

Informationen zum Toda-Oszillator

1 Einleitung

Die nichtlineare Dynamik, populärwissenschaftlich oft unter *Chaostheorie* subsumiert, hat sich im Verlauf der letzten zwei Jahrzehnte zum festen Bestandteil vieler Wissenschaftsgebiete entwickelt. Als sie ab Ende der siebziger Jahre immer stärker in das Zentrum der wissenschaftlichen Diskussion geriet, maß man ihr durchaus bei, sie habe einen Wechsel der Leitidee herbeigeführt, unter der forschendes Interesse steht. Ein solcher sogenannter *Paradigmenwechsel* ist für die Physik wie für alle anderen Wissenschaftsgebiete nicht ungewöhnlich: Bis in die Anfänge dessen, was wir heute Physik nennen, kann man erkennen, dass das Interesse, die Suche nach „Erklärung“, unter bestimmten Leitideen, *Paradigmen* stand. Als 1687 NEWTONs *Principia* erschien, wurde diese über Jahrhunderte als so erklärungs mächtig empfunden, dass lange Zeit nur das als wissenschaftlich fundiert galt, was sich den dort beschriebenen Zusammenhängen unterordnen ließ. Diese Sichtweise verlangte es schließlich, die Thermodynamik der Mechanik unterzuordnen, und als dies kurz vor der Jahrhundertwende gelang, wurde es als ein überragender wissenschaftlicher Erfolg angesehen. Entsprechend waren die Arbeiten MAXWELLS zur Elektrodynamik lange Zeit von dem Wunsch getragen, Elektrizität und Magnetismus ebenfalls mit der Mechanik vereinigen zu können - Leitidee war die NEWTONsche Mechanik. So lassen sich eine ganze Reihe von Entwicklungen in der Physik aufzählen, die dafür sorgten, dass jeweils bestimmte Aspekte der uns umgebenden Phänomene besonders ins Auge gefasst wurden: Mit der Etablierung der Relativitätstheorie ab etwa 1910 war es der Aspekt der Relativität, der besondere Beachtung fand; eingedenk der Erfolge der Quantenmechanik ab etwa 1930 war es der quantenhaften Natur der mikroskopischen Struktur der Materie.

Die Arbeiten von LORENZ, RUELLE, TAKENS, YORKE, MAY, HÉNON, FEIGENBAUM, MANNEVILLE und vieler anderer haben seit den späten sechziger Jahren einen Aspekt in den Mittelpunkt gerückt, der bis dahin nur untergeordnete Bedeutung hatte: den der *Nichtlinearität* sehr vieler uns umgebende Phänomene. Nichtlinearität besagt zunächst nichts weiter, als dass Relationen zwischen Variablen Produkte derselben enthalten. Für Differentialgleichungen, insbesondere ihre analytische Lösbarkeit hat das weitreichende Konsequenzen. Es gilt z.B. das Superpositionsprinzip nicht mehr. Die Schwierigkeiten bei der Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen können vielleicht als ein Grund dafür angesehen werden, weshalb das an sich universelle Phänomen der Nichtlinearität erst in so junger Zeit an Bedeutung gewann: Mit dem Computer stand ein Werkzeug zur Verfügung, mit dessen Hilfe erstmals rationell numerisch integriert werden und nichtlineare Erscheinungen einer systematischen Behandlung unterzogen werden konnten. Die Wirkung der Nichtlinearität geht aber über das Problem erschwerter Lösbarkeit der die Dynamik bestimmenden Gleichungen weit hinaus: Die physikalische Interpretation dieser Wirkung führt auf Einsichten, die die Nichtlinearität als ein grundlegendes Naturprinzip erscheinen lassen.

2 Der Toda-Oszillator

Der Toda-Oszillator bezeichnet einen Serienschwingkreis bestehend aus einem ohmschen Widerstand R , einer Induktivität L und einer Halbleiterdiode als Kapazität C . Er wird von einer externen Sinusspannung mit fester Frequenz getrieben, und in Abhängigkeit von der Amplitude des Treibers wird der Strom im Schwingkreis gemessen. Die Besonderheit dieses Schwingkreises liegt im Einfluss der Diode, der dafür sorgt, dass das Verhalten des Kreises von dem stark abweicht, welches vom herkömmlichen Schwingkreis mit Kondensator als Kapazität bekannt ist. Der herkömmliche Kreis verhält sich als gedämpfter linearer Oszillator, seine dynamischen Eigenschaften sind durch Amplituden- und Phasengang weitgehend beschrieben. Diese hängen von den Daten der verwendeten Bauteile ab, zu denen die *konstante* Kapazität gehört. Die Diode jedoch ändert ihre Kapazität in Abhängigkeit von der an sie gelegten Spannung; diese Abhängigkeit wird im ersten Teil des Experiments genauer untersucht. Da der Schwingkreis mit einer

