

Definição 1. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ uma k -partição de d elementos distintos. Dizemos que \mathcal{P} é uma k -partição par se $|P_i|$ é par, para todo $P_i \in \mathcal{P}$.

Definição 2. Denotamos por $\mu(d, k)$ a quantidade de k -partições pares distintas de d elementos distintos.

Definição 3. Denotamos por $\varphi_2(d, k)$ a quantidade de k -partições \mathcal{P} não pares de d elementos onde somente as duas primeiras partes $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ possuem cardinalidade ímpar.

Definição 4. Seja \mathcal{H} um hipergrafo e seja $C : V(\mathcal{H}) \rightarrow [k]$ uma k -coloração dos vértices de \mathcal{H} . Dizemos que C é uma k -coloração ímpar se, para toda aresta $e \in E(\mathcal{H})$, existe uma cor que aparece ímpar vezes nos vértices de e . Denotamos por $\chi_{io}(\mathcal{H})$ o menor inteiro k tal que \mathcal{H} possui uma k -coloração ímpar.

Definição 5. Seja G um grafo e seja $C : V(\mathcal{H}) \rightarrow [k]$ uma k -coloração dos vértices de G . Dizemos que C é uma k -coloração ímpar se, para todo vértice $v \in V(G)$, existe uma cor que aparece ímpar vezes na vizinhança de G . Denotamos por $\chi_o(\mathcal{H})$ (resp. $\chi_{io}(\mathcal{H})$) o menor inteiro k tal que G possui uma k -coloração ímpar própria (resp. não própria).

Proposição 1. Seja $2n!!$ o fatorial dos ímpares. Temos que $2n!! \leq n^n$.

Teorema 1. Seja \mathcal{H} um hipergrafo tal que cada aresta $e \in E(\mathcal{H})$ possui pelo menos $2t$ vértices, para $t > 0$, e cada aresta e intersecta no máximo Γ outras arestas. Temos que $\chi_{io}(\mathcal{H}) \leq t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$

Corolário 1. $\chi_{io}(\mathcal{H}) \in \mathcal{O}(\ln(\Gamma) \cdot \Gamma^{1/t})$

A demonstração segue do Teorema 1. Se $t \geq 1 + \ln(\Gamma + 1)$, substituindo t por $\ln(e \cdot (\Gamma + 1))$, temos que $\chi_{io}(\mathcal{H}) \in \mathcal{O}(\ln(\Gamma))$. Se $t < 1 + \ln(\Gamma + 1)$, então $\chi_{io}(\mathcal{H}) \leq (1 + \ln(\Gamma + 1)) \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$, pelo Teorema 1, e o resultado segue.

Corolário 2. Seja G um grafo com $\delta(G) \geq 2t$, para $t > 0$. Temos que $\chi_{io}(G) \leq t \cdot (e \cdot (\Delta^2 + 1))^{1/t}$.

Seja $\mathcal{H} = (V(G), E)$ um hipergrafo tal que $E = \bigcup_{v \in V(G)} N_G(v)$, i.e., \mathcal{H} possui uma aresta e_v para cada vértice $v \in V(G)$ e cada aresta $e_v \in E(\mathcal{H})$ contém os vértices adjacentes a v em G . Note que uma k -coloração ímpar c para \mathcal{H} também é uma k -coloração ímpar para G . Como cada aresta em \mathcal{H} intersecta no máximo Δ^2 outras arestas, pelo Teorema 1, temos o resultado desejado.

Corolário 3. $\chi_{io}(G) \in \mathcal{O}(\ln(\Delta) \cdot \Delta^{2/t})$.

A demonstração é similar ao Corolário 1.

Teorema 2. Seja G um grafo com $\delta(G) \geq 2t$, para $t > 0$. Se $\chi(G) \in \mathcal{O}(1)$, então $\chi_o(G) \in \mathcal{O}(\ln(\Delta) \cdot \Delta^{2/t})$.

Lema 1. $\mu(2d, k) \leq (2d - 1) \cdot k \cdot \mu(2d - 2, k)$, para $d \geq 1$.

Demonstração. Iremos construir as k -partições pares \mathcal{P} possíveis de $2d$ elementos com base nas escolhas que temos para um determinado elemento $x \in [2d]$. Devemos escolher uma parte P_i para x pertencer e temos k partes disponíveis para x . Como cada parte tem tamanho par, devemos escolher um elemento $y \in [2d]$ diferente de x para pertencer também à parte P_i . Temos $2d - 1$ escolhas para este caso. Por fim, devemos particionar os $2d - 2$ elementos restantes em k partes de modo que cada parte tenha tamanho par. Sendo assim, devemos escolher uma k -partição par \mathcal{P}' de $2d - 2$ elementos. Logo, $\mu(2d, k) \leq (2d - 1) \cdot k \cdot \mu(2d - 2, k)$. □

Lema 2. $\mu(2d, k) \leq (d \cdot k)^d$, para $d \geq 1$.

