TRABAJO PRÁCTICO Nº4

Continuidad de función

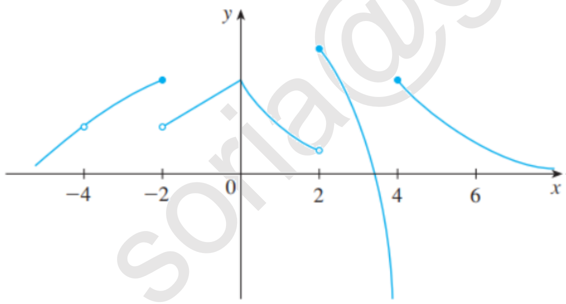
RESUELTOS

Ejercicio Nº1

a) A partir de la gráfica de “f”, establezca el número en el cual “f” es discontinua y explique por qué. Clasifique las discontinuidades.

Una función es continua en x=a, si:
1) existe la función reemplazada en el punto.
2) existe el límite cuando se acerca al punto.
3) la función en el punto y el límite son iguales.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$



La función es discontinua en:

x=-4, porque la función no existe en el punto (hay un hueco). Discontinuidad evitable

x=-2 y 2, porque no existe el limite, ya que los laterales son distintos. Discontinuidad no evitable (esencial de primera especie)

x=4, porque el limite no existe, y además uno de ellos tiende a menos infinito. Discontinuidad no evitable (esencial de segunda especie).

$$Discontinuidades\begin{cases} Evitables & \begin{cases} \nexists f(a) \wedge \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \\ \exists f(a) \wedge \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \wedge f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x) \end{cases} \\ No\ evitables & \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \wedge \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \wedge \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \vee \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \end{cases} \end{cases}$$

b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso a), determine si “f” es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.

En x=-4 la función es continua por ambos lados, ya que los laterales son iguales.

En los otros puntos no hay continuidad a ambos lados porque los limites laterales son distintos.

Ejercicio N°2

a) Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua en el número dado x = a.

$$ii)\ g(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}; a = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = g(a)}$$

$$\rightarrow g(1) = \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2}{1 + 1^3} = \frac{2 - 3}{1 + 1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 1} \left(\frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \rightarrow VERIFICA$$

Ejercicio N°3

Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado x = a.

$$a)\ f(x) = \frac{1}{x + 2}; a = -2$$

$$\rightarrow f(-2) = \frac{1}{-2 + 2} = \frac{1}{0} = \nexists$$

Al no existir la función en el campo de los números reales, la función ya no cumple uno de los puntos de continuidad, por lo tanto, no es continua en x = -2.

$$f)\ h(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}\right) & si\ x \neq 3 \\ 6 & si\ x = 3 \end{cases}; a = 3$$

$$\rightarrow h(3) = \boxed{6}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-5x-3}{x-3}\right) = 0/0$$

$$2x^2-5x-3 \rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2\cancel{(x-3)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\cancel{x-3}}\right) = 2\left(3+\frac{1}{2}\right) = \boxed{7}$$

La función en el punto existe y vale "6", el límite existe y vale "7", por lo tanto; la función es discontinua en x = 3

Ejercicio N°4

¿Cómo podría "evitar la discontinuidad" en cada una de las siguientes funciones? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ a fin de que sean continuas en x = 2?

$$a)\ f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$$

$$\rightarrow f(2) = \frac{2^2-2-2}{2-2} = \frac{0}{0} \rightarrow indeterminación$$

Para redefinirla, tenemos que salvar la indeterminación. Podemos factorizar y ver si se puede simplificar alguna expresión y de esa manera llegar a un resultado real.

$$x^2-x-2 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = +2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}} = x+1, con\ x \neq 2$$

$$\rightarrow f(2) = 2+1 = \boxed{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2-x-2}{x-2}\right) & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$$

La función se redefine con el valor que me da luego de salvar la indeterminación (3), y en el punto para el cual justamente no existía (x = 2)

Ejercicio N°5

Encuentre los valores en los que f es discontinua. Clasifique las discontinuidades. ¿Dónde f es continua?

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & si\ x \leq 0 \\ 2 - x & si\ 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Analizamos en los puntos donde se produce el cambio de función (en x=0 y x=2), para ver cuánto nos dan los límites laterales. También se debería analizar siempre en los puntos donde me produciría una discontinuidad en el dominio de cada tramo (en este caso no habría).

Para x=0

$$\rightarrow f(0) = 1 + 0^2 = 1$$

Para analizar el limite cuando “x” tiende a cero, tengo que calcular los limites laterales porque las funciones cambian a ambos lados.

$$\lim_{x \to 0^-} (1 + x^2) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} (2 - x) = 2$$

Como los laterales son distintos, el límite no existe, por lo tanto, la función es discontinua no evitable (esencial de primera especie).

Para x=2

$$\rightarrow f(2) = 2 - 2 = 0$$

Para analizar el límite cuando “x” tiende a cero, tengo que calcular los limites laterales porque las funciones cambian a ambos lados.

$$\lim_{x \to 2^-} (2 - x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} (x - 2)^2 = 0$$

Como los laterales son iguales, el límite existe y además la función en el punto también existe y tiene el mismo valor que el límite, por lo tanto, la función es continua en x = 2.