Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Usualmente consideramos funciones para los cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "*f de x*". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se conoce como **variable dependiente**.

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, que se acepta como una entrada, la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

FIGURA 2
Diagrama de una función f como una máquina

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

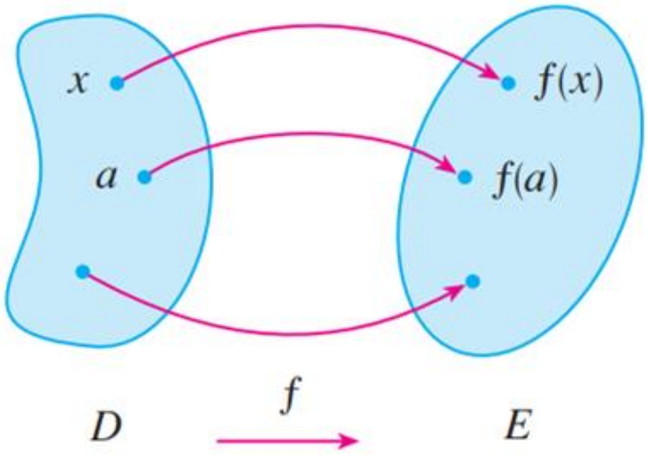

FIGURA 3

Diagrama de flechas para f

El método más común para la visualización de una función es con su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f nos da una imagen visual útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en el gráfico es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica por encima del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

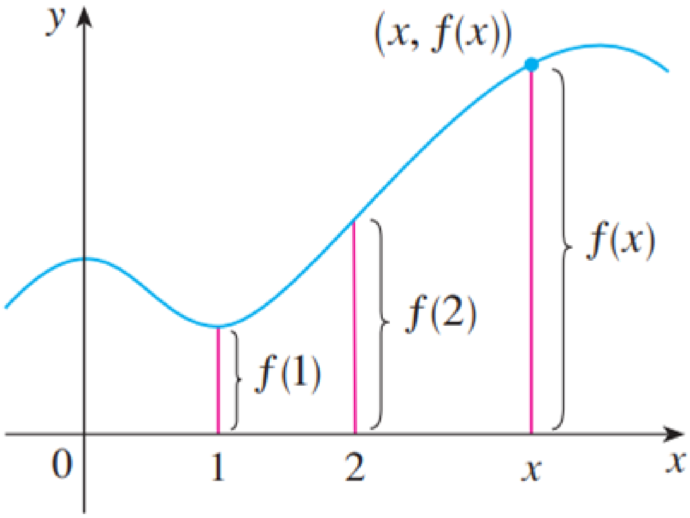

FIGURA 4

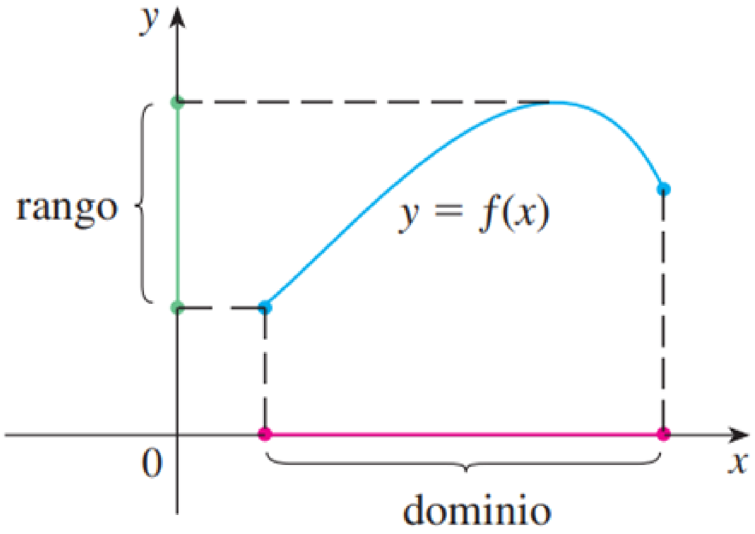

FIGURA 5

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.

La prueba de la vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si no hay recta vertical que intercepte la curva más de una vez.

