Definição 1. *Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ uma $k-$partição de d elementos distintos. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma $k-$partição par se $|P_i|$ é par, para todo $P_i \in \mathcal{P}$.*

Definição 2. *Denotamos por $\mu(d, k)$ a quantidade de $k-$partições pares distintas de d elementos distintos.*

Definição 3. *Denotamos por $\varphi_2(d, k)$ a quantidade de $k-$partições $\mathcal{P}$ não pares de d elementos onde somente as duas primeiras partes $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ possuem cardinalidade ímpar.*

Definição 4. *Seja $\mathcal{H}$ um hipergrafo e seja $C : V(\mathcal{H}) \to [k]$ uma k-coloração dos vértices de $\mathcal{H}$. Dizemos que C é uma k-coloração ímpar se, para toda aresta $e \in E(\mathcal{H})$, existe uma cor que aparece impar vezes nos vértices de e. Denotamos por $\chi_{io}(\mathcal{H})$ o menor inteiro k tal que $\mathcal{H}$ possui uma $k-$coloração ímpar.*

Definição 5. *Seja G um grafo e seja $C : V(\mathcal{H}) \to [k]$ uma k-coloração dos vértices de G. Dizemos que C é uma k-coloração ímpar se, para todo vértice $v \in V(G)$, existe uma cor que aparece impar vezes na vizinhança de G. Denotamos por $\chi_o(\mathcal{H})$ (resp. $\chi_{io}(\mathcal{H})$) o menor inteiro k tal que G possui uma $k-$coloração ímpar própria (resp. não própria).*

Proposição 1. *Seja $2n!!$ o fatorial dos ímpares. Temos que $2n!! \leq n^n$.*

Teorema 1. *Seja $\mathcal{H}$ um hipergrafo tal que cada aresta $e \in E(\mathcal{H})$ possui pelo menos $2t$ vértices, para $t > 0$, e cada aresta e intersecta no máximo Γ outras arestas. Temos que $\chi_{io}(\mathcal{H}) \leq t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$*

Corolário 1. $\chi_{io}(\mathcal{H}) \in \mathcal{O}(ln(\Gamma) \cdot \Gamma^{1/t})$

A demonstração segue do Teorema 1. Se $t \geq 1 + ln(\Gamma + 1)$, substituindo t por $ln(e \cdot (\Gamma + 1))$, temos que $\chi_{io}(\mathcal{H}) \in \mathcal{O}(ln(\Gamma))$. Se $t < 1 + ln(\Gamma + 1)$, então $\chi_{io}(\mathcal{H}) \leq (1 + ln(\Gamma + 1)) \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$, pelo Teorema 1, e o resultado segue.

Corolário 2. *Seja G um grafo com $\delta(G) \geq 2t$, para $t > 0$. Temos que $\chi_{io}(G) \leq t \cdot (e \cdot (\Delta^2 + 1))^{1/t}$.*

Seja $\mathcal{H} = (V(G), E)$ um hipergrafo tal que $E = \bigcup_{v \in V(G)} N_G(v)$, *i.e.*, $\mathcal{H}$ possui uma aresta e_v para cada vértice $v \in V(G)$ e cada aresta $e_v \in E(\mathcal{H})$ contém os vértices adjacentes a v em G. Note que uma k-coloração ímpar c para $\mathcal{H}$ também é uma k-coloração ímpar para G. Como cada aresta em $\mathcal{H}$ intersecta no máximo Δ^2 outras arestas, pelo Teorema 1, temos o resultado desejado.

Corolário 3. $\chi_{io}(G) \in \mathcal{O}(ln(\Delta) \cdot \Delta^{2/t})$.

A demonstração é similar à demonstração do Corolário 1.

Teorema 2. *Seja G um grafo. Temos que $\chi_o(G) \leq \chi(G) \cdot \chi_{io}(G)$.*

Corolário 4. *Seja G um grafo com $\delta(G) \geq 6$. Se $\chi(G) \in \mathcal{O}(1)$, então $\chi_o(G) \leq \Delta$, para Δ suficientemente grande.*

Pelo Teorema 2 e o Corolário 2, temos que $\chi_o(G) \leq \chi(G) \cdot 3 \cdot (\Delta^2 + 1))^{1/3}$. Para Δ suficientemente grande, temos que $3 \cdot \chi(G) \cdot (\Delta^2 + 1))^{1/3} \leq \Delta$, pois $3 \cdot \chi(G)$ é uma constante.

