Anleitung zum Versuch:

Spektralanalyse

(Fortgeschrittenenpraktikum der Physik)

Version: 0.2
Datum: 11. April 2024

Versionsgeschichte

Version	Datum	Änderungen	Autor
0.1	2023-11-22	Konsolidierte Neufassung.	Trottenberg
0.2	2024-04-11	Kleine Korrekturen und Hochladen ins OLAT.	Trottenberg

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Mit dem Begriff der Spektralanalyse sind Verfahren der Signalverarbeitung gemeint, die insbesondere auf Frequenzspektren beruhen. Hier mag man sofort an Audiotechnik denken, bei der es darum geht, Musik und Sprache mit ihrem für das menschliche Gehör relevanten zeitlich veränderlichen Frequenzspektrum möglichst getreu erfassen, verstärken, speichern, übertragen und wiedergeben zu können. Der Anwendungsbereich ist natürlich viel weiter, wenn wir beispielsweise an Spektren elektromagnetischer Strahlung denken. So, wie wir zeitlich veränderliche Signale hinsichtlich ihres Frequenzgehalts untersuchen, können wir dies auch mit räumlichen Signalen tun, sogar in mehreren Dimensionen. Die Frequenzen haben dann die Bedeutung von (inversen) räumlichen Strukturlängen oder -größen.

In diesem Praktikumsversuch werden Sie sich mit der wichtigsten Methode der Spektralanalyse, der Fourier-Transformation, befassen, und wie man aus ihr Amplituden- und Leistungsdichtespektren ableiten kann.

Im Gegensatz zu den anderen Versuchen im Fortgeschrittenenpraktikum geht es hier nicht um die Bestimmmung einer Naturkonstanten oder einen physikalischen Effekt. Vielmehr steht eine Methode im Mittelpunkt, die universell einsetzbar ist.

Sie werden größtenteils mit synthetischen Daten arbeiten, was weitere Herausforderungen mit sich bringt. Beispielsweise enthalten reale Messdaten oft einen Anteil ungewollten Rauschens. Im Fall synthetischer Daten muss Rauschen erst bewusst hinzugefügt werden und sollte natürlichem Rauschen ähneln. Dazu werden Sie einen Abstecher in das Gebiet der Erzeugung von Pseudozufallszahlen mit dem Computer machen.

Neben der Fourier-Transformation werden Sie sich noch mit der Kreuz- und Autokorrelation beschäftigen, die man auch als klassische Verfahren bezeichnen kann. Die modernere Wavelet-Transformation, die seit den 1980er-Jahren angewendet wird und von der Sie möglicherweise gehört haben, werden wir nicht untersuchen.

2 Hinweise zur Vorbereitung auf den Versuch

Zur Vorbereitung auf diesen Versuch können Sie vielfältig verfügbare Literatur verwenden. Dieses Dokument versucht, neben der Aufgabenbeschreibung, auch zu einigen Themen nützliche Erklärungen und Details zu liefern und in einen Zusammenhang zu stellen. Es wird aber als alleinige Quelle zur Vorbereitung vermutlich nicht ausreichen.

Wir stellen Ihnen zwei weitere Dokumente zur Verfügung, die sich zusammen in einem File befinden. Das ist zum einen der Artikel „The Fundamentals of FFT-Based Signal Analysis and Measurement“ von Cerna und Harvey, der 2002 als Application Note 041 von dem Messtechnikhersteller

National Instruments veröffentlicht wurde und auch online verfügbar ist:
https://www.sjsu.edu/people/burford.furman/docs/me120/FFT_tutorial_NI.pdf
Zum anderen bekommen Sie das Kapitel 7 „Random Numbers“ aus dem bekannten Standardwerk für wissenschaftliches Programmieren mit dem Titel „Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing“ [1].

Sie sollten durch Ihre Vorbereitung auf den Praktikumstag zu folgenden Fragen und Themen eine Vorstellung haben oder entwickeln:

- Wie sind die kontinuierliche und die diskrete Fourier-Transformation definiert?
- Was ist die *Fast Fourier Transform*?
- Was ist mit *one-sided* und *two-sided* gemeint?
- Was ist ein Amplitudenspektrum?
- Was ist ein Leistungsdichtespektrum?
- Was besagt das Parseval-Theorem?
- Was bedeutet eine Dezibel-Skala?
- Was bedeutet die Bit-Zahl eines Analog-Digital-Wandlers?
- Was ist das *Least Significant Bit*?
- Wozu benutzt man Fensterfunktionen und wie werden diese auf die Daten angewendet?
- Was ist eine Faltung?
- Was besagt das Faltungstheorem?
- Was ist die Kreuzkorrelationsfunktion?
- Was ist die Autokorrelationsfunktion?
- Wie kann man Zufall mit einem Computer simulieren?

3 Von der DFT zum Amplituden- und Leistungsspektrum

3.1 Zeitreihen

Wir wollen die endliche Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ als eine Zeitreihe von Messwerten betrachten, zum Beispiel von Spannungswerten, die nacheinander in immer gleichen Zeitabständen Δt mit der Sample-Frequenz $f_\mathrm{s} = 1/\Delta t$ aufgenommen wurden. Dies könnte mit mit einem Oszilloskop oder einer

Analog-Digital-Wandler-Schaltung in Verbindung mit einem Computer gemacht werden. Die Indizes j geben offenbar die Zeitpunkte $t_j = j\Delta t = j/f_\mathrm{s}$ an.

