2.7 Derivadas y razones de cambio

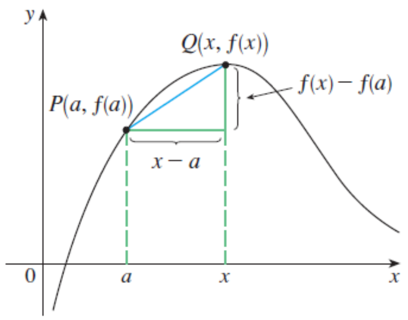
El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto involucran encontrar el mismo tipo de límite, como vimos en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y en las ciencias e ingeniería puede ser interpretada como una razón de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere usted hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Después, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende un número m, entonces definimos la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiene a P. (Véase la figura 1.)



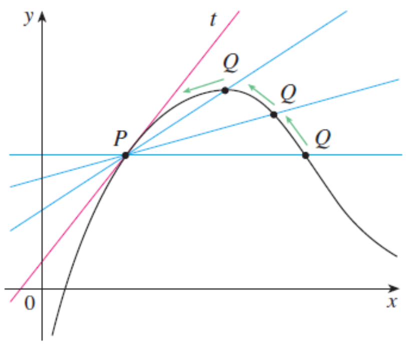


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

En nuestro primer ejemplo, se confirma la suposición que hicimos en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1$$

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

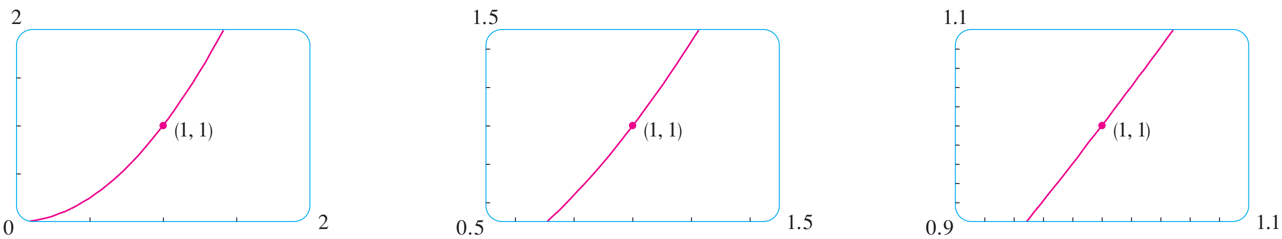


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

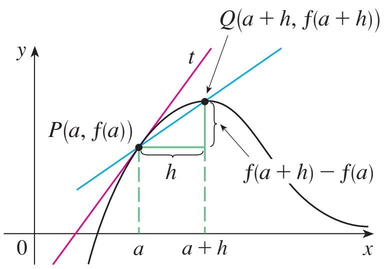


FIGURA 3

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Note que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 (puesto que $h = x - a$) y, por ende, la expresión de la pendiente de la recta tangente, en la definición 1 se convierte en

2 $$\boxed{m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto $(3, 1)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

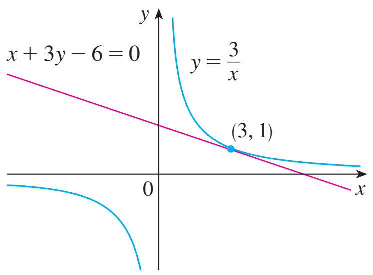


FIGURA 4

En consecuencia, la ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica a $$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente.

Velocidades

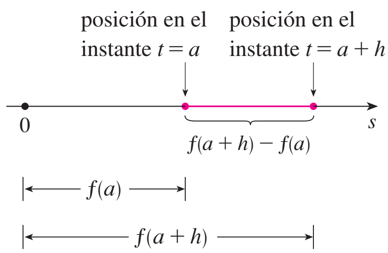
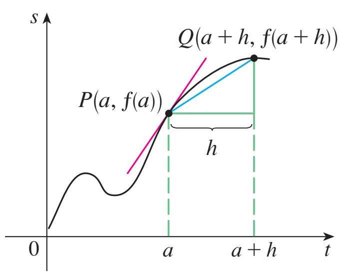


FIGURA 5

En la sección 2.1 investigamos el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$= \text{velocidad promedio}$$

FIGURA 6

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea)** $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3 $$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

V EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurre t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita usted hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo general $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a \end{aligned}$$

a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.
b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Hemos visto que en la búsqueda de la pendiente de una recta tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3) surge la misma clase de límite. De hecho, límites en la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando calculamos una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite aparece muy a menudo, se da un nombre y notación especial.

4 Definición La **derivada de una función f en un número $x = a$**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y sólo si x tiende a a. En consecuencia, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como vimos en la búsqueda de rectas tangentes, es

5
$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}
$$

Definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, ésta es la misma que la derivada $f'(a)$, podemos decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en $x = a$.

