Proposição 1. *Seja G um grafo conexo. Seja T uma árvore de Busca em Largura de G a partir de um vértice v qualquer. Se existem vértices $s, t \in V(G)$ tais que $st \in E(G)$, $st \notin E(T)$ e $dist_T(v, s) = dist_T(v, t) + 1$, então G possui ciclo par.*

Proposição 2. *Seja G um grafo conexo livre de ciclos pares. Seja T uma Árvore de Busca em Largura de G a partir de $v \in V(G)$. Seja $V \subsetneq V(G)$ o conjunto de vértices com distância $p > 0$ de v. Temos que o conjunto $E(G[V])$ é um emparelhamento.*

Lema 1. *Seja G um grafo. Se existe uma k-partição $V_1, V_2, \ldots, V_k$ dos vértices de G tal que, para todo vértice $v \in V(G)$, temos que $|N(v) \cap V_i| = 1$, para algum $1 \leq i \leq k$, então $\chi_{pcf}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi(G[V_i])$.*

Demonstração. Seja $H_i = G[V_i]$, para todo $1 \leq i \leq k$. Iremos colorir cada subgrafo H_i com $\chi(H_i)$ cores distintas. Para isso, cada cor será representada por um par ordenado. Seja $c_i : V(H_i) \to \{i\} \times \chi(H_i)$ uma coloração própria de H_i. Para todo par distinto de colorações c_i e c_j, temos que $c_i(v) \neq c_j(u)$, para todo $v \in V(H_i)$ e $u \in V(H_j)$, pois $(i, x) \neq (j, y)$ para $i \neq j$.

Seja c uma coloração de G tal que $c(v) = c_i(v)$ se e somente se $v \in V(H_i)$. Em outras palavras, c é a união das colorações usadas em cada subgrafo H_i. Como c_i é uma coloração própria de H_i e todo par distinto de subgrafos H_i e H_j são coloridos com cores distintas, temos que c é uma coloração própria de G.

Como, para todo vértice $v \in V(G)$, vale que $|N(v) \cap V(H_i)| = 1$, para algum subgrafo H_i, e como as cores usadas em H_i são distintas das cores usadas em $V(G) \setminus V(H_i)$, temos que existe uma cor (i, x) que aparece uma única vez na vizinhança de v, para $x \in [\chi(H_i)]$. Sendo assim, c descreve uma coloração própria livre de conflitos de G. Como c_i utiliza $\chi(H_i)$ cores, para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $\chi_{pcf}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi(H_i)$.

□

Teorema 1. *Seja G um grafo conexo. Se G é livre de ciclos pares, então $\chi_{pcf}(G) \leq 7$.*

Demonstração. Seja T uma Árvore de Busca em Largura de G a partir de um vértice r qualquer. Sabemos que T é uma árvore geradora, pois G é conexo. Seja V_0, V_1, V_2 uma partição de G tal que $x \in V_i$ se e somente se $i = dist_T(r, x) \pmod 3$. Seja s um vértice de G, tal que $s \neq r$. Seja p o pai de s em T e seja f um filho de s em T. Note que p e f pertencem a partições distintas, pois:

$$dist_T(r, p) \pmod 3 \neq dist_T(r, p) + 2 \pmod 3 = dist_T(r, f) \pmod 3 \quad (1)$$

Seja $t \in V(G)$ um vértice tal que $dist_T(r, s) > dist_T(r, t) + 1$. Sabemos que $st \notin E(G)$, pois T é uma árvore de Busca em Largura. Sendo assim, se $st \in E(G)$ e $st \notin E(T)$, então $dist_T(r, s) = dist_T(r, t) + 1$ ou $dist_T(r, s) = dist_T(r, t)$. Pela Proposição 1, sabemos que se $st \in E(G)$ e $st \notin E(T)$, então $dist_T(r, s) = dist_T(r, t)$, pois G é livre de ciclos pares. Note que isto implica que s é adjacente a precisamente um vértice u em G tal que $dist_T(r, s) = dist_T(r, u) + 1$, e, sendo assim, u é o pai de s em T, *i.e.*, $u = p$. Note que $|N(s) \cap V_i| = 1$, onde $f \in V_i$, para todo $s \in V(G) \setminus \{r\}$.

