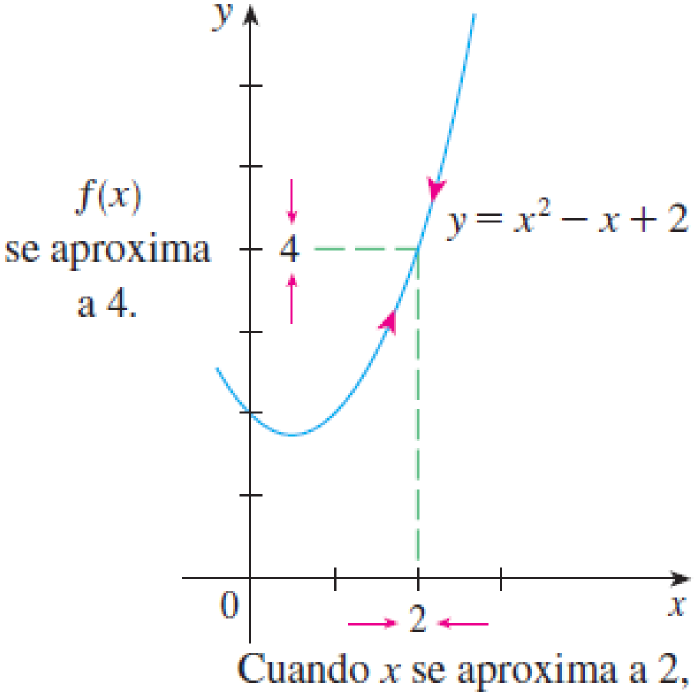
Vamos a investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La siguiente tabla muestra los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

FIGURA 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) que se muestra en la figura 1, vemos que cuando x se aproxima a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de 4 como queramos, tomando x suficientemente cercano a 2. Esto lo expresamos diciendo que "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x tiende a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

$\boxed{1}$ **Definición** Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

En términos generales, esto quiere decir que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x tiende a a. En otras palabras, los valores de $f(x)$ tienden a estar más y más cerca del número L cuando x se acerca cada vez más al número a (de ambos lados de a), pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se dará una definición más precisa.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Note la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, no se considera $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo se define f *cerca* de a.

La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso b), $f(a) \neq L$. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en a, es cierto que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

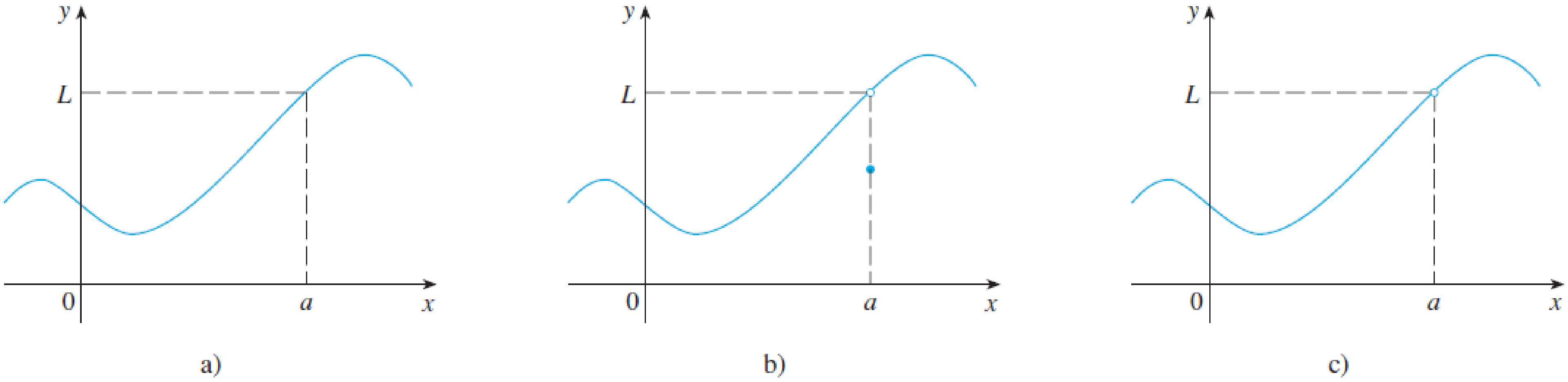


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

2 Definición Cuando escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

estamos diciendo que el **límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda**] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como queramos, tomando x suficientemente cercanos a a, pero menores que a.