Si utilizamos la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

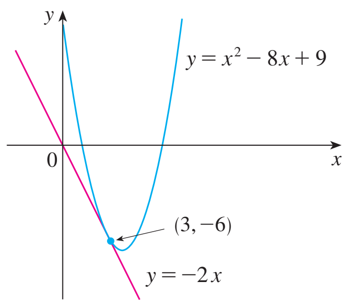


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$ es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, la ecuación de la recta tangente que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{o bien} \quad y = -2x$$

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

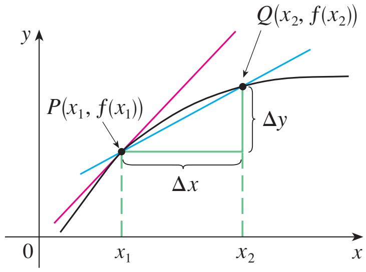
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio $= m_{PQ}$
razón de cambio instantánea $=$ pendiente de la recta tangente en P

FIGURA 8

se llama **razón de cambio promedio de y respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, considere la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{6} \qquad \text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

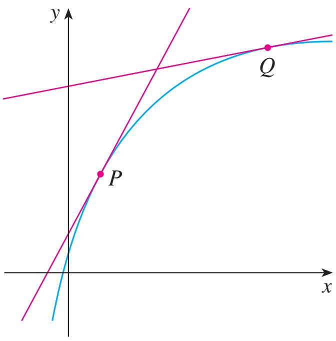


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

El vínculo con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$*. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

V EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1\,000) = 9$?
c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN

a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza en más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

b) El enunciado de que $f'(1\,000) = 9$ significa que, después de fabricar 1 000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1\,000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1\,000$, podría usarse la aproximación

En este caso suponga que la función costo se comporta bien; en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1\,000$.

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decimos que el costo de fabricación de las 1 000 yardas (o de la 1 001) es de casi 9 dólares.

c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y con eso los costos de horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de incremento de costos empezarán con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$

En el ejemplo siguiente estimaremos la razón de cambio de la deuda nacional respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1 945.9
1990	3 233.3
1995	4 974.0
2000	5 674.2
2005	7 932.7

V EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de EU en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de millones de dólares, desde 1980 hasta 2005. Interprete y estime el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así que calculamos y tabulamos los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

A partir de esta tabla vemos que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de EU en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

Otro método sería una gráfica de la función deuda y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1990$.

Una nota sobre unidades

Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades para ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, miles de millones de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda respecto al tiempo es de interés en economía. Existen otras razones de cambio: en física, la razón de cambio de trabajo respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y pueden interpretarse como pendientes de rectas tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resuelve usted problemas en que intervienen rectas tangentes, no sólo resuelve un problema de geometría, también resuelve implícitamente gran variedad de problemas de las ciencias y la ingeniería, en que intervienen razones de cambio.

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior consideramos la derivada de una función f en un número fijo $x = a$:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora cambiaremos el punto de vista y haremos que el número $x = a$ varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtenemos

$$\boxed{2} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Dado cualquier numero x para el cual este límite exista, asignamos a x el número $f(x)$. De modo que consideramos a f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabemos que el valor de f' en x, $f'(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x)$ existe$\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

V EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

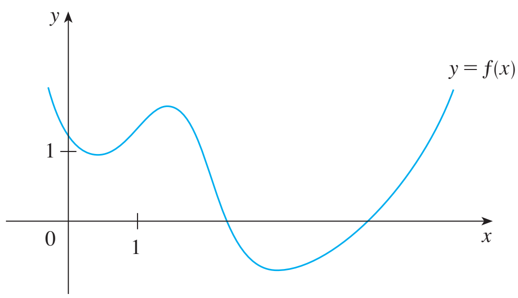
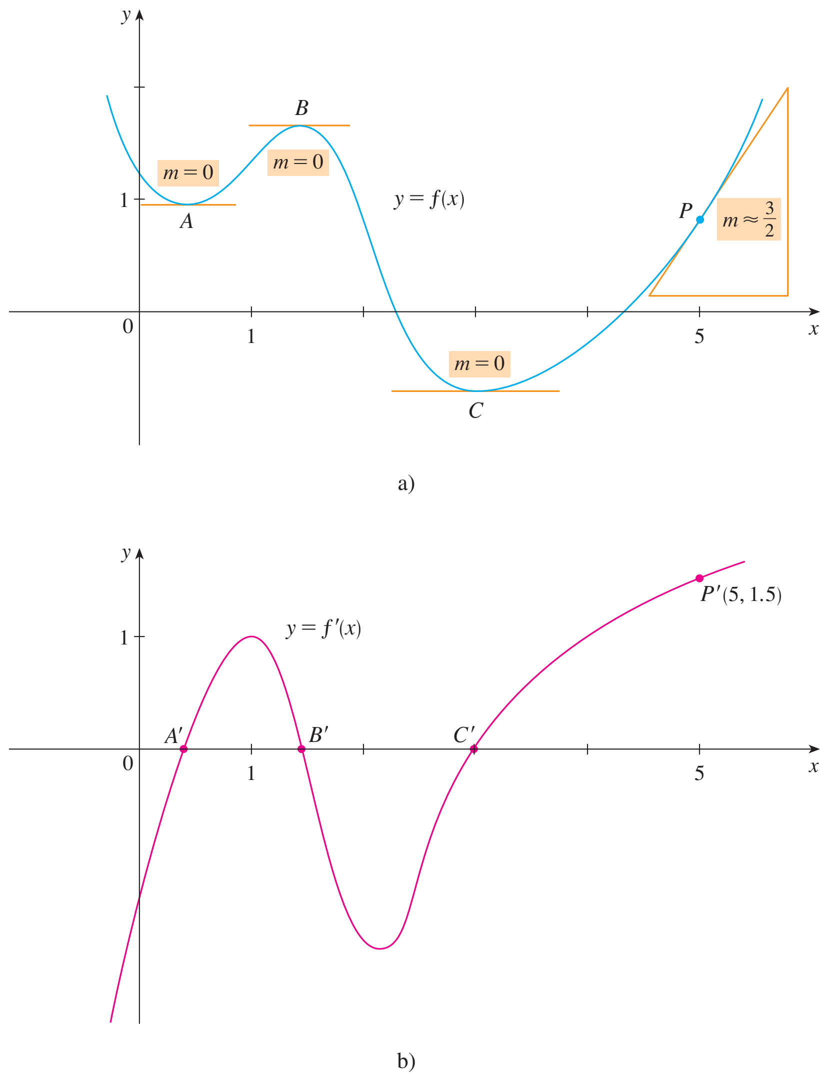


FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí, y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ allí es negativa.



TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

FIGURA 2

V EJEMPLO 2

a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

b) Use un dispositivo de graficación para trazar las graficas de f y f' de la figura 3. Note que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas graficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso a).

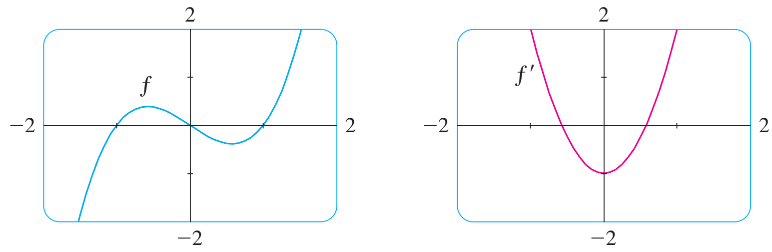


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

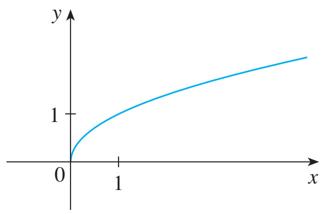
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Aquí, racionalice el numerador

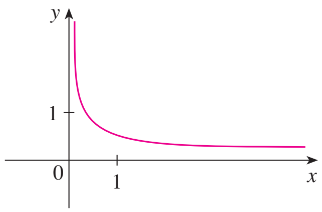
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



a) $f(x) = \sqrt{x}$



b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$ y es menor que el dominio de f, $[0, \infty)$.

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las graficas de f y f' en la figura 4. Cuando x esta cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por tanto, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ es muy grande, y esto corresponde a rectas tangentes muy empinadas cerca de (0, 0) de la figura 4a), y a valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 4b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña, y esto corresponde a rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y a la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

Otras notaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico $x = a$, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o bien} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudio leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio formal de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En su versión del Cálculo, que publicó en 1684, estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgía una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el Cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del Cálculo; pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del Cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

3 Definición Una función f es **derivable en $x = a$** si $f'(a)$ existe. Es **derivable sobre un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

V EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos elegir h lo suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h lo suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

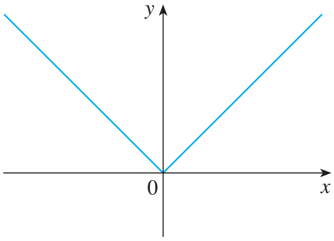
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1 \end{aligned}$$

así que f es derivable para cualquier $x < 0$.

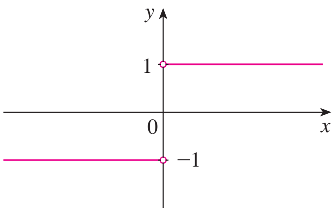
Para $x = 0$ debemos investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe).}$$



a) $y = f(x) = |x|$



b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y $$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

La fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5a).]

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en $x = a$, debemos demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para esto empezamos por probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en $x = a$; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

RP Un aspecto importante de la solución de problemas es intentar encontrar una conexión entre lo dado y lo desconocido. Consulte el paso 2 (Piense en un plan) en Principios para la resolución de problemas, en la página 75.

existe (véase la ecuación 2.7.5). Para relacionar lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es posible cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

De este modo, si usamos la ley del producto y la ecuación (2.7.5), podemos escribir

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para utilizar lo que acabamos de demostrar, comenzamos con $f(x)$ y sumamos y restamos $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en $x = a$.

