Proposição 1. *Seja G um grafo conexo. Seja T uma árvore de Busca em Largura de G a partir de um vértice v qualquer. Se existem vértices $s, t \in V(G)$ tais que $st \in E(G)$, $st \notin E(T)$ e $dist_T(v, s) = dist_T(v, t) + 1$, então G possui ciclo par.*

Proposição 2. *Seja G um grafo conexo livre de ciclos pares. Seja T uma Árvore de Busca em Largura de G a partir de $v \in V(G)$. Seja $V \subsetneq V(G)$ o conjunto de vértices com distância $p > 0$ de v. Temos que o conjunto $E(G[V])$ é um emparelhamento.*

Lema 1. *Seja G um grafo. Se existe uma k-partição $V_1, V_2, \ldots, V_k$ dos vértices de G tal que, para todo vértice $v \in V(G)$, temos que $|N(v) \cap V_i| = 1$, para algum $1 \leq i \leq k$, então $\chi_{pcf}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi(G[V_i])$.*

Demonstração. Seja $H_i = G[V_i]$, para todo $1 \leq i \leq k$. Iremos colorir cada subgrafo H_i com $\chi(H_i)$ cores distintas. Para isso, cada cor será representada por um par ordenado. Seja $c_i : V(H_i) \to \{i\} \times \chi(H_i)$ uma coloração própria de H_i. Para todo par distinto de colorações c_i e c_j, temos que $c_i(v) \neq c_j(u)$, para todo $v \in V(H_i)$ e $u \in V(H_j)$, pois $(i, x) \neq (j, y)$ para $i \neq j$.

Seja c uma coloração de G tal que $c(v) = c_i(v)$ se e somente se $v \in V(H_i)$. Em outras palavras, c é a união das colorações usadas em cada subgrafo H_i. Como c_i é uma coloração própria de H_i e todo par distinto de subgrafos H_i e H_j são coloridos com cores distintas, temos que c é uma coloração própria de G.

Como, para todo vértice $v \in V(G)$, vale que $|N(v) \cap V(H_i)| = 1$, para algum subgrafo H_i, e como as cores usadas em H_i são distintas das cores usadas em $V(G) \setminus V(H_i)$, temos que existe uma cor (i, x) que aparece uma única vez na vizinhança de v, para $x \in [\chi(H_i)]$. Sendo assim, c descreve uma coloração própria livre de conflitos de G. Como c_i utiliza $\chi(H_i)$ cores, para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $\chi_{pcf}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi(H_i)$.

□

Teorema 1. *Seja G um grafo conexo. Se G é livre de ciclos pares, então $\chi_{pcf}(G) \leq 7$.*

Demonstração. Seja T uma Árvore de Busca em Largura de G a partir de um vértice r qualquer. Sabemos que T é uma árvore geradora, pois G é conexo. Seja V_0, V_1, V_2 uma partição de G tal que $x \in V_i$ se e somente se $i = dist_T(r, x) \pmod 3$. Seja s um vértice de G, tal que $s \neq r$. Seja p o pai de s em T e seja f um filho de s em T. Note que p e f pertencem a partições distintas, pois:

$$dist_T(r, p) \pmod 3 \neq dist_T(r, p) + 2 \pmod 3 = dist_T(r, f) \pmod 3 \quad (1)$$

Seja $t \in V(G)$ um vértice tal que $dist_T(r, s) > dist_T(r, t) + 1$. Sabemos que $st \notin E(G)$, pois T é uma árvore de Busca em Largura. Sendo assim, se $st \in E(G)$ e $st \notin E(T)$, então $dist_T(r, s) = dist_T(r, t) + 1$ ou $dist_T(r, s) = dist_T(r, t)$. Pela Proposição 1, sabemos que se $st \in E(G)$ e $st \notin E(T)$, então $dist_T(r, s) = dist_T(r, t)$, pois G é livre de ciclos pares. Note que isto implica que s é adjacente a precisamente um vértice u em G tal que $dist_T(r, s) = dist_T(r, u) + 1$, e, sendo assim, u é o pai de s em T, *i.e.*, $u = p$. Note que $|N(s) \cap V_i| = 1$, onde $f \in V_i$, para todo $s \in V(G) \setminus \{r\}$.