La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ intercepta una curva sólo una vez, en (a, b), entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ intercepta la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes de a.

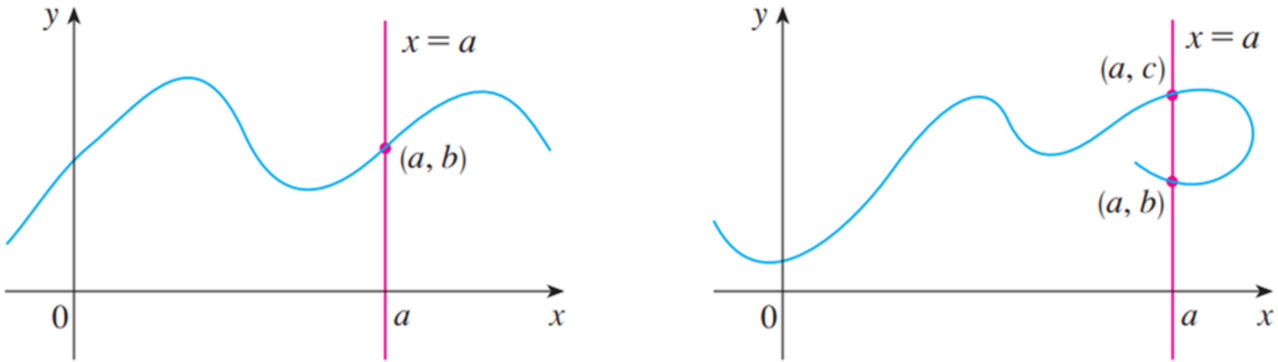

FIGURA 13

Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto nos dará la posibilidad de esbozar rápidamente a mano las gráficas de muchas funciones. También nos permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas. Consideremos primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Así, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

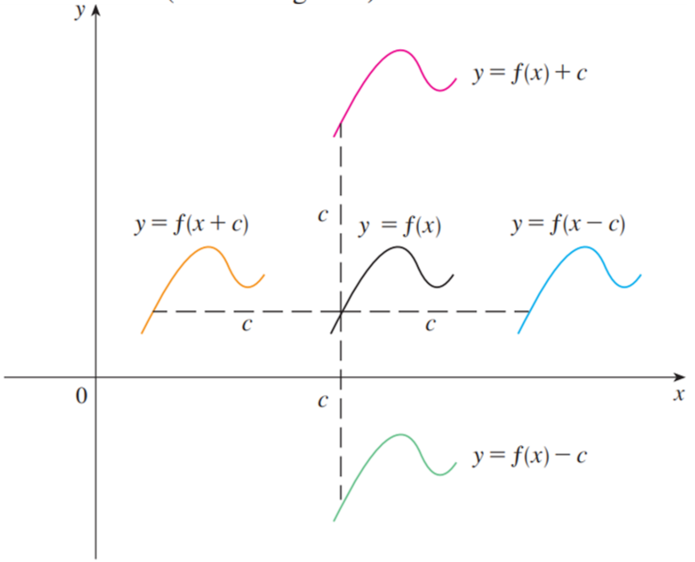

FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

Ahora consideremos las transformaciones por **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y, se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y) se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

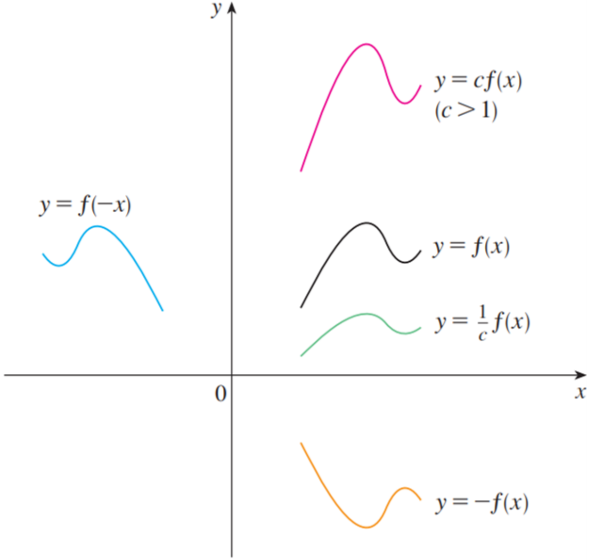

FIGURA 2
Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que si hemos dibujado la gráfica para $x \geqslant 0$, obtenemos toda la gráfica simplemente reflejándola respecto al eje y.