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero en el ejemplo 5 demostramos que f no es derivable en $x = 0$.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

En el ejemplo 5 vimos que la función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y en la figura 5a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encontramos que los limites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en $x = a$. Por ende, en cualquier discontinuidad (p. ej., una discontinuidad de salto), f no es derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en $x = a$ y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.

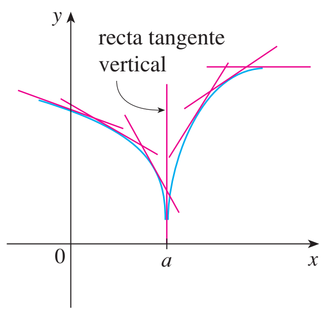


FIGURA 6

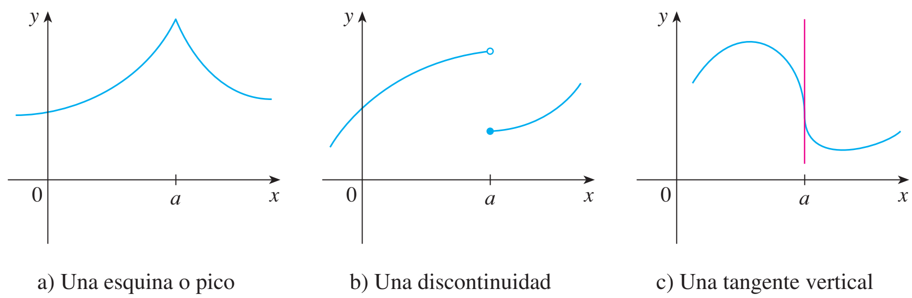


FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en $x = a$

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en $x = a$, entonces, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se alinea y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7a): no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

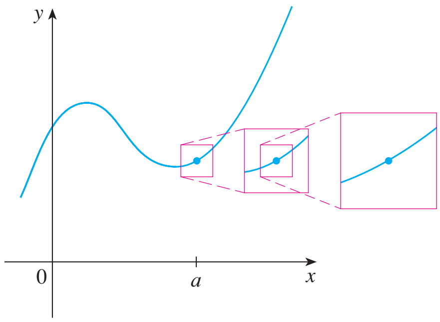


FIGURA 8
f es derivable en $x = a$.

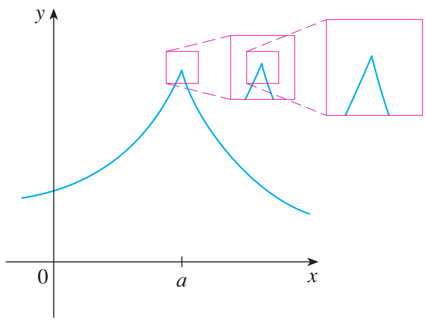


FIGURA 9
f no es derivable en $x = a$.

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, halle e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontramos que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Así que la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x$$

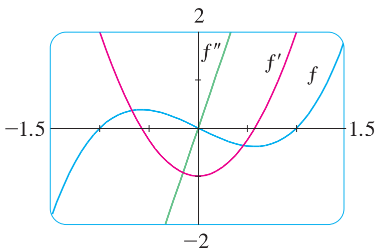


FIGURA 10

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretarse $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos.

TEC En Module 2.8 puede usted ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f y cómo afectan el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

En general, puede interpretarse una segunda derivada como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La tercera derivada f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, halle $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontramos que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y, de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Puede interpretarse físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 veremos cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, potencia, polinomiales y exponenciales.

Empezamos por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

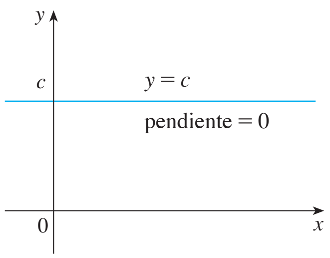


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$; por tanto, $f'(x) = 0$.

En la notación de Leibniz, esta regla se expresa como sigue.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Función potencia

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

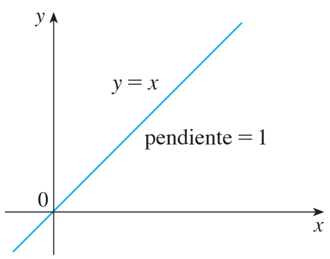


FIGURA 2
La grafica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$; por tanto, $f'(x) = 1$.

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

(También puede demostrar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya hemos investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 19 y 20) encontramos que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, encontramos la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así,

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$, se observa un patrón. Parece razonable presuponer que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

puede verificarse simplemente multiplicando el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, podemos utilizar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvimos que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesitamos desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, utilizamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por tanto, tienden a 0.

En el ejemplo 1 se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. d) Si $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué puede decirse acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se pide al lector que verifique, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que podemos escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 62c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6 se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y el ejemplo 2b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

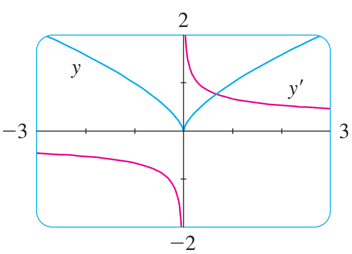


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

a) Dado que $f(x) = x^{-2}$, utilizamos la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

La regla de la potencia permite hallar las rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

V EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre dibujando la curva y estas rectas.

