2.1 Problemas de la tangente y la velocidad

En esta sección se verá cómo surgen los límites cuando tratamos de encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

El problema de la tangente

La palabra *tangente* se deriva de la voz latina *tangens*, que significa “tocar”. Así, una tangente a una curva es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto, pero, ¿cómo puede precisarse esta idea?

Para una circunferencia podemos simplemente seguir la idea de Euclides y decir que la tangente es una recta que interseca la circunferencia una y sólo una vez, como se ve en la figura 1a). Para curvas más complicadas esta definición es inadecuada. La figura 1b) muestra dos rectas l y t que pasan por un punto P en una curva C. La recta l cruza C sólo una vez, pero ciertamente no es la idea que tenemos de lo que es una tangente. La recta t, por otro lado, se parece más a una tangente, pero interseca a C dos veces.

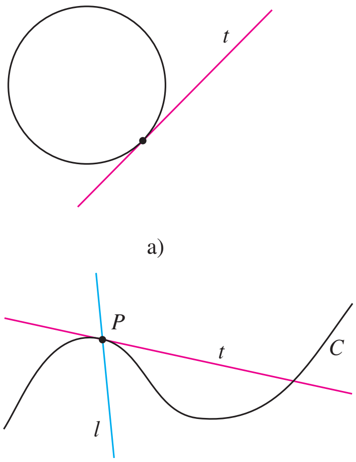


FIGURA 1

Para ser más específicos, intentaremos resolver el problema de encontrar una recta t tangente a la parábola $y = x^2$ en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).

SOLUCIÓN Podremos encontrar la ecuación de la recta tangente t tan pronto como conozcamos su pendiente m. La dificultad es que sólo conocemos un punto P sobre t, y para calcular la pendiente se necesitan dos puntos. Sin embargo, observamos que podemos calcular una aproximación a m eligiendo un punto cercano $Q(x, x^2)$ sobre la parábola (como en la figura 2) y calculando la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. [Una **recta secante**, de la palabra latina *secans*, que significa cortar, es una recta que interseca (corta) una curva más de una vez.]

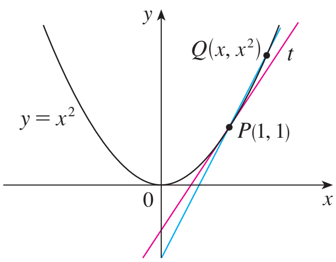


FIGURA 2

Elegimos $x \neq 1$ de manera que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$, tenemos

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Cuanto más cerca está Q de P, la x es más cercana a 1 y, de las tablas, m_{PQ} está más cerca de 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

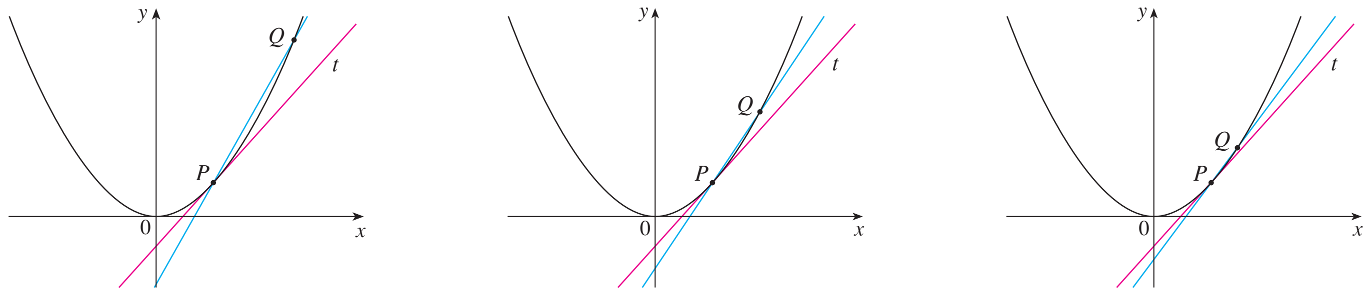
Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes, y esto lo expresamos simbólicamente escribiendo

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

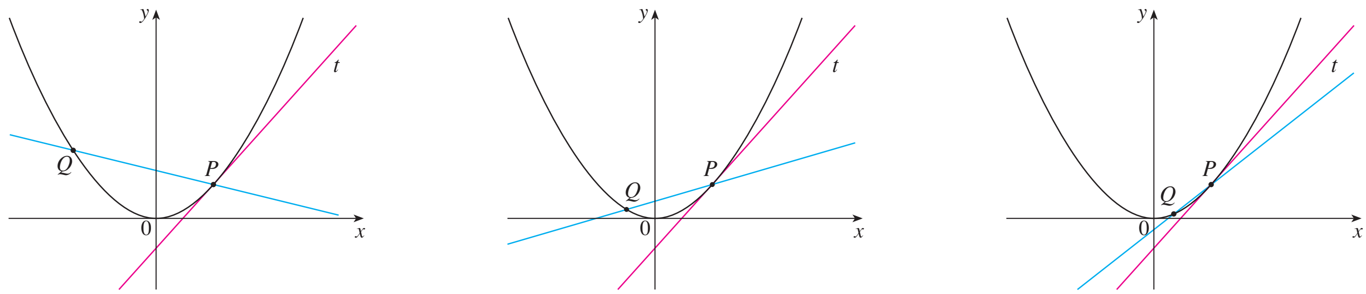
Suponiendo que la pendiente de la recta tangente finalmente es 2, se utiliza la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente (véase apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente en (1, 1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 1$$

La figura 3 muestra el proceso de límite que se presenta en este ejemplo. Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las correspondientes rectas secantes giran alrededor de P y se aproximan a la recta tangente t.



Q se aproxima a P por la derecha



Q se aproxima a P por la izquierda

FIGURA 3

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para funciones adicionales.

Muchas de las funciones que se producen en la ciencia no están descritas por ecuaciones explícitas, sino que están definidas por datos experimentales. El siguiente ejemplo muestra cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de este tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

V **EJEMPLO 2** La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga Q restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que el flash se dispara). Utilice los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [*Nota*: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en microamperios) que fluye desde el condensador a la lámpara del flash.]

SOLUCIÓN En la figura 4 se grafican los datos dados y se usan para trazar una curva que se aproxima a la gráfica de la función.

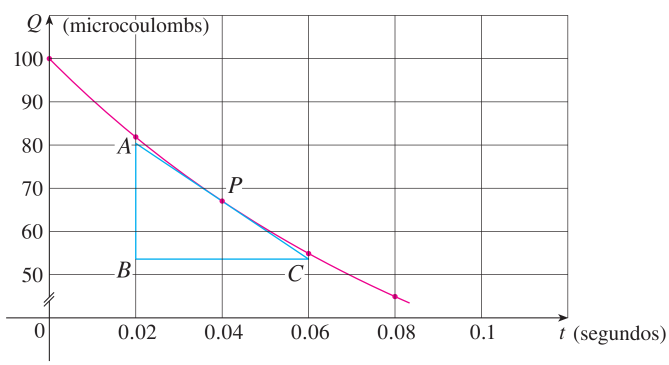


FIGURA 4

Dados los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ en la gráfica, nos encontramos con que la pendiente de la recta secante PR es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

La tabla de la izquierda muestra los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. De esta tabla se esperaría que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Así, por este método, estimamos la pendiente de la recta tangente como -675.

Otro método consiste en elaborar una aproximación a la tangente en P y medir los lados del triángulo ABC, como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

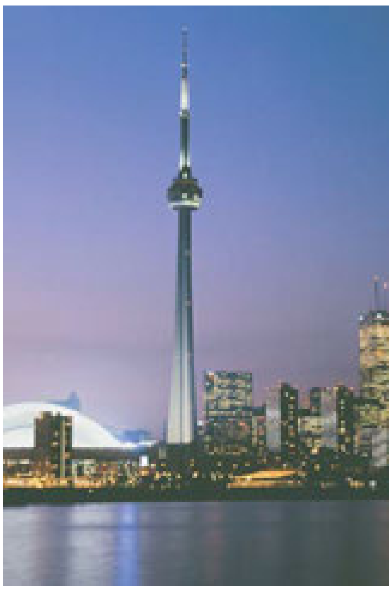
$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

El significado físico de la respuesta en el ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye desde el condensador a la lámpara de flash, después de 0.04 segundos, es de unos −670 microamperios.

