.04)} = \frac{240.9646 \cdot K s^2}{(s + 19.0476)^2 (s^2 + 0.3585s + 62.04)}$$

El valor de la constante K se estimo discretizando la transferencia con *zero-order hold* y se realizo una regresión lineal con todos los datos de las mediciones. Finalmente, la transferencia de la planta total es:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-222.15s^2}{(s + 14.6789)^2 (s^2 + 0.3585s + 62.04)}$$

2.4.2 Espacio de Estados

La representación en espacio de estados se construyó utilizando el modelo del péndulo identificado y la ecuación diferencial del servomotor, obtenida mediante la anti-transformada de su función de transferencia.

El modelo del péndulo en espacio de estados es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} \tau_{ext}$$

Por otro lado, la ecuación diferencial del servomotor, obtenida al aplicar la transformada inversa de Laplace a su función de transferencia, es:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\gamma}{s^2 + \beta s + \alpha} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \ddot{\phi} = -\beta \dot{\phi} - \alpha \phi + \gamma u$$

Sabiendo que $\tau_{ext} = k_2 \ddot{\phi}$ y definiendo $K = k_1 k_2$, se sustituye la expresión de $\ddot{\phi}$ en el sistema del péndulo. Luego, se incorporan las variables de estado ϕ y $\dot{\phi}$, obteniendo el siguiente sistema en espacio de estados para la planta completa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} & -K\alpha & -K\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\gamma \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \cdot u$$

La salida del sistema se define como:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los valores numéricos obtenidos, el modelo completo en espacio de estados de la planta es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -61.8768 & -0.3136 & 222.1301 & 26.9333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -272.0799 & -38.9897 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -222.1488 \\ 0 \\ 240.9646 \end{bmatrix} \cdot u \quad \wedge \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Este modelo describe la dinámica del péndulo acoplado al servomotor, donde las variables de estado incluyen tanto los ángulos y velocidades del péndulo como del servo.

2.4.3 Retardo (Delay)

En las mediciones experimentales se observó la presencia de un retardo que afecta al sistema, aunque su magnitud varía entre diferentes pruebas. Para abordar este comportamiento en el diseño del controlador, se ha decidido utilizar el criterio del peor caso, adoptando un retardo máximo observado de 0.06 segundos. A continuación, se incluye una representación gráfica del peor retardo medido en el sistema (ver Figura 6) donde se aplica un escalón en 1s.

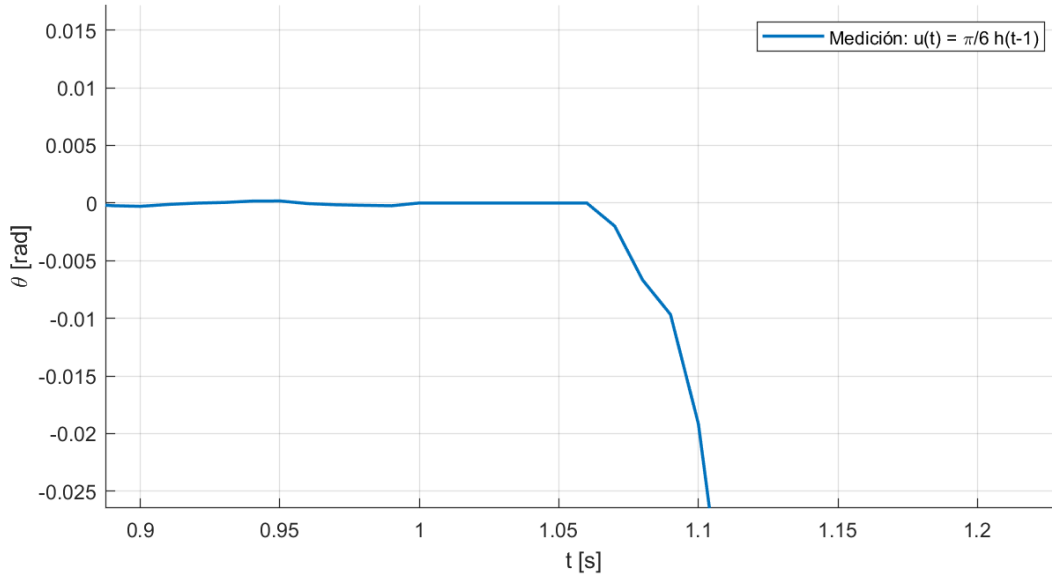


Figure 6: Peor retardo observado en el sistema durante las mediciones experimentales (0.06 segundos).

Este retardo, aunque pequeño, no afecta la dinámica principal descrita por la función de transferencia ni el modelo en espacio de estados del sistema, por lo que se trata por separado. El retardo se tendrá en cuenta únicamente al diseñar el controlador ya que dado el efecto que tiene sobre el ancho de banda del sistema a lazo cerrado.

Las posibles causas del retardo son variadas. En primer lugar, la implementación discreta del sistema introduce un desfase entre la aplicación de la señal de control y su efecto observable en la salida. En segundo lugar, el servomotor presenta un retardo inherente debido a su dinámica interna. Finalmente, el retardo variable también se debe al control mediante modulación por ancho de pulso (PWM), ya que el ciclo de actualización no es instantáneo. El PWM solo puede cambiar cuando el temporizador 1 (Timer1) del microcontrolador alcanza su valor máximo (ICR1), lo que introduce un pequeño retardo adicional.

