**3 Definición** Una función $f$ es **derivable en $x = a$** si $f'(a)$ existe. Es **derivable sobre un intervalo abierto** $(a, b)$ [o $(a, \infty)$ o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

**V EJEMPLO 5** ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos elegir $h$ lo suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, $f$ es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir $h$ lo suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

así que $f$ es derivable para cualquier $x < 0$.

Para $x = 0$ debemos investigar

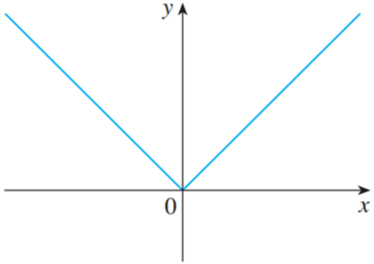
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe).}$$

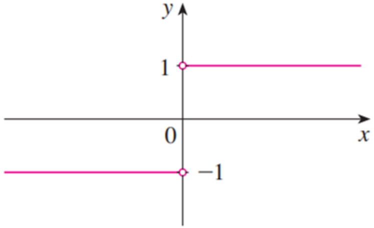
Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y $$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$




a) $y = f(x) = |x|$




b) $y = f'(x)$

**FIGURA 5**

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, $f$ es derivable en toda $x$, excepto en $x = 0$.

La fórmula para $f'$ está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en $(0, 0)$. [Véase la figura 5a).]

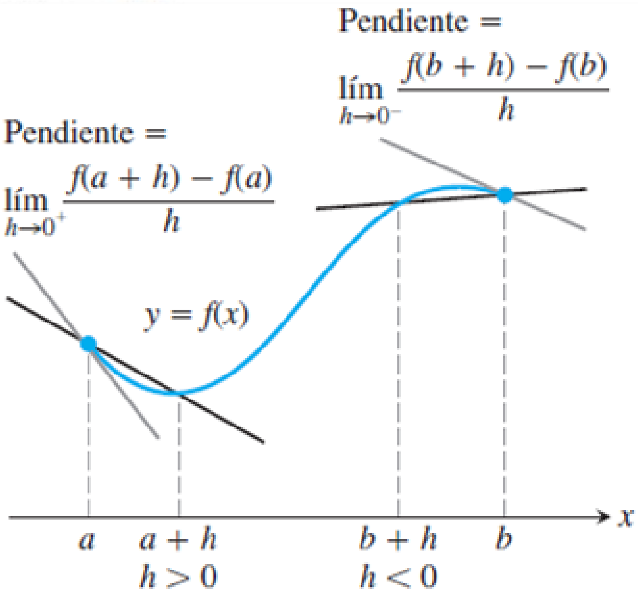
## Derivabilidad en un intervalo; derivadas laterales

Una función, $y = f(x)$, es **derivable en un intervalo abierto** (finito o infinito) si tiene derivada en cada punto del intervalo. Es **derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es derivable en el interior $(a, b)$, y si los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \textbf{Derivada por la derecha en } \boldsymbol{a}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad \textbf{Derivada por la izquierda en } \boldsymbol{b}$$

existen en los extremos



Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

**4 Teorema** Si $f$ es derivable en $x = a$, entonces $f$ es continua en $x = a$.

**NOTA** El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero en el ejemplo 5 demostramos que $f$ no es derivable en $x = 0$.

## ¿Cómo deja de ser derivable una función?

En el ejemplo 5 vimos que la función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y en la figura 5a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función $f$ tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de $f$ no tiene recta tangente en esos puntos y $f$ no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encontramos que los limites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si $f$ no es continua en $a$, entonces $f$ no es derivable en $x = a$. Por ende, en cualquier discontinuidad (p. ej., una discontinuidad de salto), $f$ no es derivable.

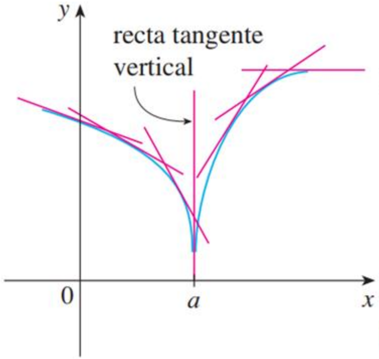



FIGURA 6

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, $f$ es continua en $x = a$ y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.

