Proposição 1. *Seja G um grafo conexo. Seja T uma árvore de Busca em Largura de G a partir de um vértice v qualquer. Se existem vértices $s, t \in V(G)$ tais que $st \in E(G)$, $st \notin E(T)$ e $dist_T(v, s) = dist_T(v, t) + 1$, então G possui ciclo par.*

Proposição 2. *Seja G um grafo conexo livre de ciclos pares. Seja T uma Árvore de Busca em Largura de G a partir de $v \in V(G)$. Seja $V \subsetneq V(G)$ o conjunto de vértices com distância $p > 0$ de v. Temos que o conjunto $E(G[V])$ é um emparelhamento.*

Lema 1. *Seja G um grafo. Se existe uma k-partição $V_1, V_2, \ldots, V_k$ dos vértices de G tal que, para todo vértice $v \in V(G)$, temos que $|N(v) \cap V_i| = 1$, para algum $1 \leq i \leq k$, então $\chi_{pcf}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi(G[V_i])$.*

Demonstração. Seja $H_i = G[V_i]$, para todo $1 \leq i \leq k$. Iremos colorir cada subgrafo H_i com $\chi(H_i)$ cores distintas. Para isso, cada cor será representada por um par ordenado. Seja $c_i : V(H_i) \to \{i\} \times \chi(H_i)$ uma coloração própria de H_i. Para todo par distinto de colorações c_i e c_j, temos que $c_i(v) \neq c_j(u)$, para todo $v \in V(H_i)$ e $u \in V(H_j)$, pois $(i, x) \neq (j, y)$ para $i \neq j$.

Seja c uma coloração de G tal que $c(v) = c_i(v)$ se e somente se $v \in V(H_i)$. Em outras palavras, c é a união das colorações usadas em cada subgrafo H_i. Como c_i é uma coloração própria de H_i e todo par distinto de subgrafos H_i e H_j são coloridos com cores distintas, temos que c é uma coloração própria de G.

Como, para todo vértice $v \in V(G)$, vale que $|N(v) \cap V(H_i)| = 1$, para algum subgrafo H_i, e como as cores usadas em H_i são distintas das cores usadas em $V(G) \setminus V(H_i)$, temos que existe uma cor (i, x) que aparece uma única vez na vizinhança de v, para $x \in [\chi(H_i)]$. Sendo assim, c descreve uma coloração própria livre de conflitos de G. Como c_i utiliza $\chi(H_i)$ cores, para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $\chi_{pcf}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi(H_i)$.

□

Teorema 1. *Seja G um grafo conexo. Se G é livre de ciclos pares, então $\chi_{pcf}(G) \leq 7$.*

Demonstração. Seja T uma Árvore de Busca em Largura de G a partir de um vértice r qualquer. Sabemos que T é uma árvore geradora, pois G é conexo. Seja V_0, V_1, V_2 uma partição de G tal que $x \in V_i$ se e somente se $i = dist_T(r, x) \pmod 3$. Seja s um vértice de G, tal que $s \neq r$. Seja p o pai de s em T e seja f um filho de s em T. Note que p e f pertencem a partições distintas, pois:

$$dist_T(r, p) \pmod 3 \neq dist_T(r, p) + 2 \pmod 3 = dist_T(r, f) \pmod 3 \quad (1)$$

Seja $t \in V(G)$ um vértice tal que $dist_T(r, s) > dist_T(r, t) + 1$. Sabemos que $st \notin E(G)$, pois T é uma árvore de Busca em Largura. Sendo assim, se $st \in E(G)$ e $st \notin E(T)$, então $dist_T(r, s) = dist_T(r, t) + 1$ ou $dist_T(r, s) = dist_T(r, t)$. Pela Proposição 1, sabemos que se $st \in E(G)$ e $st \notin E(T)$, então $dist_T(r, s) = dist_T(r, t)$, pois G é livre de ciclos pares. Note que isto implica que s é adjacente a precisamente um vértice u em G tal que $dist_T(r, s) = dist_T(r, u) + 1$, e, sendo assim, u é o pai de s em T, *i.e.*, $u = p$. Note que $|N(s) \cap V_i| = 1$, onde $f \in V_i$, para todo $s \in V(G) \setminus \{r\}$.