Wir können die obige Zeitreihe als n-dimensionalen Vektor $\mathbf{x} = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$ schreiben. (Dies entspricht auch der Implementierung mit modernen Hochsprachen wie Matlab/Octave oder Python mit dem NumPy-Paket.)

3.2 Formale Betrachtung der Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation (DFT), und nur um die soll es in diesem Versuch gehen, ist zunächst eine Funktion, die aus einer endlichen Folge von n Eingangswerten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dieselbe Anzahl von n Ausgangswerten $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zuweist. Die Zuordnung geschieht auf diese Weise:

$$X_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \, \exp\left(-\frac{2\pi\, i}{n} jk\right) \quad . \tag{1}$$

Hier bedeutet i die imaginäre Zahl, für die $i^2 = -1$ gilt, und j und k sind ganzzahlige Indizes. Man beachte, dass aus reellen x_j komplexe X_k entstehen können.

Wir können die DFT auch als Abbildung auffassen, die einen n-dimensionalen Vektor $\mathbf{x}$ auf den n-dimensionalen Vektor $\mathbf{X}$ abbildet: $\mathbf{X} = \mathrm{dft}(\mathbf{x})$.

Vertiefen Sie Ihr Verständnis der Definition der DFT, indem Sie sich Gedanken über folgende Zusammenhänge machen:

- Wie wirkt die Multiplikation mit dem Exponentialfaktor, wenn Sie das Produkt in der komplexen Zahlenebene betrachten?
- Wie sieht für ein festes k die Folge der Exponentialfaktoren für $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ aus?
- Was bewirkt die Summe der einzelnen Produkte?
- In welchem Sinn ist die Summe ein Skalarprodukt?
- Ist die DFT eine lineare Abbildung?

Eine wichtige Eigenschaft der DFT, wie auch der kontinuierlichen Fourier-Transformation, ist ihre Umkehrbarkeit:

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \, \exp\left(+\frac{2\pi\, i}{n} jk\right) \quad . \tag{2}$$

Wir schreiben auch $\mathbf{x} = \mathrm{idft}(\mathbf{X})$.

Eine einzelne Fourier-Komponente X_k ist, wie bereits oben bemerkt, im Allgemeinen eine komplexe Zahl, das heißt, sie ist als $X_k = a_k \exp(i\varphi_k)$

durch eine reelle Amplitude $a_k = |X_k|$ und einen ebenfalls reellen Winkel φ_k darstellbar.

Übrigens kann man die inverse Transformation auch durch die DTF ausdrücken: Es ist $\mathrm{idft}(\mathbf{X}) = (1/n)(\mathrm{dft}(\mathbf{X}^*))^*$, wobei * die komplexe Konjugation bedeutet.

3.3 Die schnelle Fourier-Transformation

Zur Berechnung der DFT und ihrer Umkehrung werden üblicherweise Algorithmen verwendet, die ausnutzen, dass dieselben Exponentialfaktoren und Produkte in den Summanden von Gleichungen (1) und (2) mehrfach vorkommen.

Der erfolgreichste Algorithmus ist die schnelle Fourier-Transformation (englisch *fast Fourier transform*, FFT). Die Idee dazu geht bis auf Carl Friedrich Gauß [2] zurück, der ausformulierte Algorithmus stammt von James Cooley und John W. Tukey [3], die ihn 1965 veröffentlichten.

Der Vorteil der FFT (und ihrer Umkehrung) ist die Skalierung ihrer Laufzeit mit der Länge n der Eingangsdaten. Übersetzt man die Gleichungen (1) und (2) direkt in einen Algorithmus, so stellt man fest, dass n Summen berechnet werden, von denen jede n Summanden enthält. Die Laufzeit wächst also proportional zu n^2. Bei der FFT wächst die Laufzeit dagegen nur proportional zu $n \ln n$.

Der einzige Nachteil besteht darin, dass n eine Potenz von 2 sein muss. Wenn die Daten dieses Kriterium nicht erfüllen, dann kann man mit Nullen auffüllen (*zero padding*) oder einen Teil der Daten verwerfen.

Es ist wichtig, zu betonen, dass die FFT dasselbe Ergebnis wie die DFT liefert; die FFT ist nur eine geschickte Implementierung der Gleichung (1) und keine Näherung.

Analog zu $\mathrm{dft}(\mathbf{x})$ und $\mathrm{idft}(\mathbf{X})$ für DFT und ihre inverse Transformation sollen in diesem Dokument $\mathrm{fft}(\mathbf{x})$ und $\mathrm{ifft}(\mathbf{X})$ für FFT und ihre Inverse geschrieben werden.