El problema de la velocidad

Si usted mira el velocímetro de un automóvil mientras viaja en el tráfico de la ciudad, se ve que la aguja no se queda quieta por mucho tiempo, es decir, la velocidad del automóvil no es constante. Suponemos, al ver el velocímetro, que el coche tiene una velocidad determinada en cada instante, pero, ¿cómo se define la velocidad “instantánea”? Vamos a investigar el ejemplo de la caída de una pelota.

V EJEMPLO 3 Supongamos que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.



La Torre CN en Toronto fue el edificio autoestable más alto en el mundo durante 32 años.

SOLUCIÓN Por medio de experimentos llevados a cabo hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (Este modelo de caída libre no considera la resistencia del aire.) Si la distancia de caída después de t segundos se denota por $s(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa por la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para encontrar la velocidad después de 5 s es que se trata de un solo instante de tiempo ($t = 5$), por lo que no contamos con un intervalo de tiempo. Sin embargo, podemos aproximar la cantidad deseada mediante el cálculo de la velocidad promedio en el breve intervalo de tiempo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\begin{aligned}\text{velocidad promedio} &= \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}\\ &= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}\\ &= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49\text{ m/s}\end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos cada vez más pequeños.

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

Parece que, a medida que acorta el periodo, la velocidad promedio es cada vez más cercana a 49 m/s. La **velocidad instantánea** cuando $t = 5$ se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que comienzan en $t = 5$. Así, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49\,\text{m/s}$$

Usted puede sospechar (y no está equivocado) que los cálculos utilizados en la solución de este problema son muy similares a los utilizados anteriormente en esta sección para encontrar tangentes. De hecho, hay una estrecha conexión entre el problema de obtener la tangente y aquel de encontrar la velocidad. Si dibujamos la gráfica de la función de la distancia recorrida por la pelota (como en la figura 5) y consideramos los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ sobre la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

que es la misma que la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, a + h]$. Por tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de las velocidades promedio cuando h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

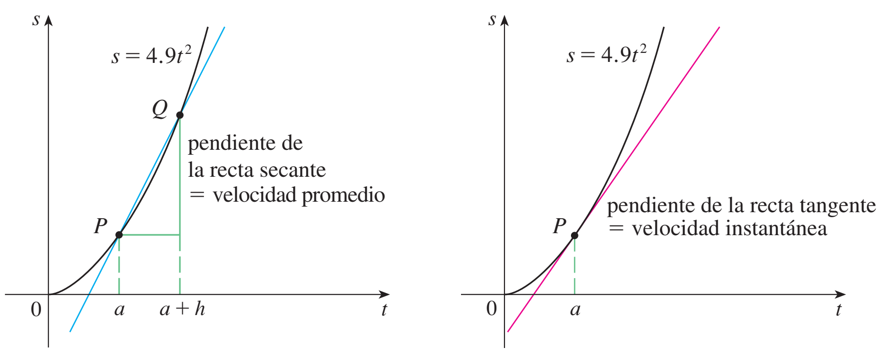


FIGURA 5

Los ejemplos 1 y 3 muestran que, para resolver los problemas de la tangente y la velocidad, debe ser capaz de calcular límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las siguientes cinco secciones, regresaremos a estos problemas de encontrar tangentes y velocidades en la sección 2.7.

2.2 Límite de una función

En la sección anterior vimos cómo surgen los límites cuando queremos encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto; ahora dirigimos nuestra atención a los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Vamos a investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La siguiente tabla muestra los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

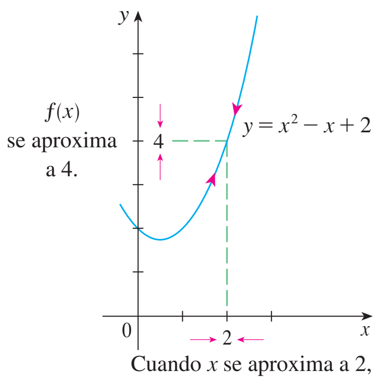


FIGURA 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) que se muestra en la figura 1, vemos que cuando x se aproxima a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de 4 como queramos, tomando x suficientemente cercano a 2. Esto lo expresamos diciendo que "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x tiende a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

1 Definición Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

En términos generales, esto quiere decir que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x tiende a a. En otras palabras, los valores de $f(x)$ tienden a estar más y más cerca del número L cuando x se acerca cada vez más al número a (de ambos lados de a), pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se dará una definición más precisa.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \qquad$ cuando $\qquad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Note la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, no se considera $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo se define f *cerca* de a.

La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso b), $f(a) \neq L$. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en a, es cierto que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

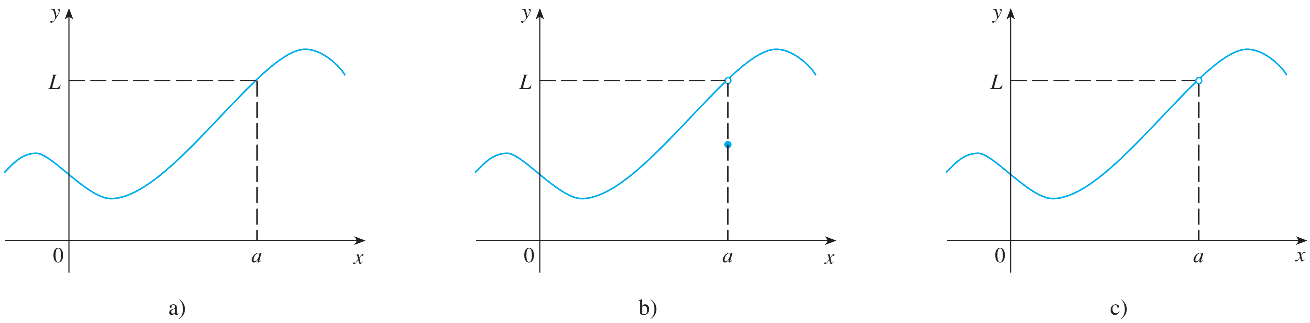


FIGURA 2 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa, porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que se consideran los valores de x que están cerca de a, pero no iguales a a.

Las tablas de la izquierda dan valores de $f(x)$ (con una precisión de seis decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no iguales a 1). Sobre la base de los valores en las tablas, hacemos la suposición de que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

El ejemplo 1 se ilustra en la gráfica de f, en la figura 3. Ahora vamos a cambiar un poco f, dándole el valor de 2 cuando $x = 1$ y llamando g a la función obtenida:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g conserva el mismo límite cuando x tiende a 1. (Véase la figura 4.)

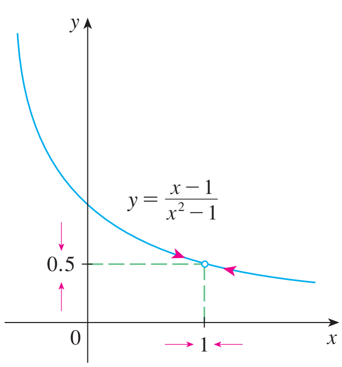


FIGURA 3

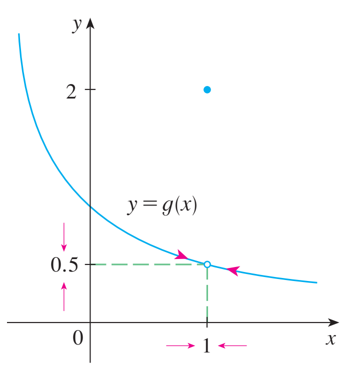


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Estime el valor de $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla enlista los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

A medida que t se acerca a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666. . ., así que suponemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiéramos tomado valores aún más pequeños de t? La tabla en el margen muestra los resultados de una calculadora; sin duda, ¡algo extraño parece estar sucediendo!

