FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$\underbrace{f(x) = 2^x}_{\text{Base 2}} \qquad \underbrace{g(x) = 3^x}_{\text{Base 3}} \qquad \underbrace{h(x) = 10^x}_{\text{Base 10}}$$

La Figura 2 muestra las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ para varios valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. De la Figura 2 se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a > 1$, la función aumenta rápidamente (vea nota al margen).

Para ver la rapidez con la que aumenta $f(x) = 2^x$, realicemos el siguiente experimento de pensamiento. Suponga que empezamos con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de grueso, y lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que doblamos el papel, se duplica el grosor de la pila del papel, de modo que el grosor de la pila resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿De qué grosor piensa usted qué es? Resulta que es de más de 17 millones de millas.

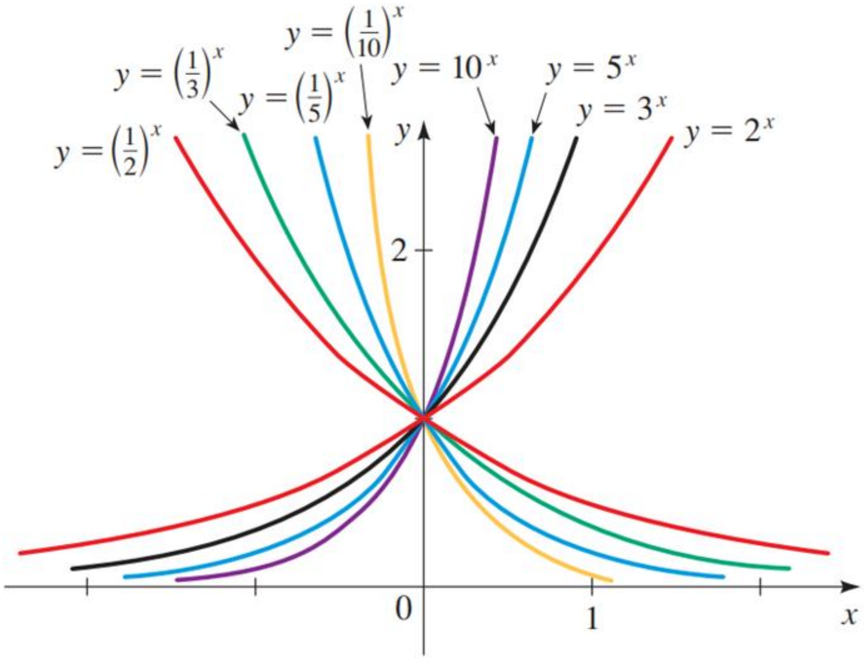


FIGURA 2 Una familia de funciones exponenciales

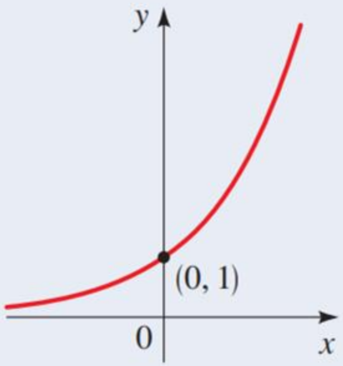
El eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, tenemos que $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, tenemos $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (vea Figura 2). También $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, de modo que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

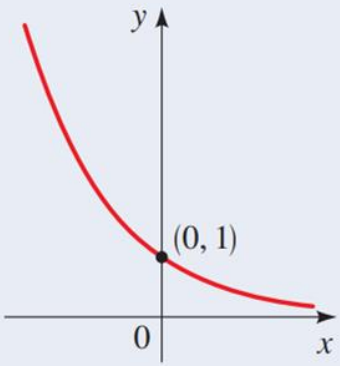
La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$



$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

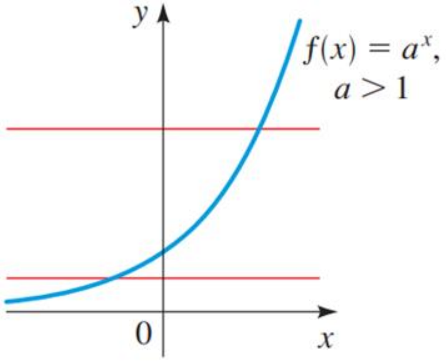


FIGURA 1 $f(x) = a^x$ es biunívoca.

Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso $a > 1$) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la Sección 2.6 que f^{-1} está definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica.

Leemos $\log_a x = y$ como "el log base a de x es y".

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base *a***, denotada por $\mathbf{log}_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La Figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$ (vea Ejercicio 92).

Como $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

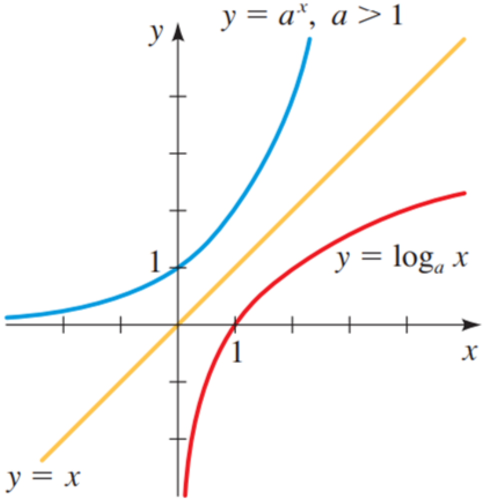
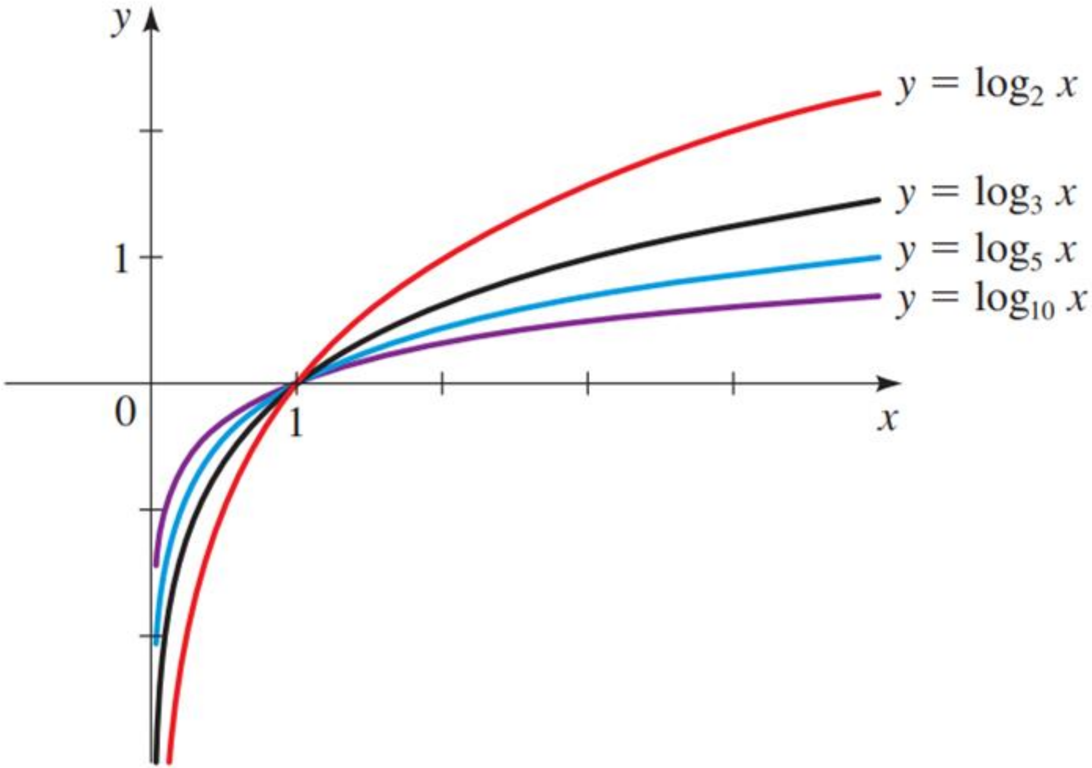