Sinusspannung getrieben wird, verändert sich die Kapazität fortlaufend - entsprechend ändern sich auch fortlaufend Resonanzfrequenz und die Phasenbeziehung von Anregung und Strom im Schwingkreis. Die Gleichung, mit der hier die $C(U)$ -Abhängigkeit der Diode modelliert wird, führt darauf, dass die Spannung über der Diode und die gespeicherte Ladung in der Form

$$F(x) = -(e^x - 1)$$

voneinander abhängen. Die „Rückstellkraft“ F kann bis auf Konstanten mit der Spannung identifiziert werden, die „Auslenkung“ x mit der Ladung. Für die potentielle Energie V gilt dann (bis auf Konstanten):

$$V(x) = e^x - x - 1 \quad .$$

Dies ist das sogenannte Toda-Potential, was dem Oszillator seinen Namen gibt. Es bringt ein - wie sich zeigen wird - strukturreiches dynamisches Verhalten hervor. Ein wesentliches Merkmal ist, dass der Oszillator der Treiberspannung im allgemeinen nicht *folgt*, wie es vom linearen Schwingkreis bekannt ist, sondern neue Frequenzen produziert, z.B Frequenzen, denen verglichen mit der Anregungsperiode eine größere Periode zuzuordnen ist. Es werden auch Zustände des Oszillators beobachtet, die keine endliche Periode und damit auch keine Regelmäßigkeiten mehr erkennen lassen, sogenannte *chaotische* Zustände. Da die Dynamik des Oszillators aber auch unter solchen Bedingungen den gültigen Differentialgleichungen gehorcht, ist auch das irreguläre Verhalten durch Naturgesetze determiniert. Daher spricht man vom *deterministischen* Chaos, um den naturwissenschaftlich verstandenen Begriff von dem umgangssprachlichen abzugrenzen, mit dem eher die Vorstellung von einem stochastischen Prozess verbunden ist.

3 Methoden und Begriffe der nichtlinearen Dynamik

3.1 Phasenraum und Poincaréschnitt

Ist der Zustand eines dynamischen Systems durch n physikalisch beobachtbare Größen $x_1 \dots x_n$ beschrieben, so lässt er sich als Punkt in einem entsprechenden n -dimensionalen Vektorraum auffassen. Dieser Vektorraum bildet den (verallgemeinerten) Phasenraum $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Zustand X_0 des Systems ist in diesem Raum durch einen n -dimensionalen Vektor repräsentiert. Die zeitliche Entwicklung dieses Zustands beschreibt dann eine Bahnkurve $X(t)$ in diesem Raum, eine sog. *Trajektorie*.

Analytisch lässt sich die Dynamik eines Systems i.a. durch eine Differentialgleichung beschreiben, die sich in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführen lässt; in unserem Fall ist sie von der Form:

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(X(t), c) \quad . \quad (1)$$

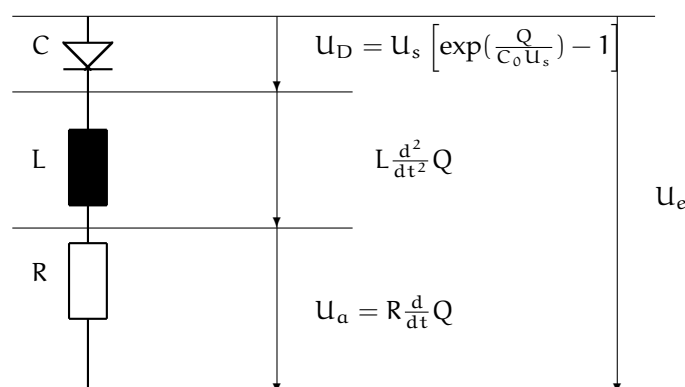


Abbildung 1: Aufbau des Toda-Oszillators

Dabei ist c ein sogenannter Kontrollparameter, hier die Amplitude des Treibers. Gleichung 1 beschreibt anschaulich ein Geschwindigkeitsfeld im Phasenraum und wird dementsprechend auch als Fluss bezeichnet; die Geschwindigkeitsvektoren liegen tangential an den Trajektorien. Die Gesamtheit aller zu einem dynamischen System gehörenden Trajektorien bildet dessen *Phasenportrait*; das Gebiet im Phasenraum, auf das die Trajektorien nach Abklingen der Anfangsbedingungen beschränkt bleiben, nennt man *Attraktor*.