Este retardo de 0.06 segundos, como se muestra en la Fig 6, deberá ser considerado cuidadosamente al diseñar el controlador para evitar posibles problemas de estabilidad. La transferencia de la planta considerando su retardo es:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-222.15s^2 \cdot e^{-0.06s}}{(s + 14.6789)^2(s^2 + 0.3585s + 62.04)}$$

2.4.4 Validación de Resultados:

Finalmente, se comparó el modelo de la planta completa con las respuestas experimentales, como se muestra en la Fig. 7. Se observa que el modelo obtenido aproxima adecuadamente las primeras oscilaciones, que corresponden al momento después del que el servomotor acelera y desacelera, aplicando torque sobre el péndulo. En los primeros 5 segundos de respuesta se tienen los errores porcentuales de la tabla 1 para cada una de las repuestas de la Fig. 7.

$u(t)$	Error Porcentual (0,5 s)
$\frac{\pi}{6}h(t-1)$	2.53%
$-\frac{\pi}{6}h(t-1)$	1.20%
$-\frac{\pi}{9}h(t-1)$	6.90%
$\frac{\pi}{9}h(t-1)$	13.04%

Table 1: Error porcentual en los primeros 5 segundos de la respuesta al escalón

Posteriormente, al igual que en el modelado del péndulo, la respuesta del modelo se desvanece, mientras que en la realidad el péndulo continúa oscilando durante más tiempo, aunque con una amplitud muy pequeña; y por lo tanto hay un gran error en el modelo con respecto a la realidad. A su vez se observa nuevamente la varianza que existe en el retardo inicial al comandar la acción de control, sin embargo este se aprecia que este no afecta la dinámica de la planta por lo que resulta apropiado el criterio utilizado para elegir el retardo del modelo.

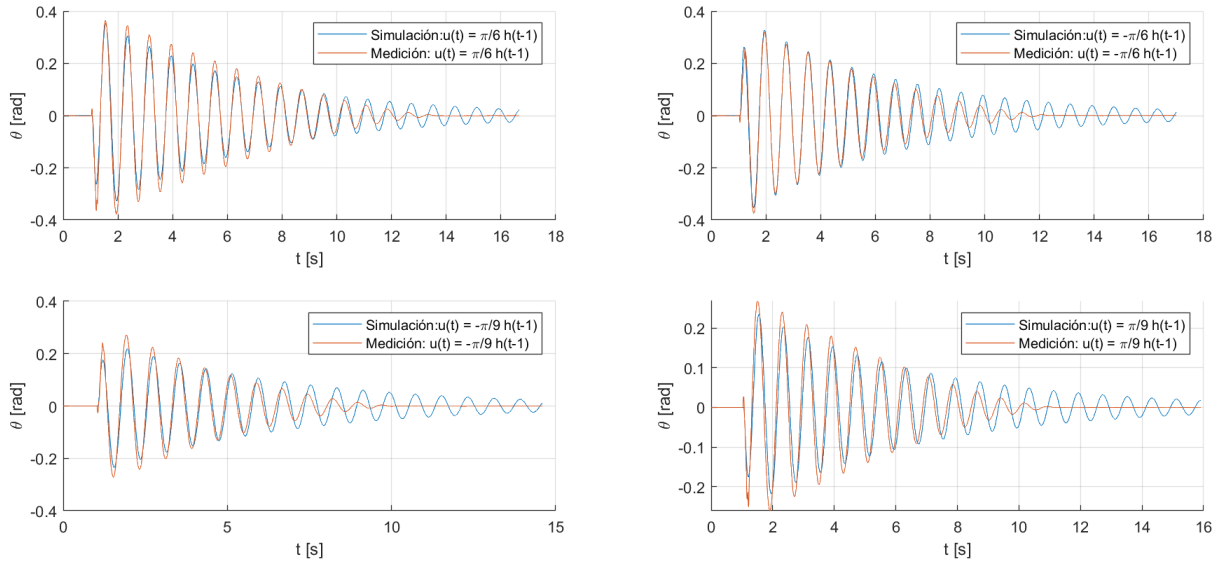


Figure 7: Respuesta al escalón de la plantas: Mediciones y Simulaciones

3 Controlador

3.1 Limitaciones de Diseño

En esta sección se analizan las posibles limitaciones que pueden surgir al diseñar un controlador, basándonos en la información sobre los polos de la planta y su estructura. En la Fig. 8 se muestra el diagrama de Bode de la planta $\hat{G}(s) = -G(s)$, sin considerar el retardo estimado. El signo negativo se agrega para contrarrestar la inversión de fase inherente a la planta, y deberá tenerse en cuenta al diseñar el controlador. Dado que la planta presenta dos ceros en el origen y cuatro polos, su función de transferencia tiene un comportamiento similar al de un filtro pasa-banda, con dos frecuencias de cruce por cero. Es importante destacar que las frecuencias de cruce por cero son proporcionales a las frecuencias de corte de la función de sensibilidad complementaria $T(s) = \frac{\Theta(s)}{R(s)}$. Cuanto más separadas estén estas frecuencias, mayor será el ancho de banda del sistema.