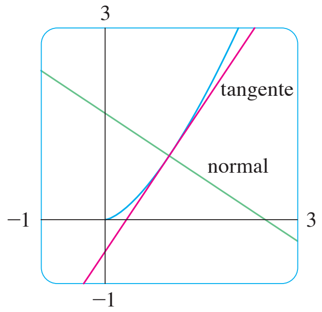


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

De este modo, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

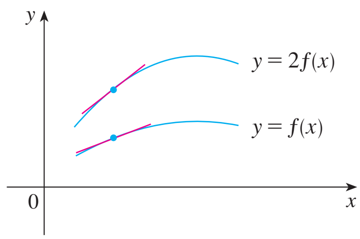
$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal.

Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas pueden calcularse en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la formula siguiente se afirma que la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función*.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La siguiente regla señala que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas*.

Si se utiliza la notación con apóstrofos, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la siguiente fórmula.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia pueden combinarse con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\ &\qquad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\ &\qquad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\ &\qquad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6 \end{aligned}$$

V EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3) \end{aligned}$$

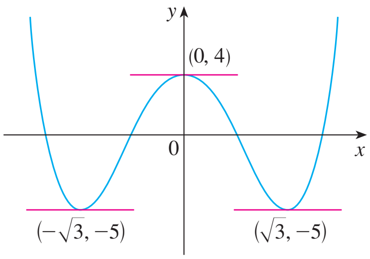


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus rectas tangentes horizontales

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.)

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14\,\text{cm/s}^2$.

Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; así que

4 $$f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se da una evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores tienen una aproximación correcta a cuatro posiciones decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, puede demostrarse que estos límites existen y que son correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las elecciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la formula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es costumbre denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presento e en la sección 1.5.) Apoyado en esto, se tiene la siguiente definición

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante podremos demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número e

$$e \text{ es el número tal que } \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

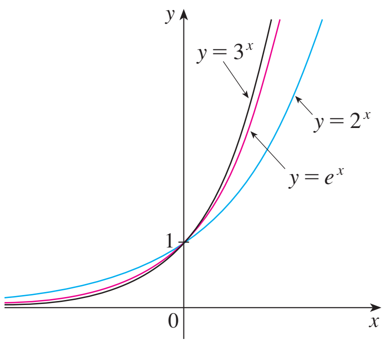


FIGURA 6

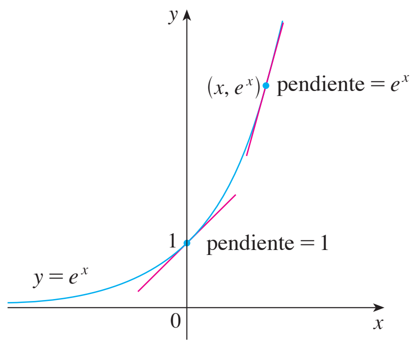


FIGURA 7

Si hacemos $a = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

TEC Visual 3.1 utiliza el comportamiento de una pendiente para ilustrar esta fórmula.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De aquí se ve que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

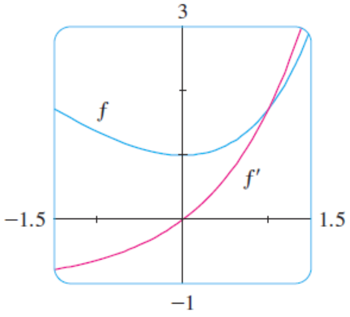


FIGURA 8

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

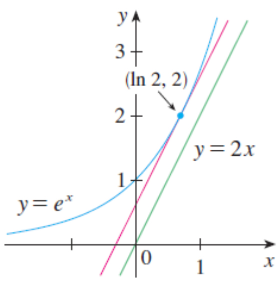


FIGURA 9

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Así que, $(fg)' \neq f'g'$. La formula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

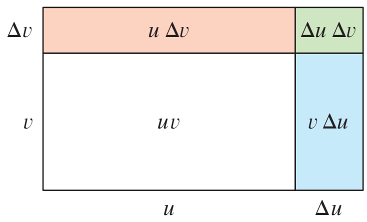


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, vea como podría descubrirla. Empezamos suponiendo que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones positivas derivables. Entonces puede interpretarse el producto uv como el área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, puede interpretarse como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \begin{aligned} \Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \\ &= \text{la suma de las tres áreas sombreadas} \end{aligned}$$

Si dividimos entre Δx, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$, obtenemos la derivada de uv:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ puesto que f es derivable y, por tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

En notación con apóstrofos:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función*.

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.

b) Halle la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f es creciente y negativa cuando f es decreciente.