Resta agora a partição do vértice raiz r. Iremos remover um vértice $v \in N(r)$ da partição V_1 e iremos construir uma nova partição $V_0, V_1^{'}, V_2, V_3$ de G, de modo que $V_1^{'} = V_1 \setminus \{v\}$ e $V_3 = \{v\}$. Seja s um vértice onde $|N(s) \cap V_1| = 1$, *i.e.*, o pai p de s pertence a V_1. Queremos argumentar que a propriedade é satisfeita para s na nova partição $V_0, V_1^{'}, V_2, V_3$. Se $p \neq v$, então $|N(s) \cap V_1'| = 1$ e a propriedade continua valendo. Se $p = v$, então $N(s) \cap V_3 = \{v\}$, *i.e.*, $|N(s) \cap V_3| = 1$ e a propriedade vale.

Note que a partição V_0, V_1', V_2 e V_3 satisfaz a condição do Lema 1. Note que pela Proposição 2, $E(G[V_i])$ é um emparelhamento. Sendo assim, temos que $\chi(G[V_i]) = 2$, para $0 \leq i \leq 2$. Note que $\chi(G[V_3]) = 1$, pois $V_3 = \{v\}$. Sendo assim, pelo Lema 1, temos que $\chi_{pcf}(G) \leq 7$.

$\square$

Definição 1. *Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ uma $k-$partição de d elementos distintos. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma $k-$partição par se $|P_i|$ é par, para todo $P_i \in \mathcal{P}$.*

Definição 2. *Denotamos por $\mu(d, k)$ a quantidade de $k-$partições pares distintas de d elementos distintos.*

Definição 3. *Denotamos por $\Phi(d, k)$ a quantidade de $k-$partições não pares distintas de d elementos distintos. Denotamos por $\Phi_\ell(d, k)$ a quantidade de $k-$partições não pares de d elementos, com exatamente ℓ partes de cardinalidade ímpar. Também denotamos por $\Phi_{\geq \ell}(d, k)$ a quantidade de $k-$partições não pares de d elementos com pelo menos ℓ partes de cardinalidade ímpar, i.e., $\Phi_{\geq \ell}(d, k) = \sum\limits_{i=\ell}^{k} \Phi_i(d, k)$.*

Definição 4. *Denotamos por $\varphi_\ell(d, k)$ a quantidade de $k-$partições não pares de d elementos onde somente as primeiras ℓ partes tenham cardinalidade ímpar. Claramente temos que $\varphi_\ell(d, k) \leq \Phi_\ell(d, k)$, pois $\varphi_\ell(d, k)$ conta apenas as $k-$partições com as primeiras ℓ partes de cardinalidade ímpar, já $\Phi_\ell(d, k)$ conta qualquer subconjunto pertencente a $\binom{[k]}{\ell}$ com cardinalidade ímpar.*

Definição 5. *Denotamos por $\chi_{io}(G)$ o menor inteiro k tal que G possui uma $k-$coloração ímpar não própria.*

Proposição 3. *Seja $2n!!$ o fatorial dos ímpares. Temos que $2n!! \leq n^n$.*

Lema 2. *Seja a recorrência a seguir:*

$$T(2d, k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ \sum\limits_{i=0}^{dn} \binom{2d}{2i} \cdot T(2i, k-1) & c.c. \end{cases} \tag{2}$$

Temos que $T(2d, k) = \mu(2d, k)$, para $k \geq 1$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em k.

Base ($k = 1$): Para $k = 1$, temos que $T(2d, k) = \mu(2d, 1) = 1$, pois há uma única partição $\mathcal{P} = \{P_1\}$ de $2d$ elementos, de modo que $|P_1|$ seja par. Sendo assim, o resultado segue.

