

# Optimisation devoir 2

## Synthèse robuste d'antennes

Quentin Laurent

Nicolas Stevens

16 novembre 2014

### Introduction

Soit une antenne composée de  $N$  anneaux de diagramme  $d_i(\theta)$ . Le diagramme de l'antenne s'écrit  $D(\theta) = \sum_{i=0}^N d_i(\theta)x_i$  où les  $x_i$  sont des facteurs d'amplification à déterminer. On étudie le problème d'optimisation qui consiste à optimiser le diagramme  $D(\theta)$ . Il s'agit de trouver les coefficients d'amplification  $x_i$  des  $N$  anneaux de l'antenne qui satisfassent aux conditions :

$$D(\theta) = 0$$

$$\forall \theta \in \mathcal{S} = [0^\circ, \theta_S]$$

$$D(\theta) = 1$$

$$\forall \theta \in \mathcal{P} = [\theta_P, 90^\circ]$$

Nous étudierons plusieurs modélisations possible de ce problème et les comparerons. Nous implémentons nos modèles en Ampl. Les codes qui permettent de tracer les figures sont faits en Matlab.

# 1 Formulation linéaire

## 1.1 Modèle

Le problème posé présente un désavantage majeur ; il est soumis à une infinité de contraintes. Pour pallier à ce problème, nous échantillonons le problème par rapport à  $\theta$  sur  $P = [\theta_P 90^\circ]$  et  $S = [0^\circ \theta_S]$ . Nous avons ainsi un nombre fini de contraintes. Afin d'obtenir des contraintes linéaires, nous transformons chaque contrainte faisant intervenir une valeur absolue en deux contraintes linéaires. On peut alors formuler le programme d'optimisation comme suit :

$$\min_{x_i, \epsilon} \epsilon \quad (1)$$

$$D(\theta) - 1 \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{P}_e \quad (2)$$

$$-D(\theta) + 1 \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{P}_e \quad (3)$$

$$D(\theta) \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{S}_e \quad (4)$$

$$-D(\theta) \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{S}_e \quad (5)$$

$$\epsilon \geq 0 \quad (6)$$

$$\text{avec } D(\theta) = \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta) \text{ et } d_i(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi r_i \cos(\theta) \cos(\phi)) d\phi \quad (7)$$

$\mathcal{P}_e = \{p_0, p_1, \dots, p_{N_P}\}$  et  $\mathcal{S}_e = \{s_0, s_1, \dots, s_{N_S}\}$  sont les ensembles des échantillons dans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$ . Deux points consécutifs sont séparés par une distance maximale de  $h$ .

Cette formulation est bien évidemment une formulation approchée de notre problème initial puisque des points entre les échantillons pourront ne pas satisfaire les contraintes de diagramme unitaire ou nul. Cependant le non-respect de ces contraintes peut être quantifié. En effet, d'après les définitions des  $d_i(\theta)$ , la valeur absolue de la dérivée de ceux-ci ne peut pas dépasser  $\pi$ . Ce qui signifie que le dépassement de l'erreur de diagramme est au maximum  $\sum |x_i \pi h|$ . Il nous suffit alors de choisir un  $h$  adapté au niveau de précision que nous voulons atteindre.

Notons que lors de l'implémentation de notre modèle, nous faisons une deuxième approximation en calculant les diagrammes  $d_i(\theta)$ . Comme l'intégrale de l'équation (7) n'est pas calculable analytiquement (il s'agit d'une fonction de Bessel), nous la calculons numériquement au moyen d'une somme de Rieman.

