ESPACIOS VECTORIALES

- UN **ESPACIO VECTORIAL** ES UN CONJUNTO NO VACÍO **V** DE OBJETOS, LLAMADOS VECTORES, EN EL QUE SE HAN DEFINIDO DOS OPERACIONES: LA SUMA (ENTRE ELEMENTOS DE V) Y EL PRODUCTO POR UN ESCALAR (UN NUMERO REAL MULTIPLICADO POR UN ELEMENTO DE V) SUJETAS A LOS DIEZ AXIOMAS QUE SE DARAN A CONTINUACIÓN.

ES DECIR NECESITAMOS TENER :

- UN CONJUNTO **V** FORMADO POR : VECTORES, MATRICES, POLINOMIOS, FUNCIONES, ETC. PERO QUE SE LLAMAN VECTORES

- UNA OPERACIÓN ENTRE ESOS ELEMENTOS DE **V**, LLAMADA SUMA

- Y SE DEBEN VERIFICAR LOS SIGUIENTES AXIOMAS, CINCO REFERIDOS A LA SUMA (ENTRE ELEMENTOS DE **V**) Y LOS OTROS CINCO REFERIDAS AL PRODUCTO POR UN ESCALAR.

AXIOMAS:

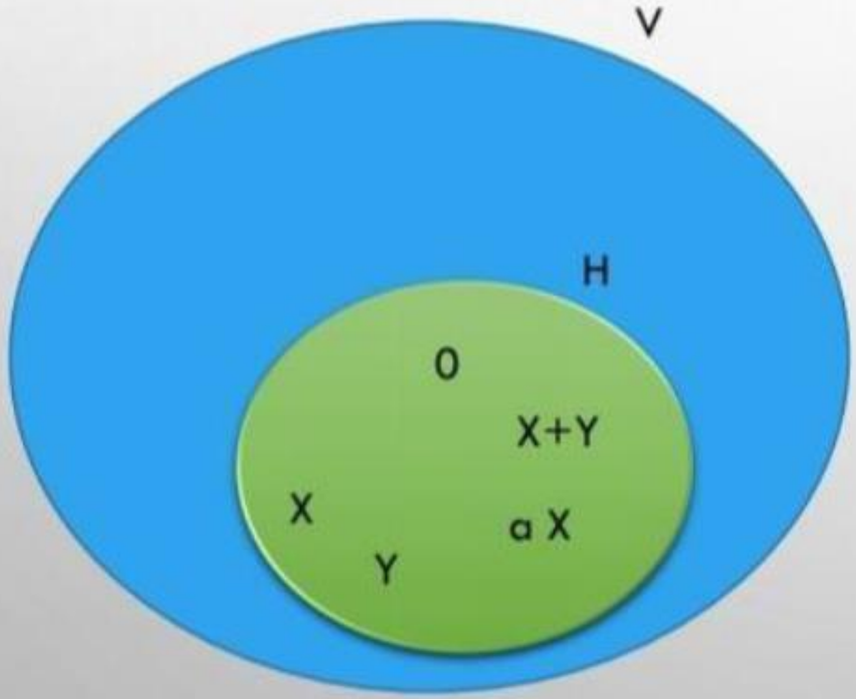
- AX 1. SI $x, y \epsilon\ V$, ENTONCES $x + y \in V$ (CERRADURA BAJO LA SUMA)
- AX 2. SI $x, y \epsilon\ V$, ENTONCES $x + y = y + x$ (LEY CONMUTATIVA)
- AX 3. SI $x, y, w \epsilon\ V$, ENTONCES $(x + y) + w = x + (y + w)$ (LEY ASOCIATIVA)
- AX 4. EXISTENCIA DEL ELEMENTO IDENTIDAD (NEUTRO)ADITIVO.
  $\exists\ e \epsilon V$ TAL QUE PARA TODO $x \in V$, $x + e = e + x = x$
- AX 5. EXISTENCIA DEL INVERSO (OPUESTO) ADITIVO:
  $\forall\ x \epsilon V\ , \exists\ (-x) \epsilon\ V\ \ tal\ que\ x +\ (-x) = e$
- AX 6. SI $x \epsilon\ V$ Y $\alpha\ \epsilon\ R$, $\alpha . x\ \epsilon\ V$
- AX 7. SI $x, y \epsilon\ V$ Y $\alpha\ \epsilon\ R$, $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$
- AX 8. SI $x\ \epsilon\ V$ Y $\alpha, \beta\ \epsilon\ R$, $(\alpha + \beta) .\ x = \alpha . x + \beta . x$
- AX 9. SI $x\ \epsilon\ V$ Y $\alpha, \beta\ \epsilon\ R$, $(\alpha . \beta) .\ x = \alpha . (\beta . x)$
- AX 10. PARA CADA VECTOR $x\ \epsilon\ V$, $1 . x = x$

EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

- R^n
- R^{2x2}, R^{3x3} ….
- $R^{m\,x\,n}$
- EL CONJUNTO DE LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A n: P_n
- EL CONJUNTO DE TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS EN EL INTERVALOS $[0,1]$

SUBESPACIO VECTORIAL

- SEA V UN ESPACIO VECTORIAL Y H UN SUBCONJUNTO NO VACIO DE V.
  H SE DENOMINA SUBESPACIO VECTORIAL DEL V, SI ES EN SI MISMO UN ESPACIO VECTORIAL CON LA MISMA OPERACIÓN SUMA Y PRODUCTO POR UN ESCALAR



H *es subespacio de* V *si:*
$0 \in H$
Si $x, y \in H$ *entonces* $x + y \in H$
Si $\alpha \in R, x \in H$ *entonces* $\alpha . x \in H$

EJEMPLO DE SUBESPACIO EN R^2

$$A = \left\{(x, y) \in R^2 \; tal \; que \quad y = 2x\right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \ con\, a, b, c, d, e, f \ \in R \right\} es\ un\ subespacio\ de\ R^{3x3}$$

- $\{(x, y) \; tal \; que \quad x \geq 0\} \; NO \quad es \; subespacio \; de R^2$

EN R^2 LOS SUBESPACIOS SON:

- R^2
- $\{(0,0)\}$
- LAS RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN $\{(x, y) \in R^2 \; tal \; que \quad y = mx\}$

EN R^3 LOS SUBESPACIOS SON:

- R^3
- $\{(0,0,0)\}$
- LAS RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN
- LOS PLANOS QUE PASAN POR EL ORIGEN

$$\{(x, y, z) \in R^3 \; tal \; que \quad ax + by + cz = 0\}$$

Sean S y H dos subespacios vectoriales, entonces las intersección $S \cap H$ es un subespacio

DEMOSTRACION:

1. $\vec{0} \in S$ *ya que* S *es un subespacio,* $\vec{0} \in H$ *ya que* H *es un subespacio. Entonces* $\vec{0} \in S \cap H$

2. *Sean* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *tales que* $\vec{u}, \vec{v} \in S \cap H$, ¿$\vec{u} + \vec{v} \in S \cap H$?

$$\vec{u} \in S \cap H \Longrightarrow \vec{u} \in S \ \wedge \vec{u} \in H$$
$$\vec{v} \in S \cap H \Longrightarrow \vec{v} \in S \ \wedge \vec{v} \in H$$
$$Como\ \vec{u} \in S \ \wedge \vec{v} \in S \wedge S\ es\ subespacio \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S$$
$$Como\ \vec{u} \in H \ \wedge \vec{v} \in H \wedge H\ es\ subespacio \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H$$
$$Entonces \quad \vec{u} + \vec{v} \in S \cap H$$

3. *Sea* $\alpha \in R, \vec{u} \in S \cap H$, ¿$\alpha.\vec{u} \in S \cap H$?

$$\vec{u} \in S \cap H \Longrightarrow \vec{u} \in S \ \wedge \vec{u} \in H$$
$$Como\ \vec{u} \in S \ \wedge S\ es\ subespacio \Longrightarrow \alpha.\vec{u} \in S$$
$$Como\ \vec{u} \in H \ \wedge H\ es\ subespacio \Longrightarrow \alpha.\vec{u} \in H$$
$$Entonces \quad \alpha.\vec{u} \in S \cap H$$