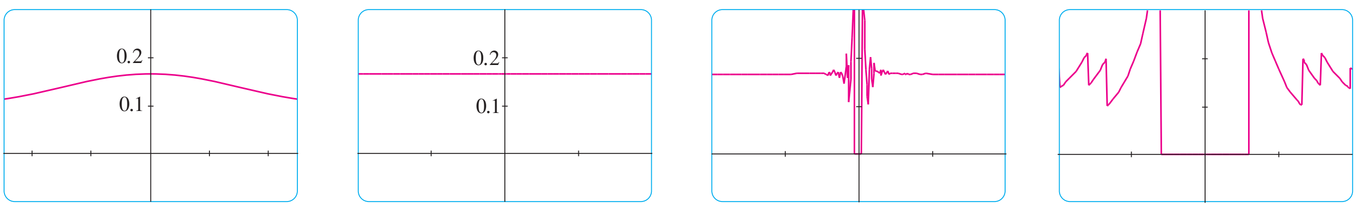
Si trata de obtener estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero al final obtendrá el valor 0 si hace t suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$ como se demuestra en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2+9}$ está muy cerca de 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, una calculadora da el valor de 3.000 para $\sqrt{t^2+9}$. . . para tantos dígitos como la calculadora sea capaz de aceptar.)

Algo similar sucede cuando tratamos de graficar la función

$$f(t)=\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

del ejemplo 2, en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante precisas de f, y cuando se utiliza el modo *trace* (si está disponible) puede estimarse fácilmente que el límite es cercano a $\frac{1}{6}$. Pero si nos acercamos demasiado, como en los incisos c) y d), entonces obtenemos gráficas incorrectas, de nuevo debido a problemas con la sustracción.

www.stewartcalculus.com
Para una mayor explicación de por qué las calculadoras, a veces, dan valores falsos, haga clic en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, véase la sección llamada *The Perils of Subtraction*.



a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Obtenga el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Usando una calculadora (y recordando que, si $x \in \mathbb{R}$, sen x significa el seno del ángulo x medido en radianes) podemos elaborar una tabla de valores con una precisión de hasta ocho decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica en la figura 6 suponemos que

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta como se demostrará en el capítulo 3 utilizando un argumento geométrico.

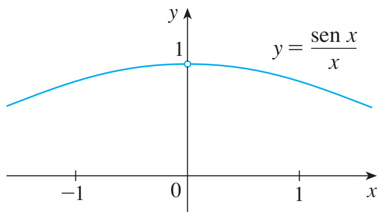


FIGURA 6

Informática de sistemas algebraicos

Los sistemas algebraicos computarizados (SAC) tienen comandos que calculan límites. A fin de evitar los tipos de trampas como las de los ejemplos 2, 4 y 5, no calculan límites a partir de la experimentación numérica. En su lugar, utilizan técnicas más sofisticadas, como el cálculo de series infinitas. Si usted tiene acceso a un SAC, utilice los comandos para límites a fin de estimar los límites de los ejemplos de esta sección y revisar sus respuestas en los ejercicios de este capítulo.

V EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$
$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$
$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Sobre la base de esta información podríamos estar tentados a suponer que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestra suposición es errónea. Tenga en cuenta que, aunque $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para muchos valores de x cercanos a 0. Esto puede verse en la gráfica de f que se muestra en la figura 7.

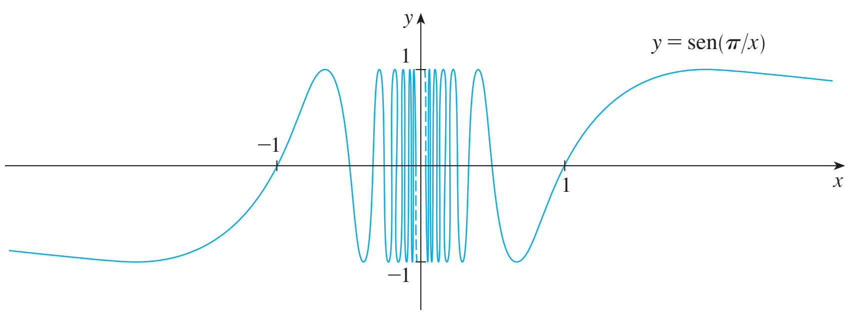


FIGURA 7

Las líneas punteadas, cerca del eje y indican que los valores del $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilan infinitamente entre 1 y -1 cuando x tiende a 0. (Véase el ejercicio 45.)

Ya que los valores de $f(x)$ no se acercan a un número fijo cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre el $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right)$.

SOLUCIÓN Como antes, elaboramos una tabla de valores. De la primera tabla en el margen parece que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0$$

Pero si perseveramos con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante veremos que $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$; entonces deduciremos que el límite es 0.0001.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos al intentar conjeturar el valor de un límite. Es fácil caer en el valor incorrecto si utilizamos valores inadecuados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la discusión después del ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores incorrectos. En la siguiente sección, sin embargo, vamos a desarrollar métodos infalibles para el cálculo de límites.

V EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

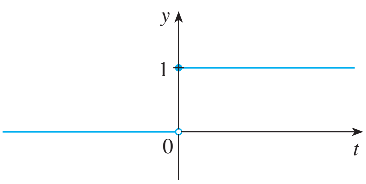


FIGURA 8
La función de Heaviside

[Esta función lleva el nombre del ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se utiliza para describir una corriente eléctrica en un circuito en el tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la figura 8.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Conforme t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay un único número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por tanto, $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe.

Límites laterales

Hemos notado en el ejemplo 6 que $H(t)$ tiende a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ tiende a 1 a medida t se aproxima a 0 por la derecha. Esta situación se indica simbólicamente escribiendo

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que se consideran sólo los valores de t que son menores que 0. De igual modo, "$t \to 0^+$" indica que se consideran sólo los valores de t que son mayores que 0.

2 Definición Cuando escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

estamos diciendo que el **límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda**] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como queramos, tomando x suficientemente cercanos a a, pero menores que a.

Observe que la definición 2 difiere de la definición 1 sólo en el hecho de que x sea necesariamente menor que a. Del mismo modo, si se requiere que x sea mayor que a, se obtiene "el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. Estas definiciones se ilustran en la figura 9.

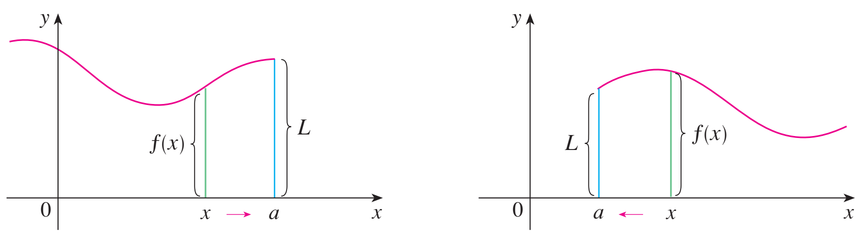


FIGURA 9

a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las de los límites laterales, vemos que se cumple con lo siguiente.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

V EJEMPLO 7 La gráfica de una función g se muestra en la figura 10. Utilícela para establecer los valores (si existen) de lo siguiente:

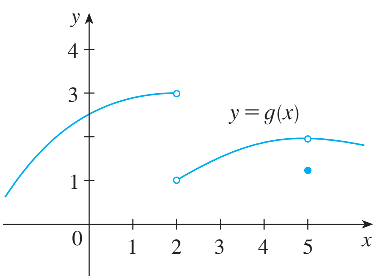


FIGURA 10

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN En la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ tienden a 3 conforme x tiende a 2 por la izquierda, pero se acercan a 1 a medida x tiende a 2 por la derecha. Por tanto,

$$\text{a) } \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{b) } \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

c) Dado que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, llegamos a la conclusión de $\boxed{3}$ que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{d) } \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{e) } \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

f) Esta vez los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos, así que, por $\boxed{3}$, tenemos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de esto, observe que $g(5) \neq 2$

Límites infinitos

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Conforme x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla en el margen.) De hecho, se desprende de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ en la figura 11, que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes, tomando x lo suficientemente cercano a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

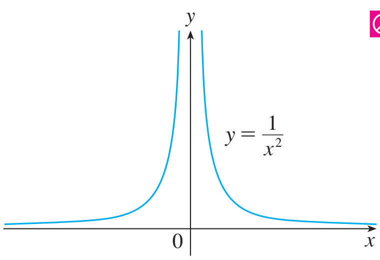


FIGURA 11

Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo 8, se usa la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que estemos considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe: $1/x^2$ puede hacerse tan grande como queramos, tomando a x suficientemente cerca de 0.