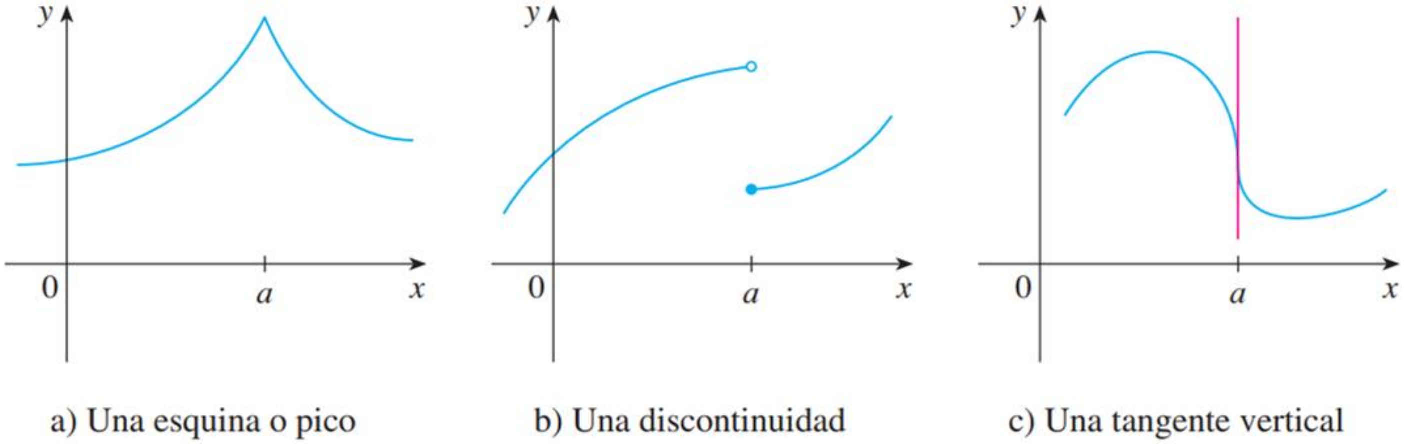



**FIGURA 7**
Tres maneras para que $f$ no sea derivable en $x = a$

**EJEMPLO 5** Determine la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aplicamos la definición para examinar si la derivada existe en $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{0 + h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Como el límite (por la derecha) no es finito, no existe la derivada en $x = 0$. Ya que las pendientes de las rectas secantes que unen al origen con los puntos $(h, \sqrt{h})$ en la gráfica de $y = \sqrt{x}$ tienden a $\infty$, la gráfica tiene una tangente vertical en el origen.

Suponga que $y$ es una cantidad que depende de otra cantidad $x$. Así, $y$ es una función de $x$ y lo expresamos como $y = f(x)$. Si $x$ cambia de $x_1$ a $x_2$, entonces el cambio en $x$ (también conocido como **incremento** de $x$) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

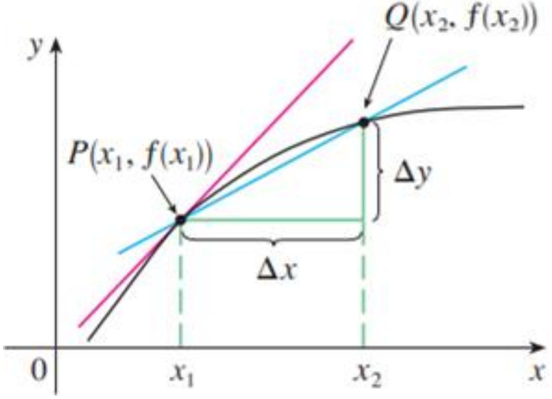
y el cambio correspondiente en $y$ es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama **razón de cambio promedio de $y$ respecto a $x$** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante $PQ$ en la figura 8.



