

# Versuchsdurchführung Toda-Oszillator

## 1 Apparativer Aufbau des Experiments

Der Versuchsaufbau umfasst die folgenden Komponenten:

- Schwingkreis mit Diode als nichtlinearer Kapazität ( $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $L = 64\text{mH}$ ,  $C_{s0} = 100\text{pF}$ )
- Funktionsgenerator mit Frequenzfilter
- Verstärker
- Versuchsgerät zur Erstellung von Bifurkationsdiagrammen und Wiederkehrabbildungen
- Digitales Oszilloskop

## 2 Messung der Diodenkapazität

Sie bestimmen in diesem Versuchsteil die Kapazität der Diode im Schwingkreis. Machen Sie sich zunächst klar, ob ein Reihen- oder Serienschwingkreis vorliegt. In der Vorbereitung haben Sie sich informiert, wie die Resonanzfrequenz bestimmt wird.

### Aufbau

Das Versuchsgerät für Bifurkationsdiagramme und Wiederkehrabbildungen (s. Abschnitt 3.3) und der Frequenzfilter werden in diesem Versuchsteil nicht benötigt. Verbinden Sie den Signal- ausgang des Funktionsgenerators mit dem Eingang „Anregung“ des nichtlinearen Schwingkreises und dem 1. Kanal des digitalen Oszilloskops. Den Ausgang „Antwort“ des Kreises verbinden Sie mit dem 2. Kanal des Oszilloskops. Mit dem Offset-Regler des Funktionsgenerators wird eine Gleichspannung eingestellt, die am Oszilloskop abgelesen werden kann. Dieser Gleichspannungskomponente wird ein Wechselspannungsanteil von etwa  $20\text{mV}_{ss}$  überlagert (Frequenz ca.  $50\text{kHz}$ ).

### Aufgaben

- a) Stellen Sie am Funktionsgenerator die Wechselspannung von  $20\text{mV}_{ss}$  ein. Sie müssen dazu im Menü „Output“  $-20\text{dB}$  einstellen. Schauen Sie sich die erzeugte Antwort des Schwingkreises am Oszilloskop an. Warum sehen Sie nicht die eingestellte Wechselspannung?
- b) Bauen Sie den Verstärker zwischen Funktionsgenerator und Schwingkreis ein. Erhöhen Sie die Wechselspannung soweit, dass am Oszilloskop  $20\text{mV}_{ss}$  angezeigt werden. Im X-Y-Modus müsste nun eine Ellipse erkennbar sein. Erklären Sie, wie diese entsteht.
- c) Suchen Sie die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei einer Offsetspannung von  $0\text{V}$ . Im X-Y-Modus des Oszilloskops entartet die Ellipse des Schwingkreises dann zu einer Geraden. Erklären Sie warum. Überprüfen Sie durch Ändern der Offsetspannung in positive und negative Richtung, in welcher Richtung die Diode eingebaut ist. (Wird die Resonanzfrequenz größer oder kleiner?)
- d) Bestimmen Sie nun in äquidistanten Schritten von  $-0,7\text{ V}$  bis  $0\text{ V}$  (10 Messwerte) und von  $0\text{ V}$  bis  $0,3\text{ V}$  (10 Messwerte) die Resonanzfrequenz. Warum dürfen Sie nicht über  $0,3\text{ V}$  messen?

### 3 Untersuchung der Dynamik

Die gesamte Untersuchung findet bei einer festen Frequenz der Anregungsspannung statt. Diese sollte beim nichtlinearen Schwingkreis ca 10% unterhalb der Resonanzfrequenz bei 0V Offset sein. (Diese Resonanzfrequenz können Sie auch berechnen, wenn Sie  $C = C_0$  setzen.) Nur in diesem Frequenzbereich zeigt der Oszillator bei den hier verfügbaren Treiberamplituden sein interessantes Verhalten.

#### 3.1 Zeitreihen und Phasenraumdarstellungen

Sie müssen nun zusätzlich den Frequenzfilter in das Anregungssignal des Schwingkreises einbauen. Wenn Sie dann die Anregung auf den 1. Kanal und die Antwort auf den 2. Kanal des Oszilloskops legen, können Sie die Systemantwort in Abhängigkeit von der Treiberamplitude in ganz elementarer Weise beobachten (Oszilloskop im Zeitablenkungsmodus: Display  $\rightarrow$  X-Y-Antw  $\rightarrow$  (YT)).