En general, podemos escribir simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a ser más y más grandes (o "crecen sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

4 Definición Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

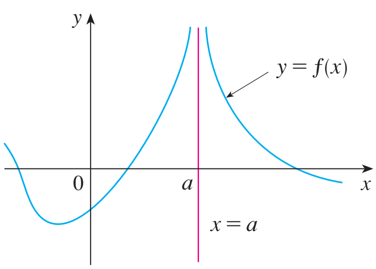


FIGURA 12

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Una vez más, el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es infinito"

o bien "$f(x)$ tiende al infinito cuando x se aproxima a a"

o bien "$f(x)$ crece sin cota cuando x se aproxima a a".

Esta definición se ilustra gráficamente en la figura 12.

Cuando decimos que un número es "negativo muy grande", lo que queremos decir que es negativo, pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

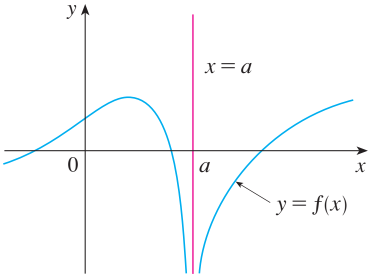


FIGURA 13

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes conforme x se aproxima a a, se precisa en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

5 Definición Sea f definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ puede leerse como "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es infinito negativo" o "$f(x)$ decrece sin límite conforme x tiende a a". Como ejemplo tenemos

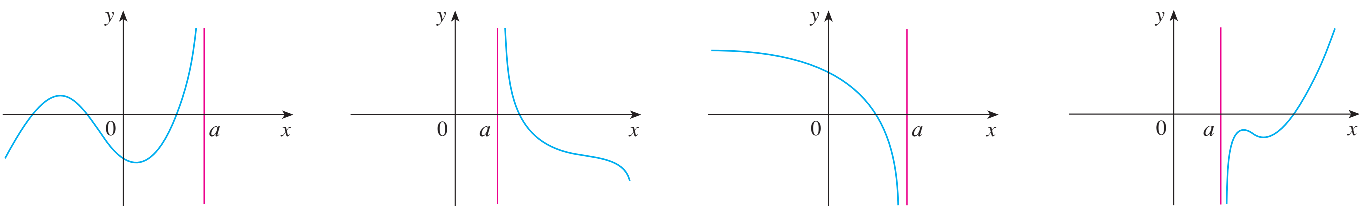
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

recordando que "$x \to a^-$" significa que se consideran sólo los valores de x que son menores que a, y del mismo modo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. En la figura 14, se ilustran cuatro de estos casos.



a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

6 Definición La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ debido a que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. En la figura 14 la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos que se muestran. En general, el conocimiento de asíntotas verticales es muy útil para dibujar gráficas.

EJEMPLO 9 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ y $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x tiende a 3 con valores mayores que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo muy pequeño y $2x$ está muy cerca de 6, así que el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* muy grande. Por tanto, intuitivamente, podemos ver que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Asimismo, si x es cercano a 3, pero con valores menores que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo (cercano a 6). Así, $2x/(x - 3)$ es un número *negativo* muy grande. Por tanto,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

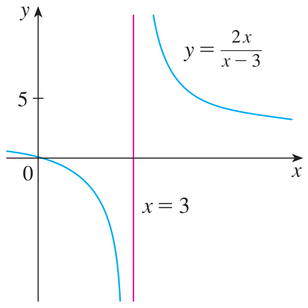


FIGURA 15

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

EJEMPLO 10 Encuentre las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Ya que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

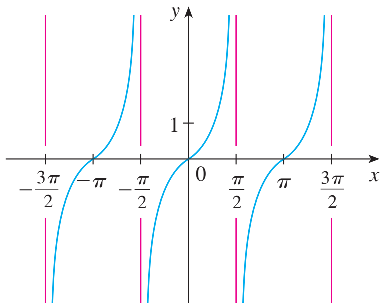


FIGURA 16
$y = \tan x$

hay posibles asíntotas verticales donde $\cos x = 0$. De hecho, puesto que $\cos x \to a^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ a medida que $x \to (\pi/2)^+$, mientras $\operatorname{sen} x$ es positivo cuando x está cerca de $\pi/2$, tenemos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto muestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar, muestra que las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un número entero, son todas asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica en la figura 16 confirma esto.

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. En la figura 17 vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

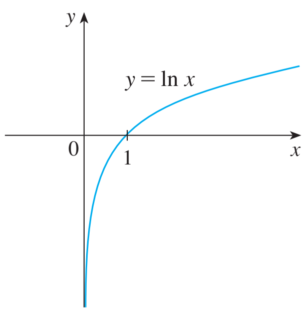


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

y así, la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es cierto para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véanse las figuras 11 y 12 en la sección 1.6.)

2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites

En la sección 2.2 utilizamos calculadoras y gráficas para intuir los valores de un límite, pero observamos que tales métodos no siempre nos llevan a la respuesta correcta. En esta sección utilizaremos las siguientes propiedades de los límites, llamadas *leyes de los límites*, para calcularlos.

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si} \ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes pueden expresarse verbalmente como sigue:

1. El límite de una suma es la suma de los límites. (Ley de la suma)

2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites. (Ley de la diferencia)

3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función. (Ley del múltiplo constante)

4. El límite de un producto es el producto de los límites. (Ley del producto)

5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero). (Ley del cociente)

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cerca de L y $g(x)$ está cerca de M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está muy cerca de $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 daremos una definición precisa de la idea de límite y la utilizaremos para demostrar esta ley. Las demostraciones del resto de las leyes están dadas en el apéndice F.

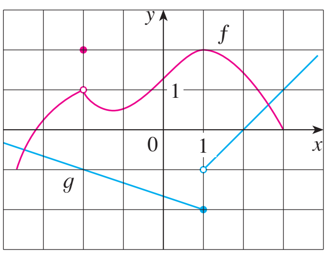


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Utilice las leyes de los límites y las gráficas de f y g en la figura 1 para evaluar los siguientes límites, si es que existen.

a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

a) De las gráficas de f y g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, tenemos

$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] \qquad \text{(por la ley 1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 1 + 5(-1) = -4$$

b) Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Así que no podemos utilizar la ley 4 para el límite deseado, pero *podemos* utilizarla para los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-2) = -4 \qquad \lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-1) = -2$$

Los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales, así que $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ no existe.

c) La gráfica muestra que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no podemos utilizar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador tiende a 0, mientras que el numerador se acerca a un número no cero.

Si utilizamos repetidamente la ley del producto con $g(x) = f(x)$, obtenemos la siguiente ley.

Ley de la potencia

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ donde n es un número entero positivo

Para la aplicación de estas seis leyes, necesitamos utilizar dos límites especiales:

7. $\lim_{x\to a} c = c$ **8.** $\lim_{x\to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (establézcalos en palabras o dibuje las gráficas de $y = c$ y $y = x$), pero en los ejercicios de la sección 2.4 se requieren las demostraciones basadas en la definición precisa.

Si hacemos $f(x) = x$ en la ley 6 y utilizamos la ley 8, obtenemos otra forma especial de límite.

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un número entero positivo

Un límite similar con el que se cumple para las raíces es el siguiente. (Para la raíz cuadrada, la demostración se resume en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un número entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

Más generalmente, tenemos la siguiente ley que hemos de demostrar en la sección 2.5 como una consecuencia de la ley 10.

Ley de la raíz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un número entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

Newton y los límites

Isaac Newton nació el día de Navidad en 1642, año de la muerte de Galileo. Cuando entró en la Universidad de Cambridge en 1661, Newton no sabía muchas matemáticas, pero aprendió rápidamente mediante la lectura de Euclides y Descartes, y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge fue cerrada a causa de la peste en 1665 y 1666, y Newton regresó a su casa a reflexionar sobre lo que había aprendido. Esos dos años fueron extraordinariamente productivos porque hizo cuatro de sus descubrimientos más importantes: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos con el prisma relacionados con la naturaleza de la luz y el color. Debido a un temor a la controversia y la crítica, se mostró reacio a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que Newton publicó sus *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expone su versión del Cálculo y su utilización en la investigación de la mecánica, la dinámica de fluidos, y el movimiento ondulatorio, así como en la explicación del movimiento de los planetas y los cometas.