3.4 Die Zuordnung der Komponenten zu Frequenzen

Wenn wir die inverse DFT anwenden und uns überlegen, wie eine einzelne erhaltene Fourier-Komponente X_k zur Rekonstruktion des Signals $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ beiträgt, dann sehen wir, das der Exponentialfaktor aus Gleichung (2) einen Einheitsvektor in der komplexen Zahlenebene repräsentiert, der sich mit einer bestimmten Frequenz f_k dreht. Die Frequenz ist offenbar

$$f_k = \frac{f_\mathrm{s}}{n} k \qquad . \tag{3}$$

Insbesondere hat sich für $k = 1$ der Einheitsvektor nach n Zeitschritten Δt genau einmal linksherum gedreht, die Frequenz beträgt also $f_1 = 1/(n\Delta t) = f_\mathrm{s}/n$, und weiterhin ist die Winkelgeschwindigkeit $2\pi\, k/n$ proporional zu k.

3.5 Die zwei Seiten des Fourier-Spektrums

Die Multiplikation mit der Komponente X_k gibt dem komplexen Produkt in Gleichung (2) eine bestimmte Länge, nämlich $|X_k|$, und einen Winkel- oder Phasenversatz gegenüber dem rotierenden Einheitsvektor, der obigem φ_k entspricht. Jede Fourier-Komponente X_k enthält also Amplituden- und Phaseninformation.

Ein X_k allein leistet im Allgemeinen einen komplexen Beitrag zu den reellen x_j der zu rekonstruierenden Zeitreihe; irgendwie müssen die komplexen Anteile also aufgehoben werden, wenn wir es mit reellen Daten zu tun haben! Das geschieht durch den Beitrag einer anderen Fourier-Komponente, nämlich X_{n-k}:

Wir betrachten nur den Exponentialfaktor aus Gleichung (2),

$$\exp\left(+\frac{2\pi\, i}{n}j(n-k)\right) = \exp\left(-\frac{2\pi\, i}{n}jk - 2\pi i\, j\right) = \exp\left(-\frac{2\pi\, i}{n}jk\right) \quad , \tag{4}$$

und stellen fest, dass sich dieser für $n-k$ von dem für k nur durch das Vorzeichen im Argument unterscheidet. Damit sind die beiden Faktoren zueinander komplex konjugiert und ihre Summe

$$\exp\left(+\frac{2\pi\, i}{n}jk\right) + \exp\left(-\frac{2\pi\, i}{n}jk\right) = \cos\left(+\frac{2\pi}{n}jk\right) \tag{5}$$

ergibt eine Folge von reellen Werten für $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dies ist der Grund, warum die Fourier-Transformation eines reellen Signals sich immer auf beiden Seiten von $k = n/2$ äußert: Der Koeffizient X_1 hat X_{n-1} als „Partner“, X_2 hat X_{n-2}, und so weiter bis zu $X_{n/2-1}$ und $X_{n/2+1}$. Es gilt also im Fall reeller Daten x_j immer $X_k = X^*_{n-k}$ für $1 \leq k \leq n/2$. Die Ausnahmen ohne komplex konjugiertes Gegenstück sind $X_{n/2}$, das es nur für gerade n gibt, und X_0.

Wir sehen uns jetzt die Frequenzen für $k > n/2$ genauer an. Das Argument im Exponentialfaktor von Gleichung (2) ändert sich in diesem Fall bei jedem Schritt von j zu $j+1$ um mehr als π. Eine Drehung um den Winkel $\varphi > \pi$ kann aber auch als Drehung um $-(\pi-\varphi)$, das heißt $\pi-\varphi$ in entgegengesetzter Richtung, aufgefasst werden. Entsprechend können die Frequenzen $f_k > f_\mathrm{s}/2$ für $k > n/2$ als negative Frequenzen $f_k = -f_\mathrm{s}(n-k)/n$ aufgefasst werden. (Bemerkung: Man könnte auch die Definitionen der Gleichungen (1) und (2) ändern und die Summationen von $-n/2+1$ bis $+n/2$ laufen lassen.)

Negative Frequenzen lassen sich im Fall reeller oder eindimensionaler Daten nicht von positiven unterscheiden. Daher genügt es, nur die Koeffizienten $k \leq n/2$ zu betrachten. Sie entsprechen den Frequenzen $f_k \leq f_\mathrm{s}/2$; die halbe Abtastfrequenz $f_\mathrm{s}/2$ wird auch als Nyquist-Frequenz bezeichnet.

Man bezeichnet das gesamte Fourier-Spektrum mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ als *two-sided* und das verkürzte mit nur $k < n/2$ als *one-sided.*

3.6 Amplitudenspektrum

Im Fall reeller Daten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ lässt sich das Amplitudenspektrum mit Hilfe des *one-sided* Spektrums als

$$A_0 = \frac{1}{n}|X_0| \qquad \text{für} \qquad k = 0, \tag{6}$$

$$A_k = \frac{2}{n}|X_k| \qquad \text{für} \qquad 0 < k < n/2 \tag{7}$$

definieren.

Neben diesem Amplitudenspektrum gibt es auch noch das sogenannte Amplituden*dichte*spektrum, in dem die spektrale Amplitudendichte oder englisch *amplitude spectral density* dargestellt wird. Da diese aus dem Leistungsdichtespektrum abgeleitet wird, behandeln wir erst dieses und kommen auf das Amplitudendichtespektrum danach noch einmal zurück.