Por analogía con la velocidad, considere la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que $x_2$ tienda a $x_1$ y, por tanto, hacer que $\Delta x$ tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de $y$ respecto a $x$** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

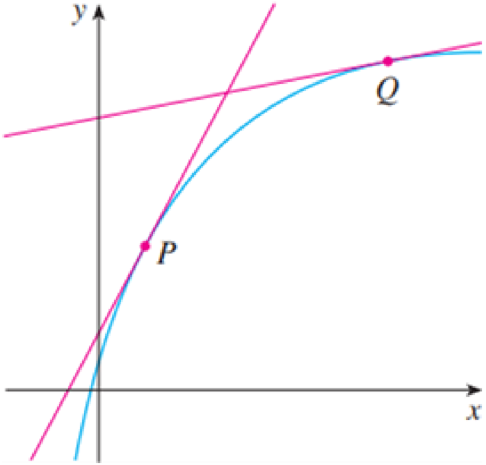
**6** $$\text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a $x$ cuando $x = a$.

El vínculo con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto $P$ de la figura 9), los valores de $y$ cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto $Q$), y el valor de $y$ cambia lentamente.




En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento $s$ respecto al tiempo $t$. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$.* La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

## Derivadas superiores

Si $f$ es una función derivable, entonces su derivada $f'$ también es una función, así que $f'$ puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función $f''$ se denomina **segunda derivada** de $f$ porque es la derivada de la derivada de $f$. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

En general, puede interpretarse una segunda derivada como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

**La tercera derivada** $f'''$ es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada $f''''$ usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la $n$-ésima derivada de $f$ se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando $n$ veces a $f$. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

**V** **EJEMPLO 1** La posición de una partícula está dada por la siguiente función

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde $t$ se mide en segundos y $s$ en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante $t$.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
g) Halle la aceleración en el tiempo $t$ y después de 4 s.
h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

a) Encuentre la velocidad en el instante $t$.

SOLUCIÓN

a) La función velocidad es la derivada de la función posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?

SOLUCIÓN

b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?

SOLUCIÓN

c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$; esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?

SOLUCIÓN

d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$; es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los intervalos de tiempo $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.

SOLUCIÓN

e) En la figura 2 se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje $s$), aplicando la información del inciso d).

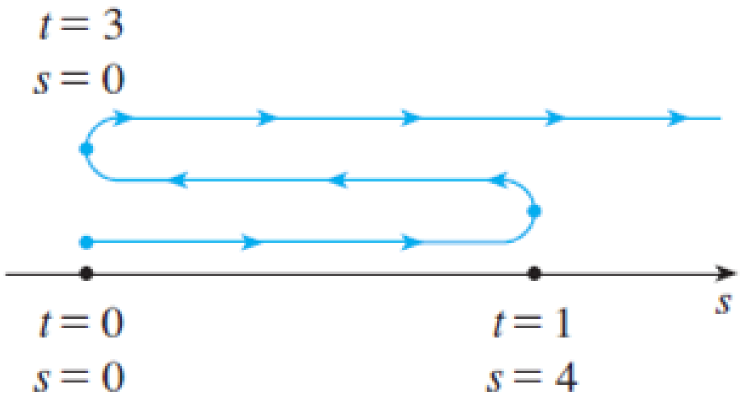



**FIGURA 2**

f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.

SOLUCIÓN

f) A partir de los incisos d) y e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4\,\mathrm{m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4\,\mathrm{m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20\,\mathrm{m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28\,\mathrm{m}$.

g) Halle la aceleración en el tiempo $t$ y después de 4 s.

