Examen Final Regular - Tarea

Universidad Católica de Salta - Facultad de Ingeniería

10 de diciembre de 2020

Ejercicio 1 (20 puntos)

(a) Escribe el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$.

(b) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x^2$. Encuentra la función composición $f \circ g$, indicando cómo se define, cuál es su dominio y su imagen.

(c) Grafica la siguiente función $f(x) = 2^x + 1$. ¿La función f tiene inversa? ¿Por qué? Justifica y explica detalladamente cómo se determina una fórmula para f^{-1}, si existe.

(d) Dada la función $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \cos x$, decide si f es par, impar o ninguna de las anteriores.

Ejercicio 2 (20 puntos)

(a) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ |x^2 - 1| & \text{s i } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine si existen los siguientes límites:

i) $\lim_{x \to 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \to 1} f(x)$

iii) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(b) Calcula los siguientes límites (sin aplicar L'Hôpital):

i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 1}$

ii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

Ejercicio 3 (20 puntos)

(a) Analiza la continuidad de la siguiente función $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-6x+5}$ en todos los puntos de su dominio. Clasifique las discontinuidades.

(b) Determina, si existen, las asíntotas de la función del inciso (a) y grafica dichas asíntotas.

Ejercicio 4 (20 puntos)

(a) Una partícula se mueve de acuerdo con la función posición $s(t) = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t$, con $t \geq 0$.

i) ¿En qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?

ii) ¿En qué momento su aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de ese valor de t?

(b) Determina $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes expresiones:

i) $y = 2^{-x} \sin(3x^4)$

ii) $2x^3 + x^2y - xy^2 = 2$

Ejercicio 5 (20 puntos)

(a) Encuentra la derivada de la siguiente función empleando el método de derivación logarítmica:

$$x(t) = \frac{e^{-t} \cos^2 t}{\sqrt{t^2+1}}$$

(b) Calcula el siguiente límite empleando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t} \cdot e^{-t/2}}{t}$$

(c) Aproxime el valor de $\ln(0.5)$ utilizando diferenciales.