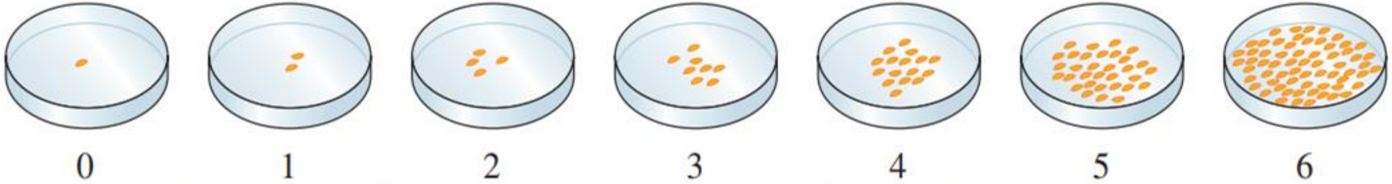
FIGURA 2 Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

La Figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (vea Figura 2 en la Sección 4.1) en la recta $y = x$. También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el Ejemplo 4.



Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Supóngase que empezamos con una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora tenemos 2 bacterias, después de dos horas tenemos 2^2 o sea 4 bacterias, después de tres horas tenemos 2^3 o sea 8 bacterias, y así sucesivamente (vea Figura 1). Vemos que podemos modelar la población de bacterias después de t horas, por medio de $f(t) = 2^t$.



Si empezamos con 10 de estas bacterias, entonces la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^t$. Una especie de bacteria, de crecimiento más lento, se duplica cada 3 horas; en este caso la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^{t/3}$. En general, tenemos lo siguiente.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TIEMPO DE DUPLICACIÓN)

Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es a, entonces el tamaño de la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/a}$$

donde a y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa)

Hemos utilizado una función exponencial con base 2 para modelar el crecimiento poblacional (en términos del tiempo de duplicación). También modelaríamos la misma población con una función exponencial con base 3 (en términos del tiempo de triplicación). De hecho, podemos hallar un modelo exponencial con cualquier base. Si usamos la base e, obtenemos el siguiente modelo de una población en términos de la **tasa de crecimiento relativa** r: la tasa de crecimiento poblacional expresada como una proporción de la población en cualquier momento. Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier tiempo t la tasa de crecimiento es 2% de la población en el tiempo t.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ = población en el tiempo t

n_0 = tamaño inicial de la población

r = tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)

t = tiempo

Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es análogo al crecimiento poblacional excepto que la masa *decrece*. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de **vida media**. Por ejemplo, la vida media del radio 226 es 1600 años, de modo que una muestra de 100 g se desintegra a 50 g (o 1×100 g) en 1600 años, entonces 25 g (o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100$ g) en 3200 años, y así sucesivamente. En general, para una sustancia radiactiva con masa m_0 y vida media h, la cantidad restante en el tiempo t está modelada por

$$\boxed{m(t) = m_0 2^{-t/h}}$$

donde h y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

Para expresar este modelo en la forma $m(t) = m_0e^{rt}$, necesitamos hallar la tasa relativa de desintegración r. Como h es la vida media, tenemos

$$m(t) = m_0e^{-rt} \qquad \text{Modelo}$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0e^{-rh} \qquad h \text{ es la vida media}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-rh} \qquad \text{Divida entre } m_0$$

$$\ln\frac{1}{2} = -rh \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \qquad \text{Despeje } r$$

Esta última ecuación nos permite hallar la tasa r a partir de la vida media h.

MODELO DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t está modelada por la función

$$m(t) = m_0e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

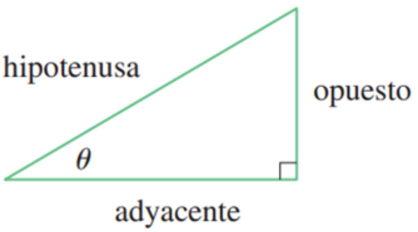


FIGURA 6

Funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo θ, las seis funciones trigonométricas se definen como las razones entre longitudes de lados de un triángulo rectángulo, como sigue (figura 6).