SOLUCIÓN

g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

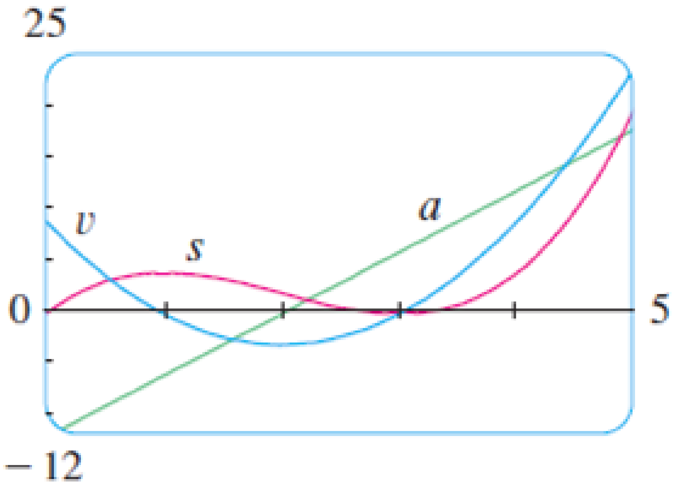
$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12\,\text{m/s}^2$$

h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.

SOLUCIÓN

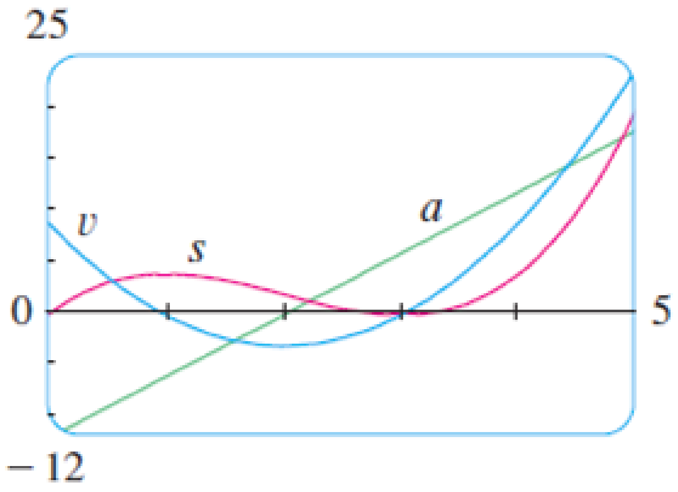
h) La figura 3 muestra las gráficas de $s$, $v$ y $a$.



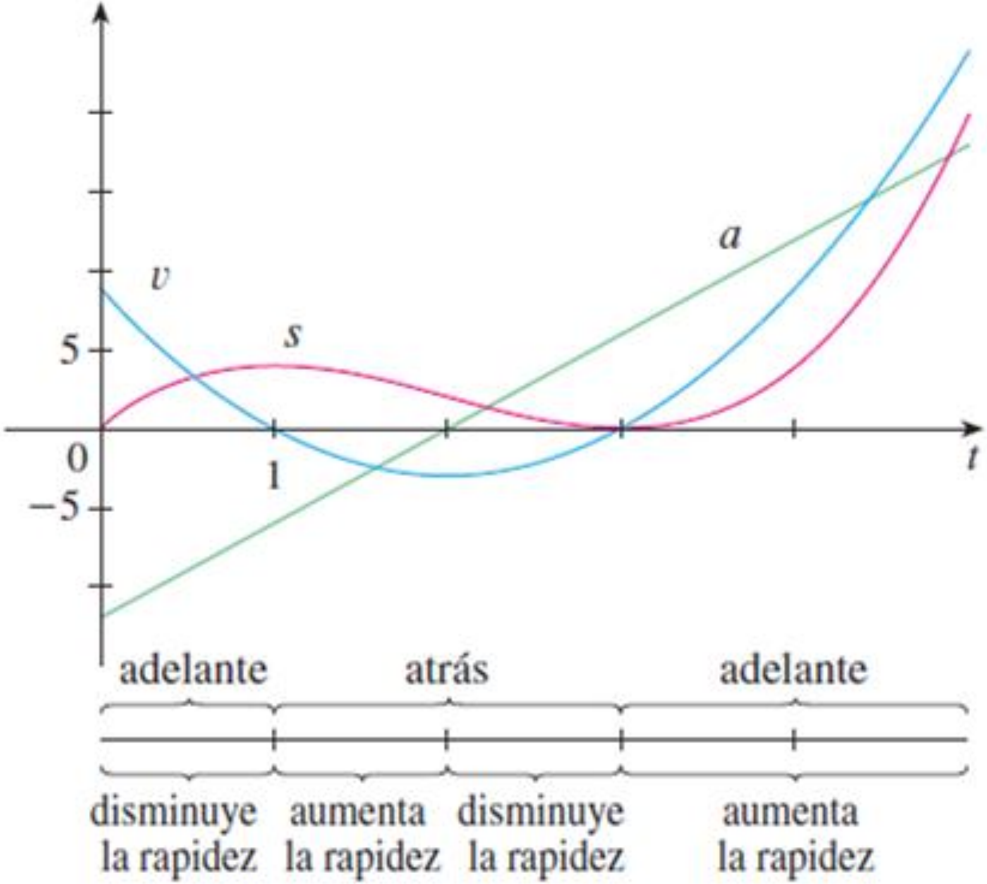
i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