Beim Toda-Oszillator nimmt Gleichung 1 die konkrete Form

$$\begin{aligned} \dot{u}_D &= \frac{I}{C_0} \left(\frac{u_D}{u_s} + 1 \right) \\ \dot{i} &= -\frac{u_R}{L} - \frac{u_s}{L} \left[\exp\left(\frac{Q}{C_0 u_s}\right) - 1 \right] - \frac{A}{L} \cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned} \quad (2)$$

an (was später noch genauer begründet wird). u_D und u_R sind die Spannungen über der Diode bzw. über dem Widerstand, A die Amplitude der Anregung. Für eine 2-dimensionale Projektion dieses Phasenraumes bieten sich die Spannung über der Diode und der Strom als Koordinaten an. Messtechnisch einfacher ist es aber, anstatt der Spannung über der Diode die Anregungsspannung zu wählen. Dieser Phasenraum zeigt mit dem von Diodenspannung und Strom aufgespannten Raum eine qualitative Übereinstimmung.

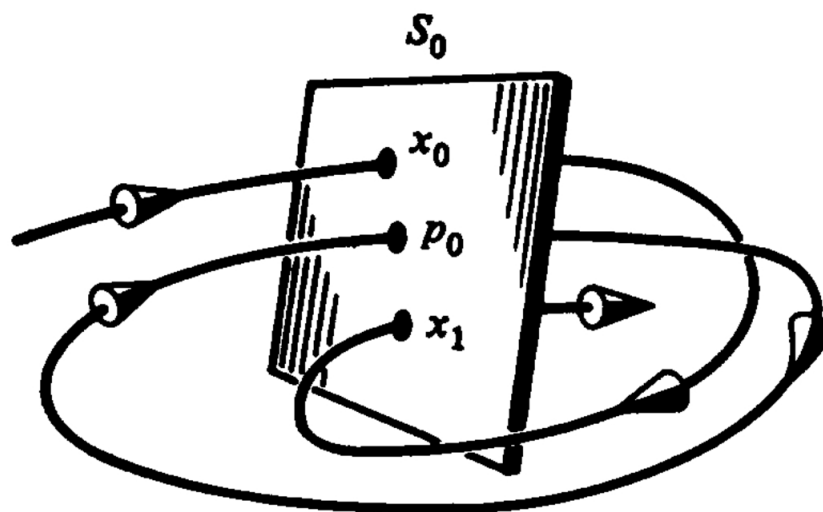


Abbildung 2: Poincaré-Schnitt: Eine $n - 1$ -dim. Hyperebene wird in den n -dim. Phasenraum gelegt; man betrachtet die Schnittpunkte der Trajektorie (in einer Richtung) mit der Ebene anstatt die Trajektorie selbst (aus Referenz [1]).

Anstatt jedoch den n -dimensionalen Phasenraum darzustellen, genügt es, die Punkte zu betrachten, in denen die Trajektorien eine $(n - 1)$ -dimensionale Hyperebene (in einer Richtung) durchstößt. Bei geeigneter Wahl dieser Schnittebene übertragen sich die topologischen Eigenschaften des Phasenportraits auf die Menge der Durchstoßpunkte. Das bedeutet, dass die aus dem Phasenportrait zu gewinnende Information in einer $n - 1$ -dimensionalen Darstellung vorliegt, worin der entscheidende Vorteil dieser Methode besteht. Einen derartigen Schnitt durch den Phasenraum bezeichnet man als POINCARÉ-Schnitt bzw. POINCARÉ-Ebene; er ist in Bild 2 veranschaulicht.

3.2 Wiederkehrabbildung

Der Begriff der Wiederkehrabbildung ist dem Gebiet der Iterationsmathematik zuzuordnen, die zu einem wesentlichen Bestandteil der Theorie nichtlinearer Systeme geworden ist. Er bezeichnet eine Iterationsvorschrift der Gestalt $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n = 1, 2, \dots$. Ein Beispiel für eine solche Iterationsvorschrift ist gegeben durch die sogenannte logistische Abbildung, die folgende Form

$$x_{n+1} = f(x_n, c) = cx_n(1 - x_n) \quad c \in [0, 4]$$

hat. Sie ergibt die in Abbildung 3 gezeigte nach unten geöffnete Parabel. Die logistische Abbildung wurde z.B. für die Beschreibung populationsdynamischer Vorgänge herangezogen; dazu kann man c als Reproduktionsrate und $(1 - x_n)$ als die für die $n + 1$ -Generation verbleibenden Ressourcen interpretieren. Der Schnittpunkt der logistischen Abbildung mit der ebenfalls einge-