## 1.2 Analyse des résultats

La figure 1a donne une illustration des diagrammes optimaux obtenus pour certains paramètres. On constate que lorsque  $\theta_P$  et  $\theta_S$  deviennent proches, le  $\epsilon$  croît. On remarque également que tous les points  $\in \mathcal{S}$  ou  $\in \mathcal{P}$  sont bien compris entre les bornes fixées par  $\epsilon$  ; et ce malgré que nous ayons discrétisé le problème et que nous n'ayons donc pas imposé cette contrainte pour tous les points. Cela confirme l'idée que l'approximation faite est acceptable. Définissons l'erreur globale du diagramme  $D(\theta)$  comme suit :

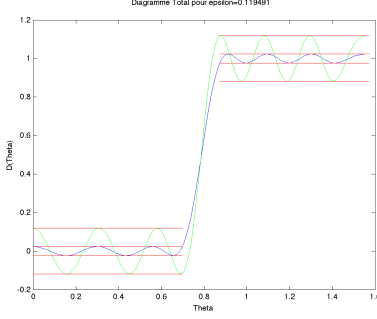
$$err = \int_{\mathcal{S}} |D(\theta)| d\theta + \int_{\mathcal{P}} |D(\theta) - 1| d\theta. \quad (8)$$

On obtient 0.0209 (en bleu) et 0.1151 (vert) comme erreur globale pour les diagrammes de la figure 1a.

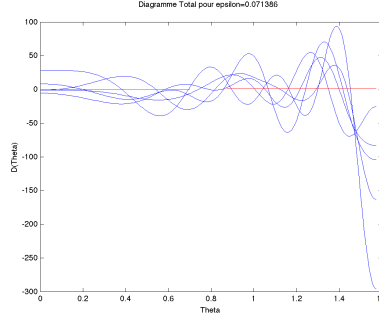
## 1.3 Analyse de la robustesse

En pratique, l'implémentation des  $x_i$  n'est pas réalisable parfaitement. On a plutôt  $\hat{x}_i = x_i(1 + \xi_i)$  où les erreurs  $\xi_i$  se situent dans un intervalle  $[-\tau, \tau]$  connu.

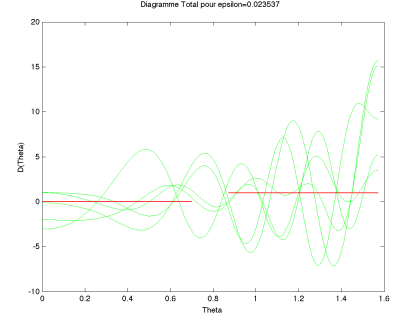
Reprenons le modèle linéaire précédent et appliquons-lui des erreurs  $\xi_i$  de l'ordre de  $\tau = 0.001$  et  $\tau = 0.01$ . On obtient les graphes aux figures 1b et 1c. On a donc une solution très sensible aux perturbations. Une



(a) Diagramme optimal  $D(\theta)$  de l'antenne composé de 40 anneaux, pour  $r_i = i/10$ . En bleu pour  $\theta_P = 50^\circ$  et  $\theta_S = 40^\circ$ ; en vert pour  $\theta_P = 47^\circ$  et  $\theta_S = 43^\circ$ . En rouge, les bornes du  $\epsilon$  optimal trouvé (en bleu 2.4%, en vert 11.9%).



(b) Diagramme optimal  $D(\theta)$  de l'antenne composé de 40 anneaux, pour  $r_i = i/10$ ,  $\theta_P = 50^\circ$  et  $\theta_S = 40^\circ$  avec un vecteur  $x$  perturbé ( $\tau = 0.01$ ).



(c) Diagramme optimal  $D(\theta)$  de l'antenne composé de 40 anneaux, pour  $r_i = i/10$ ,  $\theta_P = 50^\circ$  et  $\theta_S = 40^\circ$  avec un vecteur  $x$  perturbé ( $\tau = 0.001$ ).

FIGURE 1

valeur des erreurs sont données aux tableau récapitulatif 2. Ce tableau nous donne aussi une indication sur l'ordre de grandeur des  $x_i$ . Ils sont très élevé dans notre cas. Intuitivement, un grand  $x_i$  positif vient compenser un grand  $x_i$  négatif... dès qu'on perturbe ces valeurs des  $x$ , on a directement de grandes erreurs. On peut supposer qu'un modèle plus robuste consisterait à réduire ces valeurs des  $x_i$ .