4

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

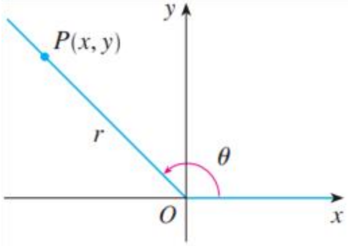


FIGURA 7

Esta definición no aplica a ángulos obtusos o negativos, de modo que para un ángulo general θ en posición estándar haga que $P(x, y)$ sea cualquier punto en el lado terminal de θ y que r sea la distancia $|OP|$, como en la figura 7. Entonces se define

$$\boxed{5} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{r} & \csc \theta = \dfrac{r}{y} \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{x}{r} & \sec \theta = \dfrac{r}{x} \\[2ex] \tan \theta = \dfrac{y}{x} & \cot \theta = \dfrac{x}{y} \end{array}}$$

Si en la definición 5 hacemos $r = 1$ y dibujamos un círculo unitario con centro en el origen e indicamos θ como en la figura 8, entonces las coordenadas de P son $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$.

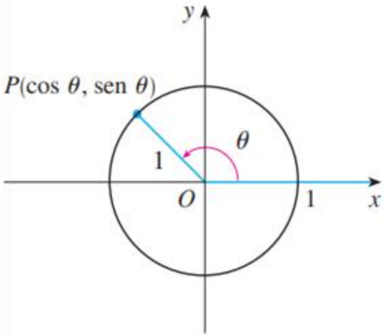


FIGURA 8

Como la división entre 0 no está definida, $\tan \theta$ y $\sec \theta$ no están definidas cuando $x = 0$ y $\csc \theta$ y $\cot \theta$ no están definidas cuando $y = 0$. Note que las definiciones en $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$ son consistentes cuando θ es un ángulo agudo.

Si θ es un número, la convención es que $\operatorname{sen} \theta$ quiere decir el ángulo cuya medida en *radianes* es θ. Por ejemplo, la expresión sen 3 implica que está tratando con un ángulo de 3 rad. Cuando se busca una aproximación de este número con calculadora, debe recordar poner la calculadora en el modo de radianes, y entonces obtiene

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0.14112$$

Si deseamos conocer el seno del ángulo de 3° escribiríamos sen 3° y, con la calculadora en el modo de grados, encontramos que

$$\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0.05234$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una relación entre las funciones trigonométricas. Las más elementales son las siguientes, que son consecuencias inmediatas de las definiciones de las funciones trigonométricas.

6

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para la siguiente identidad consulte de nuevo la figura 7. La fórmula de la distancia (o, lo que es lo mismo, el teorema de Pitágoras) dice que $x^2 + y^2 = r^2$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por tanto, ha demostrado una de las identidades trigonométricas más útiles:

7 $$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Si ahora dividimos ambos lados de la ecuación 7 entre $\cos^2\theta$ y usamos las ecuaciones 6, obtenemos

8 $$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Del mismo modo, si dividimos ambos lados de la ecuación 7 entre $\operatorname{sen}^2\theta$, obtenemos

9 $$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$$

Las identidades

$$\boxed{\begin{aligned} &\textbf{10a} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\,\theta \\ &\textbf{10b} \qquad \cos(-\theta) = \cos\,\theta \end{aligned}}$$

demuestran que seno es una función impar y coseno es una función par. Se demuestran fácilmente al trazar un diagrama que indique θ y $-\theta$ en posición estándar

Como los ángulos θ y $\theta + 2\pi$ tienen el mismo lado terminal

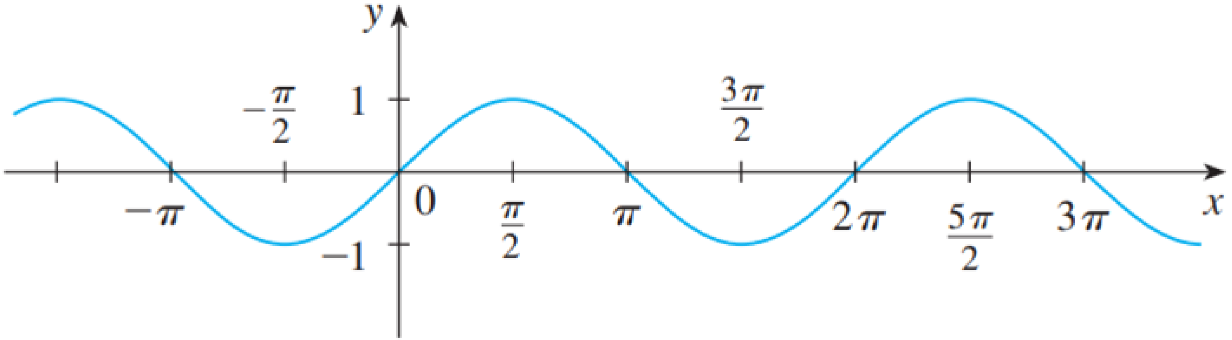
$$\textbf{11} \qquad \boxed{\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\,\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\,\theta}$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π.

