La mayor parte de las funciones que hemos visto hasta ahora pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

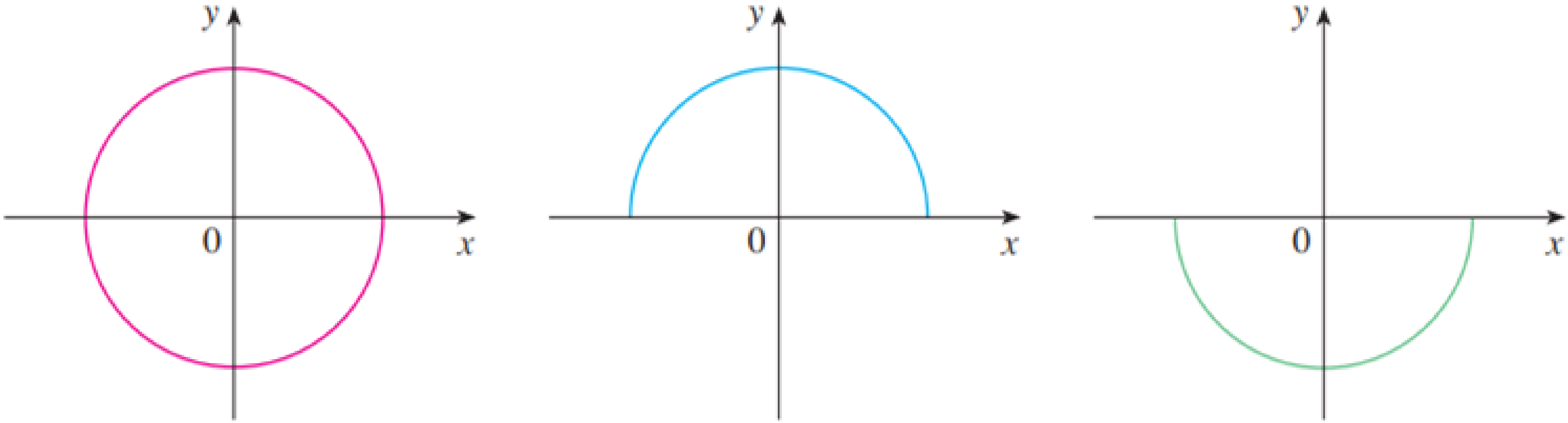
o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o bien

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación 1 para y, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)



a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver explícitamente la ecuación 2 para y como función x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas). Sin embargo, $\boxed{2}$ es la ecuación de una curva llamada **folium de Descartes**, ilustrada en la figura 2 y, que de manera implícita define a y como varias funciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se dice que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, se da a entender que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

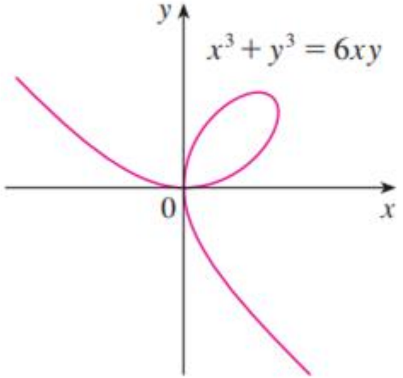


FIGURA 2 Folium de Descartes

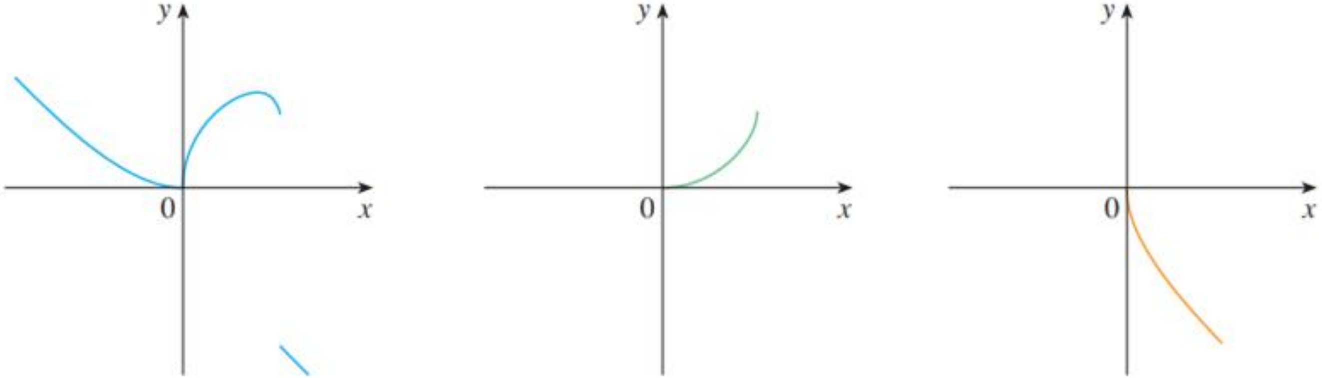


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folium de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x a fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplicaremos el método de **derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivación implícita.

V **EJEMPLO 1**

a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, 4)$.

a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, así que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por tanto,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora resolvemos esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

V **EJEMPLO 2**

a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

b) Halle la recta tangente al folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto (3, 3).