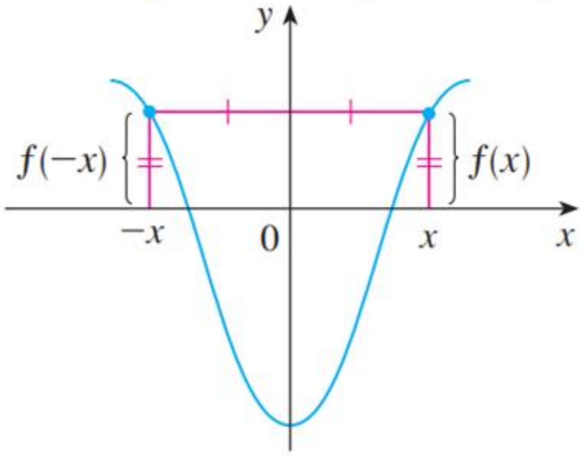

FIGURA 19 Una función par

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada x en su dominio, entonces f es una **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica en relación con el origen (véase la figura 20). Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geqslant 0$, podemos obtener toda la gráfica rotando 180º esta porción en relación con el origen.

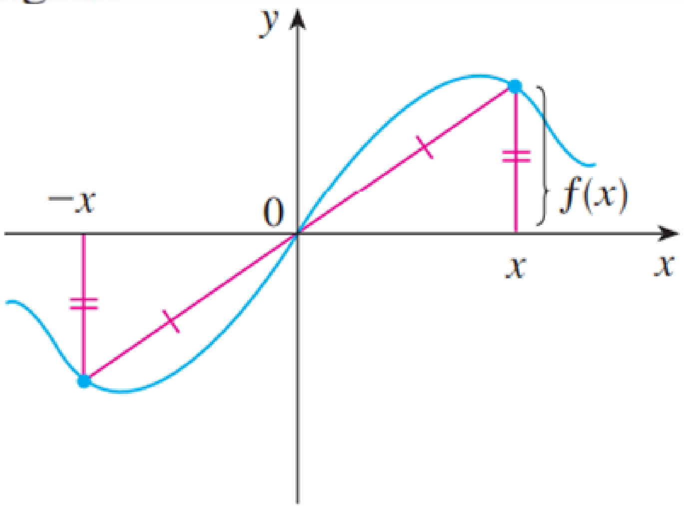

FIGURA 20 Una función impar

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente sobre $[b, c]$ y creciente nuevamente sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos esta propiedad para definir una función creciente.

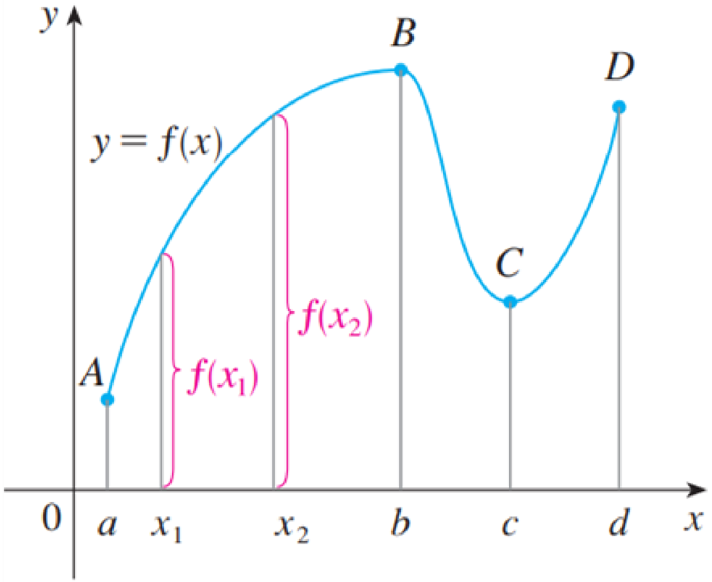

FIGURA 22

Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_l < x_2$.