##### Aufgaben

- Stellen Sie den von Anregung und Strom aufgespannten Phasenraum dar. Die Methode entspricht derjenigen, mit der man die bekannten LISSAJOUSfiguren erzeugt. Wo ist auch im nichtlinearen Schwingkreis der lineare Schwingkreis zu finden?
- Wenn Sie die Anregung bei kleinen Amplituden beginnend vergrößern, so beobachten Sie eine Folge von Periodenverdopplungen, die in den chaotischen Zustand mündet. Dieser wird bei weiter wachsender Amplitude von periodischen Fenstern abgelöst. Ein ähnliches Verhalten sieht man bei sich verkleinernder Amplitude. Außerdem können Sie zu jedem Zustand die Zeitreihe auf dem Oszilloskop darstellen. Woraus besteht die jeweilige Zeitreihe?
- Nehmen Sie für alle Zustände die Darstellung im Phasenraum mit dem Oszilloskop auf und notieren Sie den Wert des Kontrollparameters. (Skizzen im Laborbuch)
- Bestimmen Sie die Lage der Bifurkationspunkte für steigende und für fallende Amplitude.

#### 3.2 Poincaréschnitt

Wenn Sie die Phasenportraits auf dem Oszilloskop sehen und nun zusätzlich das Versuchsgerät mit dem TTL-Signal des Funktionsgenerators versorgen und dessen Z-Ausgang zur Helltastung des Bildschirms verwenden (an den 3. Eingang des Oszilloskops anschließen), können Sie einen POINCARÉSchnitt realisieren. (Das Versuchsgerät wird im folgenden Abschnitt näher beschrieben, hier brauchen Sie wirklich nur den TTL-Eingang und Z-Ausgang.)

##### Aufgaben

- Was können Sie mit Abtastweite und Abtastzeitpunkt einstellen? Welche Einstellungen sind sinnvoll? Was ist bei der Wahl des Abtastzeitpunktes zu beachten?
- Nehmen Sie für alle Zustände den Poincaréschnitt auf.

#### 3.3 Das Versuchsgerät

In den folgenden Messungen benötigen Sie das Versuchsgerät. Die Arbeitsweise des Versuchsgerätes ist im Folgenden schematisch beschrieben. Das Gerät ermöglicht die Darstellung von Bifurkationsdiagrammen und Wiederkehrabbildungen in Echtzeit. Zwischen den beiden Betriebsarten wählt man mit dem entsprechend gekennzeichneten Schalter auf der Frontplatte. Die Verkabelung erfolgt in der in Bild 1 gezeigten Weise. In der Betriebsart „Bifurkationsdiagramme“

arbeitet es nach dem Schema, das in Bild 2 gezeigt ist. Vom Funktionsgenerator erhält das Gerät die Sinusspannung und das dazu gleichphasige TTL-Signal. Die Sinusspannung wird moduliert, und zwar von einer Dreiecksspannung mit einer Frequenz von 35Hz. Die Modulation wird durch Multiplikation der Sinusspannung mit der Dreiecksspannung erreicht. Die Amplitude der Sinusspannung steigt linear mit der Zeit an, bis ihr Maximalwert erreicht ist. Dann fällt sie linear mit der Zeit wieder ab. Die modulierte Sinusspannung wird durch eine Leistungsstufe mit kleinem Ausgangswiderstand verstärkt und am Ausgang „Schwingkreisanregung“ bereitgestellt. Am X-Ausgang steht die modulierende Dreiecksspannung zur Verfügung. Sie stellt den **Kontrollparameter** dar, da sie unmittelbar mit der Anregungsamplitude des Schwingkreises gekoppelt ist. Um den phasengleich zur Anregung gemessenen Strom im Schwingkreis gegen den Kontrollparameter auftragen zu können, wird der Strom als Spannung über dem ohmschen Widerstand stroboskopisch abgetastet. Das heißt, dass phasensynchron zur Anregung der momentane Spannungswert in ein analoges Speicherglied eingelesen wird, der dort bis zum nächsten Lesevorgang erhalten bleibt und am Y-Ausgang des Gerätes herausgeführt ist. Zur Taktung dieses Speichers wird das TTL-Signal in ein Rechtecksignal mit asymmetrischem Tastverhältnis umgeformt. Die Pulsbreite des positiven Peaks beträgt  $2,4\mu\text{s}$  und entspricht der Einschwingzeit des Speichergliedes. Dieser Puls wird allerdings nicht direkt zur Speichertaktung verwandt, sondern lässt sich mit einem stufenlos einstellbaren Verzögerer um maximal die Hälfte der Anregungsperiode verzögern. Dadurch sind verschiedene Abtastzeitpunkte einstellbar. Möchte man Hysteresevorgänge untersuchen, ist es nötig, zwischen der Abtastung bei steigender oder fallender Amplitude der Anregung wählen zu können. Dazu wird mit dem Schalter „Abtastmodus“ ein Steigungsdetektor eingestellt, der das Lesetaktsignal je nach Schalterstellung nur bei steigender, nur bei fallender Amplitude oder ständig an das Speicherglied freigibt. Betreibt man das Oszilloskop im X-Y-Modus, legt die Dreiecksspannung als Kontrollparameter