Los inicios del Cálculo se encuentran en los procedimientos para obtener áreas y volúmenes ideados por los antiguos sabios griegos Eudoxo y Arquímedes. A pesar de que los aspectos de la idea de límite están implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Tampoco matemáticos como Cavalieri, Fermat ni Barrow, antecesores inmediatos de Newton en el desarrollo del Cálculo, utilizaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente de límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton dijo que el límite era el concepto básico en el Cálculo, pero fue el posterior trabajo de matemáticos como Cauchy y otros más el que finalmente clarificó las ideas relacionadas con los límites.

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso

a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

a)
$$\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 \quad \text{(por las leyes 2 y 1)}$$
$$= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \quad \text{(por la ley 3)}$$
$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \quad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$
$$= 39$$

b) Empezamos utilizando la ley 5, pero su uso está completamente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es cero.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} \quad \text{(por la ley 5)}$$
$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \quad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$
$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \quad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$
$$= -\frac{1}{11}$$

NOTA Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2a) sustituyendo 5 por x. Del mismo modo, la sustitución directa aporta la respuesta correcta en el inciso b). Las funciones en el ejemplo 2 son una función polinomial y una función racional, respectivamente, y el mismo uso de las leyes de los límites demuestra que la sustitución directa siempre sirve para este tipo de funciones (Véanse los ejercicios 55 y 56). Este hecho se expresa de la siguiente manera:

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con la propiedad de sustitución directa se llaman *continuas* en $x = a$ y las estudiaremos en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites pueden ser evaluados por sustitución directa, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos encontrar el límite por sustitución directa de $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Tampoco podemos aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. Ahora, necesitamos de un proceso algebraico preliminar. Factorizando el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x tiende a 1, tenemos que $x \neq 1$ y, por tanto, $x - 1 \neq 0$. Así, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo surgió en la sección 2.1 cuando intentamos hallar la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

NOTA En el ejemplo 3 pudimos calcular el límite sustituyendo la función dada, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, por la función más sencilla, $g(x) = x + 1$, que posee el mismo límite. Esto es válido porque $f(x) = g(x)$, excepto cuando $x = 1$, y al calcular el límite cuando x tiende 1, no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, se tiene el siguiente hecho.

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ siempre que el límite exista.

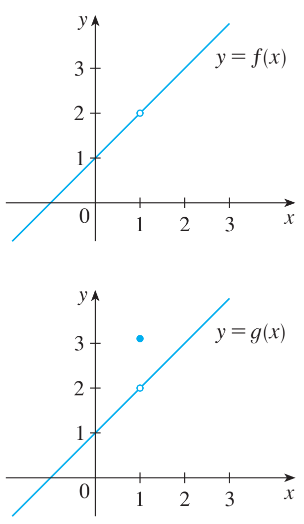


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aquí g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor del límite cuando x tiende a 1, no depende del valor de la función en 1. Ya que $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2$$

Note que los valores de las funciones en los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2) y tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h},$$

entonces, como en el ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ poniendo $h = 0$, ya que $F(0)$ es indefinida. Pero si simplificamos algebraicamente a $F(h)$, encontramos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que consideramos sólo $h \neq 0$ cuando hacemos que h tienda a 0.) Así

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma la conjetura que hicimos en el ejemplo 2 de la sección 2.2.

Algunos límites se calculan mejor encontrando primero los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Decimos que los límites por los dos lados existen si y sólo si ambos límites existen y son iguales.

1 Teorema $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, utilizamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para límites de este tipo.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El resultado del ejemplo 7 parece verosímil viendo la figura 3.

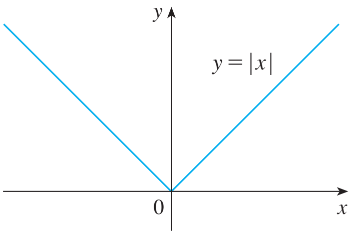


FIGURA 3

Dado que $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ así que

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el teorema 1

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

V EJEMPLO 8 Demuestre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

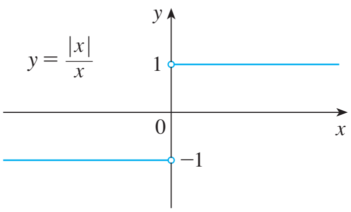


FIGURA 4

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se sigue, del teorema 1, que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 4 y exhibe la coincidencia con los límites laterales que encontró.

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

Se muestra en el ejemplo 3 de la sección 2.4 que el $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Ya que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Dado que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites por la izquierda y por la derecha son iguales. Así que el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

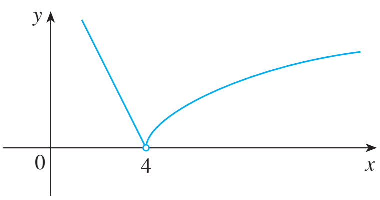


FIGURA 5

La gráfica de f se muestra en la figura 5.

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. En ocasiones, la función entero mayor se llama *función piso.*

EJEMPLO 10 La **función entero mayor** está definida por $[\![x]\!]$ = el mayor entero que es menor que o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función entero mayor se ilustra en la figura 6. Dado que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

Así que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2$$

Ya que estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ no existe por el teorema 1.

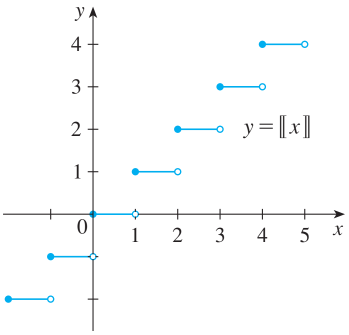


FIGURA 6
Función entero mayor

Los dos teoremas siguientes dan dos propiedades adicionales para los límites. Sus demostraciones se encuentran en el apéndice F.

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en $x = a$) y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

3 El teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

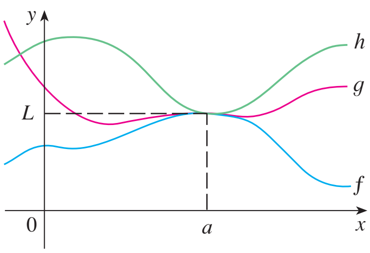


FIGURA 7

El teorema de la compresión, llamado a veces teorema del sándwich o del apretón, se ilustra en la figura 7. Se dice que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

V EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero note que **no podemos** utilizar

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

ya que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4 en la sección 2.2).

En su lugar aplicamos el teorema de la compresión, así que tenemos que encontrar una función f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor que g tal que $f(x)$ y $h(x)$ tiendan a 0.

Para hacer esto, utilizamos lo que sabemos de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos afirmar que

$$\boxed{4} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando la multiplicamos por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así que multiplicando cada lado de la desigualdad en $\boxed{4}$ por x^2, obtenemos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

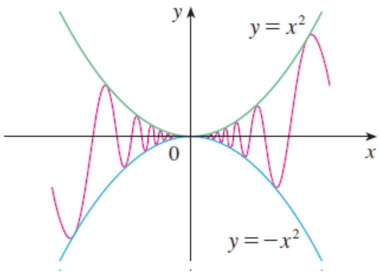


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

como se ilustra en la figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3, hemos visto que el límite de una función cuando x tiende a a, con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad son llamadas *continuas en* $x = a$. Veremos que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de *continuidad* que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ en la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica. Así que no existe ninguna brecha en la curva.

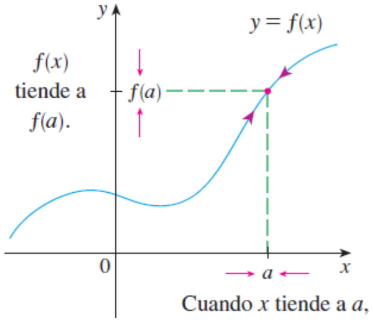


FIGURA 1

1 Definición Una función f es **continua en un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Note que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas. Si f es continua en a, entonces:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición indica que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce sólo un pequeño cambio en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ puede mantenerse tan pequeño como se quiera manteniendo el cambio en x suficientemente pequeño.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida sobre un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizás en a), decimos que f es **discontinua en *a*** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos son generalmente continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían continuamente con el tiempo, como lo hace la estatura de una persona. Pero hay otras situaciones, como la corriente eléctrica, donde ocurren discontinuidades. [Véase el ejemplo 6 en el punto 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en cada número de un intervalo puede pensarse como una función cuya gráfica no tiene interrupciones. La gráfica puede dibujarse sin levantar la pluma del papel.