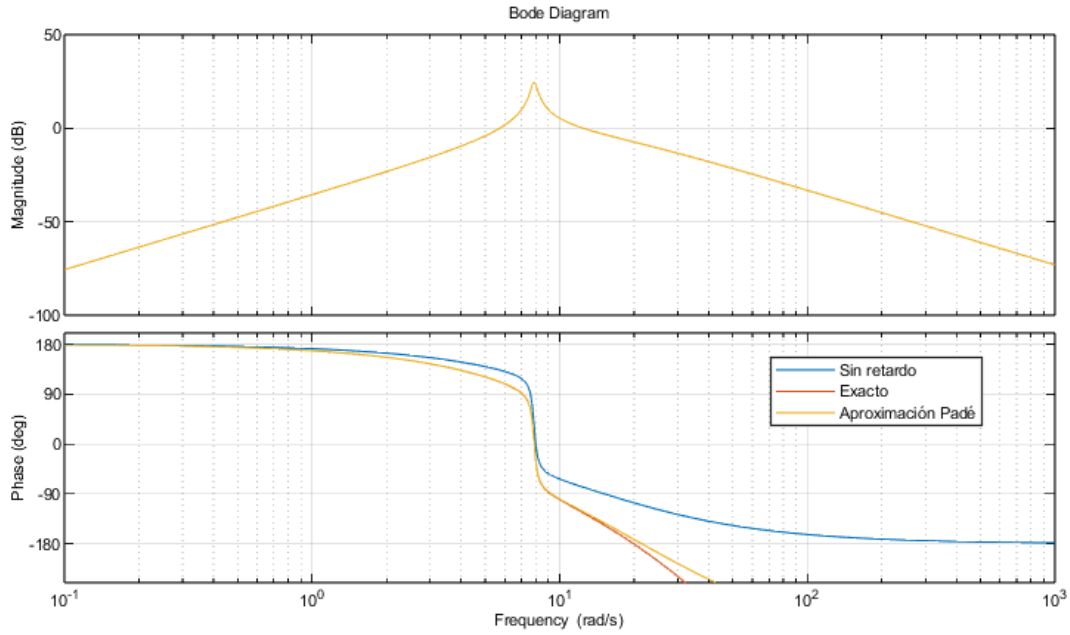


Figure 8: Diagrama de Bode de $\hat{G}(s)$ con y sin retardo

La primera limitación de diseño a considerar es que el ancho de banda del sistema estará restringido por la máxima acción de control permitida. Se sabe que si el ancho de banda del sistema es significativamente mayor que el de la planta $G(s)$, la transferencia $S_u(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$ se amplificará tanto a bajas como a altas frecuencias, lo que puede provocar sobrepicos y llevar a la saturación del actuador. La amplificación en altas frecuencias dado un alto ancho de banda también puede traer mayor sensibilidad al ruido de medición.

En segundo lugar, si se considera tanto el retardo intrínseco identificado en la planta como el retardo de media muestra impuesto por la discretización del control en la práctica, se observa otra limitación en el ancho de banda. El efecto generado por el retardo se traduce en un desplazamiento en la fase; en la Fig 9 se muestra la fase de la transferencia del retardo $D(s) = \exp(-0.065s)$ y su aproximación mediante Padé, que se utilizará al diseñar controladores cuando sea necesario. Esta aproximación es válida hasta aproximadamente $15.38 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Como puede apreciarse, el desplazamiento de fase limita la máxima frecuencia de cruce por cero superior, lo que también restringe el ancho de banda máximo alcanzable.

Utilizando la regla de diseño de que la parte de la planta con fase no mínima no debe aportar más de 30° de desfase para asegurar un margen de fase de 60° , la máxima frecuencia de cruce por cero sería de $8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Aunque esta regla no debe seguirse estrictamente al diseñar controladores para la planta identificada, es importante conocer la limitación impuesta por el retardo. En la Fig. 8 se puede observar cómo el retardo afecta la fase de la planta $\hat{G}(s)$, así como la

transferencia de la planta cuando se consideran ambos retardos, lo que da como resultado la siguiente expresión:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-222.15s^2 \cdot e^{-0.065s}}{(s + 14.6789)^2(s^2 + 0.3585s + 62.04)}$$

Esta limitación debe tenerse en cuenta al optimizar el desempeño del sistema.

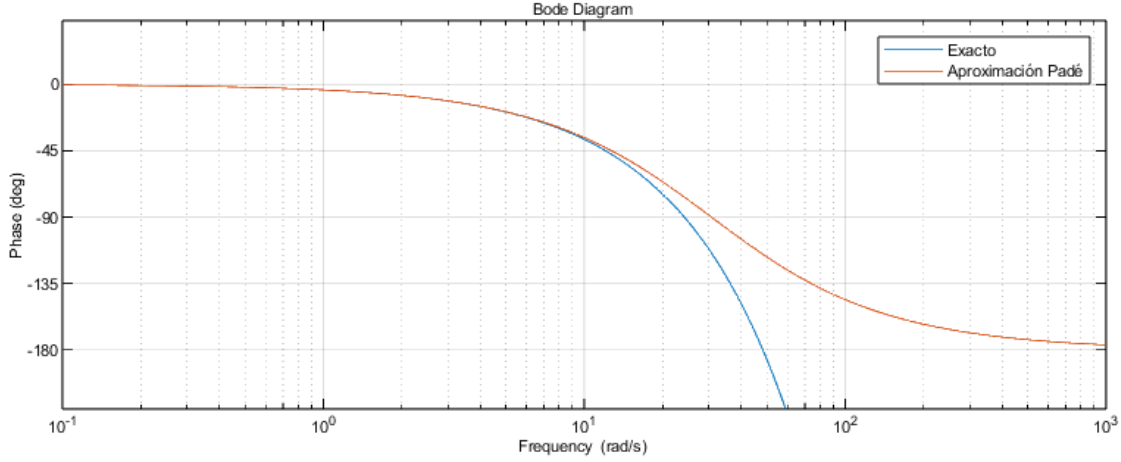


Figure 9: Fase $\phi(s)$ del retardo exacta y aproximación de padé

3.2 Diseño de los Controladores

Identificadas las limitaciones de diseño, se procedió a diseñar, mediante simulación, los controladores P, PI y PD para la planta $G(s)$. Estos controladores se validarán posteriormente mediante mediciones experimentales sobre la planta real. Para cada caso, los controladores serán implementados en el microcontrolador, utilizando tanto la discretización por diferencias hacia atrás (*Backwards difference*) como la transformada bilineal o de Tustin.