Observe que la definición 2 difiere de la definición 1 sólo en el hecho de que x sea necesariamente menor que a. Del mismo modo, si se requiere que x sea mayor que a, se obtiene "el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. Estas definiciones se ilustran en la figura 9.

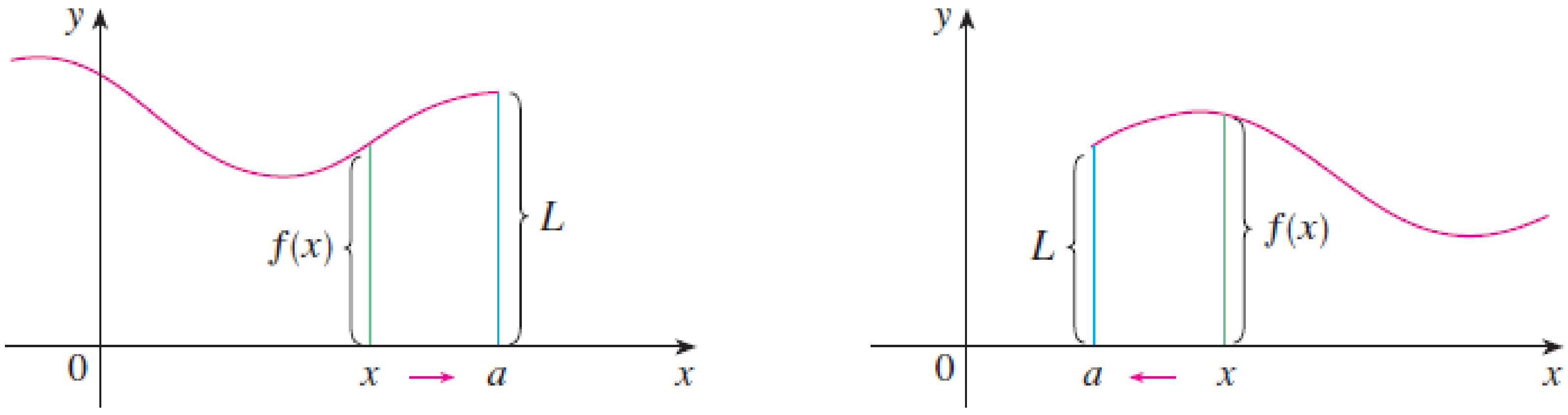


FIGURA 9

a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las de los límites laterales, vemos que se cumple con lo siguiente.

3 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\displaystyle \lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)}{\displaystyle\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes pueden expresarse verbalmente como sigue:

1. El límite de una suma es la suma de los límites.
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.
4. El límite de un producto es el producto de los límites.
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Si utilizamos repetidamente la ley del producto con $g(x) = f(x)$, obtenemos la siguiente ley.

6. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$ donde n es un número entero positivo

Para la aplicación de estas seis leyes, necesitamos utilizar dos límites especiales:

7. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

8. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

Si hacemos $f(x) = x$ en la ley 6 y utilizamos la ley 8, obtenemos otra forma especial de límite.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un número entero positivo

Un límite similar con el que se cumple para las raíces es el siguiente. (Para la raíz cuadrada, la demostración se resume en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un número entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

Más generalmente, tenemos la siguiente ley .

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un número entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Algunos límites se calculan mejor encontrando primero los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Decimos que los límites por los dos lados existen si y sólo si ambos límites existen y son iguales.

$\boxed{1}$ **Teorema** $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, utilizamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para límites de este tipo.