Corolário 5. *Seja G um grafo com $\delta(G) \geq 2t$. Se $\chi(G) \in \mathcal{O}(1)$, então $\chi_o(G) \in \mathcal{O}(ln(\Delta) \cdot \Delta^{2/t})$.*

Pelo Teorema 2 e o Corolário 3, temos o resultado desejado.

Teorema 3. *Sejam d e k inteiros positivos, com d par. Para qualquer $1 \leq t \leq \frac{d}{2}$, temos que:*

$$\sum_{i=0}^{k} i^d \leq k^{d-t} \cdot t^t \cdot 2^{2k-t-1} \tag{1}$$

Corolário 6. *Sejam d e k inteiros positivos, com $d \geq 3$ ímpar. Para qualquer $1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$, temos que:*

$$\sum_{i=0}^{k} i^d \leq k^{d-t} \cdot t^t \cdot 2^{2k-t-1} \tag{2}$$

Note que $\sum_{i=0}^{k} i^d = \sum_{i=0}^{k} i \cdot i^{d-1} \leq k \cdot \sum_{i=0}^{k} i^{d-1}$. Pelo Teorema 3, temos que $k \cdot \sum_{i=0}^{k} i^{d-1} \leq k \cdot k^{d-1-t} \cdot t^t \cdot 2^{2k-t-1} = k^{d-t} \cdot t^t \cdot 2^{2k-t-1}$, como desejado.

1. Demonstração do Teorema 1

Lema 1. *$\mu(2d, k) \leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2d-2, k)$, para $d \geq 1$.*

Demonstração. Iremos construir as k-partições pares $\mathcal{P}$ possíveis de $2d$ elementos com base nas escolhas que temos para um determinado elemento $x \in [2d]$. Devemos escolher uma parte P_i para x pertencer e temos k partes disponíveis para x. Como cada parte tem tamanho par, devemos escolher um elemento $y \in [2d]$ diferente de x para pertencer também à parte P_i. Temos $2d-1$ escolhas para este caso. Por fim, devemos particionar os $2d-2$ elementos restantes em k partes de modo que cada parte tenha tamanho par. Sendo assim, devemos escolher uma k-partição par $\mathcal{P}'$ de $2d-2$ elementos. Logo, $\mu(2d, k) \leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2d-2, k)$.

□

Lema 2. *$\mu(2d, k) \leq (d{\cdot}k)^d$, para $d \geq 1$.*

Demonstração. Iremos demonstrar por indução em d que $\mu(2d, k) \leq 2d!! \cdot k^d$. Como $2d!! \leq d^d$, pela Proposição 1, disto segue que $\mu(2d, k) \leq (d{\cdot}k)^d$.

Base ($d = 1$): Pelo Lema 1, temos que $\mu(2, k) \leq k \cdot \mu(0, k) = 2!! \cdot k$ e o resultado segue.

Passo ($d > 1$): Suponha que $\mu(2\ell, k) \leq (2\ell)!! \cdot k^\ell$, para $1 \leq \ell < d$. Pelo Lema 1, $\mu(2d, k) \leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2{\cdot}(d-1), k)$. Por HI, temos que:

$$\mu(2{\cdot}(d-1), k) \leq (2d-2)!! \cdot k^{d-1} \tag{3}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mu(2d, k) &\leq (2d-1) \cdot k \cdot \mu(2{\cdot}(d-1), k) \\ &\leq (2d-1) \cdot k \cdot (2d-2)!! \cdot k^{d-1} \\ &\leq 2d!! \cdot k^d \end{aligned} \tag{4}$$

□

Lema 3.

$$\mu(2d, k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ \sum_{i=0}^{d} \binom{2d}{2i} {\cdot} \mu(2i, k-1) & c.c. \end{cases} \tag{5}$$

Demonstração. Se $k = 1$, então $\mu(2d, k) = 1$, pois os $2d$ elementos devem estar contidos em uma única parte. Sendo assim, considere que $k > 1$. Agora, iremos construir as k-partições pares $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots P_k\}$ possíveis de $2d$ elementos. Primeiro, devemos escolher quantos dos $2d$ elementos irão pertencer a parte P_k. Como $|P_k|$ é par, podemos escolher qualquer inteiro i entre 0 e d, de modo que $|P_k| = 2i$. Como os $2d$ elementos são distintos, temos $\binom{2d}{2i} = \binom{2d}{2d-2i}$ maneiras de escolher $2i$ elementos para a parte P_k. Após isso, devemos particionar os $2d - 2i$ elementos restantes em $(k-1)$ partes de tamanho par, sendo assim, devemos escolher uma $(k-1)$-partição par $\mathcal{P}'$ de $2d-2i$ elementos. Portanto:

$$\begin{aligned}\mu(2d,k) &= \sum_{i=0}^{d}\binom{2d}{2i}\cdot\mu(2d-2i,k-1)\\ &= \sum_{i=0}^{d}\binom{2d}{2d-2i}\cdot\mu(2d-2i,k-1)\\ &= \sum_{i=0}^{d}\binom{2d}{2i}\cdot\mu(2i,k-1)\end{aligned} \tag{6}$$