Inicialmente, los controladores serán diseñados mediante la técnica de *loop shaping*, en caso de ser necesario, y ajustados de manera empírica según su desempeño en la planta real. En la transferencia del sistema, se considerará tanto el retardo de media muestra causado por la discretización como el retardo identificado, ya que, como se explicó previamente, ambos limitan el diseño del controlador.

La transferencia de la planta a controlar es la siguiente:

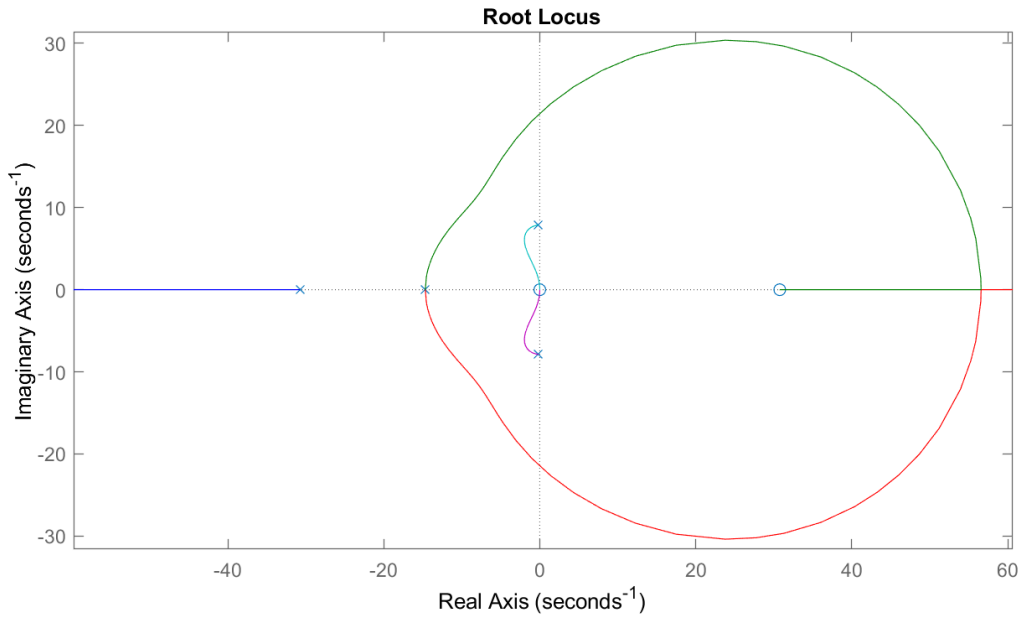
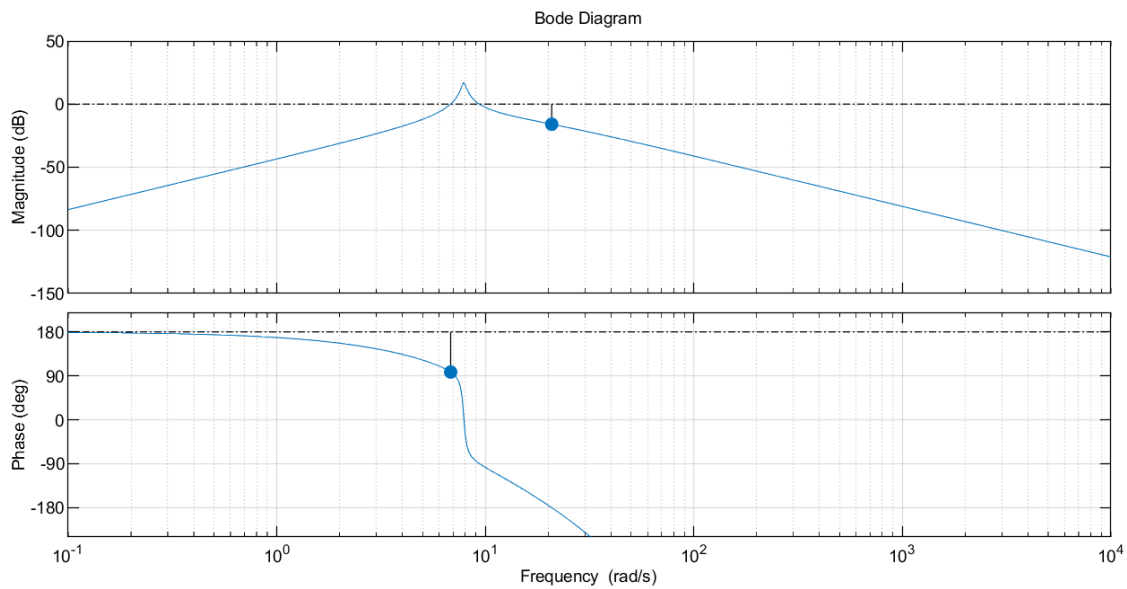
$$\hat{G}(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-222.15s^2 \cdot e^{-0.065s}}{(s + 14.6789)^2(s^2 + 0.3585s + 62.04)}$$

3.3 Control Proporcional

El diseño del controlador proporcional para la planta parte de la expresión básica del controlador $C_p(s) = k_p$. La ganancia de lazo se define como $L(s) = C_p(s)\hat{G}(s)$. En este caso, dado que la planta presenta un cambio de signo en su transferencia, es necesario que el valor de k_p sea negativo para compensar dicho efecto.