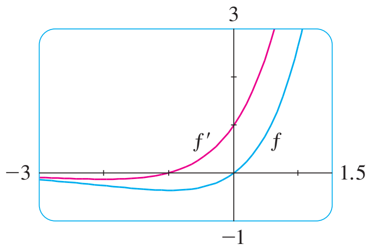


FIGURA 2

SOLUCIÓN

a) Por la regla del producto se tiene que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x + 1)e^x$$

b) Aplicando a regla del producto una segunda vez, se obtiene

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x + 1)e^x]$$

$$= (x + 1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x + 1)$$

$$= (x + 1)e^x + e^x \cdot 1 = (x + 2)e^x$$

Las siguientes aplicaciones de la regla del producto dan

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

De hecho, cada derivada sucesiva agrega otro término e^x, así que

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$

En el ejemplo 2, a y b son constantes. Es habitual en matemáticas el uso de las primeras letras del alfabeto, para representar las constantes y las últimas para representar variables.

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$

SOLUCIÓN 1 Utilizando la regla del producto, tenemos que

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)$$

$$= \sqrt{t} \cdot b + (a + bt) \cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$

$$= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero utilizamos las leyes de los exponentes para reescribir $f(t)$, entonces podemos proceder directamente sin utilizar la regla del producto.

$$f(t) = a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2}$$

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2}$$

lo cual es equivalente a la respuesta dada en la solución 1.

El ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que utilizar directamente la regla del producto. En el ejemplo 1, sin embargo, la regla del producto es sólo un posible método.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la regla del producto, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\, \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Así que
$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6.5$$

Regla del cociente

Encontramos una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ en gran parte de la misma manera que hemos encontrado la regla del producto. Si x, u y v se incrementan por cantidades Δx, Δu y Δv, entonces el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} \\ &= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta v \to 0$, porque $v = g(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En notación con apóstrofos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

En palabras: en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador*.

La regla del cociente y las otras formulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Podemos utilizar un dispositivo de graficación para verificar que la respuesta al ejemplo 4 es verosímil. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 4 y su derivada. Note que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

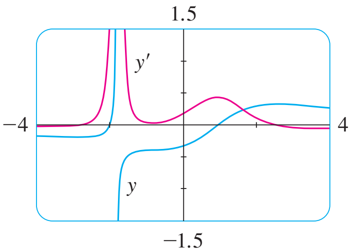


FIGURA 3

V EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

De modo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es horizontal, y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.]

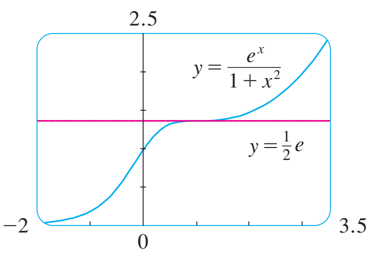


FIGURA 4

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir un cociente en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A continuación se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento.

Tabla de fórmulas de derivación

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar esta sección, quizá necesite repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante que recuerde que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x, mediante

$$f(x) = \text{sen } x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot se cumple con una convención similar. Recuerde de la sección 2.5 que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva seno para trazar la grafica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase la figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1.

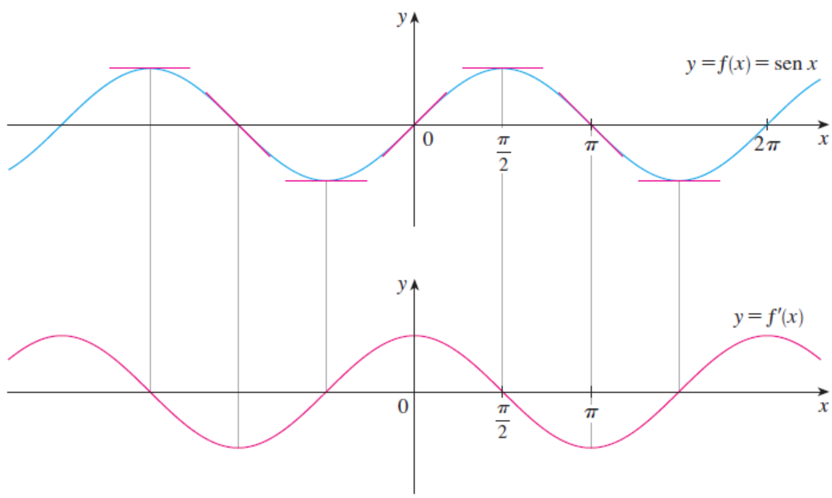


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada, tenemos

Hemos utilizado la fórmula de adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

1 $$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, se tiene

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2 se infiere que

2 $$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

Ahora utilizaremos un argumento geométrico para demostrar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2a) se muestra un sector de circunferencia con centro en 0, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, tenemos que arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se observa que

$$|BC| < |AB| < \operatorname{arc} AB$$

En consecuencia $\qquad \operatorname{sen} \theta < \theta \qquad$ de manera que $\qquad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede verse, con base en la figura 2b), que la circunferencia es menor que la longitud del polígono circunscrito, de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \operatorname{arc} AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