Passo ($k > 1$): Suponha que $T(2d, \ell) = \mu(2d, \ell)$, para todo $1 \leq \ell < k$. Como P_k tem tamanho par, temos que existe um i tal que $|P_k| = 2i$, onde $0 \leq i \leq d$. Sabemos que há $\binom{2d}{2i}$ maneiras de escolher $2i$ elementos de $2d$ elementos para a parte P_k. Note que ao escolher $2i$ elementos para a parte P_k temos que particionar os $2d-2i$ elementos restantes em $(k-1)$ partes, de modo que cada parte tenha tamanho par. Sendo assim, temos que escolher uma $(k-1)-$partição par $\mathcal{P}'$ de $2d-2i$ elementos. Note que há $\mu(2d-2i, k-1)$ maneiras de escolher $\mathcal{P}'$. Sendo assim:

$$\mu(2n,k) = \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2d-2i, k-1) \tag{3}$$

Por HI, $T(2d-2i, k-1) = \mu(2d-2i, k-1)$. Note que $\binom{2d}{2i} = \binom{2d}{2d-2i}$. Logo:

$$\begin{aligned}\mu(2d,k) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2d}{2d-2i} \cdot T(2d-2i, k-1) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot T(2i, k-1) = T(2d,k)\end{aligned} \tag{4}$$

□

Lema 3. *Seja a recorrência a seguir:*

$$R(2d,k) = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \leq 1 \\ 2^{2d-1} & \textit{se } k = 2 \\ \sum_{i=1}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot R(2i, k-1) & \textit{se } k > 2 \end{cases} \tag{5}$$

Temos que $R(2d,k) = \varphi_2(2d,k)$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em k.

Base ($k = 2$): Note que $\varphi_2(2d,2) = \Phi(2d,2)$, pois, seja uma $k-$partição não par $\mathcal{P} = (P_1, P_2)$, como $2d$ é par, temos que $|P_1|$ e $|P_2|$ são pares ou $|P_1|$ e $|P_2|$ são ímpares. Note que $\Phi(2d,2) = 2^{2d} - \mu(2d,2)$, pois há exatamente 2^{2d} formas de particionar $2d$ elementos em duas partes P_1 e P_2 e dessas 2^{2d} maneiras há $\mu(2d,2)$ maneiras de particionar $2d$ termos tal que $|P_1|$ e $|P_2|$ sejam pares. Note que:

$$\mu(2d,2) = \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot T(2i,1) = \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} = 2^{2d-1} \tag{6}$$

Logo, temos que $\varphi_2(2d,2) = \Phi(2d,2) = 2^{2d} - 2^{2d-1} = 2^{2d-1} = R(2d,2)$ e o resultado segue.

Passo ($k > 1$): Suponha que $R(2d,\ell) = \varphi_2(2d,\ell)$, para todo $2 \leq \ell < k$.

Como somente as partes P_1 e P_2 tem tamanho ímpar, temos que a parte P_k tem tamanho par, pois $k > 2$. Sendo assim, existe um i tal que $|P_k| = 2i$, onde $0 \leq i \leq d-1$.

Note que $|P_k| \leq 2d-2$, pois como P_1 e P_2 possuem tamanho ímpar, temos que há ao menos um termo em P_1 e P_2. Sabemos que há $\binom{2d}{2i}$ maneiras de escolher $2i$ elementos de $2d$ elementos para a parte P_k. Note que ao escolher $2i$ elementos para a parte P_k temos que particionar os $2d-2i$ elementos restantes em $(k-1)$ partes, de modo que apenas as partes P_1 e P_2 tenham tamanho par. Sendo assim, temos que escolher uma $(k-1)-$partição não par $\mathcal{P}'$ de $2d-2i$ elementos, onde apenas P_1 e P_2 tem cardinalidade ímpar. Note que há $\varphi_2(2d-2i, k-1)$ maneiras de escolher $\mathcal{P}'$. Sendo assim:

$$\varphi_2(2d,k) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{2d}{2i} \cdot \varphi_2(2d-2i, k-1) \tag{7}$$

Por HI, $R(2d-2i, k-1) = \varphi_2(2d-2i, k-1)$. Note que $\binom{2d}{2i} = \binom{2d}{2d-2i}$. Logo:

$$\begin{aligned} \varphi_2(2d,k) &= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{2d}{2d-2i} \cdot R(2d-2i, k-1) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \binom{2d}{2i} \cdot R(2i, k-1) = R(2d,k) \end{aligned} \tag{8}$$

$\square$

Lema 4. $\varphi_2(2n,k) \leq \mu(2n,k)$.

