EJEMPLO Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Conforme x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla) De hecho, se desprende de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ en la figura 11, que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes, tomando x lo suficientemente cercano a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

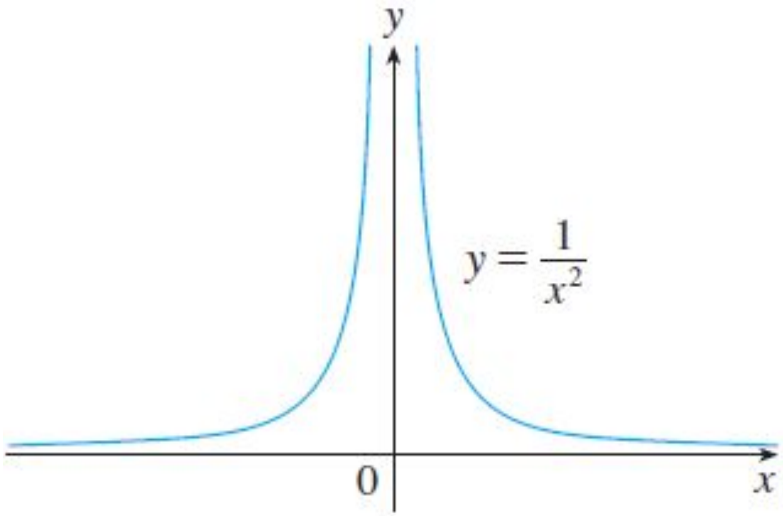


FIGURA 11

Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo 8, se usa la notación

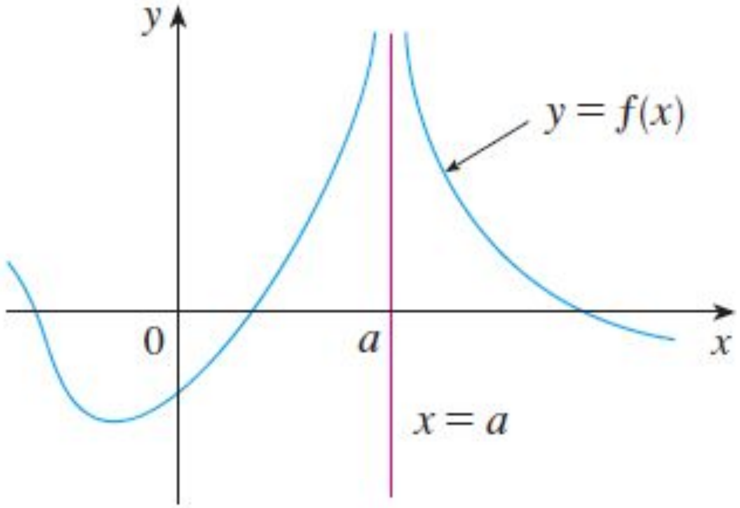
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que estemos considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe: $1/x^2$ puede hacerse tan grande como queramos, tomando a x suficientemente cerca de 0.

4 Definición Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.



Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes conforme x se aproxima a a, se precisa en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

5 Definición Sea f definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

Cuando decimos que un número es "negativo muy grande", lo que queremos decir que es negativo, pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