El objetivo principal del controlador proporcional es estabilizar la planta alrededor del punto de equilibrio lo más rápido posible, evitando, a su vez, valores excesivamente grandes de k_p , los cuales podrían inducir oscilaciones no deseadas. Dado que el controlador es puramente proporcional, el diseño se puede abordar de manera sencilla utilizando el diagrama de *root locus* de $-\hat{G}(s)$. Este diagrama se muestra en la Fig. 10, donde se seleccionó un valor de $k_p = -0.4$, que garantiza la estabilidad del sistema.

Para validar el diseño, se utilizó el diagrama de Bode de la transferencia de lazo $L(s) = G(s)C(s)$, como se observa en la Fig. 11. Este análisis permite confirmar la estabilidad del sistema y sus márgenes de fase y ganancia.

Figure 10: Diagrama Root Locus de $-G(s)$ Figure 11: Diagrama de Bode de $L(s)$ con controlador proporcional

Posteriormente, se implementó el controlador proporcional en la planta real, y se contrastaron los resultados de la simulación con las mediciones experimentales del sistema en lazo cerrado. Para obtener la respuesta al impulso en la planta real, se aplicó un pequeño golpe al péndulo. En la Fig. 12 se comparan las respuestas medidas y simuladas.

Se puede observar que el comportamiento de la planta real es similar al de la simulación ante un impulso. Sin embargo, al igual que en la fase de identificación de la planta y del péndulo, la respuesta simulada muestra un amortiguamiento ligeramente mayor que la planta real.

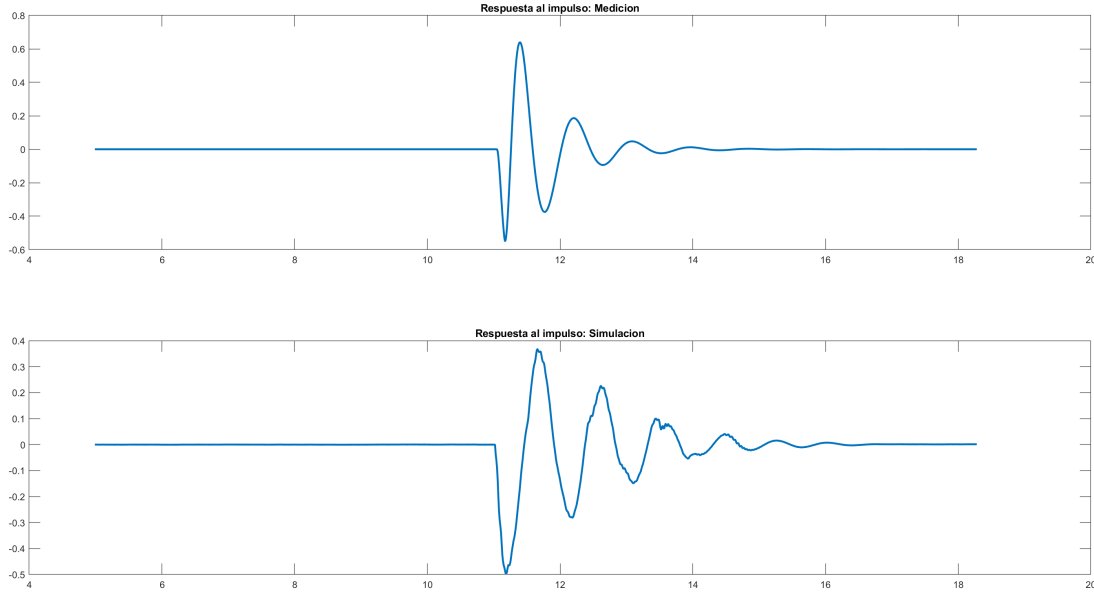


Figure 12: Respuesta al impulso del sistema con controlador proporcional

3.4 Control Proporcional / Integral

Se modifico el controlador proporcional a uno proporcional / integral el cual tiene la siguiente expresión:

$$C(s) = k_p + k_i \frac{1}{s}$$

Para el diseño de este controlador, partimos del mismo valor de k_p que funciono correctamente en los experimentos del control proporcional y de un valor muy bajo de k_i . Este ultimo se ajusto de forma empírica observando el comportamiento de la planta a lazo cerrado hasta que se obtuvo un control suave y rápido pero sin que sature la acción de control. Finalmente, la mejor respuesta a nuestro criterio se obtuvo con los valores $k_p = -0.4$ y $k_i = -5$.

Para medir el ángulo del péndulo, se emplea un filtro complementario que fusiona las mediciones del acelerómetro y el giroscopio. Este método mejora la precisión al aprovechar las fortalezas de ambos sensores: el acelerómetro es confiable a largo plazo, pero susceptible a ruidos de alta frecuencia, mientras que el giroscopio proporciona mediciones precisas a corto plazo, aunque tiende a acumular sesgo o deriva con el tiempo. El filtro complementario equilibra estas limitaciones, corrigiendo el sesgo acumulado del giroscopio a largo plazo, aunque no puede eliminarlo de manera instantánea.