Resta agora a partição do vértice raiz r. Iremos remover um vértice $v \in N(r)$ da partição V_1 e iremos construir uma nova partição $V_0, V_1^{'}, V_2, V_3$ de G, de modo que $V_1^{'} = V_1 \setminus \{v\}$ e $V_3 = \{v\}$. Seja s um vértice onde $|N(s) \cap V_1| = 1$, *i.e.*, o pai p de s pertence a V_1. Queremos argumentar que a propriedade é satisfeita para s na nova partição $V_0, V_1^{'}, V_2, V_3$. Se $p \neq v$, então $|N(s) \cap V_1'| = 1$ e a propriedade continua valendo. Se $p = v$, então $N(s) \cap V_3 = \{v\}$, *i.e.*, $|N(s) \cap V_3| = 1$ e a propriedade vale.

Note que a partição V_0, V_1', V_2 e V_3 satisfaz a condição do Lema 1. Note que pela Proposição 2, $E(G[V_i])$ é um emparelhamento. Sendo assim, temos que $\chi(G[V_i]) = 2$, para $0 \leq i \leq 2$. Note que $\chi(G[V_3]) = 1$, pois $V_3 = \{v\}$. Sendo assim, pelo Lema 1, temos que $\chi_{pcf}(G) \leq 7$.

$\square$

Definição 1. *Seja $P = \{C_1, C_2, \ldots C_k\}$ uma k-partição de n termos. Dizemos que P é uma k-partição par se, para todo $1 \leq i \leq k$, $|C_i|$ é par. Do contrário, dizemos que P é uma k-partição ímpar, i.e., P é uma k-partição ímpar se alguma parte C_i tem tamanho ímpar.*

Definição 2. *Seja $P = \{C_1, C_2, \ldots C_k\}$ uma k-partição ímpar de n termos. Dizemos que P é uma k-partição ℓ-ímpar se há exatamente ℓ partes distintas em P de tamanho ímpar, para $\ell \geq 1$.*

Definição 3. *Denotamos por $\mu(n, k)$ a quantidade de k-partições pares distintas de n termos.*

Definição 4. *Denotamos por $\Phi(n, k)$ a quantidade de k-partições ímpares distintas de n termos. Denotamos por $\Phi_\ell(n, k)$ a quantidade de k-partições ℓ-ímpares distintas de n termos, para $\ell \geq 1$. Também denotamos por $\Phi_{\geq \ell}(n, k)$ a quantidade de k-partições t-ímpares distintas n termos, para todo $\ell \leq t \leq k$, i.e., $\Phi_{\geq \ell}(n, k) = \sum_{i=\ell}^{k} \Phi_i(n, k)$.*

Definição 5. *Denotamos por $\varphi_\ell(n, k)$ a quantidade de k-partições ℓ-ímpares, com a restrição de que somente as primeiras ℓ partes tenham cardinalidade ímpar. Claramente temos que $\varphi_\ell(n, k) \leq \Phi_\ell(n, k)$, pois $\varphi_\ell(n, k)$ conta apenas as k-partições com as primeiras ℓ partes de cardinalidade ímpar, já $\Phi_\ell(n, k)$ conta qualquer subconjunto pertencente a $\binom{[k]}{\ell}$ com cardinalidade ímpar.*

Lema 2. *Seja a recorrência a seguir:*

$$T(2n, k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } k = 1 \\ \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot T(2i, k-1) & \text{c.c.} \end{cases} \tag{2}$$

Temos que $T(2n, k) = \mu(2n, k)$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em k.

Base ($k = 1$): Para $k = 1$, temos que $T(2n, k) = \mu(2n, 1) = 1$, pois há uma única partição $P = \{C_1\}$ de $2n$, de modo que $|C_1|$ seja par. Sendo assim, o resultado segue.