Resta agora a partição do vértice raiz r. Iremos remover um vértice $v \in N(r)$ da partição V_1 e iremos construir uma nova partição $V_0, V_1^{'}, V_2, V_3$ de G, de modo que $V_1^{'} = V_1 \setminus \{v\}$ e $V_3 = \{v\}$. Seja s um vértice onde $|N(s) \cap V_1| = 1$, *i.e.*, o pai p de s pertence a V_1. Queremos argumentar que a propriedade é satisfeita para s na nova partição $V_0, V_1^{'}, V_2, V_3$. Se $p \neq v$, então $|N(s) \cap V_1'| = 1$ e a propriedade continua valendo. Se $p = v$, então $N(s) \cap V_3 = \{v\}$, *i.e.*, $|N(s) \cap V_3| = 1$ e a propriedade vale.

Note que a partição V_0, V_1', V_2 e V_3 satisfaz a condição do Lema 1. Note que pela Proposição 2, $E(G[V_i])$ é um emparelhamento. Sendo assim, temos que $\chi(G[V_i]) = 2$, para $0 \leq i \leq 2$. Note que $\chi(G[V_3]) = 1$, pois $V_3 = \{v\}$. Sendo assim, pelo Lema 1, temos que $\chi_{pcf}(G) \leq 7$.

$\square$

Definição 1. *Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ uma $k-$partição de d elementos distintos. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma $k-$partição par se $|P_i|$ é par, para todo $P_i \in \mathcal{P}$.*

Definição 2. *Denotamos por $\mu(d, k)$ a quantidade de $k-$partições pares distintas de d elementos distintos.*

Definição 3. *Denotamos por $\varphi_2(d, k)$ a quantidade de $k-$partições $\mathcal{P}$ não pares de d elementos onde somente as duas primeiras partes $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ possuem cardinalidade ímpar.*

Definição 4. *Denotamos por $\chi_{io}(G)$ o menor inteiro k tal que G possui uma $k-$coloração ímpar não própria.*

Proposição 3. *Seja $2n!!$ o fatorial dos ímpares. Temos que $2n!! \leq n^n$.*

Teorema 2. *$\chi_{io}(G) \leq \ell \cdot \sqrt[\ell]{e \cdot \Delta^2}$, para $1 \leq \ell \leq \left\lceil \dfrac{\delta(G)}{2} \right\rceil$.*

Para demonstrar o Teorema 2, primeiro iremos demonstrar que $\mathbb{P}[X_v] = \mathbb{P}[Y_{d(v)}]$, onde X_v é o evento do vértice $v \in V(G)$ não ter testemunha ímpar em uma k-coloração arbitrária e $Y_{d(v)}$ é o evento de uma k-partição $\mathcal{P}$ de $d(v)$ elementos ser par. Com isso, podemos analisar apenas $\mathbb{P}[Y_{d(v)}] = \dfrac{\mu(d(v), k)}{k^{d(v)}}$. Como $\mu(d(v), k)$ é igual a 0 para $d(v)$ ímpar, iremos considerar apenas quando $d(v)$ é par. Após, iremos demonstrar um limitante superior para $\mu(d(v), k)$ e, com isso, um limitante superior para $\mathbb{P}[Y_{d(v)}]$. Por fim, iremos demonstrar que $\mathbb{P}[Y_{d(u)}] \leq \mathbb{P}[Y_{d(v)}]$, para $d(u) \geq d(v)$, *i.e.*, a probabilidade de uma k-partição $\mathcal{P}$ ser par não aumenta conforme aumentamos o número de elementos que temos que particionar, considerando que $d(u)$ e $d(v)$ são pares. Isto implica que $\mathbb{P}[X_v] = \mathbb{P}[Y_{d(v)}] \leq \mathbb{P}[Y_{2\ell}]$, para todo $v \in V(G)$ e $1 \leq \ell \leq \dfrac{\delta(G)}{2}$. Sendo assim, utilizando o Lema Local de Lovász, iremos limitar o problema da k-coloração ímpar não própria por $\delta(G)$.