Demonstração. Iremos demonstrar por indução em d que $\mu(2d, k) \leq 2d!! \cdot k^d$. Como $2d!! \leq d^d$, pela Proposição 1, disto segue que $\mu(2d, k) \leq (d \cdot k)^d$.

Base ($d = 1$): Pelo Lema 1, temos que $\mu(2, k) \leq k \cdot \mu(0, k) = 2!! \cdot k$ e o resultado segue.

Passo ($d > 1$): Suponha que $\mu(2\ell, k) \leq (2\ell)!! \cdot k^\ell$, para $1 \leq \ell < d$. Pelo Lema 1, $\mu(2d, k) \leq (2d - 1) \cdot k \cdot \mu(2 \cdot (d - 1), k)$. Por *HI*, temos que:

$$\mu(2 \cdot (d - 1), k) \leq (2d - 2)!! \cdot k^{d-1} \quad (1)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mu(2d, k) &\leq (2d - 1) \cdot k \cdot \mu(2 \cdot (d - 1), k) \\ &\leq (2d - 1) \cdot k \cdot (2d - 2)!! \cdot k^{d-1} \\ &\leq 2d!! \cdot k^d \end{aligned} \quad (2)$$

□

Lema 3.

$$\mu(2d, k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ \sum_{i=0}^d \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2i, k - 1) & c.c. \end{cases} \quad (3)$$

Demonstração. Se $k = 1$, então $\mu(2d, k) = 1$, pois os $2d$ elementos devem estar contidos em uma única parte. Sendo assim, considere que $k > 1$. Agora, iremos construir as k -partições pares $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ possíveis de $2d$ elementos. Primeiro, devemos escolher quantos dos $2d$ elementos irão pertencer a parte P_k . Como $|P_k|$ é par, podemos escolher qualquer inteiro i entre 0 e d , de modo que $|P_k| = 2i$. Como os $2d$ elementos são distintos, temos $\binom{2d}{2i} = \binom{2d}{2d-2i}$ maneiras de escolher $2i$ elementos para a parte P_k . Após isso, devemos particionar os $2d - 2i$ elementos restantes em $(k - 1)$ partes de tamanho par, sendo assim, devemos escolher uma $(k - 1)$ -partição par \mathcal{P}' de $2d - 2i$ elementos. Portanto:

$$\begin{aligned}
\mu(2d, k) &= \sum_{i=0}^d \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2d - 2i, k - 1) \\
&= \sum_{i=0}^d \binom{2d}{2d - 2i} \cdot \mu(2d - 2i, k - 1) \\
&= \sum_{i=0}^d \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2i, k - 1)
\end{aligned} \tag{4}$$

□

Lema 4.

$$\varphi_2(2d, k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq 1 \\ 2^{2d-1} & \text{se } k = 2 \\ \sum_{i=1}^d \binom{2d}{2i} \cdot \varphi_2(2i, k - 1) & \text{c. c.} \end{cases} \tag{5}$$

Demonstração. Iremos analisar cada caso da recorrência separadamente.

Caso 1 ($k \leq 1$): Se $k \leq 1$, então não há como k -particionar os $2d$ elementos de modo que apenas as partes P_1 e P_2 tenham tamanho ímpar. Portanto, $\varphi(2d, k) = 0$.

Caso 2 ($k = 2$): Se $k = 2$, então qualquer k -partição $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$ de $2d$ elementos é contada em $\mu(2d, 2)$ ou em $\varphi_2(2d, 2)$, pois como temos um número par de elementos, ambas partes P_1 e P_2 têm tamanho par ou ímpar. Logo $\mu(2d, 2) + \varphi_2(2d, 2) = 2^{2d}$, pois 2^{2d} é o total de 2-partições possíveis de $2d$ elementos. Pelo Lema 3:

$$\mu(2d, 2) = \sum_{i=0}^d \binom{2d}{2i} \cdot \mu(2i, 1) = \sum_{i=0}^d \binom{2d}{2i} = 2^{2d-1} \tag{6}$$

Logo, temos que $\varphi_2(2d, 2) = 2^{2d} - 2^{2d-1} = 2^{2d-1}$ e o resultado segue.

Caso 3 ($k > 2$): Iremos construir as k -partições não pares $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ possíveis de $2d$ elementos. Como $k > 2$, existe uma parte $P_i \in \mathcal{P}$, onde $|P_i|$ é par. Sendo assim, a demonstração segue de modo análogo à demonstração do Lema 3, com a única restrição de que $|P_i| < 2d$, pois as partes P_1 e P_2 tem ao menos um elemento. □

Lema 5. $\mu(2d, k) \leq \mu(2d - 2, k) \cdot k^2$, para $d \geq 1$.

Demonstração. Iremos provar que $\mu(2d, k) = k \cdot \mu(2d - 2, k) + (k^2 - k) \cdot \varphi_2(2d - 2, k)$. Disto segue que $\mu(2d, k) \leq \mu(2d - 2, k) \cdot k^2$, pois, pelos Lemas 3 e 4, temos que $\varphi_2(2d - 2, k) \leq \mu(2d - 2, k)$, considerando que ambos possuem uma recorrência similar e ainda $\varphi_2(2d, 2) = \mu(2d, 2)$. Sejam dois elementos distintos $x, y \in [2d]$. Iremos construir uma k -partição par \mathcal{P} de $2d$ elementos com base em duas escolhas: se x e y irão pertencer a mesma parte $P_i \in \mathcal{P}$ ou não.

