TRABAJO PRÁCTICO N° 6

DERIVACIÓN IMPLÍCITA. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA. DIFERENCIAL. REGLA DE L'HOPITAL

Derivación implícita. Derivada de las funciones trigonométricas inversas. Derivación logarítmica. Diferencial: concepto. Interpretación geométrica. Aplicaciones. Formas indeterminadas. Regla de L'Hopital.

Duración: 2 clases.

Ejercicio 1: Encuentra por diferenciación implícita

a) $x^3 + y^3 = 1$ b) $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ c) $x^2 + xy - y^2 = 4$

d) $x^4(x+y) = y^2(3x - y)$ e) $xe^y = x - y$ f) $y\cos x = x^2 + y^2$

g) $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$ h) $4\cos x \operatorname{sen} y = 1$ i) $\tan(x-y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

Ejercicio 2:

a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama kampila de Eudoxo. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1,2)$.
b) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama cúbica de Tschirnhausen. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1,-2)$. ¿En cuáles puntos tiene rectas tangentes horizontales?
c) Grafique las curvas y las rectas tangentes con una graficadora para verificar sus resultados.

Ejercicio 3: Halla y'' por derivación implícita de las siguientes expresiones:

a) $9x^2 + y^2 = 9$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Ejercicio 4: Halla la derivada de la función. Simplifica donde se pueda.

a) $y = (\arctan x)^2$ b) $y = \arctan(x^2)$ c) $y = \operatorname{arcsen}(2x+1)$

d) $y = \sqrt{x^2-1}\arccos(3x)$ e) $y = \arctan(\ln x)$ f) $y = \arctan\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$

Ejercicio 5: Aplica la derivación logarítmica para hallar la derivada de la función.

a) $y = (x^2+2)^2(x^4+4)^4$ b) $x(t) = \dfrac{e^{-t}\cos^2 t}{t^2+t+1}$ c) $u(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

d) $r(\theta) = (\cos\theta)^\theta$ e) $g(t) = t^{\operatorname{sen} t}$ f) $f(z) = (\operatorname{sen} z)^{\ln z} + (\ln z)^{\cos z}$

Ejercicio 6:

a) Encuentra la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $x = 0$ y úsala para aproximar losvalores de $\sqrt{0{,}9}$ y $\sqrt{0{,}99}$. Grafica f y la recta tangente.
b) Encuentra la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $x = 0$ y úsala para aproximar los valores de $\sqrt[3]{0{,}95}$ y $\sqrt[3]{1{,}1}$. Grafica f y la recta tangente.

Ejercicio 7: Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego dibuje la gráfica de la funciónen el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

a) $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $\Delta x = -0{,}4$ b) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 1$

c) $y = \dfrac{2}{x}$, $x = 4$, $\Delta x = 1$ d) $y = e^x$, $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$

Ejercicio 8: Utiliza diferenciales para aproximar el valor de las siguientes expresiones:

a) $(1{,}999)^4$ b) $e^{-0{,}015}$ c) $\ln(1{,}05)$ d) $\tan 44°$

Compara los resultados con la que se obtiene usando una calculadora o graficadora.

Ejercicio 9: Resuelva las siguientes situaciones problemáticas.

a) Se encontró que la arista de un cubo es $30\,cm$, con un posible error en la medición de $0{,}1\,cm.$ Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular:
   i) el volumen del cubo ii) el área superficial del cubo

b) Se da el radio de un disco circular como de $24\,cm$, con un error máximo en la medición de $0{,}2\,cm$.
   i) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.
   ii) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?

c) La circunferencia de una esfera se midió como $84\,cm$, con un posible error de $0{,}5\,cm$.
   i) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el errorrelativo?
   ii) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el errorrelativo?

d) Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de $0{,}05\,cm$ de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de $50\,m$.

Ejercicio 10: Encuentra el límite aplicando la regla de L'Hopital.

a) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{2t}-1}{\operatorname{sen} t}$ b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(4\theta)}{\tan(5\theta)}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2}{e^t}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ f) $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} -x\ln x$ h) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\ln t$ i) $\lim\limits_{\theta\to\infty}\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{\theta}\right)$

j) $\lim\limits_{\theta\to\infty}\left(\dfrac{1}{\theta}-\operatorname{cosec}\theta\right)$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$ n) $\lim\limits_{\theta\to 0^+}[\tan(2\theta)]^{\theta}$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

p) $\lim\limits_{u\to\infty} u^{1/u}$ q) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{1/2\ln x}$ r) $\lim\limits_{t\to\infty}(e^t+t)^{1/t}$

s) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ t) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ u) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^2}$

Ejercicio 11: Demuestra que:

a) $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{u}\right)^u = e^k$ b) $\lim\limits_{t\to 0}(1+kt)^{1/t} = e^k$