Demonstração. $\square$

Lema 5. $\Phi_2(2d,k) = \binom{k}{2} \cdot \varphi_2(2d,k)$.

Demonstração. Pela definição, $\varphi_2(2d,k)$ conta a quantidade de $k-$partições $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$, onde apenas P_1 e P_2 tenham tamanho ímpar. Pela definição, $\Phi_2(2d,k)$ conta a quantidade de $k-$partições $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ onde exatamente duas partes quaisquer P_i e P_j tem tamanho ímpar, para algum $1 \leq i,j \leq k$. Note que $\varphi_2(2d,k)$ não conta as $k-$partições onde $|P_i|$ ou $|P_j|$ são ímpares, para $i,j \geq 3$. Mas, neste caso, podemos considerar P_i e P_j como sendo as partes P_1 e P_2, de modo que a quantidade de $k-$partições ímpares distintas onde somente $|P_i|$ e $|P_j|$ são ímpares seja igual a $\varphi_2(2d,k)$. Como há exatamente $\binom{k}{2}$ formas de escolher duas partes P_i e P_j entre as k partes, de modo que $|P_i|$ e $|P_j|$ sejam ímpares, temos que $\Phi_2(2d,k) = \binom{k}{2} \cdot \varphi_2(2d,k)$.

□

Lema 6. *Seja a recorrência a seguir:*

$$X(2d) = \begin{cases} 1 & se\ d = 0 \\ (2d-1)k \cdot X(2d-2) & c.\ c. \end{cases} \tag{9}$$

Temos que $\mu(2d,k) \leq X(2d)$.

Demonstração. A demonstração segue por indução em d.

Base ($d = 0$): Se $d = 0$, então $T(0,k) = 1 \leq X(0)$ e o resultado segue.

Passo ($d > 0$): Suponha que $\mu(2\ell,k) \leq X(2\ell)$, para todo $0 \leq \ell < d$. Seja $\mathcal{P} = (P_1, P_2 \dots P_k)$ uma $k-$partição par de $2d$ elementos. Considere que o elemento $2d \in P_1$. Como $|P_1|$ é par, temos que existe um elemento $y \in P_1$, tal que $y \neq 2d$. Seja $\mathcal{P}'$ a $k-$partição resultante da remoção dos elementos $2d$ e y da parte P_1 de $\mathcal{P}$. Note que $\mathcal{P}'$ é uma $k-$partição par de $2d-2$ elementos. Portanto, $\mathcal{P}'$ é contada em $\mu(2d-2,k)$. Sendo assim, $\mu(2n-2,k)$ conta as $k-$partições pares de $2d$ elementos onde $y, 2n \in P_1$. Note que $k \cdot \mu(2n-2,k)$ conta as $k-$partições pares de $2d$ elementos, onde o elemento y e o elemento $2n$ pertencem a mesma parte, pois há k partes em $\mathcal{P}$ e $\mu(2n-2,k)$ conta as $k-$partições pares de $2d$ elementos onde $y, 2n \in P_1$. Observe que y pode ser qualquer um dos $2n-1$ elementos restantes. Sendo assim, $(2d-1)k \cdot \mu(2d-2,k)$ conta as $k-$partições pares de $2n$ elementos, onde $y, 2n \in P_i$, onde $P_i \in \mathcal{P}$ e y é um elemento distinto de $2n$, portanto, $\mu(2d,k) \leq (2d-1)k \cdot \mu(2d-2,k)$. Por HI, $\mu(2d-2,k) \leq X(2d-2)$, logo:

$$\mu(2d,k) \leq (2d-1)k \cdot \mu(2d-2,k) \leq (2d-1)k \cdot X(2d-2) = X(2d) \tag{10}$$

