Optimisation devoir 2 : Synthèse robuste d'antennes

Quentin Laurent Nicolas Stevens

4 novembre 2014

1 Formulation linéaire

Le problème d'optimisation posé ici consiste à minimiser l'erreur d'un diagramme. Il s'agit de trouver les coefficients d'amplification des anneaux de l'antenne qui satisfassent aux conditions de diagramme unitaire ou nul. En terme de problème d'optimisation, cela se traduit par :

$$\begin{aligned}
&\min_{x_i} \epsilon \\
\text{tel que} \quad & |D(\theta) - 1| \leq \epsilon \ \forall \theta \in \mathcal{P} \\
\text{et que} \quad & |D(\theta)| \leq \epsilon \ \forall \theta \in \mathcal{S} \\
\text{avec } D(\theta) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i d_i(\theta)
\end{aligned} \tag{1}$$

Le problème posé présente un désavantage majeur ; il est soumis à une infinité de contraintes (1).
Pour pallier à ce problème, nous échantillonnons le problème par rapport à θ. Les contraintes du problèmes ne s'appliquant que dans $P = [\theta_P \ 90°]$ et $S = [0° \ \theta_S]$, nous échantillonnons seulement dans ces deux ensembles. Nous avons ainsi un nombre fini de contraintes. Afin de n'obtenir que des contraintes linéaires, nous transformons chaque contrainte faisant intervenir une valeur absolue en deux contraintes linéaires. Le problème devient alors :

$$\begin{aligned}
&\min_{x_i} \epsilon \\
\text{tel que} \quad & D(\theta) - 1 \leq \epsilon \ \forall \theta \in \mathcal{P}_e \\
\text{et que} \quad & -D(\theta) + 1 \leq \epsilon \ \forall \theta \in \mathcal{P}_e \\
\text{et que} \quad & D(\theta) \leq \epsilon \ \forall \theta \in \mathcal{S}_e \\
\text{et que} \quad & -D(\theta) \leq \epsilon \ \forall \theta \in \mathcal{S}_e \\
\text{avec } D(\theta) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i d_i(\theta)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_e = \{p_0, p_1, ..., p_{Np}\}$ et $\mathcal{S}_e = \{s_0, s_1, ..., s_{Ns}\}$ sont les ensembles des échantillons dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$. Deux points consécutifs sont séparés par une distance maximale de h.
Cette formulation est bien évidemment une formulation approchée de notre problème initial puisque des points entre les échantillons pourront ne pas satisfaire les contraintes de diagramme unitaire ou nul. Cependant le non-respect de ces contraintes peut être quantifié. En effet, d'après les définitions des $d_i(\theta)$, la valeur absolue de la dérivée de ceux-ci ne peut pas dépasser π. Ce qui signifie que le dépassement de l'erreur de diagramme est au maximum $\sum |x_i \pi h|$. Il nous suffit alors de choisir un h adapté au niveau de précision que nous voulons atteindre.
Todo : Expliquer notre choix de h, trouver une meilleure borne ?, résoudre en ampl

2 Première formulation robuste

Afin de prendre en compte les erreurs sur les facteurs d'amplification x_i, nous utilisons les valeurs maximales des variations possibles de $D(\hat{\theta})$ sur un intervalle.

$$\begin{aligned} |D(\hat{\theta})| &= |\sum_{i=1}^{n} x_i(1+\xi_i)d_i(\theta)| \\ &\leq |\sum_{i=1}^{n} x_i d_i(\theta)| + |\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i d_i(\theta)| \\ &\leq |D(\theta)| + \sum_{i=1}^{n} |\tau d_i(\theta)\frac{h}{2}| \end{aligned}$$

En imposant

$$|D(\theta)| + \sum_{i=1}^{n} |\tau d_i(\theta)\frac{h}{2}| \leq \epsilon$$

on est sur que $|D(\hat{\theta})| \leq \epsilon$. De la même manière, on traduit les contraintes sur P :

$$|D(\theta)-1| + \sum_{i=1}^{n} |\tau d_i(\theta)\frac{h}{2}| \leq \epsilon$$

Il nous faut donc introduire n variables v_i correspondant aux valeurs absolues des $\tau d_i(\theta)\frac{h}{2}$ On a alors

$$\begin{aligned} |D(\theta)| + \sum_{i=1}^{n} |\tau x_i d_i(\theta)\frac{h}{2}| &\leq \epsilon \\ |D(\theta)-1| + \sum_{i=1}^{n} |\tau x_i d_i(\theta)\frac{h}{2}| &\leq \epsilon \\ \tau x_i d_i(\theta)\frac{h}{2} &\leq v_i \\ -\tau x_i d_i(\theta)\frac{h}{2} &\leq v_i \end{aligned}$$

3 Seconde formulation robuste