□

Lema 4.

$$\varphi_2(2d,k) = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \leq 1\\ 2^{2d-1} & \textit{se } k = 2\\ \sum_{i=1}^{d}\binom{2d}{2i}\cdot\varphi_2(2i,k-1) & \textit{c. c.}\end{cases} \tag{7}$$

Demonstração. Iremos analisar cada caso da recorrência separadamente.

Caso 1 ($k \leq 1$): Se $k \leq 1$, então não há como k-particionar os $2d$ elementos de modo que apenas as partes P_1 e P_2 tenham tamanho ímpar. Portanto, $\varphi(2d,k) = 0$.

Caso 2 ($k = 2$): Se $k = 2$, então qualquer k-partição $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ de $2d$ elementos é contada em $\mu(2d,2)$ ou em $\varphi_2(2d,2)$, pois como temos um número par de elementos, ambas partes P_1 e P_2 têm tamanho par ou ímpar. Logo $\mu(2d,2) + \varphi_2(2d,2) = 2^{2d}$, pois 2^{2d} é o total de 2-partições possíveis de $2d$ elementos. Pelo Lema 3:

$$\mu(2d,2) = \sum_{i=0}^{d}\binom{2d}{2i}\cdot\mu(2i,1) = \sum_{i=0}^{d}\binom{2d}{2i} = 2^{2d-1} \tag{8}$$

Logo, temos que $\varphi_2(2d,2) = 2^{2d} - 2^{2d-1} = 2^{2d-1}$ e o resultado segue.

Caso 3 ($k > 2$): Iremos construir as k-partições não pares $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots P_k\}$ possíveis de $2d$ elementos. Como $k > 2$, existe uma parte $P_i \in \mathcal{P}$, onde $|P_i|$ é par. Sendo assim, a demonstração segue de modo análogo à demonstração do Lema 3, com a única restrição de que $|P_i| < 2d$, pois as partes P_1 e P_2 tem ao menos um elemento. □

Lema 5. *$\mu(2d,k) \leq \mu(2d-2,k)\cdot k^2$, para $d \geq 1$.*

Demonstração. Iremos provar que $\mu(2d,k) = k\cdot\mu(2d-2,k) + (k^2-k)\cdot\varphi_2(2d-2,k)$. Disto segue que $\mu(2d,k) \leq \mu(2d-2,k)\cdot k^2$, pois, pelos Lemas 3 e 4, temos que $\varphi_2(2d-2,k) \leq \mu(2d-2,k)$, considerando que ambos possuem uma recorrência similar e ainda

$\varphi_2(2d,2) = \mu(2d,2)$. Sejam dois elementos distintos $x, y \in [2d]$. Iremos construir uma k-partição par $\mathcal{P}$ de $2d$ elementos com base em duas escolhas: se x e y irão pertencer a mesma parte $P_i \in \mathcal{P}$ ou não.

Caso 1: Se escolhermos que x e y irão pertencer a mesma parte $P_i \in \mathcal{P}$, então devemos escolher uma parte P_i das k partes disponíveis. Após, devemos escolher uma k-partição par $\mathcal{P}'$ de $2d-2$ elementos para os elementos restantes. Sendo assim, para este caso, temos $k \cdot \mu(2d-2,k)$ partições possíveis.

Caso 2: Se escolhermos que $x \in P_i$ e $y \in P_j$, onde $P_i \neq P_j$, então devemos escolher primeiro quais são as partes P_i e P_j dentre as k partes que irão conter x e y respectivamente. Temos $2 \cdot \binom{k}{2} = k^2 - k$ formas de escolher P_i e P_j, pois há $\binom{k}{2}$ maneiras de escolher duas das k partes disponíveis e há duas maneiras de escolher qual das duas partes irá conter cada elemento. Após, devemos escolher uma k-partição não par $\mathcal{P}'$ onde apenas as partes P_i e P_j tenham tamanho ímpar. Por simetria das partes, há exatamente $\varphi_2(2d-2,k)$ partições $\mathcal{P}'$ distintas. Logo, para este caso, temos $(k^2-k) \cdot \varphi_2(2d-2,k)$ partições possíveis.