Gráficas de las funciones trigonométricas

La gráfica de una función $f(x) = \operatorname{sen} x$, que se ilustra en la figura 14a), se obtiene al determinar los puntos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y luego usar la naturaleza periódica de la función (de la ecuación 11) para completar la gráfica. Note que los ceros de la función cero se presentan en los múltiplos enteros de π, es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{siempre que } x = n\pi, \quad n \text{ un entero}$$

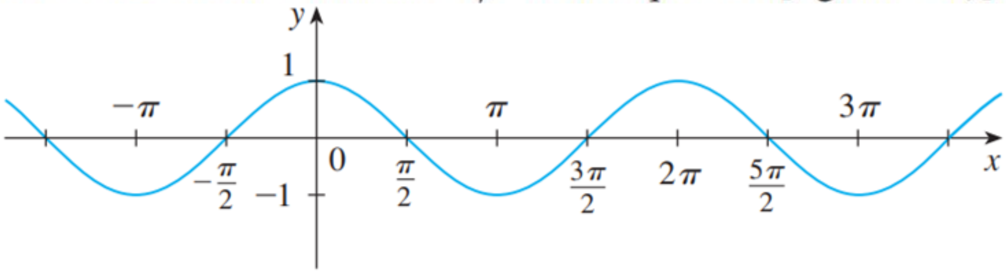


a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Debido a que la identidad

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(que se puede verificar usando la ecuación 12a), la gráfica del coseno se obtiene al desplazar la gráfica del seno en una cantidad $\pi/2$ a la izquierda [figura 14b)].