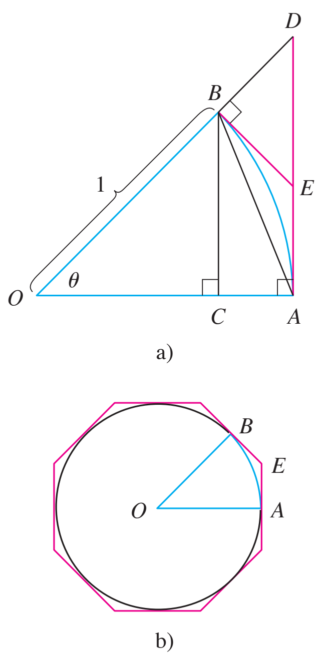


FIGURA 2

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan \theta$ a partir de la definición de la longitud de arco, sin recurrir a la intuición geométrica, como se hizo aquí.)

Por tanto, tenemos que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, así que, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una función par, de modo que sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales y, por tanto,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

así que se ha demostrado la ecuación 2.

Podemos deducir el valor del límite restante en $\boxed{1}$ como sigue:

Multiplique el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función de manera que pueda usar los límites que conoce.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}\right)$$

$$= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}$$

3
$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

Si ahora ponemos los límites $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ en $\boxed{1}$, obtenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen}x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

Así que hemos demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x) = \cos x}$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una recta tangente horizontal.

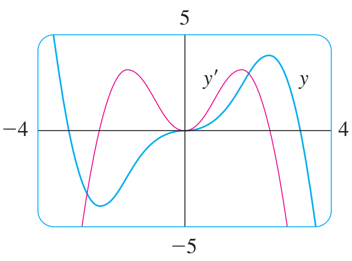


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)\\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, puede demostrarse (véase el ejercicio 20) que

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

También puede derivar la función tangente utilizando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

6 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véanse los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las formulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

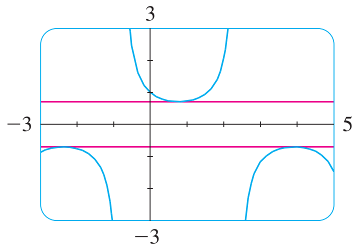


FIGURA 4
Las rectas tangentes horizontales del ejemplo 2

En la simplificación de la respuesta hemos utilizado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ya que $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4).

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, pueden describirse por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente se analiza un caso de movimiento armónico simple.

V **EJEMPLO 3** Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm mas allá de su posición en reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

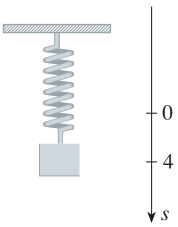


FIGURA 5

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

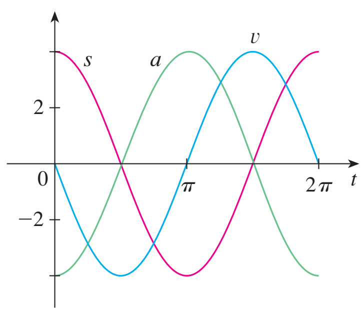


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de $\cos t$.

La rapidez es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de $\cos x$.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

RP Busque un patrón

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\
f''(x) &= -\cos x \\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Observamos que las derivadas sucesivas ocurren en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia,

$$f^{(24)} = \cos x$$

y, derivando tres veces más, se tiene

$$f^{(27)} = \operatorname{sen} x$$

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la fórmula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicarla por 7 y dividirla entre 7:

Observe que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, conforme $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} &= \frac{7}{4} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right) \\
&= \frac{7}{4} \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

V **EJEMPLO 6** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto el numerador como el denominador entre x:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x \cot x &= \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x}{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(según la continuidad del coseno y la ecuación 2)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3.4 Regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que usted aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no le permiten calcular $F'(x)$.

Véase la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que nos indique cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si interpretamos las derivadas como razones de cambio. Consideremos du/dx como la razón de cambio de u respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y respecto a u, y dy/dx como la razón de cambio de y respecto a x. Si u cambia al doble de rapidez de x y y varía tres veces más rápido que u, entonces parece razonable que y se modifique seis veces más rápido que x, y, por tanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena *Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto*

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

El primero en formular la regla de la cadena fue el matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien también diseñó el primer telescopio práctico. Gregory descubrió las ideas básicas del Cálculo en la misma época que Newton. Se convirtió en el primer profesor de Matemáticas en la Universidad de St. Andrews y más tarde realizó la misma actividad en la Universidad de Edimburgo. Pero un año después de aceptar ese cargo, falleció a la edad de 36 años.

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \boxed{1} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Advierta que } \Delta u \to 0 \text{ conforme } \Delta x \to 0 \text{ porque } g \text{ es continua.)} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

El único defecto de este razonamiento es que en $\boxed{1}$ podría suceder que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. No obstante, este razonamiento *sugiere* por lo menos que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una demostración completa de la regla de la cadena.