$\square$

Demonstração do Teorema 1. Pinte os vértices de $\mathcal{H}$ com $k = t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$ cores aleatoriamente e independentemente. Seja X_e o evento da aresta $e \in E(\mathcal{H})$ não ter uma cor que apareça ímpar vezes, onde $|e|$ é ímpar. Note que $\mathbb{P}[X_e] = \dfrac{\mu(|e|,k)}{k^{|e|}}$. Como $|e| \geq 2t$, pelo Lema 5, temos que:

$$\mu(|e|,k) \leq \mu(|e| - (|e| - 2t), k) \cdot k^{|e|-2t} = \mu(2t,k) \cdot k^{|e|-2t} \tag{9}$$

Pelo Lema 2:

$$\mu(2t,k) \leq (t \cdot k)^t \tag{10}$$

Portanto, por (7) e (8):

$$\mathbb{P}[X_e] = \frac{\mu(|e|,k)}{k^{|e|}} \leq \left(\frac{t}{k}\right)^t = \left(\frac{t}{t \cdot (e \cdot (\Gamma+1))^{1/t}}\right)^t = \frac{1}{e \cdot (\Gamma + 1)} \tag{11}$$

Sendo assim, pelo Lema Local de Lovász, temos que $\mathbb{P}[\bigcap_{e \in E(\mathcal{H})} \overline{X_e}] > 0$. Portanto, existe uma k-coloração tal que existe uma cor que aparece ímpar vezes nos vértices de e, para toda aresta $e \in E(\mathcal{H})$. Logo, $\chi_{io}(\mathcal{H}) \leq k = t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$.

$\square$

2. Demonstração do Teorema 2

Demonstração do Teorema 2. Iremos provar que $\chi_o(G) \leq \chi(G)\cdot\chi_{io}(G)$. Disto segue que $\chi_o(G) \leq \chi(G)\cdot t\cdot(e\cdot(\Delta^2+1))^{1/t}$, pois, pelo, Corolário 2, temos que $\chi_{io}(G) \leq t\cdot(e\cdot(\Delta^2+1))^{1/t}$. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2 \ldots, P_k\}$ uma k-coloração ímpar mínima. Para cada parte $P_i \in \mathcal{P}$, pinte os vértices de P_i com uma coloração própria mínima de $G[P_i]$, utilizando cores distintas para cada parte $P_i \in \mathcal{P}$. Ao final, temos uma coloração c de G utilizando no máximo $\chi(G)\cdot\chi_{io}(G)$ cores. Afirmamos que c é uma coloração ímpar e própria. Note que c é própria, pois tome $uv \in E(G)$, se $u \in P_i$ e $v \in P_j$, tal que $i \neq j$ e $P_i, P_j \in \mathcal{P}$, então u e v possuem cores distintas, pela construção da coloração, se $u, v \in P_i$, então u e v possuem cores distintas, pois P_i é colorido propriamente com $\chi(G[P_i])$ cores. Observe que, para todo $v \in V(G)$, existe uma parte $P_i \in \mathcal{P}$, tal que $|S|$ é ímpar, onde $S = P_i \cap N_G(v)$. Seja $T = N_G(v) \setminus S$. Note que existe uma cor em c que aparece ímpar vezes em S, pois $|S|$ é ímpar. Como $c(s) \neq c(t)$, para $s \in S$ e $t \in T$, pois s e t pertencem a partes distintas de $\mathcal{P}$, temos que existe uma cor que aparece ímpar vezes em $N_G(v)$.

$\square$

3. Demonstração do Teorema 3

Lembrete:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = x^0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^i}{i!} = x^0 + -\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^2}{2i!} = x^0 + -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Lema 6. $\mu(d,k) = \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (k-2i)^d$

Demonstração. Note que:

$$\mu(d,k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots a_k = d \\ \text{com } a_i \text{ par p/ } 1 \leq i \leq k}} \binom{d}{a_1, a_2, \ldots, a_k} \tag{12}$$