□

Lema 7. $X(2d) \leq (d \cdot k)^d$

Demonstração. $\square$

Lema 8. $\Phi(2d+2,k) \geq \Phi(2d,k) \cdot k^2$

Demonstração. Para demonstrar este lema, iremos contar as $k-$partições não pares possíveis de $2d + 2$ elementos geradas a partir das $k-$partições contadas em $\Phi_2(2d,k)$, $\Phi_{\geq 4}(2d,k)$ e em $\mu(2d,k)$. Note que podemos formar uma $k-$partição $\mathcal{P}'$ de $2d+2$ elementos, a partir de uma $k-$partição $\mathcal{P}$ de $2d$ elementos, combinando os elementos $2n+1$ e $2n+2$ entre as k partes de $\mathcal{P}$. Observe que temos k^2 maneiras de combinar os elementos $2n+1$ e $2n+2$ entre as k partes, sendo assim, há k^2 partições $\mathcal{P}_1'$ distintas.

Agora, tome uma $k-$partição não par $\mathcal{P}_1$ de $2d$ elementos contada em $\Phi_{\geq 4}(2d,k)$, *i.e.*, $\mathcal{P}_1$ é uma $k-$partição com ao menos 4 partes de tamanho ímpar. Seja $\mathcal{P}_1'$ uma $k-$partição resultante das k^2 combinações dos termos $2d+1$ e $2d+2$ nas k partes de $\mathcal{P}_1$. Como $\mathcal{P}_1$ tem ao menos 4 partes de tamanho ímpar, temos que $\mathcal{P}_1'$ é uma $k-$partição não par, para qualquer $k-$partição $\mathcal{P}_1'$. Sendo assim, $\Phi(2n+2,k) \geq \Phi_{\geq 4}(2n,k) \cdot k^2$.

Agora, tome uma $k-$partição não par $\mathcal{P}_2$ de $2d$ elementos, com exatamente duas partes de tamanho ímpar. Considere que as partes P_i e P_j tenham tamanho ímpar em $\mathcal{P}_2$. Seja $\mathcal{P}_2'$ uma $k-$partição de $2d+2$ termos resultante das k^2 combinações dos termos $2d+1$ e $2n+2$ nas k partes de P_2. Observe que $\mathcal{P}_2'$ é uma $k-$partição par se e somente se combinamos os elementos $2d+1$ e $2d+2$ nas partes P_i e P_j. Como há exatamente duas formas de combiná-los de tal maneira, temos que há k^2-2 partições distintas $\mathcal{P}_2'$ não pares. Note que a partição $\mathcal{P}_2'$ é distinta da partição $\mathcal{P}_1'$, pois ao retirarmos os elementos $2d+1$ e $2d+2$ de $\mathcal{P}_1'$ e $\mathcal{P}_2'$ obtemos $k-$partições de $2d$ termos distintas. Sendo assim, podemos somar as $k-$partições $\mathcal{P}_2'$ e $\mathcal{P}_1'$. Portanto:

$$\begin{aligned}\Phi(2d+2,k) &\geq \Phi_{\geq 4}(2d,k) \cdot k^2 + \Phi_2(2d,k) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2d,k) \\ &\geq (\Phi_2(2d,k) + \Phi_{\geq 4}(2d,k)) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2d,k)\end{aligned} \tag{11}$$

