UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA | **ANÁLISIS MATEMÁTICO I**

FACULTAD DE INGENIERÍA | **1ER SEMESTRE 2025**

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5
DERIVADAS

Definición de la derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada. Tangente a una curva en un punto. Función derivada. Reglas de derivación. Continuidad y derivabilidad de funciones. La derivada como razón de cambio. Derivadas de orden superior. El significado físico de la primera y segunda derivada. Derivada de la composición de funciones: Regla de la cadena.

Duración: 2 clases.

Ejercicio 1:

a) Encuentre la pendiente de la tangente de las siguientes curvas en los puntos correspondientes.

i) $y = 4x - x^2$ en el punto $(1,3)$ ii) $y = x - x^3$ en el punto $(1,0)$

b) Halle la ecuación de la recta tangente del inciso a).

c) Dibuje la curva y la recta tangente en cada caso.

Ejercicio 2:

a) Encuentre la derivada por definición de las siguientes funciones en un número $x = a$.

i) $f(x) = c$ ii) $f(t) = \dfrac{2t+1}{t+3}$ iii) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

b) Encuentre la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada.

i) $f(t) = 5t - 9t^2$ ii) $f(t) = \dfrac{1-2t}{3+t}$ iii) $f(x) = \sqrt{9-x}$

c) ¿Cuál es la diferencia entre lo que pide el inciso a) y el inciso b)?

Ejercicio 3: Derive las siguientes funciones utilizando reglas de derivación.

a) $f(t) = 5t - 9t^2$ b) $f(t) = 3t^2 + 6t^5$ c) $y = x^{10} + \dfrac{5}{x^3} - 3$

d) $y = 5e^x - x^3$ e) $V(r) = \pi r^4 + r^2 - e$ f) $y = \sqrt{t} + 4t$

Ejercicio 4: Halle las funciones derivadas de las siguientes funciones.

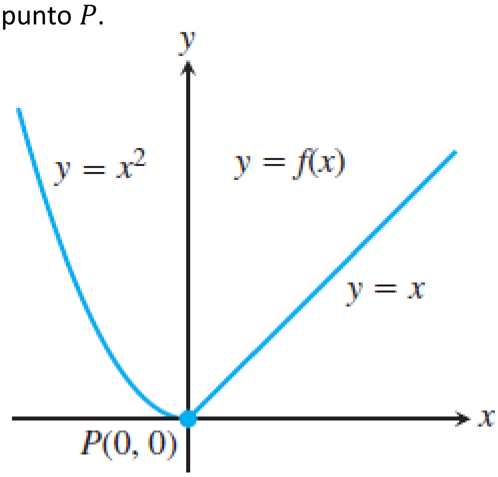
a) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ c) $h(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$

d) $f(t) = \dfrac{\ln t}{e^t}$ e) $g(t) = t^4 \log_3 t$ f) $h(t) = t^{-1/2} \ln t$

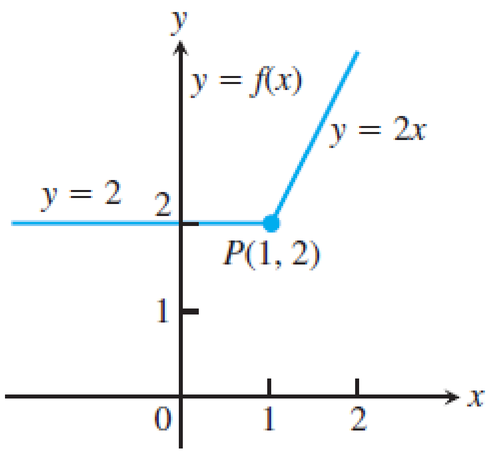
g) $f(u) = 3\sqrt[3]{u^2} \tan u$ h) $g(u) = e^u + u^2 2^u$ i) $h(z) = \dfrac{z \ln z}{z^2 - \ln z}$

Ejercicio 5: Calcule y compare las derivadas laterales para demostrar que las siguientes funciones no son derivables en el punto P.

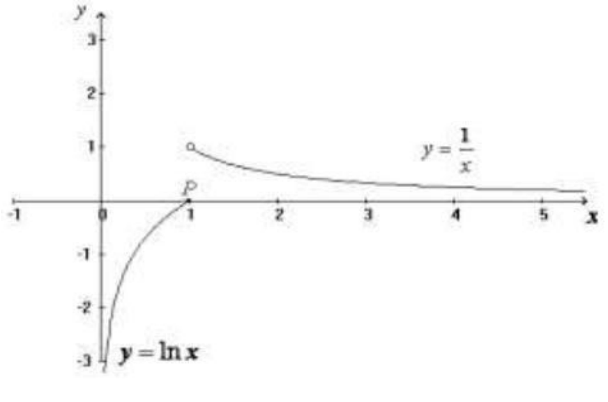
a)



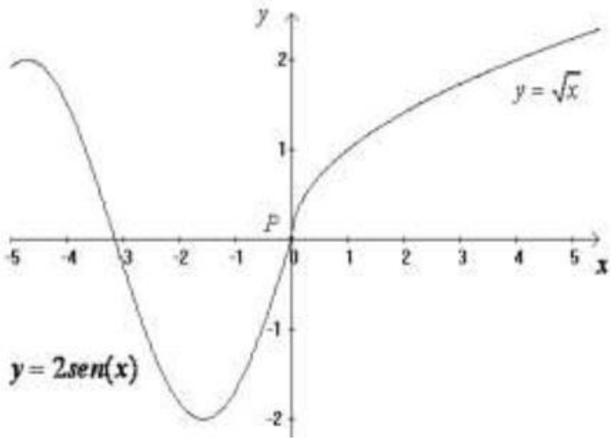
b)



c)



d)



Teniendo en cuenta el teorema que relaciona continuidad y derivabilidad de una función en un punto. ¿En qué incisos anteriores puede aplicar dicho teorema para evitar el cálculo de la derivada por definición?

