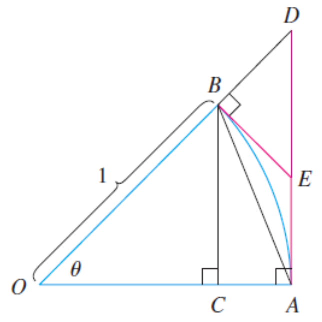
LIMITES NOTABLES

Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2 se infiere que

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

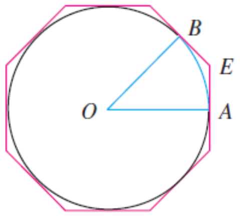


a)

Ahora utilizaremos un argumento geométrico para demostrar la ecuación . Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura a) se muestra un sector de circunferencia con centro en 0, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, tenemos que arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se observa que

$$|BC| < |AB| < \operatorname{arc} AB$$

En consecuencia $\quad \operatorname{sen} \theta < \theta \quad$ de manera que $\quad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$



b)

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede verse, con base en la figura b), que la circunferencia es menor que la longitud del polígono circunscrito, de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \operatorname{arc} AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

de modo que $\qquad \cos \theta < \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

Sabemos que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$, así que, por el teorema de la compresión

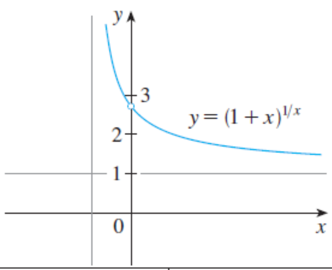
$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen} \theta)/\theta$ es una función par, de modo que sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales y, por tanto,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

así que se ha demostrado la ecuación .

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$



x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

En la figura se ilustra la fórmula mediante la gráfica de la función $y = (1 + x)^{1/x}$ y una tabla para valores pequeños de x. Con esto se ilustra una aproximación correcta hasta siete dígitos decimales

$$e \approx 2.7182818$$

Si hacemos $n = 1/x$ en la fórmula , entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente, una expresión alternativa para e es

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$