3.7 Leistungsdichtespektrum

Ein harmonisches Signal („Sinus-Signal") mit der (reellen) Amplitude a hat eine Signalleistung von $\frac{1}{2}a^2$, was man sich leicht klar macht, indem man den Mittelwert von $\sin^2(x)$ oder $\cos^2(x)$ auf dem Intervall von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ bildet.

Somit lässt sich ein Leistungsspektrum aus dem Amplitudenspektrum berechnen:

$$P_0 = \quad A_0^2 = \quad \frac{1}{n^2}|X_0|^2 \quad \text{für} \quad k = 0, \tag{8}$$

$$P_k = \quad \frac{1}{2}A_k^2 = \quad \frac{2}{n^2}|X_k|^2 \quad \text{für} \quad 0 < k < n/2. \tag{9}$$

Es gibt die Signalleistung (in V^2) für jede einzelne diskrete Frequenz $f_k = k/f_\mathrm{s}$ an.

An dieser Stelle mag es hilfreich sein, etwas zu den „Leistungen" zu sagen: Es handelt sich in der Spektralanalyse bei Leistungen nicht notwendigerweise um elektrische Leitungen in Watt, sondern einfach um eine Größe, die das Quadrat von Signalgrößen enthält; daher die Einheit V^2. Wäre das Messsignal eine mechanische Auslenkung und in m gemessen, dann hätte die „Leistung" die Einheit m^2. Man könnte, um Verwechslungen zu vermeiden, auch konsequent von Signalleistungen sprechen.

Oft möchte man das Leistungsspektrum aber unabhängig von der Sample-Frequenz f_s und Breite Δf der Frequenz-Bins angeben, was durch Normierung auf ein Frequenzintervall erreicht wird. Wir dividieren dazu durch $\Delta f = f_\mathrm{s}/n$,

$$P(0) = \quad A_0^2 \frac{n}{f_\mathrm{s}} = \quad \frac{1}{n}|X_0|^2 f_\mathrm{s}^{-1} \quad \text{für} \quad k = 0, \tag{10}$$

$$P(f_k) = \quad \frac{1}{2}A_k^2 \frac{n}{f_\mathrm{s}} = \quad \frac{2}{n}|X_k|^2 f_\mathrm{s}^{-1} \quad \text{für} \quad 0 < k < n/2, \tag{11}$$

und erhalten das Leistungs*dichte*spektrum. In der englischsprachigen Literatur ist der Begriff *power spectral density (PSD)* üblich. Die Einheit der Leistungsdichte ist daher V^2/Hz bei Signalleistungen. Bei „echten“ elektrischen Leistungen in Watt wäre die Einheit W/Hz. Wären die Signale mechanische Auslenkungen in μm, dann wären es $(\mu m)^2/Hz$.

3.8 Spektrale Amplitudendichte

Die spektrale Amplitudendichte, oder englisch *amplitude spectral density*, wird gelegentlich im Zusammenhang mit Rauschspektren verwendet und soll hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden. Sie ist nichts weiter als die Wurzel aus der spektralen Leistungsdichte (Leistungsdichtespektrum). Damit ergibt sich die vielleicht überraschende Einheit von $V/\sqrt{Hz}$. Wären die Signale Kräfte, dann hätte die spektrale Amplitudendichte zum Beispiel die Einheit $\mu N/\sqrt{Hz}$.

3.9 Parseval-Theorem

Es stellt sich nun die Frage, ob denn die im Leistungsspektrum enthaltene Leistung dieselbe ist, die der Zeitreihe entspricht? Gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}|X_k|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|x_j|^2 \qquad ? \tag{12}$$

Auf der linken Seite erstreckt sich die Summation über alle Leistungen des *two-sided* Spektrums, um die Fallunterscheidung für die P_k aus Gleichung (9) zu vermeiden und auch $k = n/2$, die Leistung bei der Nyquist-Frequenz, zu berücksichtigen. Auf der rechten Seite steht einfach der Mittelwert der n momentanen Leistungen, die gesampelt wurden.

Dies ist ein Beweis für die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}|X_k|^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}X_kX_k^* \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1}x_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}jk\right)\right] X_k^* \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}x_j\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k^* \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}jk\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}x_jnx_j^* \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|x_j|^2,
\end{aligned} \tag{13}$$

3.10 dB-Einheiten

Da spektrale Leistungsdichten (Leistungsdichtespektren) meistens logarithmisch dargestellt werden, hat man es für nötig erachtet, eine eigene Einheit dafür zu definieren: Das Dezibel (1 dB).

Bei einer Dezibel-Größe Q geht es immer um das Verhältnis einer Leistung P zu einer Referenzleistung P_{ref}. Es ist

$$Q = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{\text{ref}}} \text{dB} \quad . \tag{14}$$

Oft wird die Referenzleistung P_{ref} als Zusatz irgendwie in der Einheit vermerkt, zum Beispiel „dBm“ soll $P_{\text{ref}} = 1\,\text{mW}$ bedeuten.

