TRABAJO PRÁCTICO N° 2

FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Funciones exponenciales y logarítmicas. Modelos de crecimiento de población. Funciones trigonométricas: definición geométrica. Funciones trigonométricas de números reales: dominio, imagen y gráfica. Funciones trigonométricas inversas. Problemas de aplicación.

Duración: 1 ½ clases.

Ejercicio 1: Realiza la representación gráfica de cada función utilizando una tabla de valores.

a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = -2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $s(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Para cada una de las funciones:

i. Determina su dominio e imagen.
ii. Analiza su crecimiento y decrecimiento.
iii. Analiza si es biunívoca.

Ejercicio 2: Dibuja la gráfica de las siguientes funciones mediante transformaciones de la gráfica de $f(x) = 2^x$
Determina dominio e imagen en cada caso.

a) $f_1(x) = 2^x - 1$ b) $f_2(x) = 2^{-x}$ c) $f_3(x) = -2^{x-1}$ d) $f_4(x) = -2^{x+1} - 2$

Ejercicio 3: Grafica en un mismo sistema de ejes coordenados y compara las gráficas.

$g_1(x) = \log_3 x$ $g_2(x) = \log_{1/3} x$ $g_3(x) = -\log_3 x$ $g_4(x) = \log_3(-x)$

Ejercicio 4: Dibuja la gráfica de las siguientes funciones mediante transformaciones de la gráfica de $f(x) = \log_2 x$
Determina dominio e imagen en cada caso.

a) $f_1(x) = -\log_2 x$ b) $f_2(x) = \log_2(x+1)$ c) $f_3(x) = \log_2 x - 2$ d) $f_4(x) = \log_2(x-2) + 2$

Ejercicio 5: Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a) Cierto cultivo de la bacteria *Rhodobacter sphaeroides* inicialmente tiene 25 bacterias y se observa que se duplica cada 5 horas.
   i. Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias del cultivo después de t hs.
   ii. Estime el número de bacterias después de 18 horas.
   iii. ¿Después de cuántas horas llegará el número de bacterias a un millón?

b) La población de cierta especie de peces tiene una tasa de crecimiento relativa de 1,2% por año. Se estima que la población en 2000 era de 12 millones.
   i. Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele la población en t años después de 2000.
   ii. Estime la población de peces en el año 2005.
   iii. Trace una gráfica de la población de peces.

c) La vida media del cesio 137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 10 gramos.
   i. Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de t años.
   ii. Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa restante después de t años.
   iii. ¿Cuánto de la muestra habrá después de 80 años?
   iv. ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 2 g de la muestra?

d) Un tazón de sopa caliente se sirve en una fiesta. Empieza a enfriarse de acuerdo con la Ley de Newton de Enfriamiento, de modo que la temperatura en el tiempo t está dada por $T(t) = 65 + 145e^{-0{,}05t}$ donde t se mide en minutos y T se mide en $°F$.

i. ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?
ii. ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?
iii. ¿Después de cuánto tiempo será de $100°F$ la temperatura?

Ejercicio 6: Graficar cada una de las siguientes funciones, hallar su amplitud, período y fase:

a) $y = \text{sen}(2x)$ b) $y = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$ c) $y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ d) $y = \frac{1}{2}\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

e) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ f) $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ g) $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ h) $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$

Ejercicio 7: Para cada una de las siguientes funciones trigonométricas:

$f(x) = \text{sen}\, x$ $g(x) = \cos x$ $h(x) = \tan x$

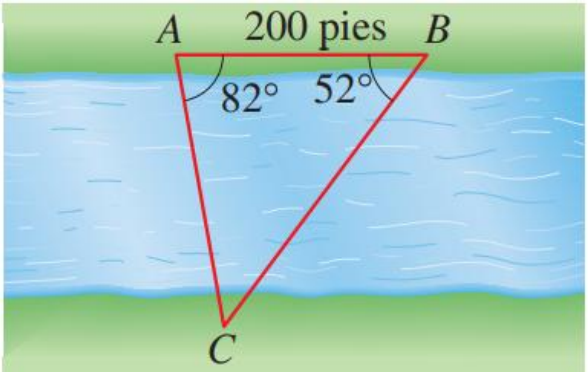
Graficar su función inversa indicando dominio e imagen de la misma.

Ejercicio 8: Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a) Una escalera de 20 metros está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

b) Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio. Desde una ventana del edificio, un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39° y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?

c) Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos A y B, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia C en el lado opuesto del río y encuentra que $\widehat{BAC} \approx 82°$ y $\widehat{ABC} \approx 52°$. Aproxime la distancia de A a C.



d) Una empinada montaña está inclinada 74° con la horizontal y se eleva a 3400 pies sobre la llanura circundante. Un funicular se ha de instalar desde un punto a 800 pies de la base hasta lo alto de la montaña, como se muestra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.