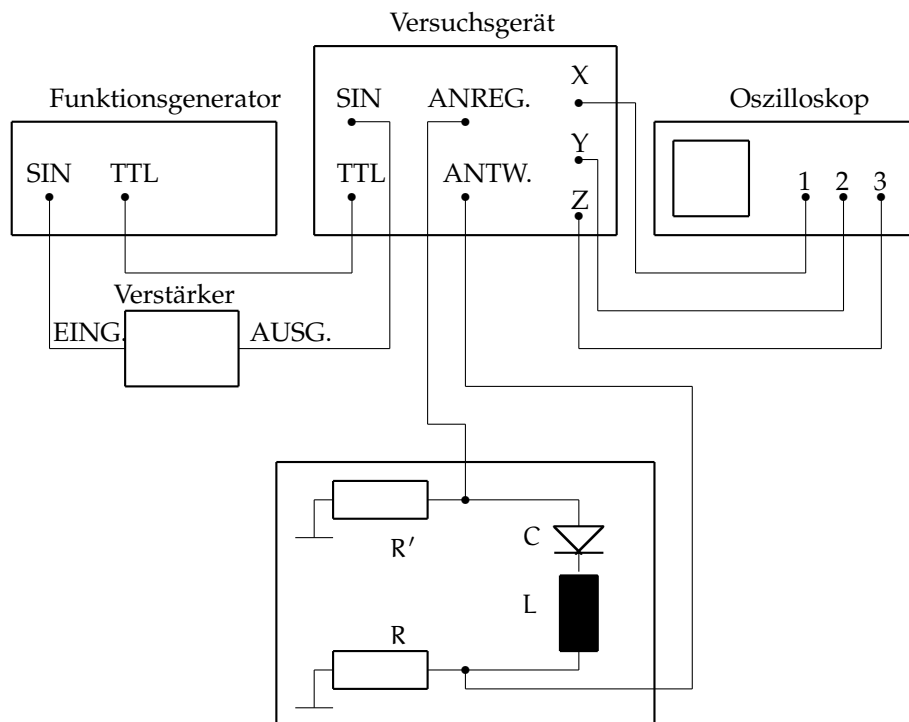


Abbildung 1: Prinzipschaltplan für den Einsatz des Versuchsgerätes. Der Widerstand  $R' = 50\Omega$  dient der Impedanzanpassung, der 3. Eingang des Oszilloskops dient der Dunkeltastung des Schirmes.

auf den 1. Kanal und die stroboskopisch abgetastete Schwingkreisantwort auf den 2. Kanal, so wird das Bifurkationsdiagramm mit einer Frequenz von 35Hz aufgebaut.

In der Betriebsart „Wiederkehrabbildung“ entspricht die Funktionsweise der in Bild 3 dargestellten Methode. Die Darstellung der Wiederkehrabbildung, die einem eingelesenen Wert  $x_n$  seinen Nachfolgewert  $x_{n+1}$  zuordnet, erfolgt bei konstanter Anregungsamplitude. Es gilt:

$$x(nT + \varphi) := x_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit  $T$  als Anregungsperiode und  $\varphi$  als einzustellender Verzögerung. Der Einlesevorgang arbeitet wie der oben beschriebene mit einem getakteten analogen Speicher. Zusätzlich steht jedoch noch ein weiterer Speicher zur Verfügung, der vom inversen Taktsignal gesteuert wird. Dieser zweite Speicher übernimmt die Werte aus dem ersten Speicher und stellt sie am X-Ausgang des Gerätes zur Verfügung. Liegt am Y-Ausgang der Wert  $x_{n-1}$  an, so steht am Y-Ausgang wegen des wechselseitigen Taktes der beiden Speicher  $x_n$ .