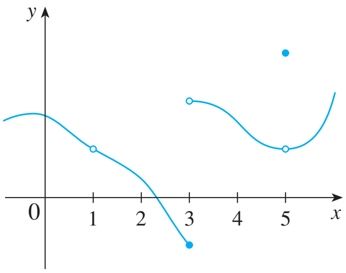


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La figura 2 muestra la gráfica de una función f. ¿Para qué valores de $x = $ a, f es discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Pareciera que hay una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón formal de que f es discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes), así que f es discontinua en $x = 3$.

¿Qué hay en relación con $a = 5$? Aquí, $f(5)$ está definida y el $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$$

Así que f es discontinua en 5.

Ahora veremos cómo detectar discontinuidades cuando una función está definida por una fórmula.

V EJEMPLO 2 ¿Dónde es discontinua cada una de las siguientes funciones?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

a) Note que $f(2)$ no está definida, así que f es discontinua en $x = 2$. Más tarde veremos por qué f es continua en todos los otros números.

b) Aquí $f(0) = 1$ está definida, pero

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 de la sección 2.2.) Así que f es discontinua en $x = 0$.

c) Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 1) = 3$$

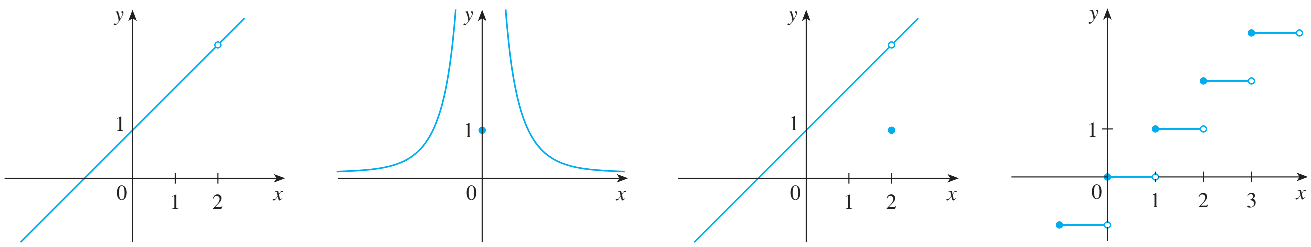
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

así que f no es continua en $x = 2$.

d) La función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véanse el ejemplo 10 y el ejercicio 51 en la sección 2.3).

La figura 3 muestra las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso la gráfica no puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel porque hay un agujero o ruptura o salto en la gráfica. El tipo de discontinuidad ilustrada en los incisos a) y c) se llama **removible** porque podemos remover la discontinuidad redefiniendo f sólo en $x = 2$. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad en el inciso b) se llama **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades en el inciso d) se llaman **discontinuidades de salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3
Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua por la derecha de un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua por la izquierda de $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [Véase la figura 3d)] es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

3 Definición Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por *continua* en el punto extremo, como *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces utilizando las leyes de los límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

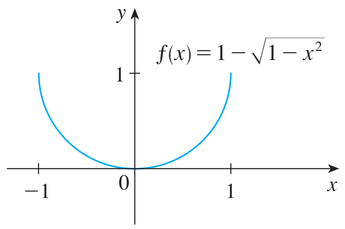


FIGURA 4

Así, por la definición 1, f es continua en $x = a$ si $-1 < a < 1$. Cálculos similares muestran que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de manera que f es continua por la derecha en $x = -1$ y continua por la izquierda en $x = 1$. Por eso, de acuerdo con la definición 3, f es continua en $[-1, 1]$.

La gráfica de f está trazada en la figura 4 y es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para verificar la continuidad de una función como lo hicimos en el ejemplo 4, a menudo es conveniente utilizar el siguiente teorema, que muestra cómo construir funciones continuas complicadas a partir de otras simples.

4 Teorema Si f y g son continuas en $x = a$ y $x = c$ es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada uno de los cinco incisos de este teorema se sigue de las correspondientes leyes de los límites de la sección 2.3 Por ejemplo, damos la demostración del inciso 1. Ya que f y g son continuas en $x = a$, tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\
&= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) && \text{(por la ley 1)} \\
&= f(a) + g(a) \\
&= (f + g)(a)
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f + g$ es continua en $x = a$.

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, entonces también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y f/g (si g no es cero). El siguiente teorema se estableció en la sección 2.3 como la propiedad de sustitución directa.

5 Teorema

a) Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN

a) Una función polinomial es de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(por la ley 9)}$$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Así, por el inciso 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Como P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, se sigue del inciso 1 del teorema 4 que P es continua.

b) Una función racional es una de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabemos del inciso a) que P y Q son continuas en todo su dominio. Así, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todo número en D.

Como una ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ muestra que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 pies/s, entonces la altura de la pelota en pies, t segundos después, está dada por la fórmula $h = 50t - 16t^2$. Otra vez, ésta es una función polinomial, así que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber qué funciones son continuas nos permite evaluar muy rápidamente algunos límites como se ve en el siguiente ejemplo. Compárelo con el ejemplo 2b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 Encuentre el $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, así que por el teorema 5 es continua en su dominio, que es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$.

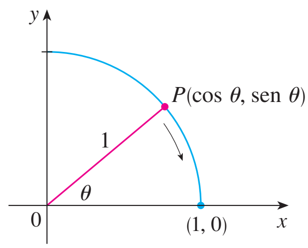


FIGURA 5

Por tanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$
$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número de su dominio. Por ejemplo, la ley 10 de los límites (página 100) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Del aspecto de las gráficas de las funciones seno y el coseno (figura 18 de la sección 1.2), podríamos suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ, las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, vemos que P tiende al punto (1, 0), así que $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. Así,

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Otra manera de establecer los límites en $\boxed{6}$ es utilizar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que se demostró en la sección 3.3

Dado que cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones en $\boxed{6}$ afirman que las funciones coseno y seno son continuas en 0. Las fórmulas de adición para senos y cosenos pueden ser utilizadas entonces para deducir que estas funciones son continuas para toda x (ejercicios 60 y 61).

Del inciso 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

es continua, excepto donde cos $x = 0$. Esto sucede cuando x es un número entero impar múltiplo de $\pi/2$, así que $y = \tan x$ tiene infinitas discontinuidades cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (figura 6).

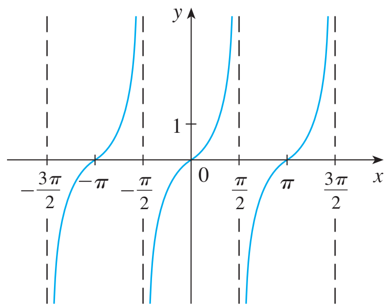


FIGURA 6
$y = \tan x$

La función inversa de cualquier función continua uno a uno también es continua. (Este hecho se comprueba en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. También, si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 definimos la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los huecos en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

En la sección 1.6 se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

$\boxed{7}$ **Teorema** Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

funciones polinomiales	funciones racionales	funciones raíz
funciones trigonométricas	funciones trigonométricas inversas	
funciones exponenciales	funciones logarítmicas	

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7 sabemos que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $y = \tan^{-1} x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por el inciso 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es una función polinomial, de modo que es continua para toda x. Por tanto, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. Por ende, f es continua sobre los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 nos dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Note que esta función jamás es cero porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ para toda x. Así, el cociente

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continuo para toda x. Por tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

Este teorema expresa que puede moverse un símbolo de límite a través de un símbolo de función si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, puede invertirse el orden de estos dos símbolos.

8 Teorema Si f es continua en b, y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)$$

Intuitivamente, el teorema 8 es razonable porque si x está cerca de a, entonces $g(x)$ está cerca de b, y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, entonces $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. En el apéndice F se proporciona una demostración del teorema 8.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplicamos el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo. Entonces

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y $$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Si sustituimos estas expresiones en el teorema 8 obtenemos

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Suponiendo que las raíces existen.)