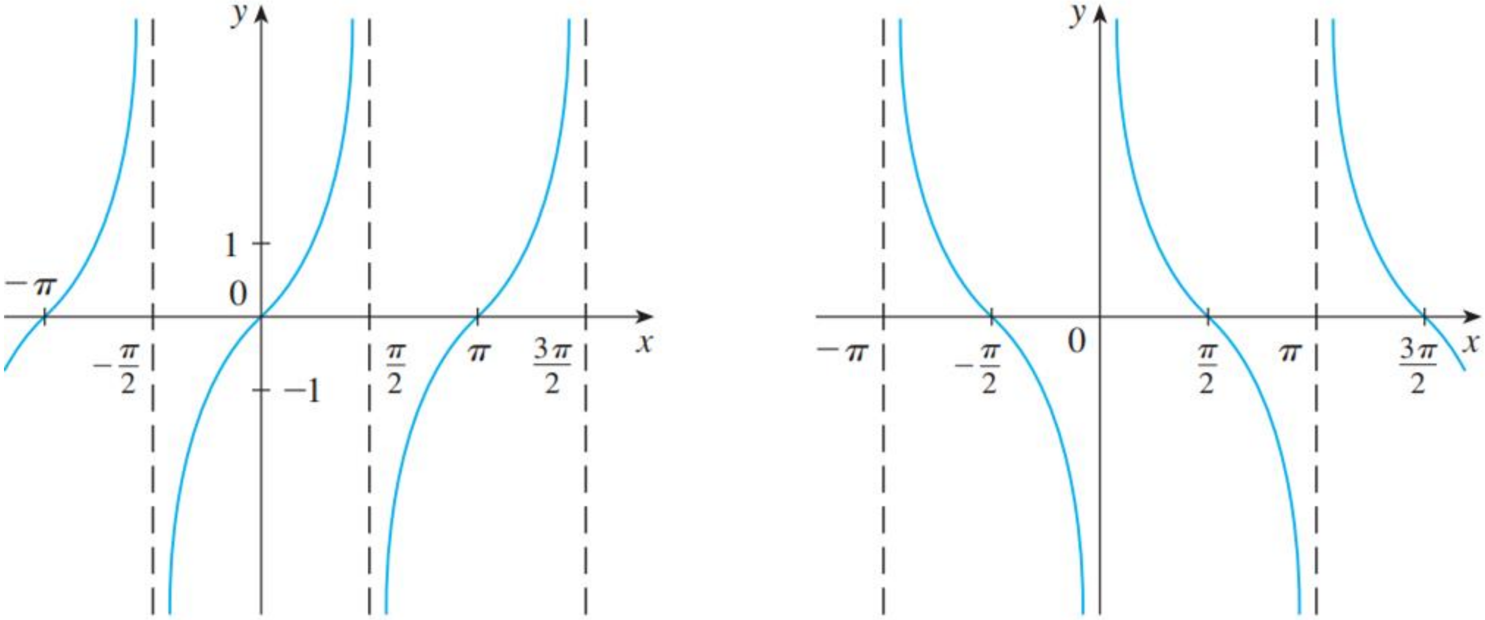


b) $g(x) = \cos x$

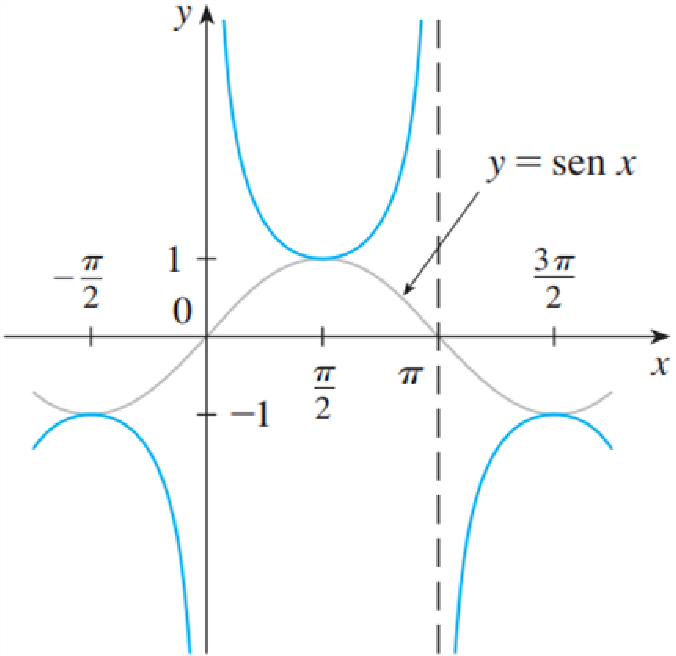
Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$, Así, para todos los valores de x

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

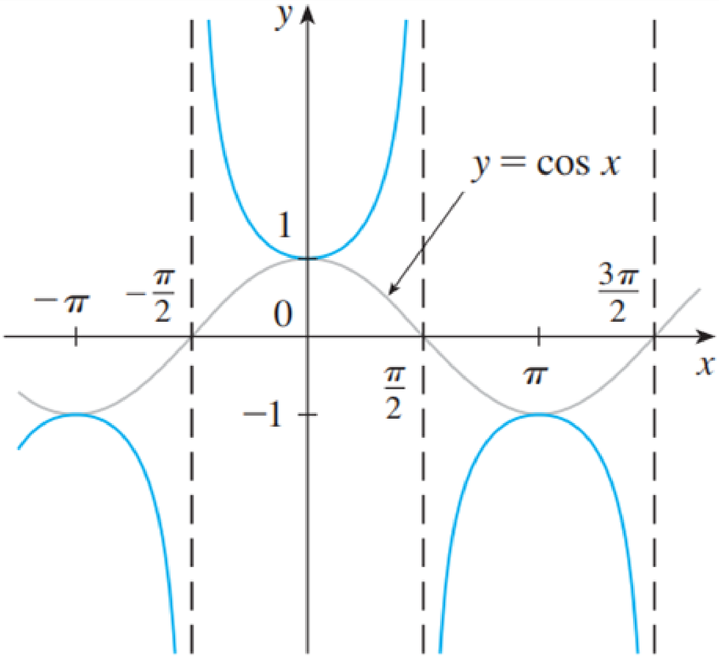
Las gráficas de las cuatro funciones trigonométricas restantes se ilustran en la figura 15 y sus dominios se indican ahí. Note que tangente y cotangente tienen rango $(-\infty, \infty)$, mientras que cosecante y secante tienen rango $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las cuatro funciones son periódicas: tangente y cotangente tienen periodo π, en tanto que cosecante y secante tienen periodo 2π.