Lema 2. *Seja G um grafo de ordem n colorido com k cores uniforme e aleatoriamente. Seja X_v o evento do vértice $v \in V(G)$ não ter testemunha ímpar. Seja $Y_{d(v)}$ o evento de uma $k-$partição de $d(v)$ elementos $\mathcal{P}$ ser par. Temos que $\mathbb{P}[X_v] = \mathbb{P}[Y_{d(v)}]$.*

Demonstração. Sabemos que há $\mu(d(v), k)$ maneiras de $k-$colorir os vértices de $N(v)$, de modo que v não possua testemunha ímpar. Note que temos exatamente $\mu(d(v), k) \cdot k^{n-d(v)}$ maneiras de colorir G com k cores de modo que v não possua testemunha ímpar, pois ao colorir $N(v)$ com uma das $k-$colorações contadas em $\mu(d(v), k)$, podemos colorir os vértices de $V(G) \setminus N(v)$ com qualquer uma das k cores disponíveis. Note que há k^n formas de colorir G com k cores. Sendo assim:

$$\mathbb{P}[X_v] = \frac{\mu(d(v), k) \cdot k^{n-d(v)}}{k^n} = \frac{\mu(d(v), k)}{k^{d(v)}} = \mathbb{P}[Y_{d(v)}] \tag{2}$$

□

Lema 3. $\mu(2d, k) \leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2d-2, k)$, *para* $d \geq 1$.

Demonstração. Iremos construir as k-partições pares $\mathcal{P}$ possíveis de $2d$ elementos com base nas escolhas que temos para um determinado elemento $x \in [2d]$. Devemos escolher uma parte P_i para x pertencer e temos k partes disponíveis para x. Como cada parte tem tamanho par, devemos escolher um elemento $y \in [2d]$ diferente de x para pertencer também à parte P_i. Temos $2d-1$ escolhas para este caso. Por fim, devemos particionar os $2d-2$ elementos restantes em k partes de modo que cada parte tenha tamanho par. Sendo assim, devemos escolher uma k-partição par $\mathcal{P}'$ de $2d-2$ elementos. Logo, $\mu(2d, k) \leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2d-2, k)$.

□

Lema 4. $\mu(2d, k) \leq (d \cdot k)^d$, *para* $d \geq 1$.

Demonstração. Iremos demonstrar por indução em d que $\mu(2d, k) \leq 2d!! \cdot k^d$. Como $2d!! \leq d^d$, pela Proposição 3, disto segue que $\mu(2d, k) \leq (d \cdot k)^d$.

Base ($d = 1$): Pelo Lema 3, temos que $\mu(2, k) \leq k \cdot \mu(0, k) = 2!! \cdot k$ e o resultado segue.

Passo ($d > 1$): Suponha que $\mu(2\ell, k) \leq (2\ell)!! \cdot k^\ell$, para $1 \leq \ell < d$. Pelo Lema 3, $\mu(2d, k) \leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2 \cdot (d-1), k)$. Por HI, temos que:

$$\mu(2 \cdot (d-1), k) \leq (2d-2)!! \cdot k^{d-1} \tag{3}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mu(2d, k) &\leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2 \cdot (d-1), k) \\ &\leq (2d-1) \cdot k \cdot (2d-2)!! \cdot k^{d-1} \\ &\leq 2d!! \cdot k^d \end{aligned} \tag{4}$$

□

Lema 5.

$$\mu(2d,k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2i, k-1) & c.c. \end{cases} \tag{5}$$

Demonstração. Se $k = 1$, então $\mu(2d, k) = 1$, pois os $2d$ elementos devem estar contidos em uma única parte. Sendo assim, considere que $k > 1$. Agora, iremos construir as k-partições pares $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots P_k\}$ possíveis de $2d$ elementos. Primeiro, devemos escolher quantos dos $2d$ elementos irão pertencer a parte P_k. Como $|P_k|$ é par, podemos escolher qualquer inteiro i entre 0 e d, de modo que $|P_k| = 2i$. Como os $2d$ elementos são distintos, temos $\binom{2d}{2i} = \binom{2d}{2d-2i}$ maneiras de escolher $2i$ elementos para a parte P_k. Após isso, devemos particionar os $2d - 2i$ elementos restantes em $(k-1)$ partes de tamanho par, sendo assim, devemos escolher uma $(k-1)$-partição par $\mathcal{P}'$ de $2d - 2i$ elementos. Portanto:

$$\begin{aligned} \mu(2d,k) &= \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2d-2i, k-1) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2d-2i} \cdot \mu(2d-2i, k-1) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2i, k-1) \end{aligned} \tag{6}$$

□

Lema 6.

$$\varphi_2(2d,k) = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \leq 1 \\ 2^{2d-1} & \textit{se } k = 2 \\ \sum_{i=1}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot \varphi_2(2i, k-1) & c.\ c. \end{cases} \tag{7}$$

Demonstração. Iremos analisar cada caso da recorrência separadamente.