Manchmal wird als Referenz eine Spannung (oder allgemeiner eine Amplitude) A_{ref} angegeben, obwohl es sich bei dB **immer** um eine Leistungsangabe handelt! Da die Signalleistung quadratisch mit der Spannung (oder allgemeiner mit der Amplitude) skaliert, ist dann

$$Q = 10 \log_{10} \frac{A^2}{A_{\text{ref}}^2} \text{dB} = 20 \log_{10} \frac{A}{A_{\text{ref}}} \text{dB} \quad , \tag{15}$$

wobei es an dieser Stelle egal ist, ob Peak- oder quadratische Mittelwerte (*root of mean square*) gemeint sind, weil die auftretenden Faktoren im Zähler und im Nenner vorkommen. (Die in diesem Dokument verwendeten $|X_k|$ sind naturgemäß immer Peak-Werte.)

Beispiel: Das Referenzsignal sei ein Sinus mit Amplitude $a_{\text{ref}} = 1\,\text{V}$. Es ist also $P_{\text{ref}} = \frac{1}{2} a_{\text{ref}}^2 = 0{,}5\,\text{V}^2$. Jetzt betrachten wir ein willkürliches Signal mit der Amplitude $a = 0{,}4\,\text{V}$, um zu sehen, wieviel dB das sind; seine Signalleistung ist $P = \frac{1}{2} a^2 = 0{,}08\,\text{V}^2$. Nach beiden obigen Rechnungen ergibt sich $Q = -8{,}0\,\text{dB}$. Die Einheit könnte man in diesen Fällen auch dBV nennen; aber nicht dBV^2, weil hier $P_{\text{ref}} = 0{,}5\,\text{V}^2$ und nicht $1\,\text{V}^2$ war!

4 Faltung und Faltungstheorem

Für zwei endliche Folgen (oder insbesondere Zeitreihen) $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ und $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ wird die diskrete Faltung (englisch *convolution*)

$$\text{conv}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \geq 0 \\ k-j < n}}^{n-1} x_j \, y_{k-j} \tag{16}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ definiert.

Man bemerke, dass sich die Summation für ein bestimmtes k über alle Indizes j beziehungsweise $k - j$ erstreckt, für die die jeweiligen Elemente beide existieren. Das ist gleichbedeutend damit, dass die beiden Zeitreihen an beiden Enden mit beliebig vielen Nullen ergänzt werden (*zero padding*), sodass dann die Summanden $x_j\, y_{k-j}$ für beliebige $j \in \mathbb{Z}$ definiert wären, oft aber Null wären.

Eine besonders nützliche Eigenschaft wird mit dem Faltungstheorem formuliert. Es setzt Faltung und elementweise Multiplikation in der Zeit- und Frequenzdomäne miteinander in Beziehung. Hier sind zwei Formulierungen:

$$\mathrm{dft}(\mathrm{conv}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) =^* \mathrm{dft}(\mathbf{x})\, \mathrm{dft}(\mathbf{y}) \tag{17}$$

und das Gegenstück dazu

$$\mathrm{dft}(\mathbf{x}\, \mathbf{y}) =^* \mathrm{conv}(\mathrm{dft}(\mathbf{x}),\, \mathrm{dft}(\mathbf{y})) \qquad . \tag{18}$$

Die Faltung zweier Zeitreihen in der Zeitdomäne entspricht der Multiplikation ihrer beiden Spektren. Und: Die Multiplikation zweier Zeitreihen entspricht der Faltung ihrer Spektren.

(Bemerkung zu „$=^*$“: Bei der Anwendung von Gleichungen (17) und (18) beachte man, dass conv-Algorithmen typischerweise $2n-1$ Werte zurück liefern, sodass an den Rändern beschnitten werden muss. Dies ist auf geeignete Weise so zu erreichen, dass nur Nullen verworfen werden; ggf. müssen dazu Zeitreihen mit Nullen ergänzt bzw. periodisch ergänzt werden.)

Die erste Aussage kann aus folgendem Grund von praktischem Nutzen sein: Wenn man die Faltung von zwei sehr langen Zeitreihen berechnen will, dann skalieren sowohl die Länge als auch die Anzahl der zu berechnenden Summen proportional zu n, also insgesamt quadratisch mit n^2. Da die Berechnung der Fourier-Transformierten mit Hilfe des FFT-Algorithmus nur mit $n \log(n)$ skaliert und die Multiplikation der Spektren nur mit n, kann man mit zwei FFTs und einer inversen FFT die Faltung ab einer bestimmten Datenlänge n schneller berechnen:

$$\mathrm{conv}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{ifft}(\mathrm{fft}(\mathbf{x})\, \mathrm{fft}(\mathbf{y})) \qquad . \tag{19}$$

Für sehr große n werden die FFTs die Laufzeit dominieren, aber besser sein als eine direkte Faltung von zwei gleichlangen Signalen. (Natürlich sieht die Situation anders aus, wenn eine der beiden Zeitreihen unveränderlich kurz ist: Dann skaliert der Faltungsalgorithmus nur mit n, also besser als die FFTs.)

Auf die zweite Aussage, Gleichung (18), kommen wir im Zusammenhang mit den Fensterfunktionen zurück.

5 Kreuz- und Autokorrelationsfunktion

Für zwei reelle Zeitreihen $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ und $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ wird die diskrete **Kreuzkorrelationsfunktion**

$$\mathrm{corr}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{j=0 \\ j+k \geq 0 \\ j+k < n}}^{n-1} x_{j+k}\, y_j^* \tag{20}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ definiert (auch hier sind wir nur an der diskreten Form interessiert, da wir es immer mit endlich vielen Messpunkten zu tun haben werden). Die Bedingungen unter dem Summenzeichen stellen sicher, dass nur Summanden mit Faktoren summiert werden, die existieren.