La regla de la cadena puede escribirse con apóstrofos

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx realmente como un cociente.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): Al principio de esta sección, expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto a u). Por tanto, en el ejemplo 1, y puede considerarse como función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y también como una función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f [en la función interior g(x)] y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive a) $y = \text{sen}(x^2)$ y b) $y = \text{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) Si $y = \text{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

b) Observe que $\text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\text{sen}\, x)^2}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta puede dejarse como $2\,\text{sen}\, x \cos x$, o bien, escribirse como $\text{sen}\, 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble).

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2a), combinamos la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \text{sen}\, u$, donde u es una función derivable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Así que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas pueden combinarse con la regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplicamos la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que la derivada en el ejemplo 1 pudimos calcularla tomando $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en $\boxed{4}$, se toman $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescribimos f como: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

De este modo
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Observe que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una recta tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

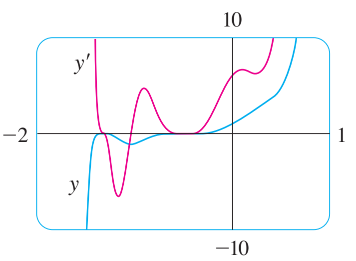


FIGURA 1

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$
$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)$$
$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, así que podemos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Más generalmente, la regla de la cadena da:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

porque $\ln a$ es una constante. En consecuencia, tenemos la fórmula

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5
$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtenemos

6
$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, dimos la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta 6 porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

La razón para el nombre "regla de la cadena" queda clara cuando se ve como analogía de agregar eslabones para alargar una cadena. Supongamos que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y respecto a t, utilizamos dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x\end{aligned}$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es el triple de la función. De modo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)\\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta)\\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta\end{aligned}$$

Cómo demostrar la regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denotamos por medio de ε el cociente de diferencias y la derivada, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si definimos ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera, para una función f derivable, podemos escribir

7 $$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite demostrar la regla de la cadena.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en $x = a$ y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x, y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, entonces podemos aplicar la ecuación 7 para escribir

8 $$\Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De manera análoga,

9 $$\Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituimos la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtenemos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

así que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

A medida que $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 muestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Esto demuestra la regla de la cadena.

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales

Sabemos que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x varía de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

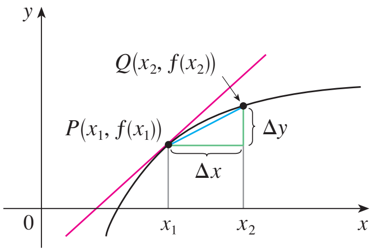
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = razón de cambio promedio
$m = f'(x_1)$ = razón de cambio instantánea

FIGURA 1

es la **razón de cambio promedio de *y* respecto a *x*** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de *y* respecto a *x***, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas por las de x.) Veamos ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y en las sociales.

Física

Si $s = (t)$ es la función posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de la velocidad en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se discutió en las secciones 2.7 y 2.8, pero ahora que conocemos las formulas de derivación, podemos resolver con más facilidad problemas que involucran el movimiento de objetos.

V EJEMPLO 1 La posición de una partícula está dada por la siguiente función

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.

h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

SOLUCIÓN

a) La función velocidad es la derivada de la función posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \frac{ds}{dt}\bigg|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$; esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$; es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los intervalos de tiempo $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

e) En la figura 2 se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso d).

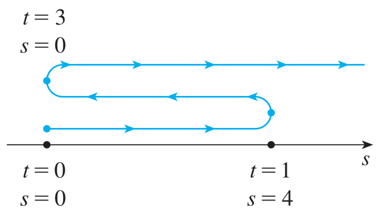


FIGURA 2

f) A partir de los incisos d) y e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m.

g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

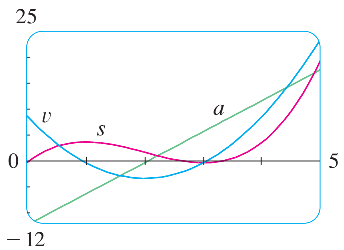


FIGURA 3

h) La figura 3 muestra las gráficas de s, v y a.

i) La rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, la rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que esto sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos; es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula.

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que puede elegir usted mismo.

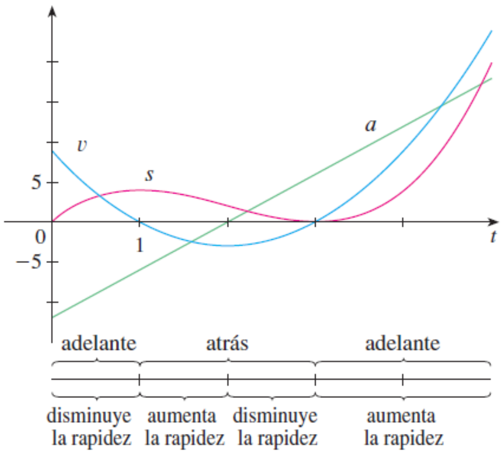


FIGURA 4