Ou seja, $\mu(d,k)$ é igual ao somatório multinomial de todas as possibilidades onde $a_1 + a_2 + \ldots a_k = d$ com a_i par, para todo $1 \leq i \leq k$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
\mu(d,k) &= \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots a_k = d \\ \text{com } a_i \text{ par p/ } 1 \leq i \leq k}} \binom{d}{a_1, a_2, \ldots, a_k} \\
&= \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots a_k = d \\ \text{com } a_i \text{ par p/ } 1 \leq i \leq k}} \frac{d!}{a_1! \cdot a_2! \ldots \cdot a_k!} \\
\therefore \frac{\mu(d,k)}{d!} &= \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots a_k = 2 \\ \text{com } a_i \text{ par p/ } 1 \leq i \leq k}} \frac{1}{a_1! \cdot a_2! \ldots \cdot a_k!}
\end{aligned} \tag{13}$$

Note que $\sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots a_k = d \\ \text{com } a_i \text{ par p/ } 1 \leq i \leq k}} \frac{1}{a_1! \cdot a_2! \ldots \cdot a_k!}$ é o coeficiente de x^d na série de potência $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^k$. Sendo assim, agora iremos calcular qual o valor do coeficiente x^d nesta série. Note que:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^k &= \frac{1}{2^k}\cdot(e^x+e^{-x})^k \\
&= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(e^x)^{k-i}\cdot(e^{-x})^i \\
&= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(e^x)^{k-i}\cdot(e^x)^{-i} \\
&= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(e^x)^{k-2i} \\
&= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}e^{x\cdot(k-2i)}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Observe que:

$$
e^{x\cdot(k-2i)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x\cdot(k-2i))^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j\cdot(k-2i)^j}{j!}
\tag{15}
$$

Por (13), (14) e (15), temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots a_k=d \\ \text{com } a_i \text{ par p/ } 1\,\leq\, i\,\leq\, k}} \frac{1}{a_1!\cdot a_2!\ldots\cdot a_k!} &= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\frac{(k-2i)^d}{d!} \\
\therefore \mu(d,k) &= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot(k-2i)^d
\end{aligned}
\tag{16}
$$

□

Demonstração do Teorema 3. Pelo Lema 6:

$$
\begin{aligned}
\mu(d,k) &= \frac{1}{2^k}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot(k-2i)^d \\
&= \frac{1}{2^k}\cdot\left(\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\binom{k}{i}\cdot(k-2i)^d + \sum_{i=\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1}^{k}\binom{k}{i}\cdot(k-2i)^d\right)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Sejam $x = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{i} \cdot (k-2i)^d$ e $y = \sum_{i=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}^{k} \binom{k}{i} \cdot (k-2i)^d$. Iremos provar que $x = y$. Para isso, suponha que k é par. Temos que:

$$x = \binom{k}{0} k^d + \binom{k}{1}(k-2)^d + \binom{k}{2}(k-4)^d \ldots + \binom{k}{\frac{k}{2}-1} 2^d + \binom{k}{\frac{k}{2}} 0^d \tag{18}$$

Note que:

$$\begin{aligned} y &= \binom{k}{\frac{k}{2}+1}(-2)^d + \binom{k}{\frac{k}{2}+2}(-4)^d \ldots + \binom{k}{k-1}(-(k-2))^d + \binom{k}{k}(-k)^d \\ &= \binom{k}{\frac{k}{2}-1} 2^d + \binom{k}{\frac{k}{2}-2} 4^d \ldots + \binom{k}{1}(k-2)^d + \binom{k}{0} k^d \end{aligned} \tag{19}$$

Logo $x = y$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \mu(d,k) &= \frac{2}{2^k} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{i} \cdot (k-2i)^d \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{i} \cdot (k-2i)^d \\ &\geq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} (k-2i)^d \\ &\geq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} 2i^d \\ &\geq \frac{2^d}{2^{k-1}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} i^d \end{aligned} \tag{20}$$

Pelos Lema 2 e 5:

$$\mu(d,k) \leq \mu(2t,k) \cdot k^{d-2t} \leq (t \cdot k)^t \cdot k^{d-2t} \leq t^t \cdot k^{d-t}, \text{ para } 1 \leq t \leq \frac{d}{2} \tag{21}$$

Por (20) e (21), temos que:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} i^d \leq \left(\frac{k}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{t}{k}\right)^t \cdot 2^{k-1} \\
(\rightarrow)\quad &\sum_{i=0}^{k} i^d \leq k^d \cdot \left(\frac{t}{2k}\right)^t \cdot 2^{2k-1} \qquad (22) \\
(\rightarrow)\quad &\sum_{i=0}^{k} i^d \leq k^{d-t} \cdot t^t \cdot 2^{2k-t-1}
\end{aligned}
$$

□