Die komplexe Konjugation in y_j^* ist nur relevant, wenn $\mathbf{y}$ nichtreelle Daten enthält.

Der Spezialfall, bei dem $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ist, wird **Autokorrelationsfunktion** gesannt.

In den meisten Fällen ist es sinnvoller, mittelwertfreie Zeitreihen, also $\langle x_j \rangle = 0$ und $\langle y_j \rangle = 0$ zu betrachten. Wenn eine Zeitreihe diese Bedingung nicht erfüllt, dann kann man den Mittelwert von jedem einzelnen Element der Folge subtrahieren, bevor man die Kreuzkorrelationsfunktion anwendet.

Noch eine Bemerkung für den Fall, dass Sie sich gefragt haben, ob es einen Zusammenhang von Kreuzkorrelationsfunktion und Faltung gibt. Immerhin ähnelt die Kreuzkorrelationsfunktion formal stark einer Faltung. Tatsächlich kann man die Kreuzkorrelationsfunktion durch eine Faltung ausdrücken:

$$\mathrm{corr}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{conv}_{-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \qquad , \tag{21}$$

wobei $\mathbf{y}'$ durch $\mathbf{y}$ mittels $y'_{-k} = y_k^*$ definiert wird. Man kann dies leicht nachprüfen, indem man in Gleichung (16) zunächst y_{k-j} durch y'^*_{j-k} ersetzt und dann in beiden Faktoren die Indizes neu benennt: $j' = j - k$. Da die Summation für ein festes k dann immer noch über alle $x_{j'+k}\, y'^*_{j'}$ erfolgen soll, für die keiner der beiden Faktoren Null ist, haben wir bis auf die beiden Umbenennungen $\mathbf{y}'$ und j' Gleichung (20) erhalten. Diese Äquivalenz von Korrelationsfunktion und Faltung hat jedoch kaum einen praktischen Nutzen, da keine der beiden Berechnungen einen Vorteil bei der Laufzeit bringt. (Zudem müsste man sich überlegen, wie man die negativen Indizes implementiert.)

Vertiefen Sie Ihr Verständnis der Kreuzkorrelationsfunktion, indem Sie sich Gedanken über folgende Zusammenhänge machen:

- Welche anschauliche Bedeutung hat k?
- Warum ist obige Bemerkung zu den Mittelwerten vernünftig?

- In welchem Sinn ist die Kreuzkorrelationsfunktion eine Verallgemeinerung der Kovarianz?
- Wieviele Summanden hat die Summe für ein spezielles k?
- Wie kann man die Korrelationsfunktion sinnvoll normieren?
- Was bedeuten *biased* und *unbiased* im Zusammenhang mit den Korrelationsfunktionen?
- Wozu kann man die Korrelationsfunktionen verwenden?

6 Fensterfunktionen

Fensterfunktionen sollen Leck-Effekte abmildern, indem die einzelnen Werte der Zeitreihe auf geeignete Weise gewichtet werden. Man benötigt also für eine Zeitreihe $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ der Länge n genau n Gewichte w_j, womit sich ein diskretes Fenster als $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$ schreiben lässt. Die Anwendung auf die Zeitreihe $\mathbf{x}$ besteht darin, dass eine neue Zeitreihe $\mathbf{x}'$ generiert wird, für die $x'_j = x_j w_j$ gilt. Es wird also elementweise multipliziert.

Im Wesentlichen sollen das abrupte Einsetzen des Signals am Anfang der Zeitreihe und das abrupte Verschwinden nach dem letzten Wert abgemildert werden, da diese zu nichtganzzahligen Perioden der einzelnen Frequenzkomponenten der DFT führen, was wiederum die Ursache des Leck-Effektes ist. Die Fensterfunktionen bewirken also salopp gesagt ein sanftes Hochfahren und ein sanftes Ausklingen des Signals.

Typische Fensterfunktionen sind das Hamming-Fenster, das Von-Hann-Fenster (im Jargon „Hanning-Fenster“ genannt), das Blackman-Fenster und das Flat-Top-Fenster. Das Von-Hann-Fenster zum Beispiel wird durch die Gewichte

$$w_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{j}{n-1}\right) \quad \text{für} \quad 0 \le j \le n-1 \tag{22}$$

definiert.

Die Wirkung auf das erzeugte Spektrum lässt sich mit Hilfe von Gleichung (18), einer Variante des Faltungstheorems, beschreiben. Es ist ist nämlich

$$\mathrm{dft}(\mathbf{x}\,\mathbf{w}) = \mathrm{conv}(\mathrm{dft}(\mathbf{x}),\, \mathrm{dft}(\mathbf{w})) \qquad . \tag{23}$$

Das Spektrum besteht also aus der Faltung des Spektrums $\mathrm{dft}(\mathbf{x})$ der unveränderten Daten $\mathbf{x}$ mit dem Spektrum $\mathrm{dft}(\mathbf{w})$ der Fensterfunktion $\mathbf{w}$. Das Produkt $\mathbf{x}\,\mathbf{w}$ bedeutet die oben genannte Zeitreihe $x'_j = x_j w_j$, die durch elementweise Multiplikation entsteht.