### 3.4 Bifurkationsdiagramme

Zur Darstellung von Bifurkationsdiagrammen nehmen Sie den Aufbau nach Abbildung 1 vor. Das Oszilloskop muss im DC-Modus betrieben werden. Wählen Sie beim Funktionsgenerator die maximale Amplitude. Wenn Sie beim 1. Kanal 1V/Div und beim 2. Kanal 50mV/Div einstellen, sollte das Bild gut ausgefüllt sein.

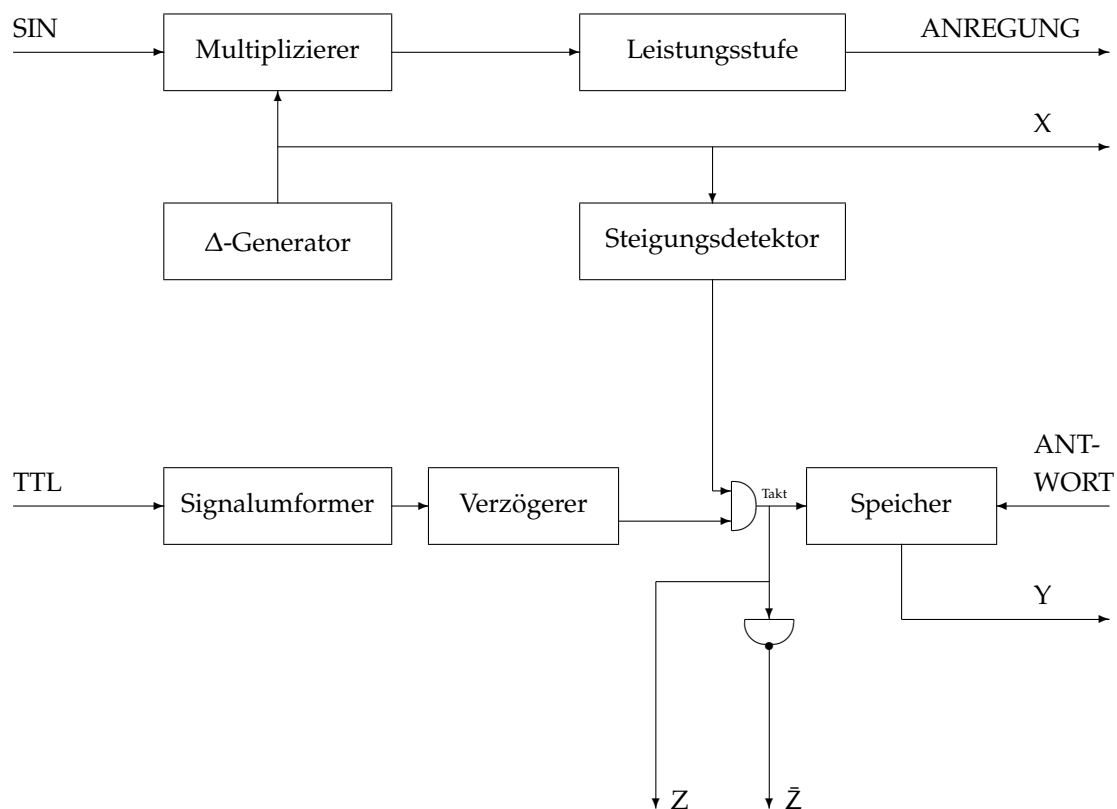


Abbildung 2: Blockschaltbild zur Erzeugung von Bifurkationsdiagrammen (Die Pfeile symbolisieren den Signalfluss, die logischen Gatter entsprechen ihrer üblichen Bedeutung).

Sie können jetzt Bifurkationsdiagramme für steigende oder für fallende Treiberamplitude (oder ständige Abtastung) sehen. Wie Sie beim vorigen Versuchsteil schon bemerkt haben, sind die jeweiligen Bifurkationspunkte gegeneinander verschoben. Offenbar hängt die Veränderung des dynamischen Verhaltens nicht nur von der Amplitude ab, sondern auch von der *Vorgeschichte* der Dynamik - so etwas bezeichnet man allgemein als Hysterese. (Hier ist nicht die Hysterese gemeint, die mit der Magnetisierung eines Eisenkernes, womöglich dem der hier verwendeten Spule, verbunden sein kann!) Wie die Hysterese entsteht, macht schematisch Abbildung 4 deutlich.

### Aufgaben:

- Erklären Sie die Methode, nach der Bifurkationsdiagramme gewonnen werden. Nehmen Sie dazu auch ein Diagramm mit dem linearen Kreis auf und erläutern Sie seine Form.
- Nehmen Sie für alle drei Abtastmodi die Bifurkationsdiagramme auf. Bestimmen Sie mit Hilfe der „Fadenkreuz“-Funktion die Lage der Bifurkationspunkte und die Hysterese.