POR LO TANTO, $S \cap H$ ES UN SUBESPACIO

CON RESPECTO A LA UNION, NO SIEMPRE ES UN SUBESPACIO

$Sean\ S, H\ dos\ subespacios\ vectoriales$, donde

$$S = \{(x, y) \in R^2\ con\ y = x\ \}$$
$$H = \{(x, y) \in R^2\ con\ y = -x\ \}$$

La unión $S \cup H = \{(x, y) \in R^2\ con\ y = x\ \ \vee y = -x\}$ NO ES SUBESPACIO PUES:

$$Sea\ \vec{u} = (1,1) \in S \cup H, \qquad \vec{v} = (1, -1) \in S \cup H$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (2,0) \notin S \cup H$$

Como falla la condición (2), entonces $S \cup H$ NO ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE R^2

VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES EN V

- Cierto conjunto de vectores $x_1, x_2, \dots, x_k$ de un espacio vectorial V es linealmente DEPENDIENTE si alguno de ellos "depende" de los demás en el sentido en el que puede ser escrito como combinación lineal de los restantes.

- Por ejemplo en el caso de $(3,1,-8) = (3).(1,2,-1) + (-5).(0,1,1)$ por lo tanto, el conjunto de vectores $\{(3,1,-8),(1,2,-1),(0,1,1)\}$ es linealmente dependiente.

- Usaremos la siguiente definición:

El conjunto de vectores $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_k}$ de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ se dice que es linealmente DEPENDIENTE si existen escalares $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_k}$ NO TODOS NULOS tal que

$$a_1\boldsymbol{x_1} + a_2\boldsymbol{x_2} + \dots + a_k\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{0} \quad \textbf{(siendo } \boldsymbol{0} \textbf{ elemento neutro en } \boldsymbol{V}\textbf{)}$$

En otro caso, los vectores se dicen linealmente INDEPENDIENTES

- En el caso de que los vectores sean linealmente independientes, "la combinación del neutro"

  $a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + a_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ se da solo cuando todos los escalares $a_i = \boldsymbol{0}$.

- En la practica, procederemos de este modo:

  1) Planteamos la combinación lineal de neutro aditivo:

$$a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + a_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

  2) Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones homogéneo, de incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Si admite solución trivial, es decir todos los $\alpha_i = 0$, los vectores son linealmente independientes.

En otro caso, los vectores son linealmente dependientes

¿EL CONJUNTO $\{(1,2,5),(1,5,14),(2,1,1)\}$ ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O INDEPENDIENTE EN EL ESPACIO R^3?

1. Planteo la combinación lineal del vector nulo

$$(0,0,0) = \alpha.(1,2,5) + \beta.(1,5,14) + \gamma.(2,1,1)$$

2. Esto nos lleva al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 14 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. El sistema tiene **infinitas soluciones**

4. Por lo tanto el conjunto $\{(1,2,5),(1,5,14),(2,1,1)\}$ es linealmente dependiente

¿EL CONJUNTO $\{x^2+x-1, 2x+1, x^2+2\}$ ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O INDEPENDIENTE EN EL ESPACIO P_2?

1. Combinación lineal del elemento neutro en P_2

$$0x^2+0x+0=\alpha.(x^2+x-1)+\beta.(2x+1)+\gamma.(x^2+2)$$

$$0x^2+0x+0=(\alpha+\gamma).x^2+(\alpha+2\beta).x+(-\alpha+\beta+2\gamma)$$

2. De lo cual es sistema homogéneo es: $\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta=0 \\ -\alpha+\beta+2\gamma=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

3. El sistema tiene solución **trivial** $(\alpha=0,\ \beta=0, \gamma=0)$

4. Por lo tanto el conjunto $\{x^2+x-1, 2x+1, x^2+2\}$ es linealmente independiente