Caso 1: Se escolhermos que x e y irão pertencer a mesma parte $P_i \in \mathcal{P}$, então devemos escolher uma parte P_i das k partes disponíveis. Após, devemos escolher uma k -partição par \mathcal{P}' de $2d - 2$ elementos para os elementos restantes. Sendo assim, para este caso, temos $k \cdot \mu(2d - 2, k)$ partições possíveis.

Caso 2: Se escolhermos que $x \in P_i$ e $y \in P_j$, onde $P_i \neq P_j$, então devemos escolher primeiro quais são as partes P_i e P_j dentre as k partes que irão conter x e y respectivamente. Temos $2 \cdot \binom{k}{2} = k^2 - k$ formas de escolher P_i e P_j , pois há $\binom{k}{2}$ maneiras de escolher duas das k partes disponíveis e há duas maneiras de escolher qual das duas partes irá conter cada elemento. Após, devemos escolher uma k -partição não par \mathcal{P}' onde apenas as partes P_i e P_j tenham tamanho ímpar. Por simetria das partes, há exatamente $\varphi_2(2d - 2, k)$ partições \mathcal{P}' distintas. Logo, para este caso, temos $(k^2 - k) \cdot \varphi_2(2d - 2, k)$ partições possíveis.

□

Demonstração do Teorema 1. Pinte os vértices de \mathcal{H} com $k = t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$ cores aleatoriamente e independentemente. Seja X_e o evento da aresta $e \in E(\mathcal{H})$ não ter uma cor que apareça ímpar vezes, onde $|e|$ é ímpar. Note que $\mathbb{P}[X_e] = \frac{\mu(|e|, k)}{k^{|e|}}$. Como $|e| \geq 2t$, pelo Lema 5, temos que:

$$\mu(|e|, k) \leq \mu(|e| - (|e| - 2t), k) \cdot k^{|e| - 2t} = \mu(2t, k) \cdot k^{|e| - 2t} \quad (7)$$

Pelo Lema 2:

$$\mu(2t, k) \leq (t \cdot k)^t \quad (8)$$

Portanto, por (7) e (8):

$$\mathbb{P}[X_e] = \frac{\mu(|e|, k)}{k^{|e|}} \leq \left(\frac{t}{k}\right)^t = \left(\frac{t}{t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}}\right)^t = \frac{1}{e \cdot (\Gamma + 1)} \quad (9)$$

Sendo assim, pelo Lema Local de Lovász, temos que $\mathbb{P}\left[\bigcap_{e \in E(\mathcal{H})} \overline{X_e}\right] > 0$. Portanto, existe uma k -coloração tal que existe uma cor que aparece ímpar vezes nos vértices de e , para toda aresta $e \in E(\mathcal{H})$. Logo, $\chi_{io}(\mathcal{H}) \leq k = t \cdot (e \cdot (\Gamma + 1))^{1/t}$.

□

Demonstração do Teorema 2. Iremos provar que $\chi_o(G) \leq \chi(G) \cdot \chi_{io}(G)$. Disto segue que $\chi_{io}(G) \in \mathcal{O}(\ln(\Delta) \cdot \Delta^{2/t})$, pois $\chi(G) \in \mathcal{O}(1)$ e, pelo Corolário 3, $\chi_{io}(G) \in \mathcal{O}(\ln(\Delta) \cdot \Delta^{2/t})$. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ uma k -coloração ímpar mínima. Para cada parte $P_i \in \mathcal{P}$, pinte os vértices de P_i com uma coloração própria mínima de $G[P_i]$, utilizando cores distintas para cada parte $P_i \in \mathcal{P}$. Ao final, temos uma coloração c de G

utilizando no máximo $\chi(G) \cdot \chi_{io}(G)$ cores. Afirmamos que c é uma coloração ímpar e própria. Note que c é própria, pois tome $uv \in E(G)$, se $u \in P_i$ e $v \in P_j$, tal que $i \neq j$, onde $P_i, P_j \in \mathcal{P}$, então u e v possuem cores distintas, se $u, v \in P_i$, então u e v possuem cores distintas, pois P_i é colorido propriamente com $\chi(G[P_i])$ cores. Observe que, para todo $v \in V(G)$, existe uma parte $P_i \in \mathcal{P}$, tal que $|S|$ é ímpar, onde $S = P_i \cap N_G(v)$. Seja $T = N_G(v) \setminus S$. Note que existe uma cor em c que aparece ímpar vezes em S , pois $|S|$ é ímpar. Como $c(s) \neq c(t)$, para $s \in S$ e $t \in T$, pois s e t pertencem a partes distintas de \mathcal{P} , temos que existe uma cor que aparece ímpar vezes em $N_G(v)$. \square