## 3.5 Wiederkehrabbildungen

Schalten Sie das Versuchsgerät auf diese Betriebsart um und wählen Sie beim Oszilloskop gleiche Empfindlichkeiten für beide Kanäle. Stellen Sie das Oszilloskop so ein, dass der Leuchtpunkt in der unteren linken Ecke des Schirmes liegt, wenn keine Signale an den Eingängen liegen (DC-Kopplung!).

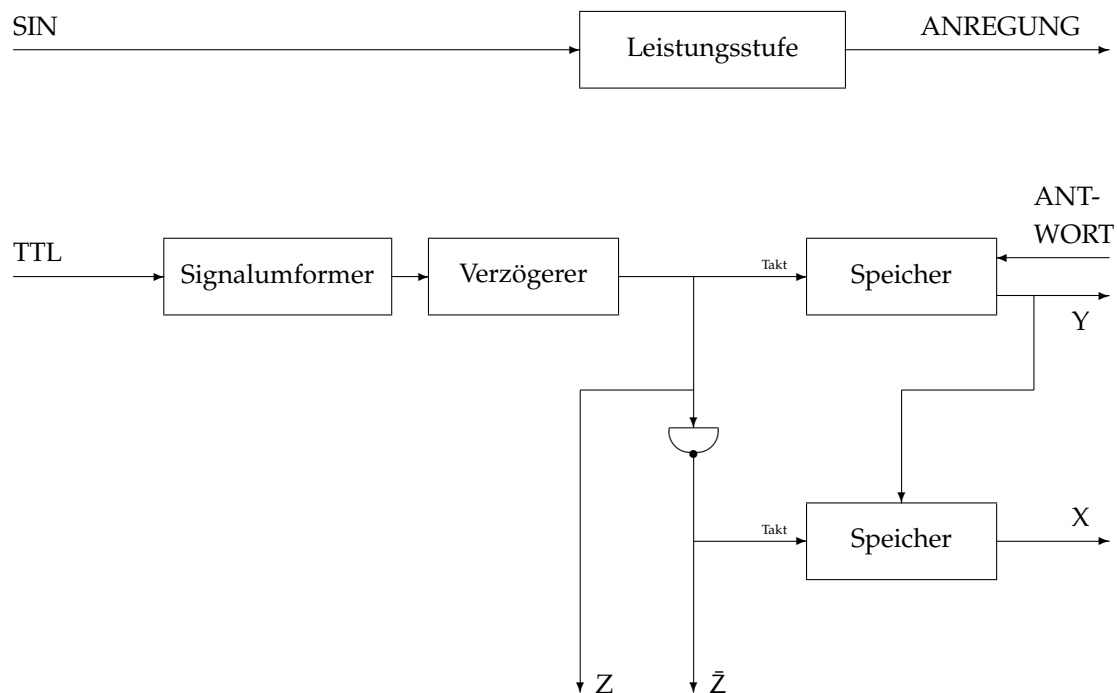


Abbildung 3: Blockschaltbild zur Darstellung der Wiederkehrabbildung (Pfeile und logische Gatter sind entsprechend Abb.2 zu verstehen).