Agora, tome uma $k-$partição par $\mathcal{P}_3$ de $2d$ elementos. Seja $\mathcal{P}_3'$ uma $k-$partição de $2d+2$ termos resultante das k^2 combinações possíveis dos elementos $2d+1$ e $2d+2$ nas k partes de $\mathcal{P}_3$. Note que se os elementos $2d+1$ e $2d+2$ pertencem a mesma parte, então $\mathcal{P}_3'$ é uma $k-$partição par. Do contrário, $\mathcal{P}_3'$ é uma $k-$partição ímpar. Sendo assim, temos exatamente k partições $\mathcal{P}_3'$ pares, das k^2 partições possíveis, pois há k maneiras dos termos $2n+1$ e $2n+2$ pertencerem a mesma parte de $\mathcal{P}_3$. Logo, temos k^2-k partições não pares $\mathcal{P}_3'$. Note que $\mathcal{P}_3'$ é distinto de $\mathcal{P}_2'$ e $\mathcal{P}_1'$, pelo mesmo argumento dado anteriormente. Sendo assim:

$$\Phi(2d+2,k) \geq (\Phi_2(2d,k) + \Phi_{\geq 4}(2d,k)) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2d,k) + \mu(2d,k) \cdot k(k-1) \tag{12}$$

Note que $\Phi(2d,k) = \Phi_2(2d,k) + \Phi_{\geq 4}(2d,k)$, pois, como temos um número par de elementos, não há como ter uma $k-$partição com ímpar partes de tamanho ímpar, sendo assim, $\Phi_i(2d,k) = 0$, para todo i ímpar. Logo:

$$
\begin{aligned}
\Phi(2d+2,k) &\geq (\Phi_2(2d,k) + \Phi_{\geq 4}(2d,k)) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2d,k) + \mu(2n,k) \cdot k(k-1) \\
&\geq (\Phi(2d,k)) \cdot k^2 - 2 \cdot \Phi_2(2d,k) + \mu(2d,k) \cdot k(k-1)
\end{aligned} \tag{13}
$$

Iremos demonstrar que $\mu(2d,k) \cdot k(k-1) - 2 \cdot \Phi_2(2d,k) \geq 0$. Pelo Lema 5, temos que:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \Phi_2(2d,k) &= 2 \cdot \binom{k}{2} \cdot \varphi_2(2d,k) \\
&= k(k-1) \cdot \varphi_2(2d,k)
\end{aligned} \tag{14}
$$

Pelo Lema 4, temos que:

$$
k(k-1) \cdot \varphi_2(2d,k) \leq k(k-1) \cdot \mu(2d,k) \tag{15}
$$

Por (14) e (15), temos que:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \Phi_2(2d,k) \leq k(k-1) \cdot \varphi_2(2d,k) \leq k(k-1) \cdot \mu(2d,k) \\
\therefore \mu(2d,k) \cdot k(k-1) - 2 \cdot \Phi_2(2d,k) \geq 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

Sendo assim, temos que $\Phi(2d+2,k) \geq \Phi(2d,k) \cdot k^2$, como desejado.

□

Lema 9. *Seja X_{2d} o evento de uma $k-$partição de $2d$ elementos $\mathcal{P}$ ser par. Seja X_{2d+2} o evento de uma $k-$partição de $2d+2$ elementos $\mathcal{P}'$ ser par. Temos que $\mathbb{P}[X_{2d+2}] \leq \mathbb{P}[X_{2d}]$.*

Demonstração. Sejam Ω e Ω' os conjuntos de todas $k-$partições de $2d$ e $2d+2$ elementos, respectivamente. Note que $\mathbb{P}[\overline{X_{2d}}] = \dfrac{\Phi(2d,k)}{|\Omega|}$ e $\mathbb{P}[\overline{X_{2d+2}}] = \dfrac{\Phi(2d+2,k)}{|\Omega'|}$. Observe que $|\Omega| = k^{2d}$, pois cada um dos $2d$ termos pode pertencer a qualquer uma das k partes independentemente. Da mesma forma, $|\Omega'| = k^{2d+2}$. Pelo Lema 8:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(2d+2,k) \geq \Phi(2d,k) \cdot k^2 \\
&(\rightarrow)\frac{\Phi(2d+2,k)}{k^{2d+2}} \geq \frac{\Phi(2d,k)}{k^{2d+2}} \cdot k^2 \\
&(\rightarrow)\frac{\Phi(2d+2,k)}{k^{2d+2}} \geq \frac{\Phi(2d,k)}{k^{2d}} \\
&(\rightarrow)\mathbb{P}[\overline{X_{2d+2}}] \geq \mathbb{P}[\overline{X_{2d}}]
\end{aligned} \tag{17}
$$

Portanto, temos que $\mathbb{P}[X_{2d+2}] = 1 - \mathbb{P}[\overline{X_{2d+2}}] \leq 1 - \mathbb{P}[\overline{X_{2d}}] = \mathbb{P}[X_{2d}]$.