Passo ($k > 1$): Suponha que $T(2n, \ell) = \mu(2n, \ell)$, para todo $1 \leq \ell < k$. Seja a_{2i} a quantidade de maneiras de escolher $2i$ termos de 2_n termos para a parte C_k. Como C_k tem tamanho par, temos que $|C_k| = 2i$, para $0 \leq i \leq n$. Note que ao escolher $2i$ termos para a parte C_k temos que escolher uma (k-1)-partição par P' para os $2n - 2i$. Por definição, a quantidade de (k-1)-partições pares distintas de $2n - 2i$ termos é igual a $\mu(2n - 2i, k - 1)$. Sendo assim:

$$\mu(2n, k) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} \cdot \mu(2n - 2i, k - 1) \tag{3}$$

Por HI, $T(2n-2i, k-1) = \mu(2n-2i, k-1)$. Note que $a_{2i} = \binom{2n}{2i} = \binom{2n}{2n-2i}$. Logo:

$$\begin{aligned}\mu(2n,k) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2n-2i} \cdot T(2n-2i, k-1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot T(2i, k-1) = T(2n,k)\end{aligned} \tag{4}$$

□

Lema 3. *Seja a recorrência a seguir:*

$$R(2n,k) = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \leq 1 \\ 2^{2n-1} & \textit{se } k = 2 \\ \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot R(2i, k-1) & \textit{se } k > 2 \end{cases} \tag{5}$$

Temos que $R(2n,k) = \varphi_2(2n,k)$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em k.

Base ($k = 2$): Note que $\varphi_2(2n,2) = \Phi(2n,2)$, pois, seja uma k-partição ímpar $P = (C_1, C_2)$, como $2n$ é par, temos que $|C_1|$ e $|C_2|$ são pares ou $|C_1|$ e $|C_2|$ são ímpares. Note que $\Phi(2n,2) = 2^{2n} - \mu(2n,2)$, pois há exatamente 2^{2n} formas de particionar $2n$ termos em duas partes C_1 e C_2 e dessas 2^{2n} maneiras há $\mu(2n,2)$ maneiras de particionar $2n$ termos tal que $|C_1|$ e $|C_2|$ sejam pares. Note que:

$$\mu(2n,2) = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot T(2i,1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} = 2^{2n-1} \tag{6}$$

Logo, temos que $\varphi_2(2n,2) = \Phi(2n,2) = 2^{2n} - 2^{2n-1} = 2^{2n-1} = R(2n,2)$ e o resultado segue.

Passo ($k > 1$): Suponha que $R(2n,\ell) = \varphi_2(2n,\ell)$, para todo $2 \leq \ell < k$. Seja a_{2i} a quantidade de maneiras de escolher $2i$ termos de 2_n termos para a parte C_k. Como somente as partes C_1 e C_2 tem tamanho ímpar, temos que a parte C_k tem tamanho par, pois $k > 2$. Logo $|C_k| = 2i$, para $0 \leq i \leq n-1$. Note que $|C_k| \leq 2n-2$, pois como C_1 e C_2 possuem tamanho ímpar, temos que há ao menos um termo em C_1 e C_2. Note que ao escolher $2i$ termos para a parte C_k temos que escolher uma (k-1)-partição 2-ímpar P' para os $2n-2i$. Por definição, a quantidade de (k-1)-partições 2-ímpares distintas de $2n-2i$ termos é igual a $\varphi_2(2n-2i, k-1)$. Sendo assim:

$$\varphi_2(2n,k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i} \cdot \varphi_2(2n-2i, k-1) \tag{7}$$

Por HI, $R(2n-2i, k-1) = \varphi_2(2n-2i, k-1)$. Note que $a_{2i} = \binom{2n}{2i} = \binom{2n}{2n-2i}$. Logo:

$$\begin{aligned} \varphi_2(2n,k) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-2i} \cdot R(2n-2i, k-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot R(2i, k-1) = R(2n,k) \end{aligned} \tag{8}$$

□

Lema 4. $\varphi_2(2n,k) \le \mu(2n,k)$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em k.

Base ($k = 2$): Pelo Caso Base do Lema 3, temos que $\varphi_2(2n,2) = 2^{2n-1} = \mu(2n,2)$ e o resultado segue.