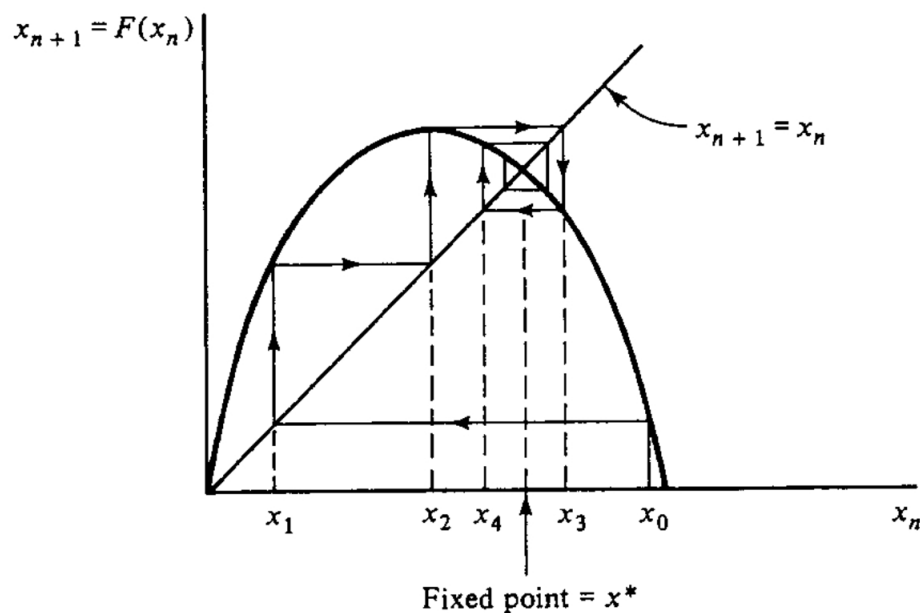


Abbildung 3: Logistische Abbildung und bildliche Veranschaulichung der Iteration (aus Referenz [1]).

zeichneten Identität stellt einen Wert x^* mit $x^* = cx^*(1 - x^*)$ dar, einen Fixpunkt der Abbildung, der unabhängig vom Startwert x_1 nach endlich vielen Iterationsschritten angenommen wird. Ein solcher auf der Winkelhalbierenden liegender Fixpunkt existiert allerdings nur für Werte von $c < 3$, wie die folgende Überlegung deutlich macht: Ein Fixpunkt x^* kann nur existieren, wenn benachbarte Werte x_n sich im Verlauf der Iteration dem Wert von x^* *annähern*, d.h. wenn der Abstand von x_n zu x^* *schrumpft*. Wenn δ_n den Abstand von x_n zu x^* bezeichnet, so gilt

$$\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*|.$$

Für den Grenzfall $\delta_n \rightarrow 0$ kann man schreiben

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} |f(x^* + \delta_n) - x^*| = \delta_n |f'(x^*)|.$$

Aus der Forderung, dass der Abstand schrumpfen soll, ergibt sich dann die Forderung $|f'(x^*)| < 1$. Einen Fixpunkt mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *stabil*, denn wird vom Wert x^* abgewichen, so wird der Fixpunkt erneut aufgesucht. Gilt hingegen $|f'(x^*)| \geq 1$, so vergrößern sich im

Verlauf der Iteration Abweichungen vom Fixpunkt; ein Fixpunkt mit dieser Eigenschaft heißt *instabil*. Dieses analytische Kriterium auf die logistische Abbildung angewandt, ergibt durch einfache Rechnung die Forderung $c < 3$. Für $c \geq 3$ wird also der auf der Winkelhalbierenden liegende Fixpunkt instabil. Dafür treten zwei neue Fixpunkte \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 auf, die abwechselnd aufgesucht werden; man nennt sie daher Punkte der Periode 2. Es sind Fixpunkte der ersten Iterierten der logistischen Abbildung, also Schnittpunkte der Identität mit $f(f(x_n))$. Für wachsendes c werden auch diese Fixpunkte instabil, und als stabile Fixpunkte treten die der vierten Iterierten auf (siehe Abbildung 4). Bei weiter wachsendem Kontrollparameter treten schließlich 2^3 , dann $2^4 \dots 2^\infty$