Para corregir el sesgo del giroscopio y algún posible sesgo de los acelerómetros, además del filtro complementario, se realiza a modo de rutina de calibración un promedio de las primeras 100 mediciones del giroscopio en X y el acelerómetro en Y. Luego se resta este valor a las mediciones de la salida al momento de controlar. De esta manera, se obtiene una medición más precisa del ángulo del péndulo sin el desplazamiento producido por el sesgo instantáneo.

Al implementar el controlador PI, se detectó que al no compensar el bias en las mediciones (es decir, al no restar el promedio de las primeras lecturas del giroscopio), el servomotor comenzaba a moverse lentamente cuando se dejaba en reposo durante un período prolongado, incluso sin la presencia de perturbaciones externas en θ . Este fenómeno se debe a la acumulación de error en la acción del controlador integral, que interpreta el bias en las mediciones como un error constante en la posición del péndulo. Como resultado, el controlador genera una acción de control incorrecta, intentando corregir un supuesto desvío. Se observó que la compensación del sesgo proporcionada por el filtro complementario no era lo suficientemente precisa para evitar este comportamiento al usar el control integral, lo que evidencia la necesidad de una compensación de bias más efectiva para evitar este problema como la planteada.

En cambio, al mantener la compensación del bias, el sistema se estabiliza correctamente, evitando este desplazamiento del servomotor no deseado.

3.4.1 Respuesta al escalón de $u(t)$

Se simuló la respuesta del sistema a un escalón $\theta_r = 5^\circ$ y se analizó la salida y acción de control u obteniéndose las Fig. 13 y 14. Luego, se analizó el comportamiento observado.

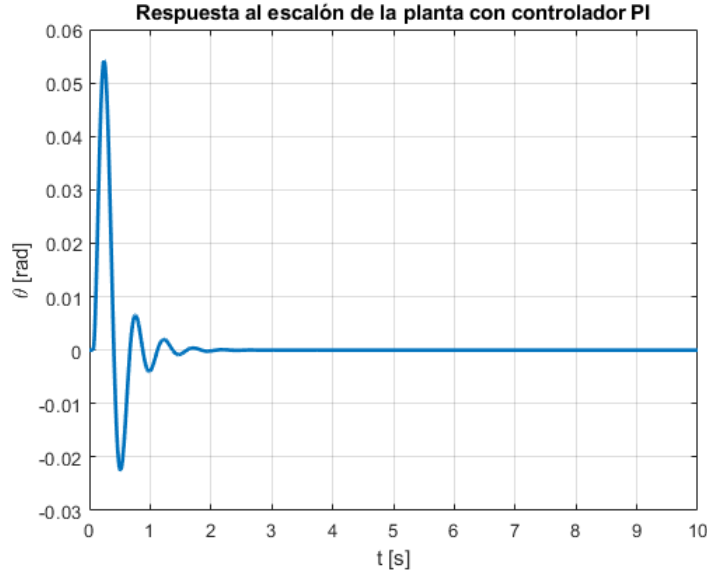


Figure 13: Respuesta al escalón de la planta con controlador PI

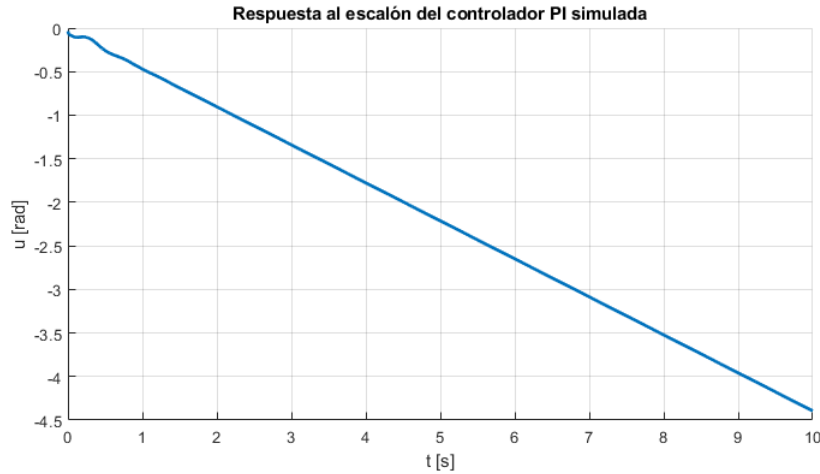


Figure 14: Respuesta al escalón del controlador PI simulada

Como se puede observar en la respuesta de θ , el sistema alcanza un punto de equilibrio en 0° tras algunas oscilaciones iniciales. Esto puede predecirse a partir del teorema del valor final de $T(s)$ ya que la ganancia de lazo tiende a 0 para t tendiendo a ∞ debido a que sigue habiendo un cero en el origen. Dado que la referencia impuesta es $\theta_r = 5^\circ$, el error en la posición se mantiene constante en $e(t) = \theta_r - \theta = 5^\circ$ una vez que el sistema se estabiliza.

Este error constante genera que el controlador integral siga acumulando el error a lo largo del tiempo, lo que explica el comportamiento de la acción de control u , que muestra una variación lineal con el tiempo. La integral del error constante provoca que el término de control continúe variando incluso cuando el sistema ya se ha estabilizado en $\theta = 0^\circ$.

Por más que la acción de control continúe variando, una vez que el sistema alcanza su equilibrio, no se desestabiliza ni sigue la referencia deseada. Esto se explica a partir del análisis del modelo de la planta y el controlador. Aunque el controlador proporcional-integral (PI) introduce un polo en el origen, la planta posee dos ceros en el origen, lo que anula el efecto del polo introducido por el controlador.

