TRABAJO PRACTICO N°3

Espacios y Subespacios vectoriales. Vectores linealmente dependientes e independientes. Subespacio Generado. Base y dimensión de un subespacio vectorial.

EJERCICIO 1. Demuestre que se verifican los axiomas que se indican

a. P_3 el conjunto de los polinomios de grado menor a 3 es un espacio vectorial, verifique que se cumplen los siguientes axiomas:
   - Axioma de la existencia del neutro aditivo
   - Axioma de la existencia del opuesto aditivo
   - Axioma $\forall \vec{u} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in R \quad \alpha.(\beta.\vec{u}) = (\alpha.\beta).\vec{u}$
b. En el espacio vectorial de las matrices de orden dos y simétricas, verifique que se cumplen los axiomas:
   - Axioma de la distributividad
   - Axioma de la ley de cierre de la suma
   - Axioma $\forall \vec{u} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in R \quad (\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

EJERCICIO 2. Los siguientes conjuntos NO son espacios vectoriales. Justifica esta situación, indicando cual es el axioma que falla.

a. $A = \{(x, y)\ tales\ que\ y = x + 1\}$
b. $V = \{1\}$
c. El conjunto de los polinomios de grado dos
d. $\{(x, y, z)\ tal\ que\ x + y + z = 1\}$
e. $\{A \in R^{2x2}\ tal\ que\ A\ es\ invertible\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$
f. $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\ donde\ x + y = 1\right\}$

EJERCICIO 3. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

a. $\{(x, y, z)\ tal\ que\ 2x + y - z = 0\}$
b. $\{(x, y)\ tal\ que\ \ y = x^2\}$
c. El conjunto de las matrices antisimétricas de orden 2
d. $\{(x, y)\ tal\ que\ \ y \geq 0\}$
e. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}\ \ con\ x, y \in R\right\}$
f. $\{p(x) \in P_2,\ cuya\ suma\ de\ coeficientes\ es\ cero\}$
g. $\{f: D \subseteq R \to R,\ f\ par\}$
h. $\{f: D \subseteq R \to R,\ f\ impar\}$
i. $\{X \in R^n\ tal\ que\ A.X = 0,\ donde\ A \in R^{nxn}\}$
j. $\{p(x) \in P_3\ tal\ que\ el\ producto\ de\ sus\ coeficientes\ es\ cero\}$

EJERCICIO 4. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o independientes.

a. $\{(1,3,5), (2,1,-1), (4,7,9)\}$ en R^3

b. $\{x^2 - 2x + 1, 3x^3 - 5x, 3x^3 - x^2 + x + 1, 4x + 2\}$ en P_3

c. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ en R^{2x2}

d. $\{x^2 + 1, 2x + 1, x^2 + x - 1\}$ en P_2

e. $\{3x^2 - x + 1,\ x^2 + 5x\ ,\ 5x^2 - 7x + 2\}\ en\ P_2$

EJERCICIO 5. Determine el subespacio generado por los siguientes vectores

a. $\{(1,5),\ (2,1)\}$
b. $\{(1,5),\ (2,10)\}$
c. $\{(1,1,0),\ (0,-1,1)\}$
d. $\{(1,2,-1),\ (3,6,-3)\}$
e. $\{(1,0,2),\ (1,5,1), (1,1,1)\}$
f. $\{(1,1,0),\ (0,-1,1), (1,0,1)\}$
g. $\{x - 1,\ x^2 + 2,\ 2x^2 - x\}$ vectores de P_2
h. $\{x^2 + x,\ x^2 + 1\}$ vectores de P_2
i. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

EJERCICIO 6. Dados los siguientes subespacios vectoriales, determine base y dimensión.

a. $\{(x, y, z) \in R^3\ \ con\ \ 2x - y - z = 0\}$
b. $\{matrices\ simetricas\ de\ orden\ 3\}$
c. $\{matrices\ triangulares\ inferiores\ de\ orden\ tres\}$
d. $\{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ \in P_3\ \ donde\ b = c - a\ \ y\ d = 0\ \}$
e. $\{(x, y) \in R^2\ \ con\ \ y = -5x\}$
f. R^3
g. P_4

EJERCICIO 7. Determina si los siguientes conjuntos forman base del subespacio correspondiente.

a. $\{(1, -2), (5,3)\}\ de\ R^2$
b. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de las matrices simétricas de orden dos
c. $\{(1, -1,1),\ (1,2,0)\}$ del plano $-2x + y + 3z = 0$
d. $\{x + 1, -x^2 + 2,\ x - x^2\}$ de todo P_2

Ejercicio 5. Determine la base y dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

a. Del plano $\{(x, y, z) \in R^3 con\ 2x - y - z = 0\}$

b. $\{A \in R^{3x3}\ con\ A\ triangular\ superior\}$

c. $\left\{\begin{pmatrix} x & 2x & x-y \\ y & 0 & z \end{pmatrix} \in R^{2x3}\ con\ x, y, z \in R\right\}$

d. $\{A \in R^{3x3}\ con\ A\ antisimétrica\}$

e. $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3\ \ donde\ c = a - b\ \ \text{A}\ \ d = a + b\}$