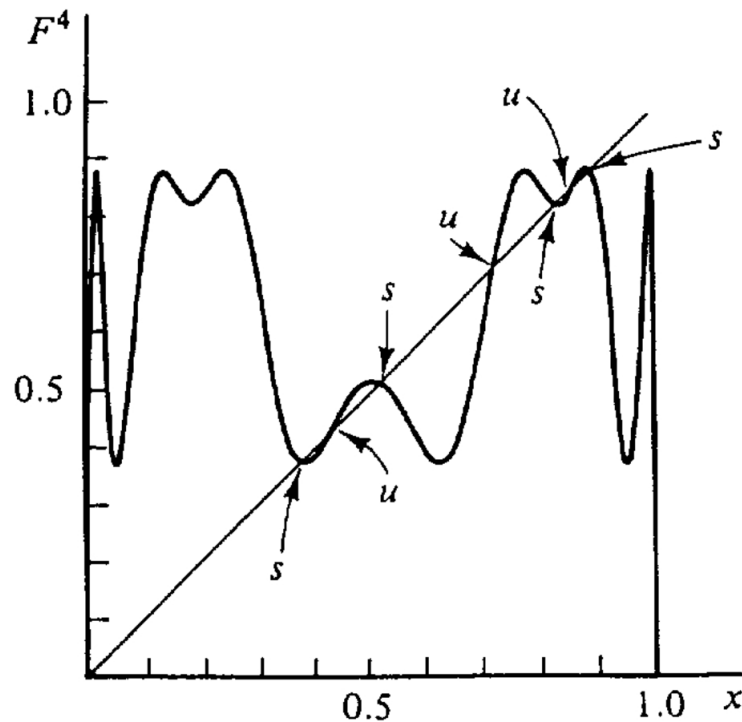


Abbildung 4: 3. Iterierte der logistischen Abbildung: Eingezeichnet sind stabile (s) und instabile Fixpunkte (u) (aus Referenz [1]).

stabile Fixpunkte auf, wobei letzter Wert zu einem Grenzwert von $c = 3,5699456 \dots$ gehört. Als Bedingung für die Existenz eines Fixpunktes x^* der Periode 2^m kann man also schreiben:

$$\begin{aligned} f^{(2^m)}(x^*, c) &= x^* \\ \left| \frac{df^{(2^m)}}{dx} \right|_{x^*} &< 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Die logistische Abbildung wurde ausführlich untersucht und offenbarte dabei Eigenschaften, die auf eine ganze Klasse von Funktionen mit quadratischem Extremum übertragen werden können und darum einen universellen Charakter besitzen. Zu diesen universellen Eigenschaften gehört z.B., dass die betragsmäßigen Abstände zwischen Werten c_n , die dem Auftreten der Fixpunkte der Periode 2^n zuzuordnen sind, dem folgenden Skalierungsgesetz genügen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{c_{n+2} - c_{n+1}} = \delta$$

wobei

$$\delta = 4,669201609 \dots$$

als Erste FEIGENBAUMkonstante bezeichnet wird. Von einer Bifurkation spricht man, wenn sich die Dynamik eines Systems in Abhängigkeit eines Kontrollparameters c qualitativ ändert. Im Phasenportrait drückt sich das in der Änderung seiner topologischen Eigenschaften aus - das kann z.B. bedeuten, dass sich die Dimension des einbettenden Raumes ändert. Den Wert eines Kontrollparameters, bei dem eine Bifurkation auftritt, nennt man *Bifurkationspunkt*. Von einem solchen Bifurkationspunkt gehen im Parameterraum verschiedene Lösungszweige des zugrundeliegenden Gleichungssystems aus, die unterschiedliche Zustände des Systems repräsentieren.

Stellt man eine charakteristische Eigenschaft des dynamischen Zustands, in der sich die qualitative Änderung der Dynamik niederschlägt (z.B. die Amplitude des Stromes im Schwingkreis), als Funktion eines Kontrollparameters dar, so erhält man ein *Bifurkationsdiagramm*. Ein solches Diagramm ermöglicht es, das Systemverhalten für einen weiten Bereich des betrachteten Kontrollparameters zu überblicken. Abbildung 5 zeigt das zur logistischen Abbildung gehörende Bifurkationsdiagramm, bei dem die Iterierten der Abbildung nach Abklingen der Anfangsbedingungen gegen den Kontrollparameter c aufgetragen sind. Für $c < 3$ gilt offenbar $x_{n+1} = x_n$; dann treten, wie im vorigen Abschnitt erläutert, die Punkte der Periode 2 als stabile Fixpunkte auf, für weiter wachsendes c schließlich die der Periode 4 u.s.w. Dementsprechend spricht man hier von *Periodenverdopplungsbifurkationen*. Für Werte von c jenseits des im vorigen Abschnitt erwähnten