□

Lema 10. *Seja X_{2d} o evento de uma $k-$partição de $2d$ elementos $\mathcal{P}$ ser par. Seja G um grafo de ordem n colorido com k cores uniforme e aleatoriamente. Seja Y_v o evento de v não ter testemunha ímpar, para $v \in V(G)$ e $d(v) = 2d$. Temos que $\mathbb{P}[X_{2d}] = \mathbb{P}[Y_v]$.*

Demonstração. Sabemos que há $\mu(2d, k)$ maneiras de $k-$colorir os vértices pertencentes a $N(v)$, de modo que v não possua testemunha ímpar. Note que temos exatamente $\mu(2d, k) \cdot k^{n-2d}$ maneiras de colorir G com k cores de modo que v não possua testemunha ímpar, pois ao colorir $N(v)$ com uma das $k-$colorações contadas em $\mu(2d, k)$, podemos colorir os vértices de $V(G) \setminus N(s)$ com qualquer uma das k cores disponíveis. Note que há k^n formas de colorir G com k cores. Sendo assim:

$$\mathbb{P}[Y_v] = \frac{\mu(2d, k) \cdot k^{n-2d}}{k^n} = \frac{\mu(2d, k)}{k^{2d}} = \mathbb{P}[X_{2d}] \tag{18}$$

□

Lema 11. *Seja G um grafo. Sejam δ e Δ o grau mínimo e máximo de G, respectivamente. Temos que $\chi_{io}(G) \leq \ell \cdot \sqrt[\ell]{e \cdot \Delta^2}$, para $1 \leq \ell \leq \frac{\delta}{2}$.*

Demonstração. Pinte os vértices de G com k cores aleatoriamente e independentemente, onde $k = \ell \cdot \sqrt[\ell]{e \cdot \Delta^2}$, para $1 \leq \ell \leq \frac{\delta}{2}$. Seja Y_v o evento de v não ter testemunha ímpar, para $v \in V(G)$. Se v tem grau ímpar, sabemos que $\mathbb{P}[Y_v] = 1$. Suponha que v tem grau par, *i.e.*, $d(v) = 2d$, para $d \geq 0$. Pelo Lema 10, temos que $\mathbb{P}[Y_v] = \mathbb{P}[X_{2d}]$, onde X_{2d} é o evento de uma $k-$partição de $2d$ elementos $\mathcal{P}$ ser par. Pelo Lema 9, temos que $\mathbb{P}[X_{2d}] \leq \mathbb{P}[X_{2\ell}]$, para $\ell \leq d$. Note que $\mathbb{P}[X_{2\ell}] = \frac{\mu(2\ell, k)}{k^{2\ell}}$. Pelos Lemas 6 e 7, temos que $\mu(2\ell, k) \leq (\ell \cdot k)^{\ell}$. Sendo assim:

$$\mathbb{P}[Y_v] \leq \mathbb{P}[X_{2\ell}] = \frac{\mu(2\ell, k)}{k^{2\ell}} \leq \frac{(l \cdot k)^{\ell}}{k^{2\ell}} = \left(\frac{\ell}{k}\right)^{\ell} = \frac{1}{e \cdot \Delta^2} \tag{19}$$

Note que o evento Y_v é dependente a no máximo δ^2 eventos, para todo $v \in V(G)$. Sendo assim, pelo Lema Local de Lovász, temos que $\mathbb{P}[\bigcap_{v \in V(G)} \overline{Y_v}] > 0$. Logo $\chi_{io} \leq k = \ell \cdot \sqrt[\ell]{e \cdot \Delta^2}$, para $1 \leq \ell \leq \frac{\delta}{2}$.

□