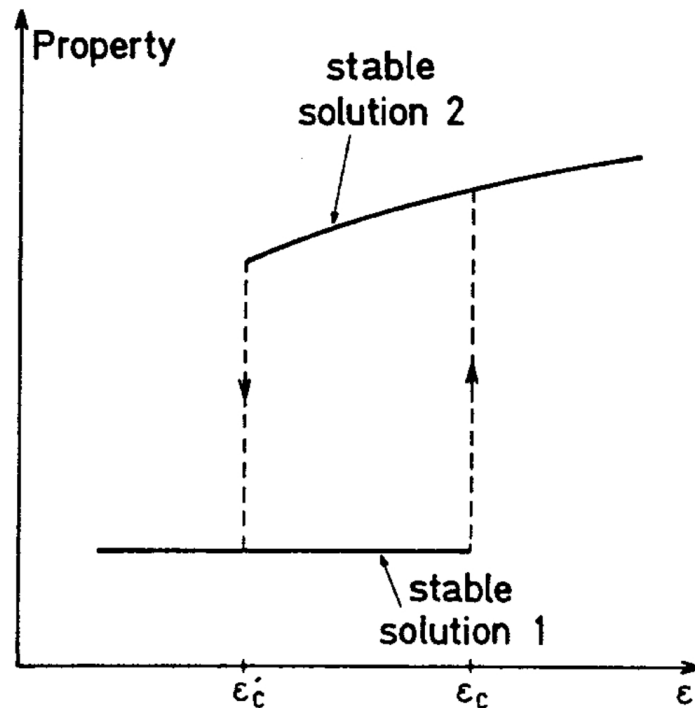


Abbildung 4: Schematische Darstellung zum Zustandekommen der Hysterese: Bei Erreichen des kritischen Wertes  $\epsilon_c$  wird Lösung 1 instabil. Bei fallender Amplitude wird Lösung 2 bei  $\epsilon_c'$  instabil.

#### Aufgaben:

- Nehmen Sie die Wiederkehrabbildungen für alle Zustände auf.
- Notieren Sie die Koordinaten für die Periode-2- und 4-Zustände (in V) und weisen Sie nach, dass die einzelnen Punkte in einem festen Zyklus aufgesucht werden.

### 3.6 Intermittenz

Für die Intermittenz benötigen Sie das Versuchsgerät nicht mehr. Bauen Sie wieder die Schaltung aus Abschnitt 2 auf und schließen Sie den PC an. In der Vorbereitung haben Sie sich über die Tangentenbifurkation informiert. Bei dieser tritt ein Fenster der Periode  $m$  auf, wenn die Abbildung  $f^m$  (mit  $f$  als Wiederkehrabbildung) die Identität an  $m$  Punkten exakt tangiert. Wir stellen uns hier die Frage, was passiert, wenn diese Abbildung die Identität nicht exakt tangiert, sondern in der bildlichen Darstellung ein schmaler Kanal bestehen bleibt, wie in Abbildung 5 gezeigt.

In diesem Fall lösen nahezu periodische und chaotische Phasen trotz konstanter Anregungsamplitude einander ab. Dieses Einfallen chaotischer Phasen in das laminare Systemverhalten bezeichnet man als Intermittenz. Es tritt auf an der Schwelle zu einem periodischen Fenster. Da hier die höheren Iterierten der Wiederkehrabbildung nicht dargestellt werden können, beschränken wir uns auf die Aufnahme von Zeitreihen, die die Intermittenz zeigen.

#### Aufgaben:

- Erklären Sie das Phänomen der Intermittenz. Beachten Sie, dass die eingelesenen Spannungswerte auf ein Intervall beschränkt sind, während die Iteration den Kanal durchläuft.

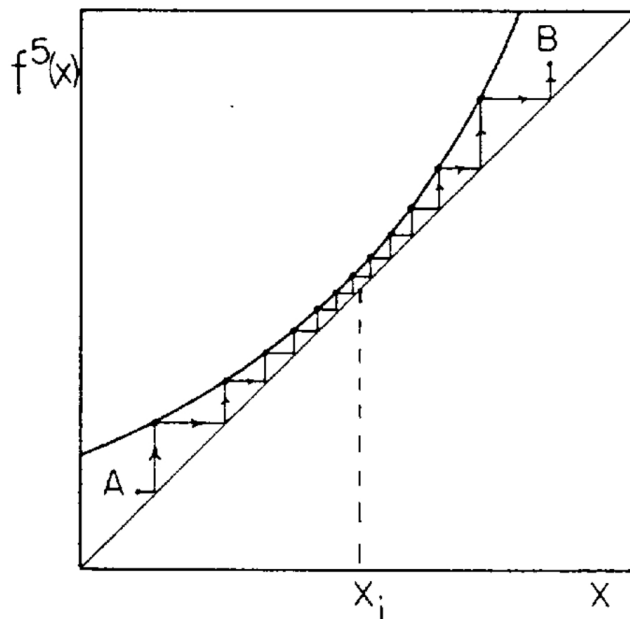


Abbildung 5: Während die Iteration den Kanal zwischen Identität und Wiederkehrabbildung „durchläuft“, verhält sich das System praktisch periodisch. (Aus [1]).

- b) Nehmen Sie mit dem zur Verfügung gestellten LabVIEW-Programm am PC eine Zeitreihe auf, die eine Intermittenz nachweist. Kennzeichnen Sie periodische und chaotische Phasen. Besprechen Sie die Einstellungen im Programm mit dem Assistenten (Wahl der Abtastfrequenz?).

### 3.7 Phasenraumrekonstruktion

In diesem Teil des Versuches sollen Sie experimentell Kriterien entwickeln, die der gewählte Zeitversatz erfüllen muss, wenn im rekonstruierten Phasenraum die Dynamik des Oszillators ablesbar sein soll. Verwenden Sie das zur Verfügung gestellte LabVIEW-Programm.