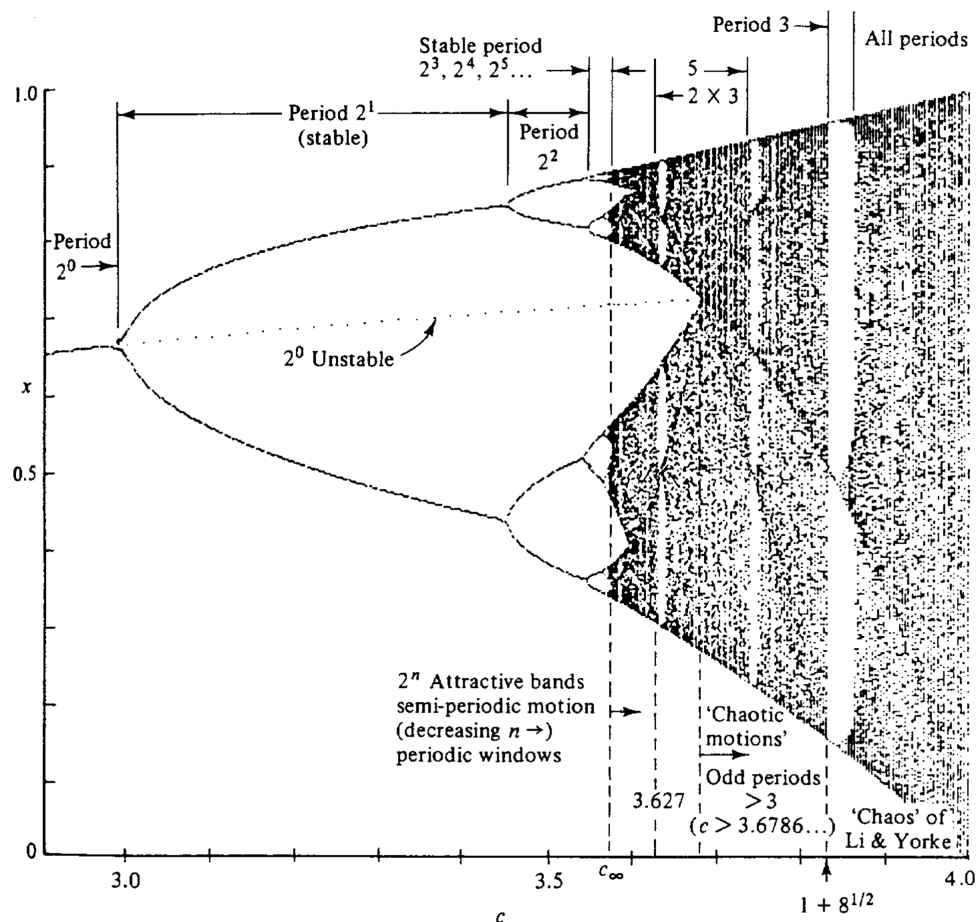


Abbildung 5: Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung (aus Referenz [1]).

Grenzwertes existieren zunächst offenbar keine stabilen Fixpunkte; die Iterierten eines Wertes x_n verteilen sich ohne erkennbare Regelmäßigkeit auf bestimmte Intervalle. Die Periodenverdopplungsbifurkation wird beim Toda-Oszillator von besonderem Interesse sein. Bei der Periodenverdopplung tritt im Frequenzspektrum der Systemantwort des getriebenen Oszillators neben der

Anregungsfrequenz eine weitere Frequenz auf, der eine gegenüber der Anregung verdoppelte Periodizität zuzuordnen ist.

Das Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung zeigt, dass die Parameterbereiche, in denen keine stabilen Fixpunkte existieren, mit solchen abwechseln, in denen es stabile Fixpunkte gibt. Das Zustandekommen dieser sogenannten periodischen Fenster macht Abbildung 6 anschaulich, welche die zweite Iterierte der logistischen Abbildung für einen Kontrollparameter zeigt, bei dem sie die Winkelhalbierende exakt tangiert. Dieser Parameterwert bildet die Schwelle, oberhalb derer drei stabile Fixpunkte der zweiten Iterierten vorhanden sind; aus dem Bifurkationsdiagramm entnimmt man $c = 1 + \sqrt{8}$. Diesem Mechanismus zufolge bezeichnet man diese Änderung des Lösungsverhaltens als *Tangentenbifurkation*.

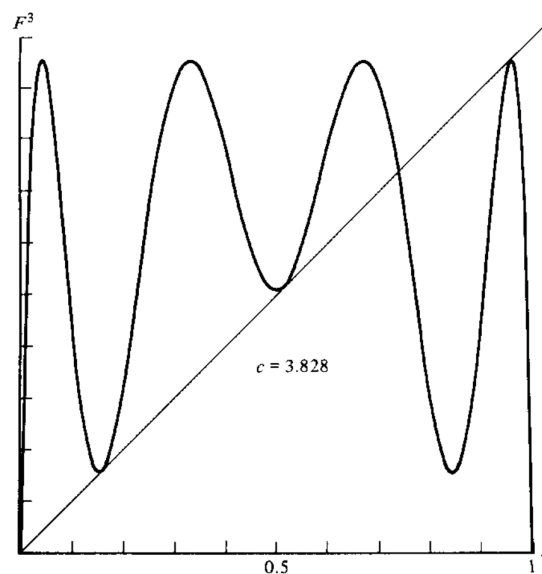


Abbildung 6: 2. Iterierte der logistischen Abbildung in einem Parameterbereich, in dem eine Tangentenbifurkation auftritt (aus Referenz [1]).