SOLUCIÓN

a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora resolvemos para y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

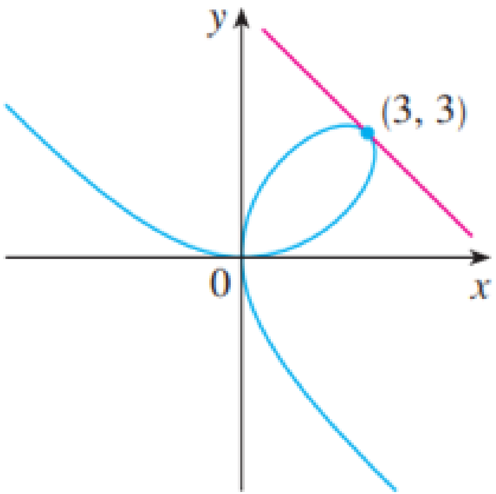
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). De este modo, la ecuación de la recta tangente al folium en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \quad \text{o bien} \quad x + y = 6$$



Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{significa} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x, obtenemos

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

De manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$. Si derivamos esta última ecuación implícitamente respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias puede simplificarse tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4} \ln x + \tfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 5 \ln(3x + 2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, resulta que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - 5 \cdot \frac{3}{3x + 2}$$

Al resolver para dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

Puesto que tenemos una expresión explícita para y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases:

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0 \qquad (a \text{ y } b \text{ son constantes})$

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, podemos aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

V EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, utilizamos la derivación logarítmica:

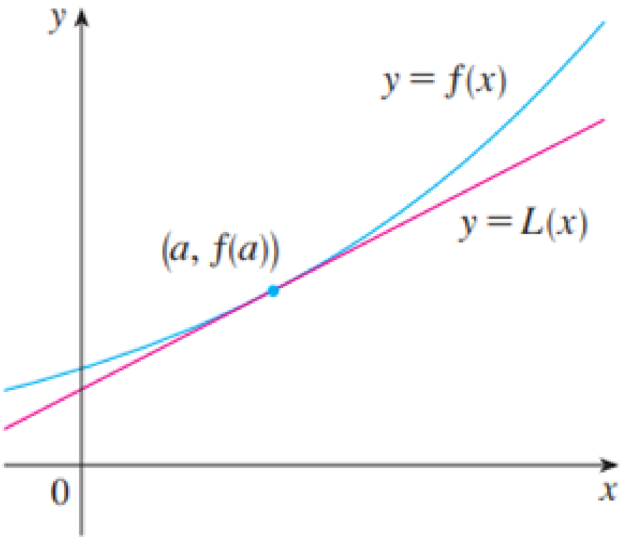
$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

Hemos visto que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, observamos que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, recurrimos a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)



En otras palabras, utilizamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

V EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobreestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x+3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

y tenemos que $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si ponemos estos valores en la ecuación 2, la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

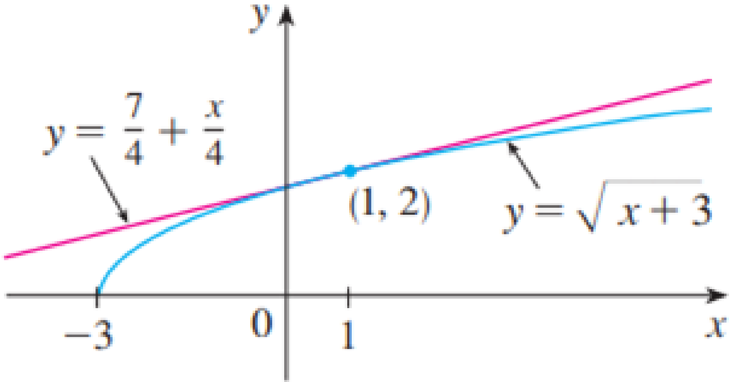
La aproximación lineal correspondiente $\boxed{1}$ es

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tenemos que

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x esta cerca de 1. También vemos que las aproximaciones son sobreestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.



Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da una aproximación *sobre todo un intervalo*.

Diferenciales

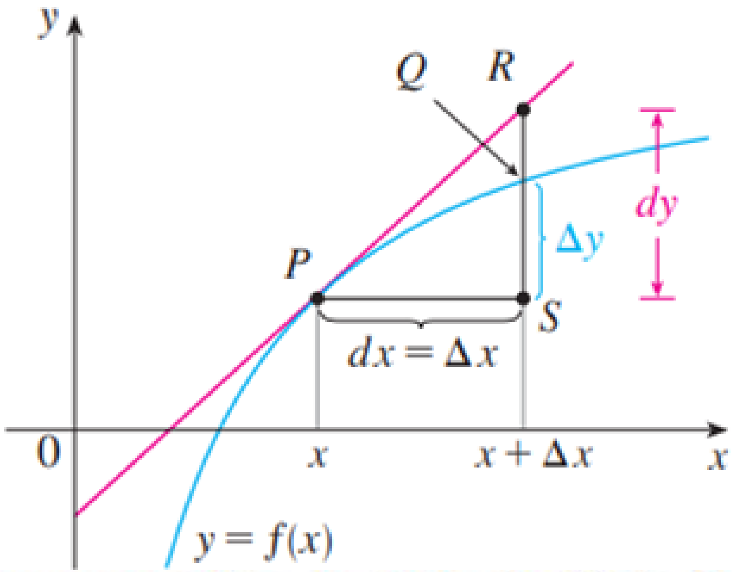
Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)dx$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia a) de 2 a 2.05 y b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En general, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

b)

$$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\, 0.01 = 0.14$$

Observe que, en el ejemplo 3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas, sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{1}$ puede escribirse como

$$f(a + dx) \approx f(\mathrm{a}) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 1, tenemos que

$$dy = f'(x)\, dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y

$$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$, si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**, y lo podemos abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞, por lo que podemos utilizar la regla de l'Hospital.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo $\infty - \infty$**. Una vez más hay un contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un número finito? Para encontrarlo, intentamos convertir la diferencia en un cociente (p. ej., utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada uno de estos tres casos puede ser tratado ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o expresando la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que ambos métodos fueron utilizados en la derivada de estas funciones.) Cualquiera de los métodos nos lleva al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.