9 Teorema Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en $x = a$, tenemos

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Puesto que f es continua en $b = g(a)$, podemos aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$; es decir, $f \circ g$ es continua en $x = a$.

V EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las siguientes funciones?

a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

a) Tenemos $h(x) = f(g(x))$, donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$ puesto que es una función polinomial, y f también es continua para toda x. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

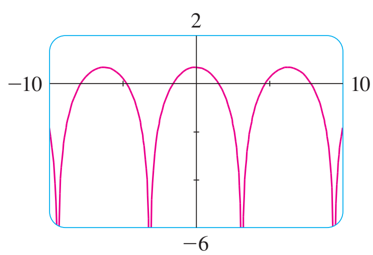


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

b) Con base en el teorema 7, sabemos que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continua siempre que esté definida. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definida cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Así, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores (véase la figura 7).

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

10 Teorema del valor intermedio Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio establece que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N puede tomarse una vez [como en la parte a)] o más de una vez [como en la parte b)].

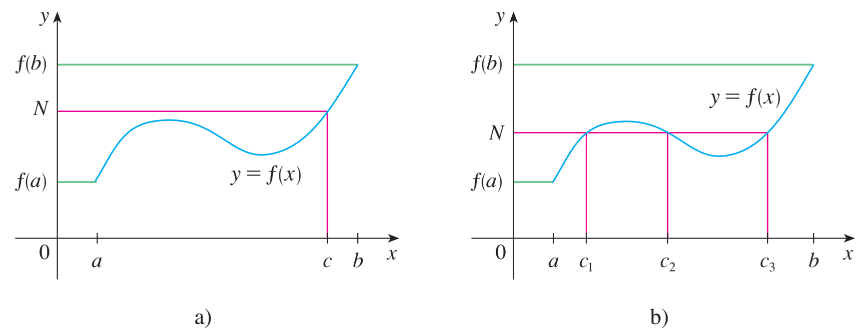


FIGURA 8

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene huecos o rupturas, es fácil creer que el teorema del valor intermedio es verdadero. En términos geométricos, señala que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar la recta: debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

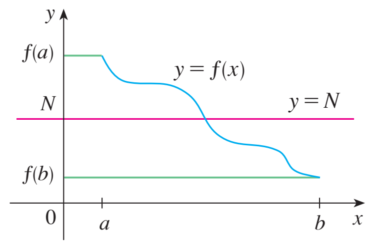


FIGURA 9

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 48).

Un uso del teorema del valor intermedio es en la búsqueda de las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Buscamos una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por tanto, tomando $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$ en el teorema 10, tenemos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Así, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es polinomial, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar con mayor precisión una raíz aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por ensayo y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

así que la raíz está en el intervalo (1.22, 1.23)

Podemos utilizar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. La figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, y puede usted ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La figura 11 muestra el resultado de un acercamiento en un rectángulo de vista $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

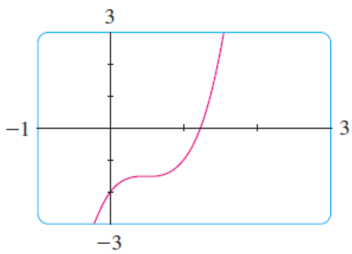


FIGURA 10

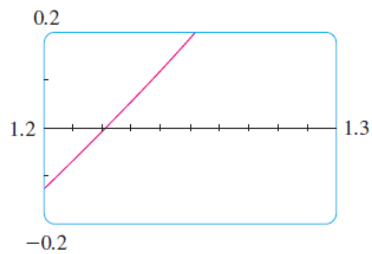


FIGURA 11

De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un importante papel en el modo en que funcionan estos dispositivos de graficación. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y activa los píxeles que contienen estos puntos calculados. Se supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. La computadora une los píxeles activando aquellos intermedios.

2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí aproximamos x a un número y vimos que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección haremos x arbitrariamente grande en magnitud y observaremos qué ocurre con y.

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a medida que x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función con una aproximación de seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f por medio de la computadora.

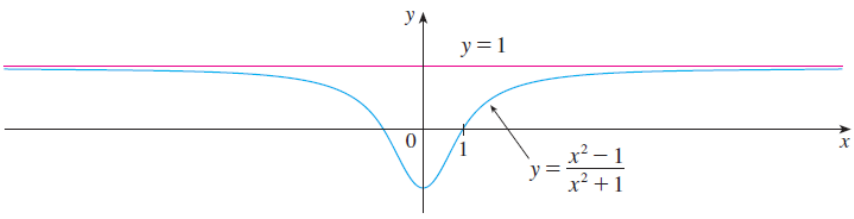


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, puede verse que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, utilizamos la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

1 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{conforme} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ a menudo se lee como

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se va al infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L".

El significado de estas frases está dado por la definición 1. Al final de esta sección, se encuentra una definición más precisa, utilizando la definición ε-δ de la sección 2.4.

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Advierta que hay muchas maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que usted ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

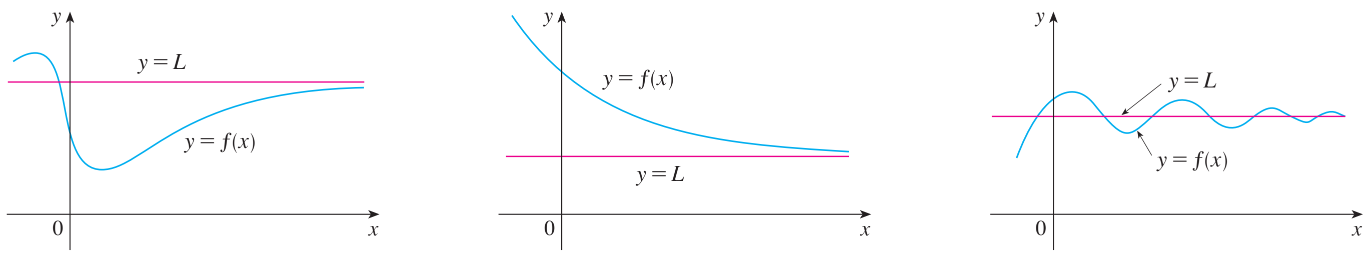


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Si regresa a la figura 1, verá que para valores negativos de x grandes en magnitud, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al decrecer x a través de valores negativos sin cota, puede acercar cuando quiera $f(x)$ a 1. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue.

> **2 Definición** Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces
>
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

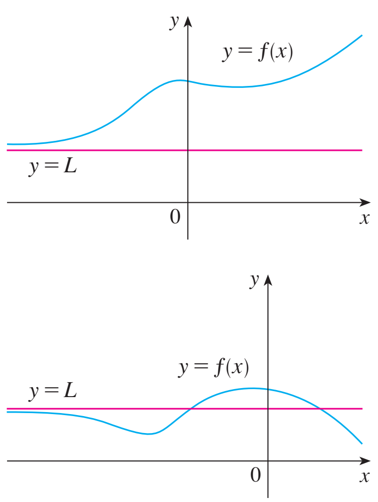


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Es necesario subrayar que el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito negativo o a menos infinito, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ a medida que vemos hacia el extremo izquierdo de cada gráfica.

> **3 Definición** La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

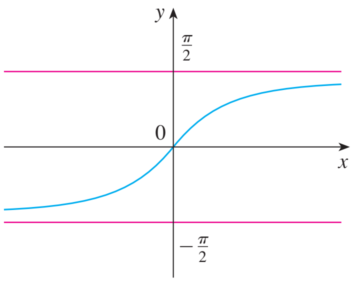


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

4

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}}$$

de modo que las rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se sigue del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan x$.)

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

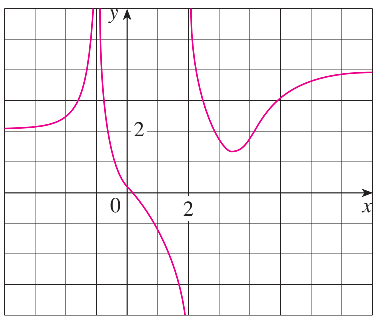


FIGURA 5

SOLUCIÓN Vemos que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ por ambos lados, así que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace negativo grande en magnitud cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 por la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Del comportamiento de estos límites, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x es muy grande, parece que $f(x)$ tiende a 4. Pero, a medida que x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales.