a) $y = \tan x$ b) $y = \cot x$



c) $y = \csc x$



d) $y = \sec x$

Puede verse en la figura 17 que la función seno, $y = \operatorname{sen} x$, no es uno a uno (utilice la prueba de la recta horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x,\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2,$ es uno a uno (figura 18). La función inversa de la función seno restringida f existe y se denota por sen^{-1} o arcsen. Se llama **función seno inverso** o **función arco seno**.

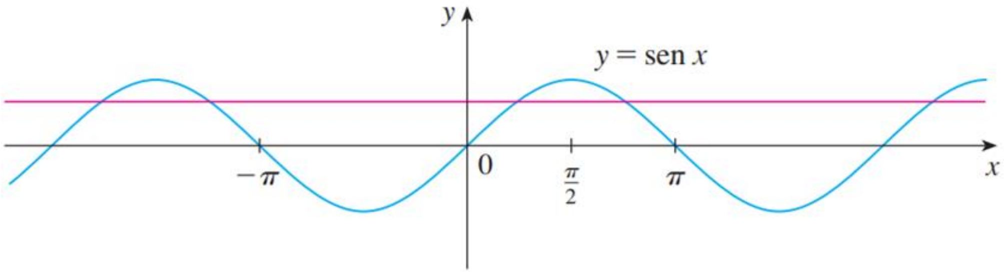


FIGURA 17

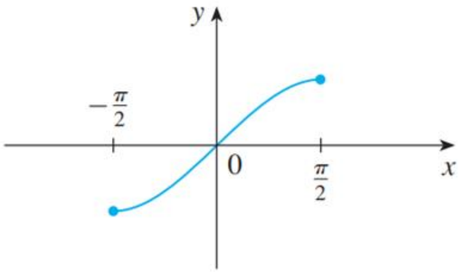


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Dado que la definición de una función inversa indica que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

Por tanto, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

La función inversa del seno, sen^{-1}, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se muestra en la figura 20, se obtiene a partir de la función seno restringido (figura 18), mediante la reflexión sobre la recta $y = x$.

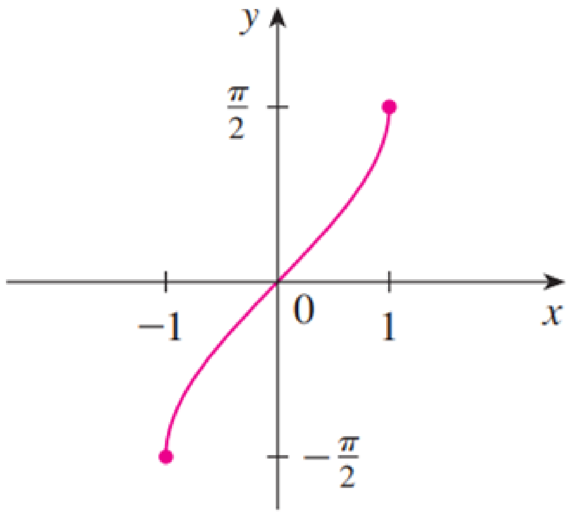


FIGURA 20

$y = \operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$

La **función coseno inverso** se maneja en forma similar. La función coseno restringida $f(x) = \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es uno a uno (figura 21) y, por tanto, tiene una función inversa denotada por $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