7 Versuchsdurchführung

Das Ziel dieses Praktikumsversuches ist es, die grundlegenden Methoden und ihre Eigenschaften anhand von Beispielen zu erkunden und zu demonstrieren. Sie sollten daher bei der Auswahl von Parametern immer versuchen, einen bestimmten Effekt möglichst deutlich in Erscheinung treten zu lassen, wobei andere Effekte nach Möglichkeit nicht auftreten oder zumindest das Bild nicht dominieren.

Wenn Sie beim Experimentieren für Sie interessante Beobachtungen machen, untersuchen Sie diese gerne genauer und beschreiben Sie sie. Sie müssen sich nicht auf die Anregungen in dieser Anleitung beschränken, diese stellen lediglich ein Minmum an Versuchen dar.

7.1 Zu den Grundlagen

Experimentieren Sie mit einem harmonischen Signal einer festen Frequenz f. Achten Sie darauf, dass das Signal nicht die Grenze des simulierten Analog-Digital-Wandlers von $\pm 1\,\mathrm{V}$ überschreitet. Wenn Sie es für sinnvoll erachten, können Sie natürlich auch eine zweite Frequenz dazu mischen.

- Demonstrieren Sie, wie sich die Länge n einer Zeitreihe auf das Spektrum auswirkt.
- Demonstrieren Sie, wie sich die Abtastfrequenz f_s einer Zeitreihe auf das Spektrum auswirkt.
- Wie wirkt sich eine überlagerte Gleichspannung (*offset*) aus?
- Kann man die Amplituden im Spektrum wiederfinden?
- Bleibt die Signalleistung im Spektrum erhalten?
- Gibt es Abtastfrequenzen f_s, bei denen das Signal mit der Frequenz f einen besonders scharfen Peak erzeugt? Zeigen Sie den Leck-Effekt (englisch *leakage*).
- Zeigen Sie, was Unterabtastung (*undersampling*) ist.
- Zeigen Sie, was Überabtastung (*oversampling*) ist.

7.2 Zu den Fensterfunktionen

Als nächstes sollen Fensterfunktionen untersucht werden. Beschränken Sie sich auf einige wenige Fensterfunktionen, vielleicht drei.

- Suchen Sie sich eine Kombination aus Abtastfrequenz und Signalfrequenz, bei der eine scharfe Linie im Spektrum entsteht. Wie wirken sich hier einige Fensterfunktionen auf Amplitude und Breite aus?

- Stellen Sie sich eine schwere Aufgabe, bei der zwei Signale, deren Frequenzen dicht beieinander liegen und deren Amplituden sehr unterschiedlich sind, noch aufgelöst werden sollen.
- Zeigen Sie, dass eine Fensterfunktion hier einen Nutzen bringt.
- Versuchen Sie, die Leistung in einem Peak zu schätzen.
- Verändern die Fensterfunktionen die Leistung in einem Peak?

7.3 Zur Messwerterfassung mit Analog-Digital-Wandler

Sie haben die Möglichkeit, die Bit-Anzahl des simulierten Analog-Digital-Wandlers (*analog-digital converter*, ADC) zu verändern.

- Was passiert mit dem Signal und mit dem Spektrum, wenn das Signal sehr klein ist? Was ist das Maß dieser Kleinheit?
- Was passiert, wenn das Signal den Wertebereich des ADC verlässt?
- Vergleichen Sie ein 1-V-Sinus-Signal bei verschiedenen Bit-Auflösungen.
- Stellen Sie die Werte für einen 4-Bit-Wandler in einem Histogramm dar. Wie sollte man die Bins des Histogramms wählen? Was passiert, wenn man keine gute Wahl der Bin-Positionen wählt?

7.4 Zur Nichtlinearität

Viele Messapparaturen zeigen ungewollt nichtlineares Verhalten. Das bedeutet, die gelieferten Messwerte lassen sich nicht durch eine lineare Funktion der zu messenden Größe beschreiben. Zum Beispiel mag eine Waage bei zu starker Auslenkung zu kleine Werte anzeigen, oder ein Messverstärker verstärkt höhere Spannungen weniger als niedrige oder umgekehrt.

(a) Sie sollen nichtlineares Verhalten in diesem Versuch mit Hilfe der um $x = 0$ symmetrischen Funktion

$$s(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{1 + \exp(-x)} \tag{24}$$

und der um $x = 0$ asymmetrischen Funktion

$$s(x) = \exp(x) - 1 \tag{25}$$

simulieren.

Erstere Funktion bildet alle reelen Zahlen auf das Intervall $]-1, +1[$ ab, wobei sie sich in der Umgebung von $x = 0$ linear mit der Steigung $1/2$ verhält. Letztere Funktion bildet insbesondere die Zahlen aus dem Intervall

$]-1,+1[$ auf Zahlen derselben Größenordnung ab, wobei sie sich in der Umgebung von $x = 0$ linear mit der Steigung 1 verhält. Für beide Funktionen ist $s(0) = 0$.

Sie können auch gerne mit anderen Abbildungen experimentieren.