Combinación de funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g en forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales. La suma y diferencia de funciones se definen mediante:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad\qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, se definen el producto y cociente de funciones por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no podemos dividir por 0, así que el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$, o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, supongamos que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y u es, a su vez, una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x. Podemos calcular esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimiento se denomina *composición* porque la nueva función se *compone* de las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, empezamos con un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. Observe que la salida de una función se usa como entrada para la próxima función. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g").

Definición Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la **composición** de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 muestra $f \circ g$ en términos de máquinas.

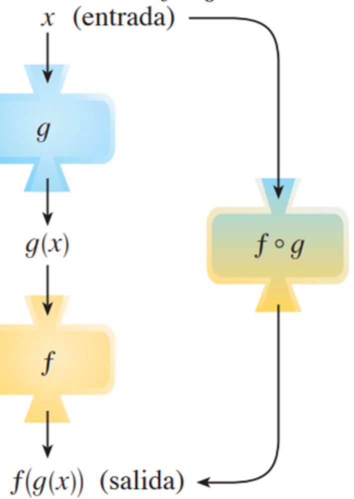

FIGURA 11

La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g (primero) y la máquina f (después)

La tabla 1 muestra los datos de un experimento en el que un cultivo de bacterias inició con 100 de ellas en un medio limitado de nutrientes; el tamaño de población de bacterias se registró a intervalos de una hora. El número N de bacterias es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Supongamos, sin embargo, que el biólogo cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo requerido para que la población alcance distintos niveles. En otras palabras, piensa en t como una función de N. Esta función se llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1} y se lee "f inversa". Así, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo requerido para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse mediante la lectura de la tabla 1 de derecha a izquierda o consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ ya que $f(6) = 550$.

TABLA 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

No todas las funciones poseen inversa. Vamos a comparar las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca tiene el mismo valor dos veces (cualquier par de entradas en A tienen diferentes salidas), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma salida, 4). En símbolos,

$$g(2) = g(3),$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

Las funciones que comparten esta propiedad con f se denominan funciones *uno a uno*.

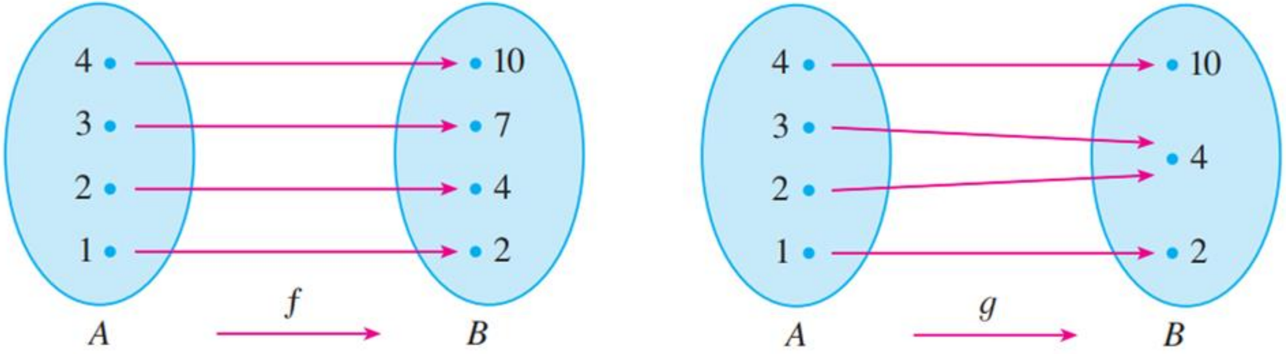

FIGURA 1
f es uno a uno; g no lo es

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición señala que f es *uno a uno* si a cada salida le corresponde sólo una entrada.