Passo ($k > 2$): Suponha que $\varphi_2(2n,\ell) \le \mu(2n,\ell)$, para $2 \le \ell < k$. Note que:

$$\mu(2n,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot \mu(2i, k-1) \ge \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot \mu(2i, k-1) \tag{9}$$

Por HI:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot \varphi_2(2i, k-1) \le \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot \mu(2i, k-1) \tag{10}$$

Como $\varphi_2(2n,k) = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i} \cdot \varphi_2(2i, k-1)$, por (9) e (10), temos que $\varphi_2(2n,k) \le \mu(2n,k)$.

□

Lema 5. $\Phi_2(2n,k) = \binom{k}{2} \cdot \varphi_2(2n,k)$.

Demonstração. Pela definição, $\varphi_2(2n,k)$ conta a quantidade de k-partições $C_1, C_2 \ldots C_k$ onde apenas C_1 e C_2 tenham tamanho ímpar. Pela definição, $\Phi_2(2n,k)$ conta a quantidade de k-partições $C_1, C_2 \ldots C_k$ onde exatamente duas partes quaisquer C_i e C_j tem tamanho ímpar, para $1 \leq i,j \leq k$. Note que $\varphi_2(2n,k)$ não conta as k-partições onde $|C_i|$ ou $|C_j|$ são ímpares, para $i,j \geq 3$. Mas, neste caso, podemos considerar C_i e C_j como sendo as partes C_1 e C_2, de modo que a quantidade de k-partições ímpares distintas onde somente $|C_i|$ e $|C_j|$ são ímpares seja igual a $\varphi_2(2n,k)$. Como há exatamente $\binom{k}{2}$ formas de escolher duas partes C_i e C_j entre as k partes, de modo que $|C_i|$ e $|C_j|$ sejam ímpares, temos que $\Phi_2(2n,k) = \binom{k}{2} \cdot \varphi_2(2n,k)$.

$\square$

Lema 6. *Seja a recorrência a seguir:*

$$X(2n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ (2n-1)k \cdot X(2n-2) & \text{c. c.} \end{cases} \tag{11}$$

Temos que $\mu(2n,k) \leq X(2n)$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em n.

Base $(n = 0)$: Se $n = 0$, então $T(0,k) = 1 \leq X(0)$ e o resultado segue.

Passo $(n > 0)$: Suponha que $\mu(2\ell,k) \leq X(2\ell)$, para todo $0 \leq \ell < n$. Seja $P = (C_1, C_2 \ldots C_k)$ uma k-partição par de $2n$ termos. Considere que o termo $2n \in C_i$, para algum $1 \leq i \leq k$. Como $|C_i|$ é par, temos que existe um termo $y \in C_i$, tal que $y \neq 2n$. Seja P' a k-partição resultante da remoção dos termos $2n$ e y da parte C_i de P. Note que P' é uma k-partição par de $2n-2$ termos. Portanto, P' é contada em $\mu(2n-2,k)$. Sendo assim, $\mu(2n-2,k)$ conta as k-partições pares de $2n$ termos onde $y, 2n \in C_i$, para algum $1 \leq i \leq k$. Como há k possibilidades para a parte C_i, temos que $k \cdot \mu(2n-2,k)$ conta as k-partições pares de $2n$ termos onde $y, 2n \in C_j$, para todo $1 \leq j \leq k$. Observe que y pode ser qualquer um dos $2n-1$ termos restantes. Sendo assim, cada k-partição par P de $2n$ termos é equivalente a alguma combinação de $(2n-1)k \cdot \mu(2n-2,k)$. Sendo assim, $\mu(2n,k) \leq (2n-1)k \cdot \mu(2n-2,k)$. Por HI, $\mu(2n-2,k) \leq X(2n-2)$, logo:

$$\mu(2n,k) \leq (2n-1)k \cdot \mu(2n-2,k) \leq (2n-1)k \cdot X(2n-2) = X(2n) \tag{12}$$

$\square$

Lema 7. *Seja X_ℓ o evento de uma k-partição de ℓ termos P ser ímpar. Temos que* $\mathbb{P}[X_{2n+2}] \geq \mathbb{P}[X_{2n}] \longleftrightarrow \Phi(2n+2,k) \geq \Phi(2n,k) \cdot k^2$.