Por esta razón, aunque la acción de control u varía a medida que el controlador integra el error, la planta no se mueve una vez que el sistema ha alcanzado su punto de equilibrio. Esto se debe a que la acción de control $u(t)$ tiene una respuesta lineal en el equilibrio y la planta responde a variaciones de la derivada segunda de la misma. Esto físicamente tiene sentido ya que para que exista un torque sobre el péndulo, el brazo del servomotor se debe acelerar. Si este se mueve a velocidad constante, no hay movimiento en $\theta(t)$.

3.5 Control Proporcional / Derivativo

Finalmente, se modificó el controlador proporcional a un controlador proporcional/derivativo de la forma:

$$C(s) = k_p + k_i s$$

Donde $k_p = -0.4$, misma constante del controlador proporcional que en las anteriores secciones, y a base de simulaciones y experimentos se obtuvo que la mejor respuesta en términos de ruido y velocidad fue con $k_d = -0.01$. Si se utilizaba una constante k_d mayor, el controlador saturaba rápidamente debido a la amplificación en altas frecuencias del término derivativo.

Se validó el diseño del controlador mediante el diagrama de Bode del lazo $L(s) = G(s)C(s)$, ilustrado en la Fig. 15, donde se observa que el sistema a lazo cerrado es estable.

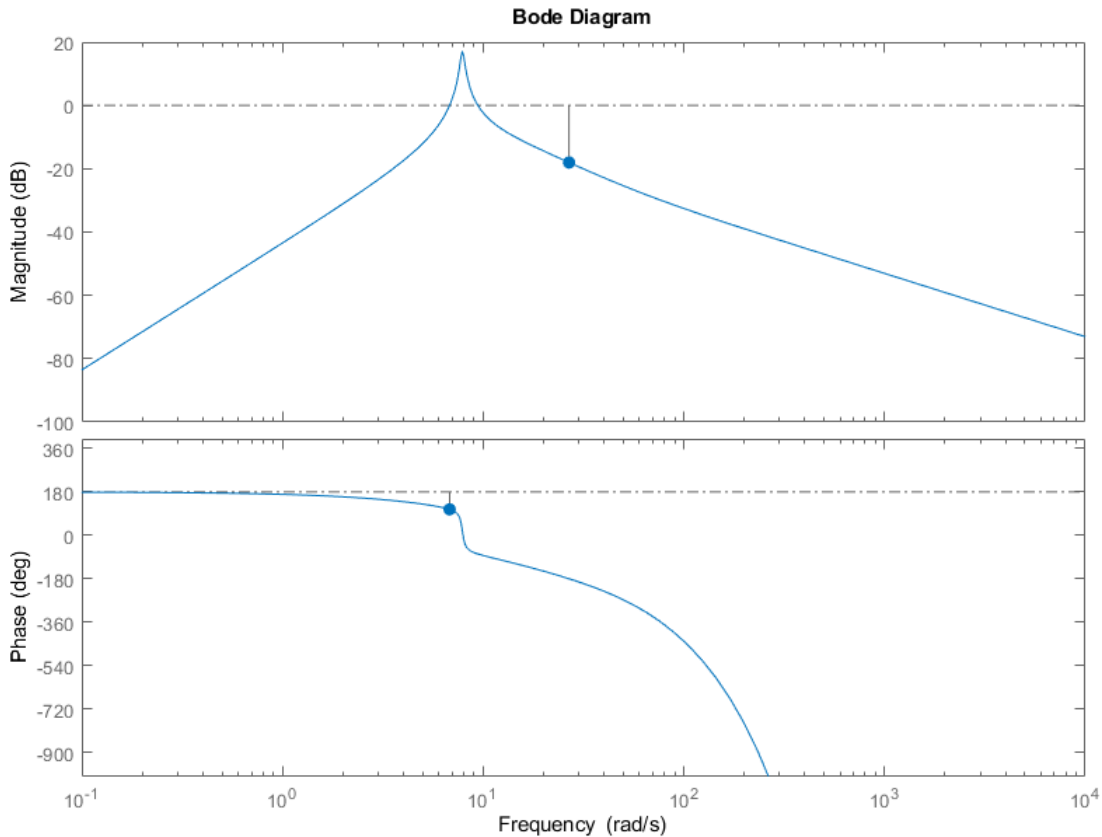


Figure 15: Respuesta al escalón de la planta con controlador PD simulado

Luego, se implemento el controlador PD diseñado en la planta por medio de la aproximación de backwards difference y por la aproximación bilineal.

Para contrastar el controlador diseñado contra la implementación del controlador por medio de ambas aproximaciones se simulo la respuesta del sistema ante una perturbación tipo impulso y para replicarlo en la planta real se aplico un pequeño golpe al péndulo. En la Fig. 16 se muestran todas las respuestas. A diferencia que el sistema con control proporcional, el comportamiento en la simulación no analogo al comportamiento real de la planta. Esto puede deberse a la amplificación del ruido de alta frecuencia que se produce al derivar la salida del sistema. Para mejorar el comportamiento del controlador podría implementarse un par de polos regularizadores en la transferencia para que a alta frecuencia la ganancia del controlador se vuelva nula.

