Ejercicio N°5

Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen:

$$a)\ \lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}\right)=\frac{4^2-4\cdot 4}{4^2-3\cdot 4-4}=\frac{0}{0}\to indeterminación$$

Para salvar la indeterminación muchas veces es necesario factorizar:

$$x^2-3x-4\to\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\begin{cases}x_1=+4\\x_2=-1\end{cases}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+1)}\right]=\frac{4}{4+1}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

$$e)\ \lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-9x}\right)=\frac{\sqrt{9}-3}{9^2-9\cdot 9}=\frac{0}{0}\to indeterminación$$

Para salvar la indeterminación muchas veces es necesario multiplicar por el conjugado para eliminar la raíz, usando la diferencia de cuadrados:

$$=\lim_{x\to 9}\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-9x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right)=\lim_{x\to 9}\left[\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2}{(x^2-9x)\left(\sqrt{x}+3\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 9}\left[\frac{\cancel{(x-9)}}{x\cancel{(x-9)}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right]=\frac{1}{9\left(\sqrt{9}+3\right)}=\boxed{\frac{1}{54}}$$

$$h)\ \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{0\sqrt{1+0}}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\to indeterminación$$

Hacemos común denominador y multiplicamos por el conjugado para eliminar la raíz, usando la diferencia de cuadrados:

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{t\sqrt{1+t}}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}}\right)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1^2-\left(\sqrt{1+t}\right)^2}{\left(t\sqrt{1+t}\right)\left(1+\sqrt{1+t}\right)}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1-(1+t)}{\left(t\sqrt{1+t}\right)\left(1+\sqrt{1+t}\right)}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{-\cancel{t}}{\left(\cancel{t}\sqrt{1+t}\right)\left(1+\sqrt{1+t}\right)}\right]=\frac{-1}{\left(\sqrt{1+0}\right)\left(1+\sqrt{1+0}\right)}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Ejercicio N°6

Utilizando límites notables, calcular los siguientes límites:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(x)}{x}\right]=1}\ \boxed{\lim_{x\to 0}\left[\frac{tan(x)}{x}\right]=1}$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(3x)}{4x}\right]=\frac{0}{0}\to indet.$$

Multiplicamos y dividimos por el número que necesitamos para que se parezca al límite notable:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(3x)}{4x}\right]\cdot\frac{3}{3}=\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen(3x)}{3x}\right]}_{=1}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{tan(2x)}{x}\right]=\frac{0}{0}\to indet.$$

Multiplicamos y dividimos por el número que necesitamos para que se parezca al límite notable:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{tan(2x)}{x}\right]\cdot\frac{2}{2}=2\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{tan(2x)}{2x}\right]}_{=1}=\boxed{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}\ \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{n^{\circ}}{x}\right)^{x}=e^{n^{\circ}}}$$

$$f)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}=1^{\infty}\to indet.$$

Aplicamos alguna propiedad de potencias, para que nos quede la misma expresión que el límite notable:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}_{e^{2}}\right]^{2}=(e^{2})^{2}=\boxed{e^{4}}$$

Ejercicio N°7

Determine cada uno de los siguientes límites infinitos:

$$b)\ \lim_{x\to 2}\left[\frac{3-x}{(x-2)^2}\right]=\frac{3-2}{(2-2)^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to 5^-}\left[\frac{e^x}{(x-5)^3}\right]=\frac{-e^5}{(5-5)^3}=\frac{e^5}{0}=-\infty$$

Que el límite me pida por la izquierda significa que, al tomar un valor por ese lado, me va a influir en el signo del infinito.

Ejercicio N°8

Encuentre el límite o demuestre que no existe:

$$b)\ \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}\right)=\frac{\infty}{\infty}\to indeterminación$$

Cuando tenemos límites en el infinito (x tiende a ese valor), tenemos que sacar factor común a la expresión con el mayor exponente:

$$\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{\cancel{x^3}\left(2+\frac{7}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}\right]=\frac{\left(2+\frac{7}{(-\infty)^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{(-\infty)}+\frac{1}{(-\infty)^2}+\frac{7}{(-\infty)^3}\right)}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

Hacemos esa operación algebraica, porque un número dividido infinito es igual a cero. Entonces a propósito dejamos los denominadores con la variable.

$$d)\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right)=\frac{\infty}{\infty}\to indeterminación$$

Sacamos factor común dentro de la raíz cuadrada, separamos usando propiedades de radicación y tratamos de simplificar alguna expresión:

$$=\lim_{x\to \infty}\left[\frac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}}{x^2}\right]=\lim_{x\to \infty}\left[\frac{\sqrt{x^4}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to \infty}\left[\frac{\cancel{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}}{\cancel{x^2}}\right]=\sqrt{\left(1+\frac{1}{\infty^4}\right)}=\boxed{1}$$

$e)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)=-\infty+\infty\to indeterminación$

En este caso primero deberíamos multiplicar por el conjugado, de tal manera de aplicar la diferencia de cuadrados:

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-(x^2+2x)}{\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x}{\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)}\right]$$

Sacamos factor común dentro de la raíz, para ver si podemos simplificar alguna expresión y para que también nos quede la variable en el denominador:

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x}{\left(x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x}{\left(x-\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x}{\left(x-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right)}\right]$$

Sacamos factor común “x” en el denominador para poder simplificar:

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right)}\right]=\frac{-2}{\left(1-\sqrt{\left(1+\frac{2}{-\infty}\right)}\right)}=-\frac{2}{0}=\boxed{-\infty}$$