Demonstração. Sejam Ω e Ω' os conjuntos de todas k-partições de $2n$ e $2n+2$ termos, respectivamente. Temos que $\mathbb{P}[X_{2n}] = \dfrac{\Phi(2n,k)}{|\Omega|}$ e $\mathbb{P}[X_{2n+2}] = \dfrac{\Phi(2n+2,k)}{|\Omega'|}$. Note que $|\Omega| = k^{2n}$, pois cada um dos $2n$ termos pode pertencer a qualquer um dos k conjuntos independentemente. Da mesma forma, $|\Omega'| = k^{2n+2}$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{2n+2}] \geq P[X_{2n}] &\longleftrightarrow \frac{\Phi(2n+2,k)}{k^{2n+2}} \geq \frac{\Phi(2n,k)}{k^{2n}} \\ &\longleftrightarrow \Phi(2n+2,k) \geq \Phi(2n,k) \cdot k^2 \end{aligned} \tag{13}$$

□

Lema 8. $\Phi(2n+2,k) \geq \Phi(2n,k) \cdot k^2$

Demonstração. Note que $\Phi(2n,k) = \Phi_2(2n,k) + \Phi_{\geq 4}(2n,k)$, pois, como temos um número par de termos, não há como ter uma k-partição com ímpar partes de tamanho ímpar, sendo assim, $\Phi_i(2n,k) = 0$, para todo i ímpar. Para demonstrar este lema, iremos contar as k-partições ímpares possíveis de $2n+2$ termos geradas a partir das k-partições contadas em $\Phi_2(2n,k)$, $\Phi_{\geq 4}(2n,k)$ e em $\mu(2n,k)$.

Tome uma k-partição ℓ-ímpar P_1 de $2n$ termos, onde $\ell \geq 4$, *i.e.*, P_1 é uma k-partição contada em $\Phi_{\geq 4}(2n,k)$. Note que o termo $2n+1$ possui k possibilidades de partes para formar uma nova k-partição a partir de P_1, pois o termo $2n+1$ pode pertencer a qualquer uma das k partes de P_1. O mesmo vale para o termo $2n+2$. Sendo assim, temos k^2 k-partições P_1' distintas de $2n+2$ termos possíveis a partir da partição P_1. Note que toda nova partição P_1' resultante é uma k-partição ímpar, pois temos ao menos 4 partes ímpares em P_1. Como temos $\Phi_{\geq 4}(2n,k)$ k-partições ímpares distintas com ao menos 4 partes ímpares, temos que $\Phi(2n+2,k) \geq \Phi_{\geq 4}(2n,k) \cdot k^2$.

Agora, tome uma k-partição 2-ímpar P_2 de $2n$ termos. Considere que as partes C_i e C_j tenham tamanho ímpar em P_2. Seja P_2' uma k-partição de $2n+2$ termos resultante das k^2 combinações dos termos $2n+1$ e $2n+2$ nas k partes de P_2. Se o termo $2n+1$ ou o termo $2n+2$ pertencer a alguma parte C_x em P_2, onde $x \neq i, j$, então P_2' é uma k-partição ímpar, pois $|C_x|$ é par, logo $|C_x \cup \{2n+1\}|$ é ímpar. Se ambos termos $2n+1$ e $2n+2$ pertencem à parte C_i, então P_2' é uma k-partição ímpar, pois $|C_i \cup \{2n+1, 2n+2\}|$ é ímpar. O mesmo vale para a parte C_j. Se os termos $2n+1$ e $2n+2$ pertencem às partes C_i e C_j, respectivamente ou não, então P_2' é uma k-partição par, pois C_i e C_j são as únicas partes de tamanho ímpar em P_2. Sendo assim, temos $k^2 - 2$ k-partições ímpares P_2' distintas a partir de P_2. Logo $\Phi(2n+2,k) \geq \Phi_2(2n,k) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2n,k)$. Note que a partição P_2' resultante de P_2 é distinta da partição P_1' resultante de P_1, pois ao retirarmos os termos $2n+1$ e $2n+2$ de P_1' e P_2' obtemos P_1 e P_2, e sabemos que P_1 e P_2 são k-partições distintas, pois P_1 tem exatamente duas partes de tamanho ímpar e P_2 tem pelo menos quatro partes de tamanho ímpar. Sendo assim, podemos somar as partições P_2' obtidas de P_2 junto com as partições P_1' obtidas de P_1. Portanto:

$$\begin{aligned} \Phi(2n+2,k) &\geq \Phi_{\geq 4}(2n,k) \cdot k^2 + \Phi_2(2n,k) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2n,k) \\ &\geq \Phi(2n,k) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2n,k) \end{aligned} \tag{14}$$