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ y $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por tanto, según la definición 1, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es negativo grande en magnitud, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase figura 6).

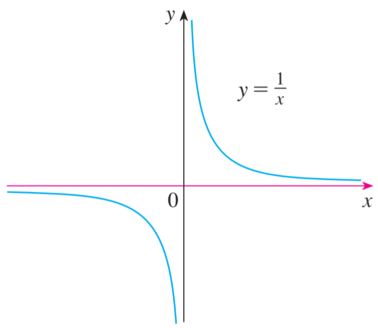


FIGURA 6

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Puede demostrarse que las *leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combinamos las leyes 6 y 11 con los resultados del ejemplo 2, obtenemos la siguiente importante regla para el cálculo de límites.

5 Teorema Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

V EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique cuáles propiedades de los límites se utilizaron en cada paso.

SOLUCIÓN Cuando x es muy grande, tanto numerador como denominador son muy grandes, así que no es obvio qué pasa con su cociente. Necesitamos hacer algo de álgebra preliminar.

Para evaluar el límite en el infinito de cualquier función racional, primero dividimos el numerador y el denominador por la potencia mayor de x que hay en el denominador. (Suponemos que $x \neq 0$, ya que estamos interesados sólo en valores muy grandes de x). En este caso, la potencia mayor del denominador es x^2, así que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley de los límites 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(por la ley 7 y el teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

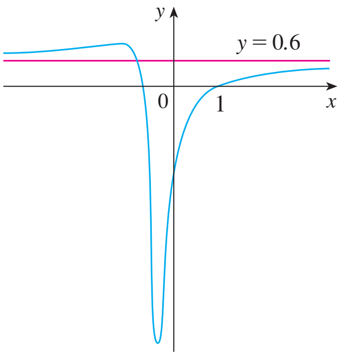


FIGURA 7

$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

EJEMPLO 4 Encuentre la asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir entre x tanto el numerador como el denominador y aplicar las propiedades de los límites, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad \text{(ya que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(3 - \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - 5 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2+0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

En el cálculo del límite conforme $x \to -\infty$, debemos recordar que para $x < 0$, tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Así que cuando dividimos el numerador entre x, para $x < 0$ obtenemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2 + \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}}{3 - 5 \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Así que la recta $y = -\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x - 5$, es 0; esto es, cuando $x = \frac{5}{3}$. Si x esta cerca de $\frac{5}{3}$ y $x > \frac{5}{3}$, entonces el denominador está cerca de 0 y $3x - 5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2 + 1}$ es siempre positivo, así que $f(x)$ es positivo. Por tanto,

$$\lim_{x\to(5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$, pero $x < \frac{5}{3}$, entonces $3x - 5 < 0$, así que $f(x)$ es negativo grande. Así,

$$\lim_{x\to(5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se muestran en la figura 8.

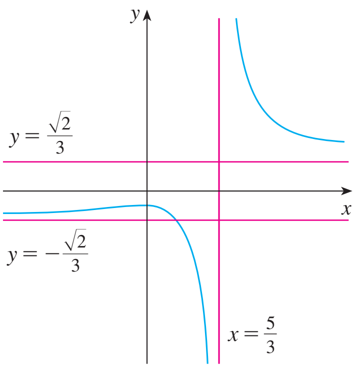


FIGURA 8

$y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x - 5}$

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2 + 1}$ como x son muy grandes cuando x es grande, es difícil ver qué pasa con su diferencia, así que utilizamos el álgebra para reescribir la función. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado:

Puede considerar que la función dada tiene un denominador igual a 1.

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

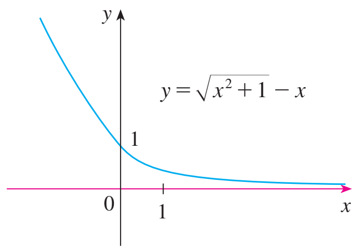


FIGURA 9

Observe que el denominador de esta última expresión $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ resulta muy grande cuando $x \to \infty$ (más grande que x). Así que

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

La figura 9 ilustra este resultado.

EJEMPLO 6 Evalúe el $\lim_{x \to 2^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x - 2}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/(x - 2)$, sabemos que $t \to \infty$ cuando $x \to 2^+$. Por tanto, por la segunda ecuación en $\boxed{4}$, tenemos

$$\lim_{x \to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x - 2}\right) = \lim_{t \to \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

La gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ tiene a la recta $y = 0$ (el eje x) como una asíntota horizontal. (Lo mismo es verdadero para cualquier función exponencial con base $a > 1$). De hecho, de la gráfica en la figura 10 y la correspondiente tabla de valores, vemos que

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Note que los valores de e^x se aproximan a 0 muy rápidamente.

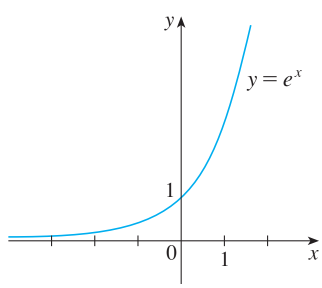


FIGURA 10

x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

RP La estrategia para resolver los problemas 6 y 7 es *introducir algo extra* (véase la página 75). Aquí, el algo extra, el elemento auxiliar, es la nueva variable t.

V EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por tanto, por $\boxed{6}$,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

(Véase el ejercicio 75.)

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Conforme x crece, los valores de sen x oscilan infinitamente entre 1 y -1, así que no se aproximan a ningún número definido, por lo que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se utiliza para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande. Un significado similar está asociado con los siguientes símbolos:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x\to\infty} x^3$ y $\lim_{x\to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se hace más grande, x^3 también se hace grande. Por ejemplo,

$$10^3 = 1\,000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$$

De hecho, podemos hacer x^3 tan grande como queramos tomando x suficientemente grande. Por esta razón, podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Del mismo modo, cuando x es muy grande negativo, también lo es x^3. Así que

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$$

Estos límites establecidos también pueden verse en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11.

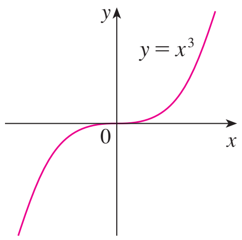


FIGURA 11
$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$

En la figura 10 vemos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

pero, como se observa en la figura 12, $y = e^x$ se hace más grande cuando $x \to \infty$, con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

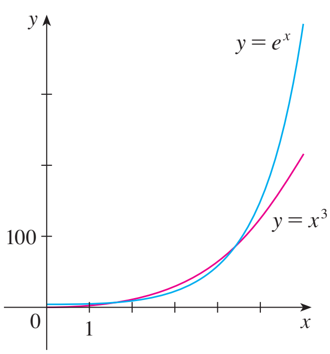


FIGURA 12
e^x es mucho más grande que x^3 cuando x es muy grande.

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Sería un **error** escribir

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no pueden aplicarse a límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ no puede definirse). Sin embargo, *podemos* escribir

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$$

debido a que tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, también su producto.

EJEMPLO 11 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

ya que $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ conforme $x \to \infty$.

El siguiente ejemplo muestra que utilizando límites infinitos al infinito, además de las intersecciones, podemos tener una idea general de la gráfica de una función polinomial sin tener que disponer de un gran número de puntos.

V EJEMPLO 12 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ encontrando las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y las intersecciones con el eje x, $x = 2, -1, 1$ se encuentran haciendo $y = 0$. Note que puesto que $(x - 2)^4$ es positivo, la función no cambia de signo en 2; así que la gráfica no cruza el eje x en 2. La gráfica interseca el eje x en -1 y 1.

Cuando x es un número positivo muy grande, todos los factores son muy grandes, así que

$$\lim_{x\to\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x es un número negativo muy grande, el primero de los factores es un número positivo muy grande y los factores segundo y tercero son negativos muy grandes, así que

$$\lim_{x\to-\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Combinando esta información, obtenemos el esbozo de la gráfica de la figura 13.

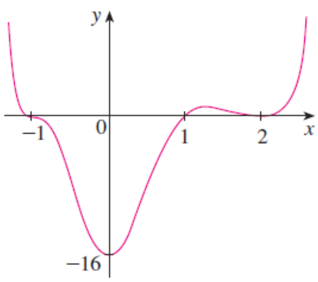


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$