<u>Ejercicio 6:</u> Resuelve lo pedido en cada caso.

a) El volumen de un cubo de lado a es $V = a^3$. Halle el ritmo de cambio del volumen con respecto a a.

b) El volumen de un cilindro de altura $8\ cm$ y radio r es V. Halle la razón de cambio del volumen con respecto a r.

c) El costo anual de inventario de una fábrica es $C = \frac{1088000}{Q} + 6{,}3Q$ donde Q es el tamaño del pedido cuando se reponen existencias. Halle el cambio del costo anual cuando Q crece de 350 a 351 y compárelo con el ritmo instantáneo de cambio para $Q = 350$.

d) La población P, de China, en miles de millones, puede calcularse mediante la función $P(t) = 1{,}15 \cdot (1{,}014)^t$, donde t es el número de años desde comienzo de 1993. Según este modelo, ¿con qué rapidez crece la población a principio de 1993 y a principios de 1995?

e) La velocidad v de un fluido que sale por un orificio situado en el fondo de un depósito viene dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad ($32\ pies/s^2$) y h la profundidad de fluido en el depósito. Calcule el ritmo de cambio v de respecto de h cuando $h = 9$ y $h = 4$.
(Nótese que $g = 32\ pies/s^2$. El signo de depende del problema concreto. En este caso, poner un valor negativo para daría como resultado un valor imaginario para v).

<u>Ejercicio 7:</u> Resuelve lo pedido en cada caso.

a) Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de $40\ pies/s$, su altura (en pies) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

b) Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de $10\ m/s$, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$
   i) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
   ii) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
   iii) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
   iv) ¿Con qué velocidad la roca chocará contra la superficie?

c) Un astronauta lanza en la luna una piedra al aire, la altura de la piedra viene dada por $s = -\frac{27}{10}t^2 + 27t + 6$ donde s se mide en pies y t en segundos.
   i) Halle expresiones para la velocidad y la aceleración de la piedra.
   ii) Halle el instante en que alcanza su máxima altura igualando su velocidad a 0. ¿A qué altura se encuentra en ese momento?
   iii) Compare la aceleración de esa piedra con la aceleración debida a la gravedad en la Tierra.

Ejercicio 8: Halle la función derivada de las siguientes funciones compuestas.

a) $g(x) = (x^2 - 7x)^4$ b) $y = 2\cos(2x)^3$ c) $f(t) = \sqrt{t^2 - 2t - 5}$

d) $y = \cos^3(2x)$ e) $y = e^{1/x}$ f) $y = 4\sin(5x)\,\text{cotan}(2x)$

g) $y = x + 2^{-2x}$ h) $y = e^{-2x}\cos(4x)$ i) $y = \cos(\text{sen}(\cos x))$

j) $h(t) = \dfrac{\tan(2t) - 1}{\sec(2t)}$ k) $H(x) = \ln\left(\dfrac{a - x}{a + x}\right)$ l) $f(s) = \sqrt[4]{\dfrac{s^2 + 1}{s^3 - 1}}$

Ejercicio 9: Encuentre las ecuaciones de la recta tangente y normal a las curvas dadas, en el punto indicado.

a) $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$ $(1,1)$ b) $y = \sqrt{x^3 + 1}$ $(2,3)$ c) $y = 1 + e^{-x^2}$ $(0,2)$

Ejercicio 10: Resuelve lo pedido en cada caso. (Problemas donde involucren funciones compuestas)

a) Inflamos un globo de modo que el radio del globo aumente con el tiempo según la relación $r = 2t$, r en cm y t en segundos. Se pide:
   i) La tasa instantánea del volumen del globo respecto al radio.
   ii) La tasa instantánea del volumen respecto al tiempo.
   iii) La tasa instantánea del radio respecto al tiempo.

b) La resistencia de cierto tipo de material es $R = \sqrt{0{,}001T^4 - 4T + 100}$, donde T se mide en grados Celsius y R en ohmios, halle la razón de cambio de la resistencia con respecto a la temperatura.

c) La altura de un objeto atado a un muelle viene dada por la ecuación armónica

$$y = \frac{1}{3}\cos(12t) - \frac{1}{4}\text{sen}(12t)$$

Donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Calcule su altura y la velocidad cuando $t = \frac{\pi}{8}$ segundos

Ejercicio 11: Obtiene las derivadas hasta de tercer orden en los incisos a), b) y c), y las derivadas de segundo orden en el resto.

a) $y = x^3 + 3x^2 - 2x$ b) $y = (2x - 5)^4$ c) $y = \text{sen}(x^2)$

d) $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$ e) $y = x\,\text{sen}\,x$ f) $y = \cos(e^{2x})$