3.3 Leistungsdichtespektren

Die Dynamik nichtlinearer Systeme weist unter bestimmten Bedingungen keine erkennbare Regelmäßigkeit auf. Um die irreguläre oder vermeintlich irreguläre Zeitentwicklung einer Observablen zu untersuchen, bietet sich die diskrete FOURIER-Transformation an. Ist diese Entwicklung von nicht viel mehr als einer Frequenz bestimmt, so lässt die einfache Betrachtung der Zeitentwicklung ihre Regelmäßigkeit unter Umständen nicht mehr erkennen, obwohl sie eine feste und endliche Periode einhält. Eine solche, durch eine endliche Anzahl beteiligter Frequenzen gegebene Regelmäßigkeit macht die FOURIER-Transformation offenkundig: Sie liefert das Amplitudenspektrum der an der Zeitentwicklung beteiligten Frequenzen und wird auf der Basis zeitdiskreter Signale $\{x(t_k)|k = 0 \dots N-1\} = \{x(kT_a)|k = 0 \dots N-1\}$ berechnet, die im allgemeinen durch eine digitale Abtastung der betrachteten Messgröße gewonnen werden, wobei f_a die *Abtastfrequenz* mit der Periode T_a sei. Die diskrete FOURIERtransformation ist definiert als

$$S(nf_a/N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_a) e^{-i2\pi \frac{nf_a}{N} kT_a} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

Das Leistungs(dichte)spektrum ergibt sich aus dem Amplitudenspektrum $S(nf_a/N)$ als dessen Betragsquadrat.

3.4 Autokorrelationsfunktion

Um das Maß der Irregularität einer Observablen quantitativ abzuschätzen, führt man eine Funktion ein, die die Ähnlichkeit eines Wertes $x(t)$ der Zeitreihe mit dem Wert $x(t+\tau)$ zu einem späteren Zeitpunkt misst. Diese als *Autokorrelationsfunktion* bezeichnete Abbildung ist definiert als:

$$C(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad . \quad (5)$$

In der Praxis erfolgt diese Berechnung ebenfalls auf der Basis zeitdiskreter Signale $\{x(t_k)|k = 0 \dots N-1\} = \{x(kT_a)|k = 0 \dots N-1\}$. So kann man von der Integration zu einer Summation übergehen; die Funktion bekommt die Form:

$$C(\tau) = \frac{1}{NT_a} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_a)x(kT_a+\tau)T_a \quad . \quad (6)$$

Diese Funktion berechnet also den Mittelwert über alle Produkte $x(t)x(t+\tau)$.

3.5 Phasenraumrekonstruktion

Obwohl man sich bei der Darstellung des Phasenportraits des Toda-Oszillators auf eine zweidimensionale Projektion beschränkt, ist eine Darstellung unter Verwendung aller systembestimmenden Parameter grundsätzlich nicht ausgeschlossen, da diese zum einen bekannt und zum anderen messtechnisch relativ einfach erfassbar sind. Das ist jedoch nicht immer so: Häufig stehen nicht alle Observablen zur Verfügung. Die Phasenraumrekonstruktion bezeichnet eine Methode, aus der Messung von nur einer dynamischen Variablen den Phasenraum zu rekonstruieren. Dabei werden aus der Zeitreihe $\{x(t_k)|k = 0 \dots N-1\}$ Phasenraumvektoren $\mathbf{X}(t)$ nach der Vorschrift

$$\mathbf{X}(t) := \{x(t_k), x(t_k + \tau), x(t_k + 2\tau), \dots, x(t_k + (n-1)\tau)\} \quad (7)$$

konstruiert. τ bezeichnet einen Zeitversatz, der theoretisch frei wählbar ist, dessen günstige Wahl aber in der Praxis durchaus eine Schwierigkeit darstellt. n ist die Dimension.

Es mag überraschen, dass die Möglichkeit besteht, aus nur einer Variablen auf den vollständigen Phasenraum zu schließen. Der Grund für diese Möglichkeit ist darin zu suchen, dass die komplizierte Dynamik eines Systems durch ein System von gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben wird, dass also die einzelnen Komponenten der Funktion \mathbf{F} in Gleichung 1 miteinander gekoppelt sind. Das bedeutet anschaulich, dass die zeitliche Entwicklung der einen Komponente, aus der der Phasenraum rekonstruiert wird, auch durch die zeitliche Entwicklung der übrigen Komponenten bestimmt wird und in diesem Sinne Information über diese Komponenten enthält. Fasst man also den rekonstruierten Phasenraumvektor \mathbf{X} als eine n -dimensionale Abbildung des Phasenraumes \mathbf{P} in einen Raum \mathbf{P}' auf, so darf man davon ausgehen, dass die durch die JAKOBI-Matrix gegebene lokale Linearisierung keine linear abhängigen Zeilen oder Spalten aufweist. Die n -komponentigen Spaltenvektoren dieser JAKOBI-Matrix spannen also einen n -dimensionalen Raum auf, der, wie man zeigen kann, dieselbe topologische Struktur wie der ursprüngliche Phasenraum aufweist.

