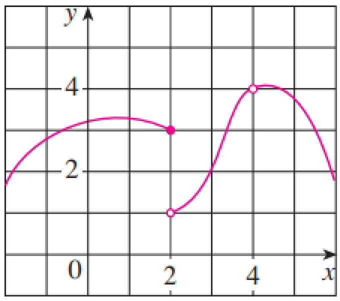
TRABAJO PRÁCTICO N° 3
LIMITES

Límite: definición del límite de una función en un punto. Límites laterales. Desarrollo intuitivo del límite mediante tablas de valores y gráficas de funciones. Propiedades algebraicas de los límites. Técnicas elementales para el cálculo del límite: de cancelación y de racionalización. Límites notables. Límite en el infinito. Límites infinitos.

Duración: 2 clases.

Ejercicio 1:

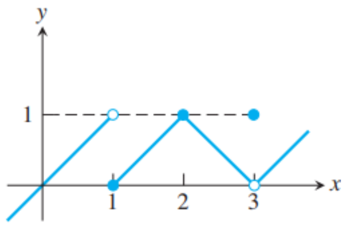
a) Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad si ésta existe. Si no existe, explique por qué.



i. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

iv. $f(2)$ v. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ vi. $f(4)$

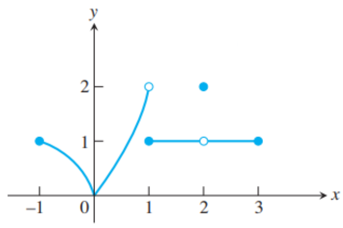
b) Para la función g, que se grafica a continuación, determine los límites siguientes o explique por qué no existen.



i. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ v. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ vi. $f(3)$

c) De los siguientes enunciados, respecto de la función f que aparece graficada, ¿cuáles son verdaderos y cuáles son falsos?



i. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$ ii. $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

iv. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ v. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ vi. $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Ejercicio 2: Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$ b) $\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

c) $\lim\limits_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)(2 - 6x^2 + x^3)$

Ejercicio 3: Encuentre cada uno de los siguientes límites si éstos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

Ejercicio 4:

a) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x < 1 \\ (x-1)^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

i. Encuentre $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
ii. ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?
iii. Trace la gráfica de f.

b) Sea $g(x) = \begin{cases} x + 2 & si \quad x < 0 \\ 2 - x^2 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ 2^x - 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$

i. Encuentre $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} g(x)$¿Existe $\lim_{x \to 1} g(x)$?
ii. Encuentre $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} g(x)$¿Existe $\lim_{x \to 2} g(x)$?
iii. Trace la gráfica de g.

Ejercicio 5: Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen:

a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$ b) $\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$ c) $\lim_{h \to 0} \frac{(h+2)^3 - 8}{h}$

d) $\lim_{x \to 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$ e) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 9x}$ f) $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$

g) $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t}\right)$ h) $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t}\right)$ i) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h}$

Ejercicio 6: Utilizando límites notables, calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{4x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$ c) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{\operatorname{sen}(6\theta)}$ d) $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos(2t)}{t}$

e) $\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{3/x}$ f) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$ g) $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^{t}$ h) $\lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u - 1}$

Ejercicio 7: Determine cada uno de los siguientes límites infinitos.

a) $\lim_{x \to -8} \frac{2x}{x + 8}$ b) $\lim_{x \to 2} \frac{3 - x}{(x-2)^2}$ c) $\lim_{x \to 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$ d) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

Ejercicio 8: Encuentre el límite o demuestre que no existe.

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$ c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}$ e) $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$ f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$