Caso 1 ($k \leq 1$): Se $k \leq 1$, então não há como k-particionar os $2d$ elementos de modo que apenas as partes P_1 e P_2 tenham tamanho ímpar. Portanto, $\varphi(2d, k) = 0$.

Caso 2 ($k = 2$): Se $k = 2$, então qualquer k-partição $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ de $2d$ elementos é contada em $\mu(2d, 2)$ ou em $\varphi_2(2d, 2)$, pois como temos um número par de elementos, ambas partes P_1 e P_2 têm tamanho par ou ímpar. Logo $\mu(2d, 2) + \varphi_2(2d, 2) = 2^{2d}$, pois 2^{2d} é o total de 2-partições possíveis de $2d$ elementos. Pelo Lema 5:

$$\mu(2d, 2) = \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2i, 1) = \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} = 2^{2d-1} \tag{8}$$

Logo, temos que $\varphi_2(2d, 2) = 2^{2d} - 2^{2d-1} = 2^{2d-1}$ e o resultado segue.

Caso 3 ($k > 2$): Iremos construir as k-partições não pares $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots P_k\}$ possíveis de $2d$ elementos. Como $k > 2$, existe uma parte $P_i \in \mathcal{P}$, onde $|P_i|$ é par. Sendo assim, a demonstração segue de modo análogo à demonstração do Lema 5, com a única restrição de que $|P_i| < 2d$, pois as partes P_1 e P_2 tem ao menos um elemento. □

Lema 7. *$\mu(2d, k) \leq \mu(2d-2, k) \cdot k^2$, para $d \geq 1$.*

Demonstração. Iremos provar que $\mu(2d, k) = k \cdot \mu(2d-2, k) + (k^2 - k) \cdot \varphi_2(2d-2, k)$. Disto segue que $\mu(2d, k) \leq \mu(2d-2, k) \cdot k^2$, pois, pelos Lemas 5 e 6, temos que $\varphi_2(2d-2, k) \leq \mu(2d-2, k)$, considerando que ambos possuem uma recorrência similar e ainda $\varphi_2(2d, 2) = \mu(2d, 2)$. Sejam dois elementos distintos $x, y \in [2d]$. Iremos construir uma k-partição par $\mathcal{P}$ de $2d$ elementos com base em duas escolhas: se x e y irão pertencer a mesma parte $P_i \in \mathcal{P}$ ou não.

Caso 1: Se escolhermos que x e y irão pertencer a mesma parte $P_i \in \mathcal{P}$, então devemos escolher uma parte P_i das k partes disponíveis. Após, devemos escolher uma k-partição par $\mathcal{P}'$ de $2d-2$ elementos para os elementos restantes. Sendo assim, para este caso, temos $k \cdot \mu(2d-2, k)$ partições possíveis.

Caso 2: Se escolhermos que $x \in P_i$ e $y \in P_j$, onde $P_i \neq P_j$, então devemos escolher primeiro quais são as partes P_i e P_j dentre as k partes que irão conter x e y respectivamente. Temos $2 \cdot \binom{k}{2} = k^2 - k$ formas de escolher P_i e P_j, pois há $\binom{k}{2}$ maneiras de escolher duas das k partes disponíveis e há duas maneiras de escolher qual das duas partes irá conter cada elemento. Após, devemos escolher uma k-partição não par $\mathcal{P}'$ onde apenas as partes P_i e P_j tenham tamanho ímpar. Por simetria das partes, há exatamente $\varphi_2(2d-2, k)$ partições $\mathcal{P}'$ distintas. Logo, para este caso, temos $(k^2 - k) \cdot \varphi_2(2d-2, k)$ partições possíveis.

□

Lema 8. *Seja Y_{2d} o evento de uma $k-$partição de $2d$ elementos $\mathcal{P}$ ser par, para $d \geq 1$. Seja Y_{2d-2} o evento de uma $k-$partição de $2d-2$ elementos $\mathcal{P}'$ ser par. Temos que $\mathbb{P}[Y_{2d}] \leq \mathbb{P}[Y_{2d-2}]$.*

Demonstração. Pelo Lema 7, temos que $\mu(2d, k) \leq \mu(2d-2, k) \cdot k^2$. Logo:

$$\mathbb{P}[Y_{2d}] = \frac{\mu(2d, k)}{k^{2d}} \leq \frac{\mu(2d-2, k) \cdot k^2}{k^{2d}} = \frac{\mu(2d-2, k)}{k^{2d-2}} = \mathbb{P}[Y_{2d-2}] \tag{9}$$