4 Die Diode als nichtlineares Element

Die Halbleiterdiode besitzt eine polungsabhängige Leitfähigkeit. In der Diode stoßen eine p - und eine n -dotierte Schicht aneinander, die unterschiedliche Konzentrationen an freien Ladungsträgern eines Vorzeichens haben. Die Folge ist ein Strom, der dieses Konzentrationsgefälle bis zu einem gewissen Maß ausgleicht und zu einer Reduzierung der Anzahl freier Ladungsträger in

der Umgebung des PN-Übergangs führt: Eine sog. Verarmungszone bildet sich aus. Wird die Diode in Sperrrichtung gepolt, so werden zusätzlich freie Ladungsträger von der Spannungsquelle aus dem Bereich um den Übergang „abgesogen“, so dass die Verarmungszone sich verbreitert. Wird die Diode hingegen in Flussrichtung gepolt, so wird die Verarmungszone abgebaut und freie Ladungsträger diffundieren in großer Zahl über den PN-Übergang.

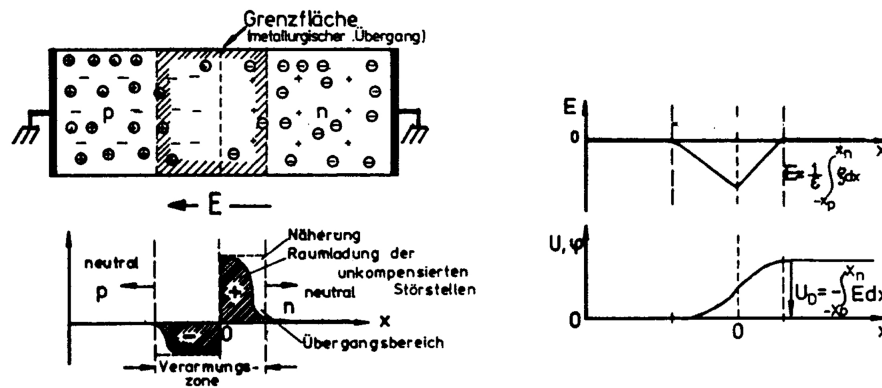


Abbildung 7: Links oben: Am PN-Übergang kommt es ohne äußeres Feld zur Ausbildung einer Verarmungszone. Die freien Ladungsträger, die auf die Dotierung zurückgehen, sind eingekreist gezeichnet. Links unten: In der Verarmungszone bleiben die unkompenzierten Dotierungsatome zurück und bauen eine Raumladung auf, die die Ursache des elektrischen Feldes ist. Rechts oben: Aus der Raumladung errechnet sich über die POISSONGleichung die Feldstärke. Rechts unten: Aus der Feldstärke im PN-Übergang ergibt sich die Schwellspannung, die eine diodenspezifische Größe darstellt (aus Referenz [2]).

Grundsätzlich ist also die Leitfähigkeitsänderung des PN-übergangs mit einem Austausch von Ladungsträgern mit der Umgebung verbunden. Daher kann man der Diode eine *differentielle* Kapazität zuordnen, die durch folgende Gleichung modelliert werden kann:

$$\frac{dQ}{dU} = C(U) = \frac{C_0 U_s}{U_s + U} \quad U > -U_s \quad . \quad (8)$$

U_s ist die sogenannte Schwellspannung, die überschritten werden muss, wenn die Diode leiten soll. Sie ist eine unmittelbare Folge der auch ohne äußere Spannung im PN-Übergang vorhandenen Verarmungszone und liegt bei der hier verwendeten Diode bei 0.5V. C_0 ist eine Nullpunktkapazität, die ebenfalls auf diese Verarmungszone zurückzuführen ist. Gleichung 8 hat bei $U = -U_s$ eine Polstelle, die Gleichung modelliert also die Diodenkapazität nur für Sperrspannungen (diese werden üblicherweise positiv gerechnet). Eine genauere theoretische Betrachtung der Kapazität führt darauf, dass die Kapazität im Durchlassbereich keine Polstelle hat, sondern exponentiell ansteigt.

Literatur

- [1] E. A. Jackson. *Perspectives of nonlinear dynamics*, Band 1. University Press, Cambridge, 1991.
- [2] R. Paul. *Elektronische Halbleiterbauelemente*. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [3] P. Berg r, Y. Pomeau und C. Vidal. *Order within chaos*. John Wiley and Sons, New York, Toronto, Chichester, Brisbane, Singapore, 1984.
- [4] C. Jeffries und J. Pérez. Observation of a pomeau-manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator. *Phys. Rev. A*, **26**, 2117–2122 (1982).