Eq. fundamentales.

Comenzamos en un steady-state ($\partial/\partial t = 0$)

- Mass continuity: $\frac{d}{dr}(r^2 \rho V_r) = 0$

lo podemos integrar a $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho V_r$ donde $\dot{M}$ es la tasa de acreción de masa constante.

- Momentum conservation: esta eq. balancea la inercia del fluido con los gradientes de presión y g.

$$V_r \frac{dV_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM_*}{r^2}$$

- Eq. de estado: para un proceso adiabático la presión y densidad están relacionadas con una ley de potencia.

$$P = K\rho^\gamma$$

local sound speed c, $c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma K \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma P}{\rho}$.

Para adimensionalizar escalo las variables

$\rho_\infty : \rho' = \rho/\rho_\infty$

$C_\infty : v' = V_r/C_\infty$

Radio -> Bondi radius

$R_0 : r'/R_0$, $R_0 = \frac{2GM_*}{C_\infty^2}$

Presión -> $\rho_\infty c_\infty^2 : P' = P/(\rho_\infty c_\infty^2)$

De la definición de la sound speed at infinity $C_\infty^2 = \gamma P_\infty/\rho_\infty$, podemos establecer la relación

$$\frac{P_\infty}{\rho_\infty C_\infty^2} = \frac{1}{\gamma}$$

Para un flujo isentropico $\frac{P}{\rho^\gamma} = P_\infty/\rho_\infty^\gamma$ es cte, ∴ la eq de estado adimensional:

$$p' = \frac{1}{\gamma}(\rho')^\gamma$$

Nos da la local sound speed adimensional

$$c'^2 = \frac{dp'}{d\rho'} = (\rho')^{\gamma-1}$$

---

o

---

Derivar las eq adimensionales.

<u>Euler</u> <u>eq</u>: $(vC_\infty)\frac{d(vC_\infty)}{d(rR_0)} = -\frac{1}{(\rho\rho_\infty)}\cdot\frac{d(P\rho_\infty C_\infty^2)}{d(rR_0)} - \frac{GM_*}{(rR_0)^2}$

Con regla de la cadena y factorizando

$$\frac{C_\infty^2}{R_0} v\frac{dv}{dr} = -\frac{C_\infty^2}{\rho R_0}\frac{dP}{dr} - \frac{GM_*}{R_0^2 r^2}$$

Sustituyo $R_0$

$$\frac{C_\infty^2}{\left(\frac{2GM_*}{C_\infty^2}\right)} v\frac{dv}{dr} = -\frac{C_\infty^2}{\rho\left(\frac{2GM_*}{C_\infty^2}\right)}\frac{dP}{dr} - \frac{GM_*}{\left(\frac{2GM_*}{C_\infty^2}\right)^2 r^2}$$

$$\frac{c_\infty^4}{2GM_*} v\frac{dv}{dr} = -\frac{c_\infty^4}{2GM_*\rho}\cdot\frac{dP}{dr} - \frac{c_\infty^4}{4GM_* r^2}$$

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{1}{2r^2}$$

---

Sonic Radius

integramos respecto al radio adimensional

$$\int\left(v\frac{dv}{dr}\right)dr + \int\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\right)dr + \int\left(\frac{1}{2r^2}\right)dr = \int 0\cdot dr$$

$$\frac{v^2}{2} + \underbrace{\frac{c^2}{\gamma-1}}_{} - \frac{1}{2r} = C$$

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

$$\int\frac{1}{\rho}dP = \int\frac{1}{\rho}(c^2 d\rho)$$

Ahora, encontramos C evaluando la expresión en el infinito.

$v \to v_\infty = 0$, $\rho \to \rho_\infty = 1$, $c^2 \to c_\infty^2 = (\rho_\infty)^{\gamma-1} = 1$

$1/2r \to 0$.

$$0 + \frac{1}{\gamma-1} - 0 = \frac{1}{\gamma-1},$$ resultando en.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - \frac{1}{2r} = \frac{1}{\gamma-1}$$

Como el flujo Debe Acelerar De manera suave

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{v^2-c^2}\left(\frac{2c^2}{r} - \frac{1}{2r^2}\right)$$

Sonic RADIUS $r_s \Leftrightarrow (v_s = c_s)$

Peeero $v_s^2 - c_s^2 = 0$ $dv/dr$ explota.

Así que asumo que la unica manera que sea suave y físicamente posible es que el Denominador y numerador sean 0 al mismo punto. (0/0).

$$\frac{2c_s^2}{r_s} - \frac{1}{2r_s^2} = 0 \quad \left(\text{zero at sonic Point}\right)$$

$$\begin{bmatrix} c_s^2 = 1/4r_s \\ v_s^2 = c_s^2 \end{bmatrix}$$

Bernoulli evaluado a $r_s$

$$\frac{c_s^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{1}{2r_s} = \frac{1}{\gamma-1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4r_s}\right) + \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{4r_s}\right) - \frac{1}{2r_s} = \frac{1}{\gamma-1}$$

$$\frac{1}{r_s}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{4(\gamma-1)} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\gamma-1}$$

$$\frac{1}{r_s}\left[\frac{(\gamma-1)+2-4(\gamma-1)}{8(\gamma-1)}\right] = \frac{1}{\gamma-1}$$

$$\frac{1}{r_s}\left[\frac{5-3\gamma}{8(\gamma-1)}\right] = \frac{1}{\gamma-1} \iff \frac{1}{r_s} = \frac{8}{5-3\gamma}$$

$$r_s = \frac{5-3\gamma}{8}$$

RADIO SONICO adimensionalizado que solo depende del indice ADIABATICO $\gamma$.