1. Demostrar que el $\{\vec{0}\}$ *es un subespacio de* V
2. Justificar porque el conjunto $\{p(x): polinomios\ de\ grado\ 2\}$ NO es un subespacio vectorial
3. Demostrar que el plano $\{(x, y, z) \in R^3\ con\ \ x + 2y - z = 0\}$ es un subespacio de R^3

SUBESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES DE V

- El subespacio generado por un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$ de un espacio vectorial V no es otra cosa que el conjunto de TODAS las combinaciones lineales que podemos obtener de tales vectores.

$$Gen\ (\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}) = \{\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ \ldots. + \alpha_k\, x_k, con\ \ \alpha_i \epsilon R\}$$

- PROPIEDAD: $Gen\ (\{x_1, x_2, \ldots., x_k\})$ ES UN SUBESPACIO DE V

$Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$ *es un subespacio vectorial*

Elemento genérico de $Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$ es

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

Demostracion.

1. ¿ $\mathbf{0} \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$ **?**

$$\mathbf{0} = 0\, x_1 + 0\, x_2 + 0\, x_3 + \cdots + 0\, x_k = \sum_{i=1}^{k} 0 \,.\, x_i \rightarrow \mathbf{0} \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$$

2. Sean $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \;\; y \;\; \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$ dos elementos de $Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$

$$¿\vec{u} + \vec{v} \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}?$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) x_i = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i) x_i \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$$

3. Sean $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$ $¿\alpha\vec{u} \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}?$

$$\alpha\vec{u} = \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i) x_i = \sum_{i=1}^{k} (\theta_i) x_i \in Gen\{x_1, x_2, x_3, \dots x_k\}$$

Determine el subespacio generado por:
$\{(1,1,1),(0,1,1)\}$.

Determine el subespacio generado por:
$\{(1,0,2),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

- Si $Gen\ (\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}) = H$ decimos:

$\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$ genera a H

$\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$ es un generador de H

H es generado por $\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$

Definición. Sea V un subespacio vectorial (o espacio vectorial), se dice que el conjunto

$\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$ es BASE de V si:

- $\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$ es generador de V
- $\{x_1, x_2, \ldots., x_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

La cantidad de elementos de la base, se denomina DIMENSION DE V

SI $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ es base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $\vec{v} \in V$ puede escribirse como combinación lineal única de los vectores de B

$$\vec{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{u_n} \quad para\ únicos\ \alpha_i \epsilon R$$

EJEMPLOS DE BASES

BASE CANONICA o base usual

- EN R^2 LA BASE CANONICA ES $\{(1,0),(0,1)\}$, $\dim(R^2) = 2$
- EN R^3 LA BASE CANONICA ES $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\dim(R^3) = 3$
- EN P_2 LA BASE CANONICA ES $\{\,1, x, x^2\}$ $\dim(P_2) = 3$
- EN R^{2x2} LA BASE CANONICA ES $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(R^{2x2}) = 4$
- EN $A = \left\{\begin{pmatrix}a & c\\c & b\end{pmatrix}\ con\ a,b,c \in R\right\}$

$(conjunto\ de\ las\ matrices\ simetricas\ de\ orden\ dos,)\ su\ base\ canónica\ es$

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\} \quad \dim(A) = 3$$

- $\begin{pmatrix}a & c\\c & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & c\\c & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

¿El conjunto $\{(1,2),(1,-1)\}$ es base de R^2?

1. Analicemos si $\{(1,2),(1,-1)\}$ es linealmente independiente.

Planteamos la combinación lineal $(0,0)=\alpha.(1,2)+\beta(1,-1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ el sistema tiene solución trivial, entonces el conjunto es linealmente independiente

2. Analicemos si $\{(1,2),(1,-1)\}$ genera a todo R^2

Planteamos la combinación lineal $(x,y)=\alpha.(1,2)+\beta(1,-1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-2x \end{pmatrix}$ *NO HAY CONDICION para que el sistema tenga solucion,* por lo tanto genera a todo R^2

POR LO TANTO EL CONJUNTO $\{(1,2),(1,-1)\}$ ES BASE DE R^2

Determinar una base del subespacio $A = \{(x, y, z) \in R^3 \ con \ \ x + y - 2z = 0\}$

De la condición $x + y - 2z = 0$ despejo una variable

$$x = 2z - y$$

Entonces un elemento genérico será:

$$(x, y, z) = (2z - y, y, z) = (-y, y, 0) + (2z, 0, z) = y(-1,1,0) + z(2,0,1)$$

De ello la base del subespacio A es el conjunto $\{(-1,1,0), (2,0,1)\}$

Tarea, demostrar que $\{(-1,1,0), (2,0,1)\}$ es generador de A y linealmente independiente

PROPIEDAD:

SI U Y V SON SUBESPACIOS VECTORIALES, DONDE $U \subseteq V$, ENTONCES $\dim(U) \leq \dim(V)$