Agora, tome uma k-partição par P_3 de $2n$ termos. Seja P_3' uma k-partição de $2n+2$ termos resultante das k^2 combinações possíveis dos termos $2n+1$ e $2n+2$ nas k partes de P_3. Note que se os termos $2n+1$ e $2n+2$ pertencem a mesma parte, então P_3' é uma k-partição par. Do contrário, P_3' é uma k-partição ímpar. Sendo assim das k^2 combinações possíveis, temos que exatamente k combinações são k-partições pares, pois há k maneiras dos termos $2n+1$ e $2n+2$ pertencerem a mesma parte de P_3. Logo, temos $k^2 - k$ partições ímpares P_3' resultantes de P_3. Note que P_3' é distinto de P_2' e P_1', pelo mesmo argumento dado anteriormente. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \Phi(2n+2,k) &\geq \Phi(2n,k)\cdot k^2 + \mu(2n,k)\cdot k^2 - \mu(2n,k)\cdot k - 2\cdot\Phi_2(2n,k) \\ &\geq \Phi(2n,k)\cdot k^2 + \mu(2n,k)\cdot k(k-1) - 2\cdot\Phi_2(2n,k) \end{aligned} \tag{15}$$

Iremos demonstrar que $\mu(2n,k)\cdot k(k-1) - 2\cdot\Phi_2(2n,k) \geq 0$. Pelo Lema 5, temos que:

$$\begin{aligned} 2\cdot\Phi_2(2n,k) &\leq 2\cdot\binom{k}{2}\cdot\varphi_2(2n,k) \\ &\leq k(k-1)\cdot\varphi_2(2n,k) \end{aligned} \tag{16}$$

Pelo Lema 4, temos que:

$$k(k-1)\cdot\varphi_2(2n,k) \leq k(k-1)\cdot\mu(2n,k) \tag{17}$$

Por (14) e (15), temos que:

$$\begin{aligned} 2\cdot\Phi_2(2n,k) \leq k(k-1)\cdot\varphi_2(2n,k) &\leq k(k-1)\cdot\mu(2n,k) \\ \therefore \mu(2n,k)\cdot k(k-1) - 2\cdot\Phi_2(2n,k) &\geq 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Sendo assim, temos que $\Phi(2n+2,k) \geq \Phi(2n,k)\cdot k^2$, como desejado.

□

Lema 9. *Seja Y_ℓ o evento de uma k-partição de ℓ termos P ser par. Temos que* $\mathbb{P}[Y_{2n+2}] \leq \mathbb{P}[Y_{2n}]$.

Demonstração. Por definição, P é uma k-partição par se $|C_i|$ é par, para toda parte C_i. Em contrapartida, P é uma k-partição ímpar se $|C_j|$ é ímpar, para alguma parte C_j de P. Sendo assim, $\overline{X_\ell} = Y_\ell$, onde X_ℓ o evento de uma k-partição de ℓ termos P ser ímpar. Logo, $\mathbb{P}[Y_\ell] = 1 - \mathbb{P}[X_\ell]$. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{2n}] &= 1 - \mathbb{P}[X_{2n}] \\ \mathbb{P}[Y_{2n+2}] &= 1 - \mathbb{P}[X_{2n+2}] \end{aligned} \tag{19}$$

Pelos Lemas 7 e 8, temos que $\mathbb{P}[X_{2n+2}] \geq \mathbb{P}[X_{2n}]$, logo:

$$\mathbb{P}[Y_{2n+2}] = 1 - \mathbb{P}[X_{2n+2}] \leq 1 - \mathbb{P}[X_{2n}] = \mathbb{P}[Y_{2n}] \tag{20}$$

$\square$