- Was passiert mit dem Signal und mit dem Spektrum, wenn das Signal sehr klein ist?
- Was passiert, wenn das Signal größer wird?

(b) Wenn Sie bereits den Praktikumsversuch zum **Toda-Oszillator** durchgeführt haben, dann sollten Sie auch das mit einem ADC digitalisierte Ausgangssignal bei verschiedenen Betriebsparameters Frequenz und Eingangsamplitude untersuchen.

- Wählen Sie eine Frequenz für das Eingangssignal, sodass Sie bei Variation der Amplitude (bis 20 V) Periodenverdopplungen erkennen können.
- Wie hoch sollte die Sample-Frequenz f_s gewählt werden?
- Wählen Sie zunächst ein kleines Signal und bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum.
- Erhöhen Sie die Leistung deutlich, aber noch nicht bis zur ersten Periodenverdopplung. Was ändert sich?
- Nehmen Sie auch Spektren für höhere Perioden und Chaos auf.
- Was ist anders als in dem unter (a) betrachteten Fall?

7.5 Zum Rauschen

In diesem Versuchsteil sollen zwei Arten von Rauschen untersucht werden: Quantisierungsrauschen und Gauß-verteiltes Rauschen.

- Berechnen Sie für eine Zeitreihe eines Sinus-Signals mit Amplitude 1 V die Zeitreihe der Fehler, die durch die Digitalisierung zustande kommen (Quantisierungsrauschen).
- Stellen Sie die Zeitreihe des Quantisierungsrauschsignals in einem Histogramm dar.
- Bestimmen und zeigen Sie das Leistungsdichtespektrum des Rauschens.
- Wie groß ist der Signal-zu-Rausch-Abstand (*signal-to-noise ratio*, SNR)?

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (*probability density function*, PDF) des Quantisierungsrauschens.
- Generieren Sie jetzt Gauß-verteiltes Rauschen und bestimmen Sie damit die PDF.
- Kann man die Leistung des Rauschens aus der PDF bestimmen?
- Bestimmen Sie auch das Leistungsspektrum des Rauschens.
- Mischen Sie zu dem Rauschen wieder ein 1-V-Sinus-Signal und bestimmen Sie Spektren für verschiedene Datensatzlängen n.
- Verbessert ein großes n den Signal-zu-Rausch-Abstand (SNR)?
- Was passiert, wenn man mehrere Zeitreihen aufnimmt und deren Spektren mittelt? Hat dies einen Vorteil gegenüber dem einzelnen Spektrum?

7.6 Zu Pseudozufallszahlen

- Veranschaulichen Sie die Funktionsweise eines Lineare-Kongruenz-Generators zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen.
- Welches Ziel sollte bei der Wahl der Parameter m, a und c und des Seeds x_0 angestrebt werden?
- Erzeugen Sie mit Ihrem besten Pseudozufallszahlengenerator eine Zufallsvariable auf dem Intervall $[0, 1]$ und stellen Sie eine große Zahl von so erzeugten Zahlen in einem Histogramm dar.
- Erzeugen Sie, gestützt auf Ihrem besten Pseudozufallszahlengenerator, viele Gauß-verteilte Zufallszahlen und stellen Sie diese in einem Histogramm dar.
- Bestimmen Sie Mittelwert, Standardabweichung, Skewness und Kurtosis für verschiedene Anzahlen n von Ihren Gauß-verteilten Zufallszahlen.

7.7 Zu den Korrelationsfunktionen

- bestimmen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion von zwei synthetischen Sinus-Signalen, die gegeneinander phasenverschoben sind.
- Nehmen Sie zeitgleich zwei reale Signale mit zwei Mikrofonen auf und bestimmen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion.
- Nehmen Sie mit einem Mikrofon ein Signal und sein Echo auf und bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion.

- Erzeugen Sie die Autokorrelationsfunktionen von einem Sinus-Signal und von einem Rauschsignal.
- Wie unterscheiden sich die *biased* und *unbiased* Autokorrelationsfunktionen voneinander?
- Mischen Sie zu einem kleinen Sinus-Signal soviel Rauschen, dass Sie in der Zeitreihe das Signal nicht mehr erkennen können. Berechnen Sie die Autokorelationsfunktion.

7.8 Optionale Versuche

Wenn Sie noch Zeit und Kraft haben, könnten Sie sich mit den folgenden oder selbstgestellen Fragestellungen beschäftigen.

- Erzeugen Sie synthetisch oder mit einer Schallquelle und einem Mikrofon ein abklingendes Signal. Bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum.
- Erzeugen Sie eine Faltung aus zwei Lorentz-Verteilungen. Welchen Zusammenhang finden Sie hinsichtlich der Breiten der drei Verteilungen?
- Erzeugen Sie eine Faltung aus zwei Gauß-Verteilungen. Welchen Zusammenhang finden Sie hier hinsichtlich der drei Breiten?
- Lässt sich obiges Spektrum eines Abklingvorgangs besser mit einer Gauß- oder mit einer Lorentz-Verteilung anpassen?

Literatur

[1] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Third Edition.* Cambridge University Press, 2007.

[2] Carl Friedrich Gauss. *Carl Friedrich Gauss Werke*, volume 3. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1876.

[3] James W. Cooley and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, 19:297–301, 1965.