#### Aufgaben:

- a) Lassen Sie exemplarisch den Phasenraum des Periode-2-Zustandes für unterschiedliche Zeitversätze rekonstruieren. Welcher Wertebereich für  $\tau$  eignet sich bei ihren Daten besonders gut?
- b) Rekonstruieren Sie mit dem eben gewählten  $\tau$  für alle dynamischen Zustände den Phasenraum.

Falls Sie den Versuch Spektralanalyse bereits behandelt haben, bearbeiten Sie bitte den Abschnitt 3.8. Ansonsten beschäftigen Sie sich bitte mit Aufgabe 3.9.

### 3.8 Spektralanalyse des Toda-Oszillators: Leistungsdichtespektrum und Autokorrelationsfunktion

In diesem Teil des Versuches dokumentieren Sie die Dynamik des Toda-Oszillators mit Hilfe der Leistungsspektren und untersuchen die Autokorrelation verschiedener Zustände.

Bei der digitalen Datenaufnahme ist das zu verarbeitende Signal diskretisiert. Diese diskreten Werte werden in einen Zahlencode umgesetzt, was einer gewissen Zeit bedarf. Dem zeitlichen Auflösungsvermögen digital arbeitender Systeme sind also grundsätzlich Grenzen gesetzt.

Diejenige Größe, die auf den ersten Blick die Möglichkeiten der digitalen Datenaufnahme beschränkt, ist gegeben durch die Speicherkapazität der Oszilloskopkarte. Möchte man die Zeitentwicklung des Oszillators über ein möglichst langes Zeitintervall festhalten (und dies ist für ein sich chaotisch verhaltendes System angemessen), so ist man bestrebt, eine niedrige Abtastfrequenz zu wählen, um damit über das lange Zeitintervall Speicherplatz zur Verfügung zu halten. Jedoch stehen das zu verarbeitende Signal und der Abtastvorgang über das NYQUISTkriterium in Beziehung, d.h. dass die höchste im Spektrum des abgetasteten Signals vorkommende Frequenz höchstens der **halben Abtastfrequenz** entsprechen darf. Ist  $f_a$  die Abtastfrequenz, dann nennt man  $f_a/2$  die NYQUISTfrequenz. Sie stellt eine obere Schranke für die zu verarbeitenden Frequenzen dar.

Das Bestreben, das Oszillatorverhalten über ein möglichst ausgedehntes Zeitintervall zu beobachten, führt hier also dazu, daß schnell die Grenze zur Unterabtastung erreicht ist. Möchte man hingegen den zeitlichen Verlauf von Spannung und Strom im Schwingkreis zeitlich hoch auflösen, wie es z.B. für die Rekonstruktion des Phasenraumes sinnvoll ist, schließt das die Beobachtung über eine entsprechend kürzere Zeit ein, da man eine relativ hohe Abtastfrequenz wählt und die Speicherkapazität entsprechend schnell erschöpft ist. Es erweist sich deshalb als sinnvoll, sich vor der Datenaufnahme über ihre Verwendung klar zu sein.

#### Aufgaben:

- a) Begründen Sie, welche Abtastrate hier sinnvollerweise zu wählen ist. Beachten Sie dabei folgenden Zusammenhang: Wenn  $\Delta t$  die Abtastperiode bezeichnet, so gilt im Leistungsdichtespektrum für das kleinste auflösbare Frequenzintervall  $\Delta f = 1/N\Delta t$  mit  $N$  als Länge der diskreten Zeitserie.  
Nehmen Sie Zeitreihen von allen dynamischen Zuständen des Toda-Oszillators auf und berechnen Sie die Spektren. Wählen Sie geeignete dB-Skalen und Fensterlängen. Geben Sie an, welche Frequenzen Sie vorfinden.
- b) Diskutieren Sie die Spektren und optimieren Sie diese.
- c) Lassen Sie die Autokorrelationsfunktionen für alle periodischen und für zwei chaotische Zustände des Oszillators berechnen. Machen Sie den Unterschied zwischen AKF's von periodischen und chaotischen Zeitreihen deutlich. Zeigen Sie, dass die Autokorrelationsfunktion einer periodischen Funktion mit der Periode  $pT_a$ ;  $p \in \mathbb{N}$  und  $p \leq N - 1$  wieder eine periodische Funktion ist.