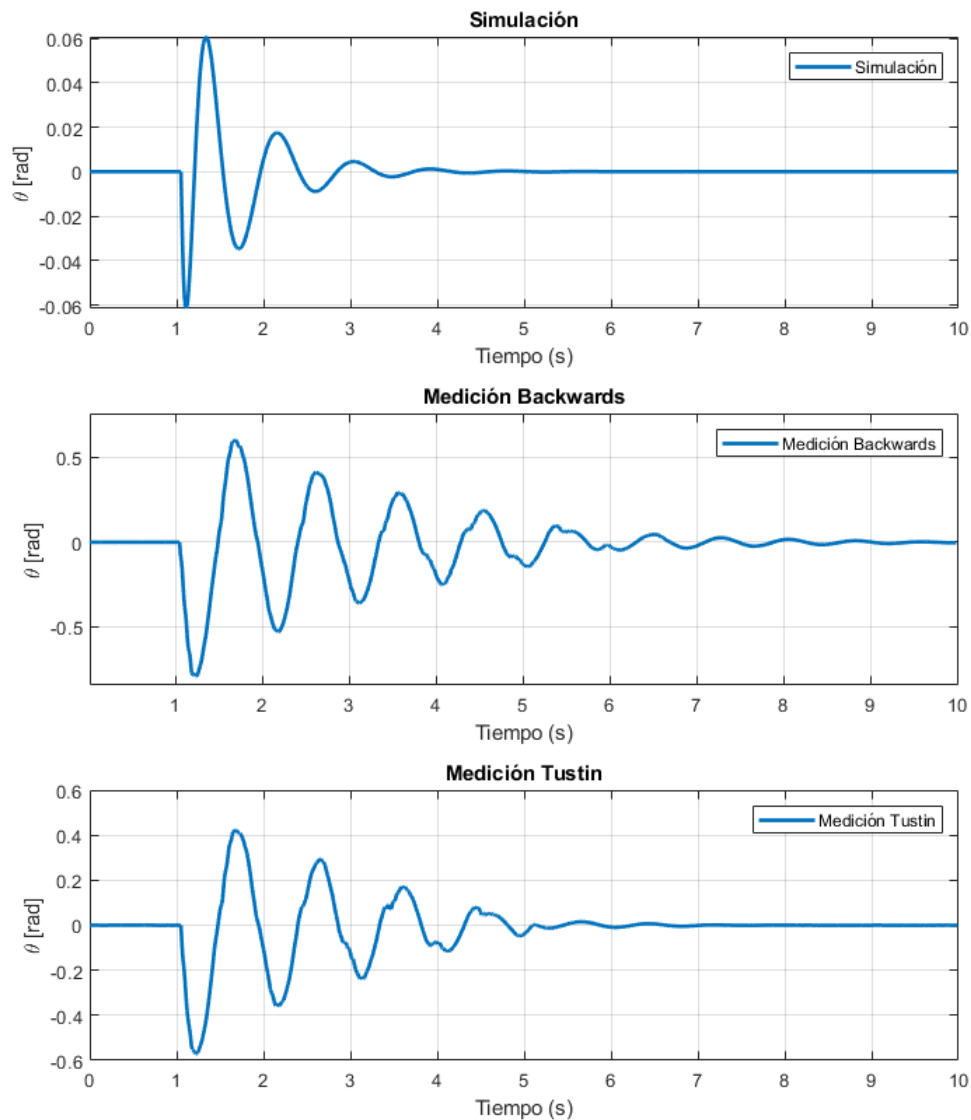


Figure 16: Respuesta del sistema al impulso simulada y en la planta real por medio de ambas aproximaciones

Finalmente, se repitió el experimento utilizando el mismo controlador PD, pero sin la banda elástica que amortigua y estabiliza el brazo. Se observó que las vibraciones del brazo generaron un ruido significativo en el sistema. Este ruido

afecta particularmente al controlador PD, ya que su componente derivativa es sensible a las fluctuaciones rápidas en la señal de error. Como resultado, el péndulo no logra estabilizarse en el punto de equilibrio $\theta = 0$. En su lugar, el sistema oscila con una amplitud de un par de grados alrededor de este punto. El controlador, en un intento constante de compensar estas oscilaciones, genera pequeños movimientos oscilatorios en el brazo.

3.6 Conclusión

El armado del péndulo fue el primer desafío de este trabajo, especialmente en asegurar que no presentara rozamientos ni movimientos imprevistos. Para lograrlo, se ajustaron cuidadosamente determinados tornillos y se imprimió las piezas del mismo con gran precisión, logrando que el péndulo alcanzara una cantidad de oscilaciones optima al soltarlo desde una altura específica. Se eligió un peso uniforme, no demasiado elevado para no incrementar excesivamente la frecuencia de oscilación, ni demasiado ligero para evitar que alcanzara grandes amplitudes

La identificación de la planta fue exitosa, obteniéndose un modelo de cuarto orden que describe adecuadamente la dinámica del sistema. A partir de la misma se observaron las limitaciones que podían presentarse al controlar y como estas limitan el ancho de banda del sistema a lazo cerrado.

Por otro lado, al cerrar el lazo, los controladores P y PI mostraron un buen desempeño, logrando estabilizar el sistema dentro de las especificaciones de diseño. Cabe resaltar que en el caso del PI, el mejor desempeño se obtuvo cuando se corrigió el sesgo que presentaban el giróscopo y acelerómetro. Sin embargo, el controlador PD presentó dificultades debido a su sensibilidad al ruido de medición, lo cual afectó la estabilidad y precisión de la respuesta. Esto sugiere la necesidad de un filtrado adicional o ajustes en el diseño del controlador PD para mejorar su robustez frente al ruido o, en su defecto, adicionar una acción integral al controlador obteniendo un PID que mejore la estabilidad de la respuesta y su sensibilidad al ruido.