1 **Definición** Una función f se llama *uno a uno* si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

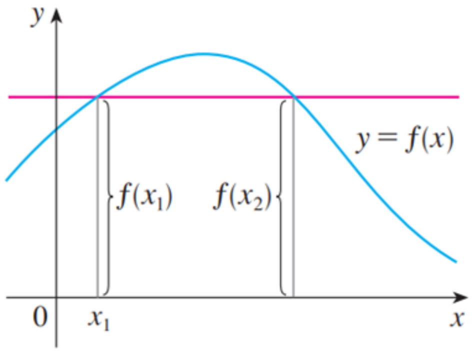

FIGURA 2
Esta función no es uno a uno, ya que $f(x_1) = f(x_2)$

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos en la figura 2 que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno, por tanto, con el siguiente método geométrico podemos determinar si una función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal Una función es uno a uno si y sólo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente aquellas que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

2 Definición Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces, la **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

La definición dice que si f hace corresponder x con y, entonces f^{-1} hace corresponder de regreso y con x. (Si f no es uno a uno, entonces f^{-1} no está definida de manera única). El diagrama de flechas en la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Note que

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

La letra x es tradicionalmente utilizada como la variable independiente, así que cuando nos concentramos en f^{-1} en vez de f, usualmente cambiamos los roles de x y y en la definición 2, y escribimos

3

$$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Al sustituir por y en la definición 2 y sustituyendo por x en $\boxed{3}$, obtenemos las siguientes **ecuaciones de cancelación**

4

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } B \end{aligned}}$$

La primera ecuación cancelada indica que si comenzamos con x, aplicando f y, a continuación, aplicamos f^{-1}, llegamos de regreso a x, donde empezamos (consulte el diagrama de máquinas en la figura 7). Así, f^{-1} deshace a f. La segunda ecuación señala que f deshace lo que hace f^{-1}.

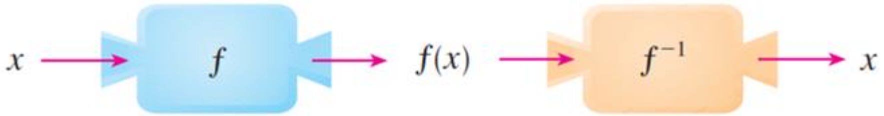

FIGURA 7

Ahora veamos cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y somos capaces de resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces, de acuerdo con la definición 2, debemos obtener $x = f^{-1}(y)$. Si queremos llamar a la variable independiente x, intercambiamos x por y y llegamos a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo encontrar la función inversa de una función *f* uno a uno

Paso 1 Escribir $y = f(x)$.

Paso 2 Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

Paso 3 Para expresar f^{-1} en función de x, intercambiamos x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también nos da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Ya que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Así, el punto (b, a) a partir del punto (a, b) se obtiene reflejando el segundo sobre la recta $y = x$. (Véase la figura 8.)

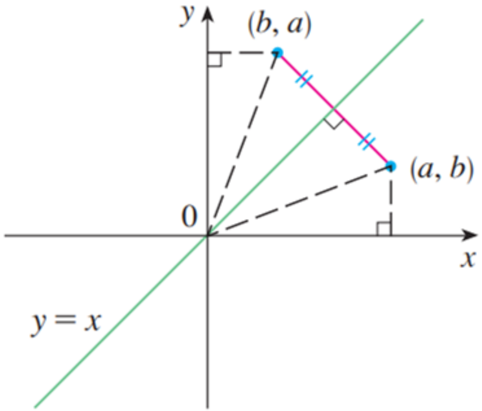

FIGURA 8

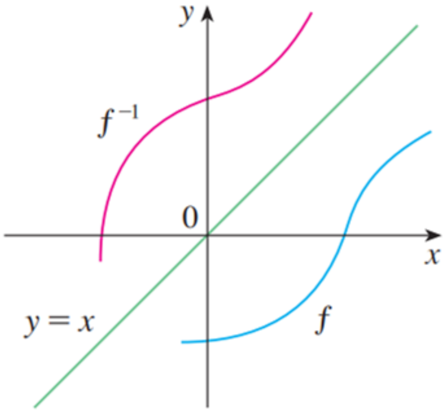

FIGURA 9

Así, como se ejemplifica en la figura 9:

> La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f sobre la recta $y = x$.