### 3.9 Logistische Abbildung

In diesem Versuchsteil beschäftigen Sie sich eingehender mit der logistischen Abbildung. Verwenden Sie zur Darstellung MatLab oder Python und programmieren Sie die logistische Abbildung. Machen Sie deutlich, welchen Einfluss der Kontrollparameter hat und markieren Sie stabile und instabile Fixpunkte. Schauen Sie dazu auch in die Aufgaben, die Sie im Protokoll bearbeiten (Abschnitt 3.10).



### 3.10 Auswertung

Bitte beantworten Sie zusätzlich zur Darstellung ihrer Messdaten die folgenden Fragen in Ihrem Protokoll:

- **Diodenkapazität:**

- Tragen Sie die Kapazität gegen die Offsetspannung auf.
- Bestimmen Sie durch graphische Integration die Abhängigkeit von gespeicherter Ladung und an der Diode liegender Spannung gemäss

$$dQ = \int C(u) du \quad . \quad (1)$$

- Bestimmen Sie durch eine weitere Integration die potentielle Energie  $V(Q)$  nach

$$V(Q) = \int u(Q) dQ \quad . \quad (2)$$

- Tragen Sie die Abhängigkeiten 1 und 2 graphisch auf. Nehmen Sie in diese Darstellungen auch die Graphen der Gleichung

$$\frac{dQ}{du} = C(u) = \frac{C_0 u_s}{u_s + u} \quad u > -u_s \quad (3)$$

und die entsprechenden durch Integration gewonnenen Graphen auf; dazu setze man für  $u_s = 0.5V$  und für  $C_0$  den Wert, den die Messung erbracht hat ( $C_0 = C(0)$ ). Skizzieren Sie dieselben Zusammenhänge für einen Schwingkreis mit gewöhnlicher Kapazität und vergleichen Sie. Was darf man für ein Verhalten des nichtlinearen Oszillators bei kleinen Anregungsamplituden erwarten, was wird sich bei großen Amplituden ändern?

- Leiten Sie Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{u}_D &= \frac{I}{C_0} \left( \frac{u_D}{u_s} + 1 \right) \\ \dot{I} &= -\frac{u_R}{L} - \frac{u_s}{L} \left[ \exp\left(\frac{Q}{C_0 u_s}\right) - 1 \right] - \frac{A}{L} \cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned} \quad (4)$$

her. Gehen Sie davon aus, dass die Anregung  $u_e = A \cos(\varphi)$  sich als Summe aus den Spannungen ergibt, die über den einzelnen Bauteilen abfallen (Abbildung 6).

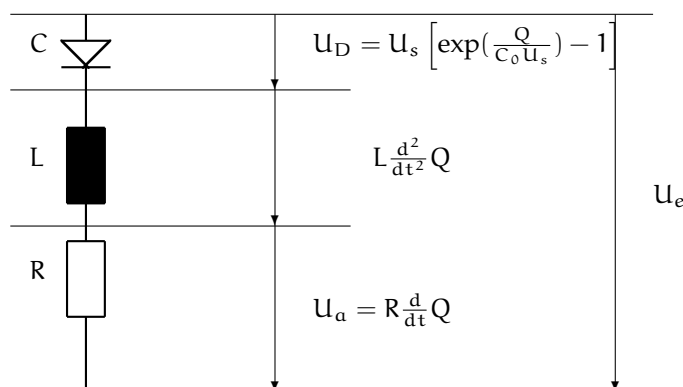


Abbildung 6: Aufbau des Toda-Oszillators

- **Phasenportrait und Bifurkationsdiagramm**

- Skizzieren Sie das Phasenportrait des linearen Kreises und begründen Sie seine Form theoretisch.
- Ordnen Sie Ihre Phasenportraits den verschiedenen Bereichen des Bifurkationsdiagramms zu.
- Erklären Sie die Hysterese.

- **Logistische Abbildung**

- Zeichnen Sie die Iterierte der logistischen Abbildung für einen Kontrollparameterwert, bei dem zwei stabile Fixpunkte existieren. Bestimmen Sie diese Fixpunkte, indem Sie die Identität mit einzeichnen. Wählen Sie einen Startwert und zeichnen den Verlauf einer Iteration bis zum Erreichen des Fixpunktes.
- Zeigen Sie, dass für Parameterwerte  $c > 3$  keine stabilen Periode-1-Punkte existieren.

## **Literatur**

- [1] C. Jeffries und J. Pérez *Observation of a pomeau-manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator*, Phys. Rev. A, **26**, 2117–2122 (1982).