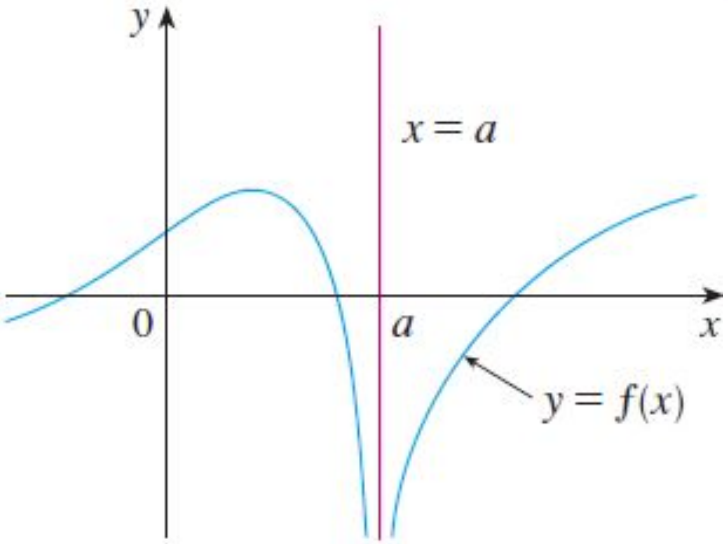


FIGURA 13

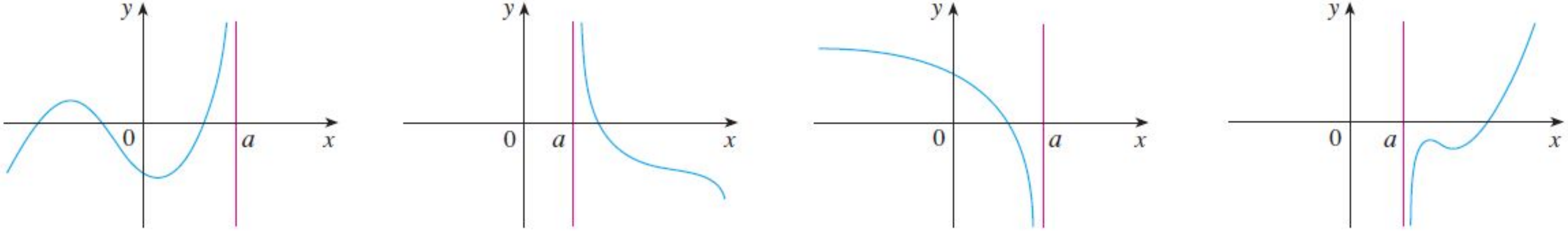
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

recordando que "$x \to a^-$" significa que se consideran sólo los valores de x que son menores que a, y del mismo modo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. En la figura 14, se ilustran cuatro de estos casos.



a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a medida que x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función con una aproximación de seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f por medio de la computadora.

x	$f(x)$
0	−1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

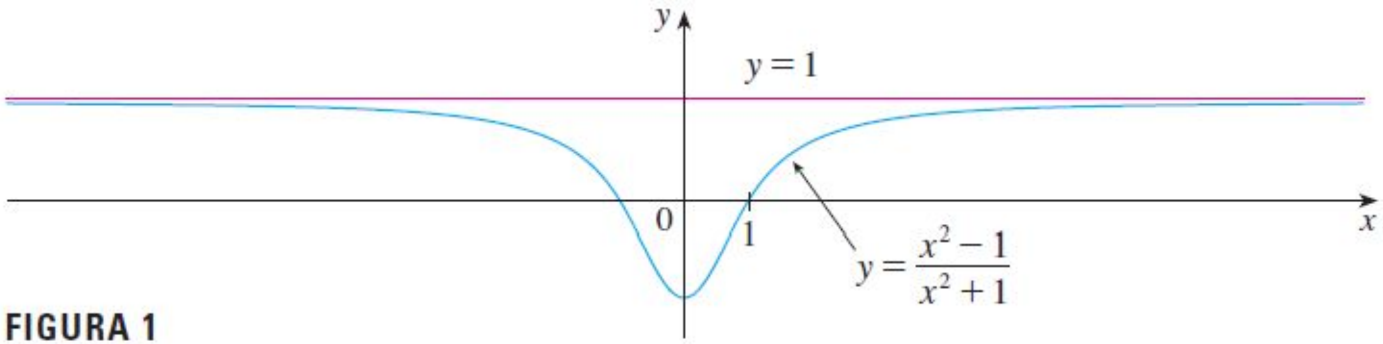


FIGURA 1

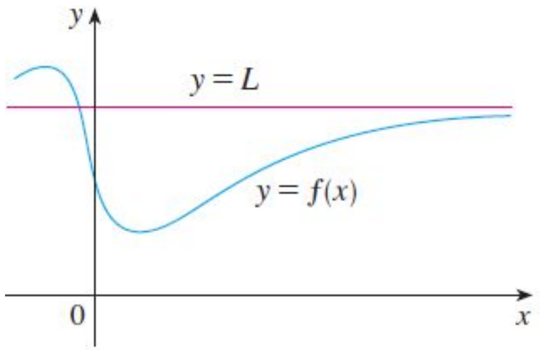
Conforme x crece más y más, puede verse que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

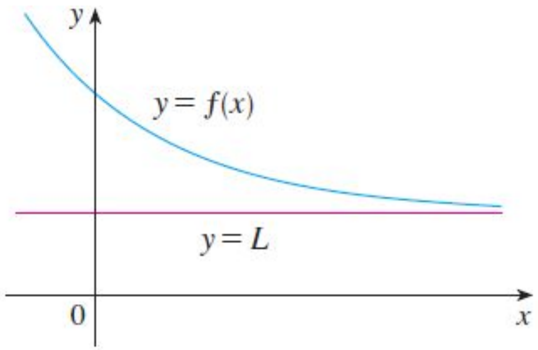
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

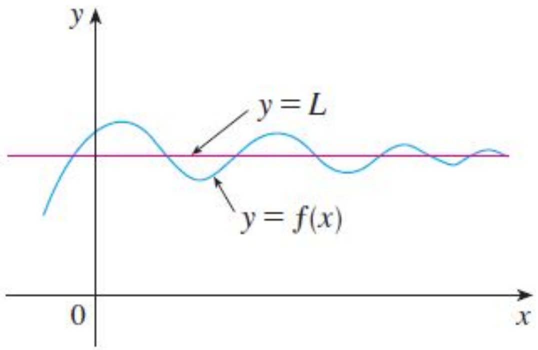
$\boxed{1}$ **Definición** Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.