□

Demonstração do Teorema 2. Pinte os vértices de G com $k = \ell \cdot \sqrt[\ell]{e \cdot \Delta^2}$ cores aleatoriamente e independentemente, onde $1 \leq \ell \leq \left\lceil \frac{\delta(G)}{2} \right\rceil$. Seja X_v o evento de v não ter testemunha ímpar, para $v \in V(G)$. Pelo Lema 2, temos que $\mathbb{P}[X_v] = \mathbb{P}[Y_{d(v)}]$, onde $Y_{d(v)}$ é o evento de uma $k-$partição de $d(v)$ elementos $\mathcal{P}$ ser par. Pelo Lema

8, temos que $\mathbb{P}[X_v] = \mathbb{P}[Y_{d(v)}] \leq \mathbb{P}[Y_{2\ell}]$, para todo $v \in V(G)$. Pelo Lema 4, $\mathbb{P}[Y_{2\ell}] = \dfrac{\mu(2\ell, k)}{k^{2\ell}} \leq \dfrac{(\ell{\cdot}k)^{\ell}}{k^{2\ell}} = \left(\dfrac{\ell}{k}\right)^{\ell}$. Portanto:

$$\mathbb{P}[X_v] \leq \mathbb{P}[Y_{2\ell}] \leq \left(\frac{\ell}{k}\right)^{\ell} = \left(\frac{\ell}{\ell{\cdot}\sqrt[\ell]{e{\cdot}\Delta^2}}\right)^{\ell} = \frac{1}{e{\cdot}\Delta^2} \tag{10}$$

Note que cada evento X_v é dependente a no máximo $\Delta^2 - \Delta$ outros eventos, para todo $v \in V(G)$. Sendo assim, pelo Lema Local de Lovász, temos que $\mathbb{P}[\bigcap_{v \in V(G)} \overline{X_v}] > 0$. Portanto, existe uma k-coloração onde v tem testemunha ímpar, para todo $v \in V(G)$. Logo, $\chi_{io}(G) \leq k = \ell{\cdot}\sqrt[\ell]{e{\cdot}\Delta^2}$, para $1 \leq \ell \leq \dfrac{\delta}{2}$.

□

Definição 5. *Seja G um grafo. Denotamos por $\tau(e)$ a quantidade de ciclos que a aresta $e \in E(G)$ pertence. Denotamos por $\tau(G) = max(\tau(e) : \forall e \in E(G))$.*

Proposição 4. *Se G um grafo $k-$crítico, então G é $(k-1)$-aresta-conexo.*

Teorema 3. $\chi(G) \leq \tau(G) + 2$.

Demonstração. Suponha que o enunciado não vale e seja G um contraexemplo com o menor número de arestas possível. Pela minimalidade de G, temos que H não é um contraexemplo, para qualquer $H \subsetneq G$, *i.e.*, $\chi(H) \leq \tau(H) + 2$. Como $\chi(G) \geq \tau(G) + 3$ e $\tau(G) \geq \tau(H)$, temos que:

$$\begin{gathered} \chi(G) \geq \tau(G) + 3 \geq \tau(H) + 3 \geq \chi(H) + 1 \\ \therefore \chi(G) > \chi(H) \end{gathered} \tag{11}$$

Portanto, temos que G é $\chi-$crítico, onde $\chi = \chi(G)$. Pela Proposição 4, temos que G é $(\chi - 1)$-aresta-conexo. Como G é $(\chi - 1)$-aresta-conexo, sabemos que G possui pelo menos $\chi - 1$ uv-caminhos disjuntos nas arestas, para todo par distinto $u, v \in V(G)$. Sejam $P_1, P_2, \ldots P_{\chi-1}$ caminhos disjuntos nas arestas de G. Seja e a aresta que incide em u em P_1. Note que $P_1 \cup P_j$ contém um ciclo C, tal que $e \in E(C)$, para $1 < j \leq \chi - 1$, pois P_1 e P_j são uv-caminhos distintos. Logo $\tau(G) \geq \tau(e) \geq \chi(G) - 2$. Portanto, $\chi(G) \geq \tau(G) + 3 \geq \chi(G) - 2 + 3 = \chi(G) + 1$, uma contradição.

$\square$