SOLUCIÓN

i) La rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad es positiva y creciente ($v$ y $a$ son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente ($v$ y $a$ son negativas). En otras palabras, la rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que esto sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$.



La partícula disminuye su rapidez cuando $v$ y $a$ tienen signos opuestos; es decir, cuando $0 \leq t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula.



Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que usted aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no le permiten calcular $F'(x)$.

Observe que $F$ es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto $f$ como $g$, de modo que sería útil contar con una regla que nos indique cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de $f$ y $g$.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de $f$ y $g$. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si interpretamos las derivadas como razones de cambio. Consideremos $du/dx$ como la razón de cambio de $u$ respecto a $x$, $dy/du$ como la razón de cambio de $y$ respecto a $u$, y $dy/dx$ como la razón de cambio de $y$ respecto a $x$. Si $u$ cambia al doble de rapidez de $x$ y $y$ varía tres veces más rápido que $u$, entonces parece razonable que $y$ se modifique seis veces más rápido que $x$, y, por tanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

**Regla de la cadena** *Si* $g$ es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en $x$, y $F'$ está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

**EJEMPLO 1** Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): Al principio de esta sección, expresamos $F$ como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que $dy/dx$ se refiere a la derivada de $y$ cuando ésta se considera como función de $x$ (llamada *derivada de y respecto a x*), en tanto que $dy/du$ se refiere a la derivada de $y$ cuando se considera como función de $u$ (la derivada de $y$ respecto a $u$). Por tanto, en el ejemplo 1, $y$ puede considerarse como función de $x$ $\left(y = \sqrt{x^2 + 1}\right)$ y también como una función de $u$ $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{mientras que} \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

**NOTA** En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f [en la función interior g(x)] y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx} \underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

**V** **EJEMPLO 2** Derive a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x \cos(x^2)$$

b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}}{}^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta puede dejarse como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble).

En el ejemplo 2a), combinamos la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde $u$ es una función derivable de $x$, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Así que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas pueden combinarse con la regla de la cadena.

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas pueden combinarse con la regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior $f$ es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplicamos la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

**4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena** Si $n$ es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

**EJEMPLO 3** Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en $\boxed{4}$, se toman $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

**V** **EJEMPLO 4** Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescribimos $f$ como: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

De este modo
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

**EJEMPLO 5** Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

**EJEMPLO 6** Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5 \\ &= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\ &\qquad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1) \\ &= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2\end{aligned}$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, así que podemos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

**EJEMPLO 7** Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

La razón para el nombre "regla de la cadena" queda clara cuando se ve como analogía de agregar eslabones para alargar una cadena. Supongamos que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde $f$, $g$ y $h$ son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de $y$ respecto a $t$, utilizamos dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

**V EJEMPLO 8** Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(\cos(\tan x)) \frac{d}{dx} \cos(\tan x) \\
&= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)] \frac{d}{dx} (\tan x) \\
&= -\cos(\cos(\tan x)) \operatorname{sen}(\tan x) \sec^2 x
\end{aligned}
$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena.

**EJEMPLO 9** Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es el triple de la función. De modo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta} \frac{d}{d\theta} (\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta} (3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \tan 3\theta \end{aligned}$$