Si regresa a la figura 1, verá que para valores negativos de x grandes en magnitud, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al decrecer x a través de valores negativos sin cota, puede acercar cuando quiera $f(x)$ a 1. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

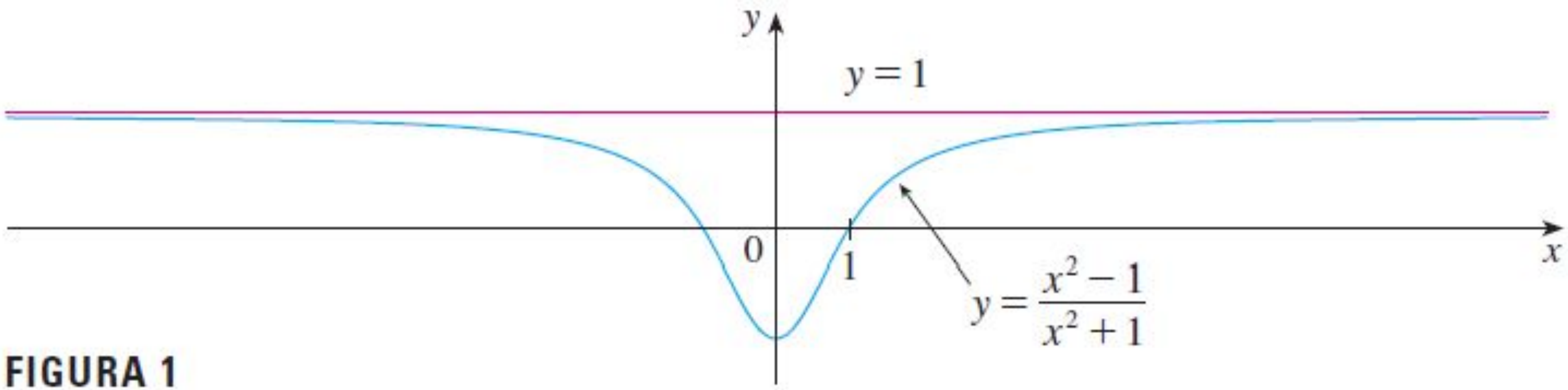


FIGURA 1

2 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ a medida que vemos hacia el extremo izquierdo de cada gráfica.

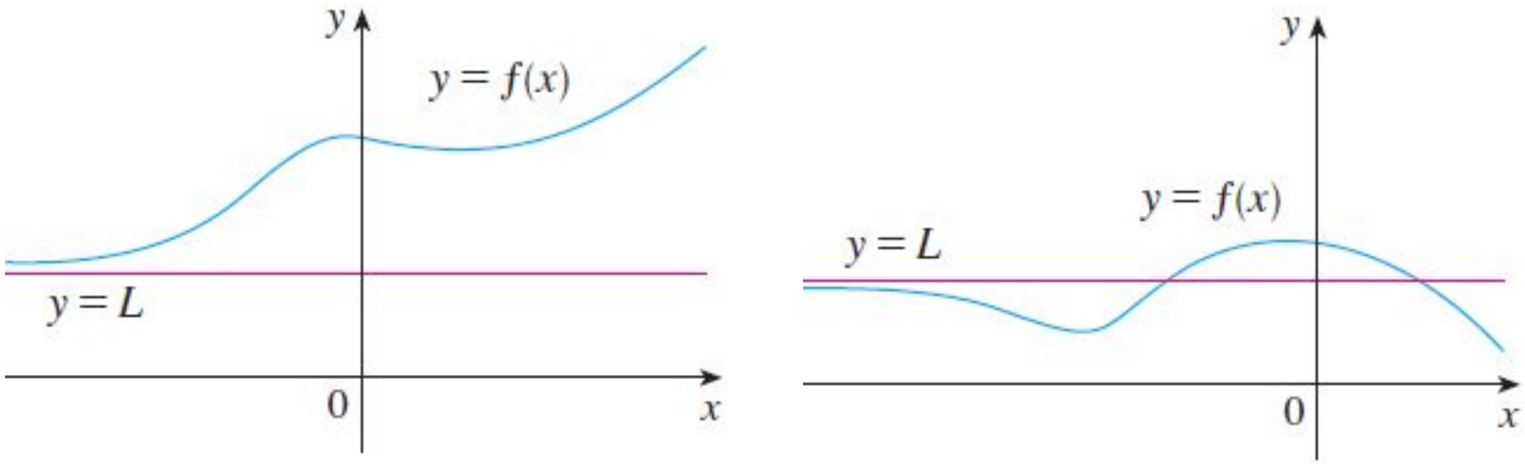


FIGURA 3

Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

LIMITES NOTABLES

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}}$$