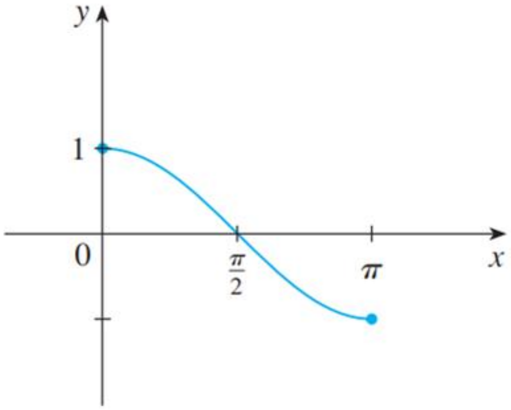


FIGURA 21

$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

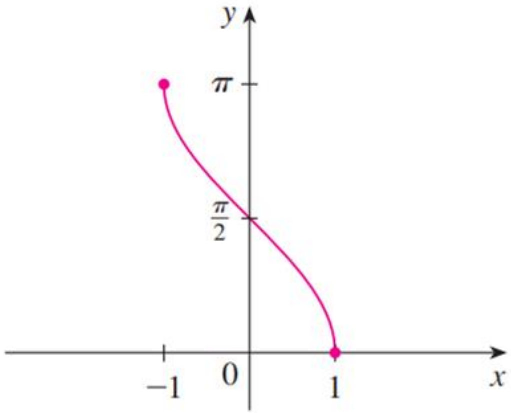


FIGURA 22

$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

La función coseno inverso, $\cos^{-1}$, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$. Su gráfica se muestra en la figura 22.

La función tangente puede hacerse uno a uno mediante la restricción de que el intervalo sea $(-\pi/2, \pi/2)$. Así, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase la figura 23), y se denota por $\tan^{-1}$ o arctan.

$$\boxed{\tan^{-1}x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

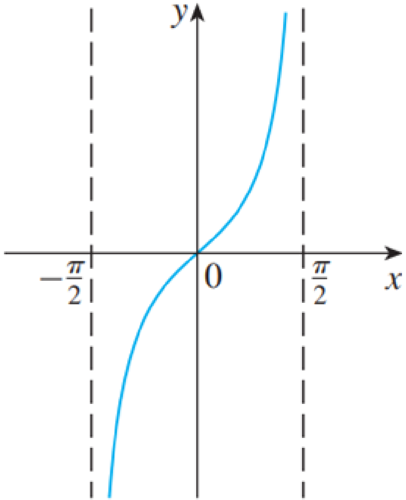


FIGURA 23

$y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Su gráfica se muestra en la figura 25.

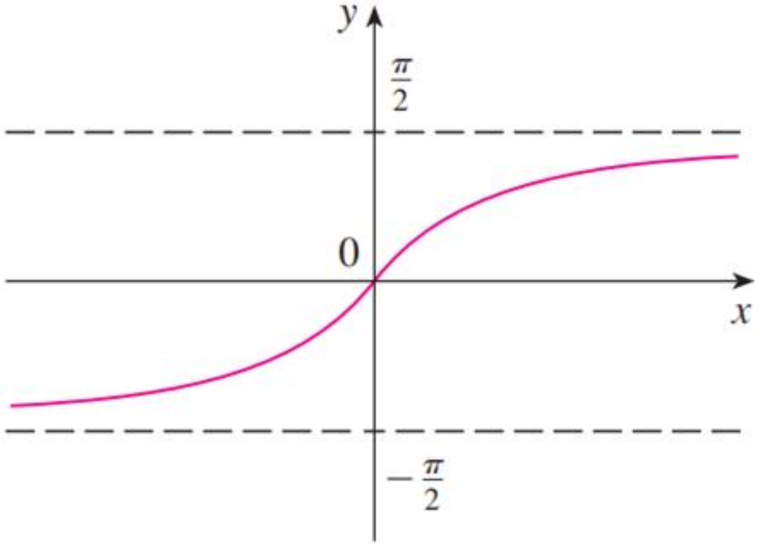


FIGURA 25
$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

Sabemos que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan. Dado que la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene reflejando la gráfica de la función tangente restringida, sobre la recta $y = x$, se deduce que las rectas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$.

La ley de senos

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

La ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$