## 2 Première formulation robuste

### 2.1 Modèle

Afin de prendre en compte les erreurs sur les facteurs d'amplification  $x_i$ , nous utilisons les valeurs maximales des variations possibles de  $D(\theta)$  en chaque point de notre discrétisation. Nous imposons que malgré ces variations nous restons dans les intervalles voulus. On transforme par exemple la première contrainte  $D(\theta) \leq \epsilon$  du modèle non robuste :

$$d(\theta)^T(x * (1 + \xi)) \leq \epsilon \iff d(\theta)^T(x * \xi) \leq \epsilon - d(\theta)^T x \quad (9)$$

Nous cherchons à ce que notre optimum  $(x, \epsilon)$  soit valable dans le pire cas, c'est-à-dire pour cette contrainte celui où  $d(\theta)^T(x * \xi)$  est maximum. Comme nous imposons également que  $|\xi_i| \leq \tau$  nous formulons un problème de maximisation linéaire et imposons une condition sur son objectif :

$$\begin{aligned} \max_{\xi_i} d(\theta)^T(x * \xi) &\leq \epsilon - d(\theta)^T x \\ \xi_i &\leq \tau \\ -\xi_i &\leq \tau \end{aligned} \quad \iff_{Dual} \quad \begin{aligned} \min_{y_+, y_-} \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_+ + \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_- &\leq \epsilon - d(\theta)^T x \\ y_+, y_- &\geq 0 \\ (I, -I) \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1(\theta)x_1 \\ d_2(\theta)x_2 \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons donc un problème d'optimisation dont l'optimum sera inférieur à  $\epsilon - d(\theta)^T x$ . On peut mettre ce problème sous forme duale. Par dualité forte on sait que l'objectif optimal de ce problème dual sera le même que celui du primal.

Comme ce problème est un problème de minimisation, si la contrainte sur l'objectif est satisfaite pour n'importe quelle solution admissible, on sait que l'optimum satisfera aussi cette contrainte. On peut alors revenir à notre problème de base dans lequel on remplace la contrainte  $D(\theta) \leq \epsilon$  par les contraintes du dual et la contrainte sur l'objectif. On traduit de la même manière les autres contraintes. On obtient alors le modèle suivant :

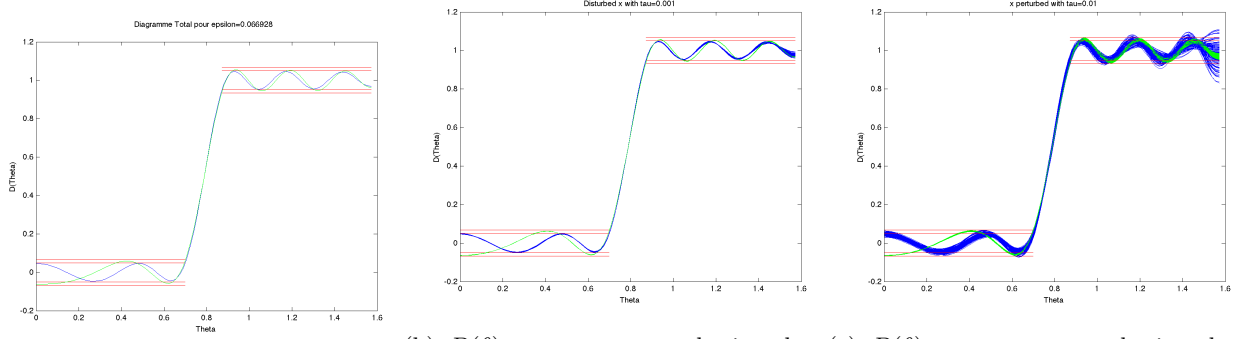
$$\begin{aligned}
& \min_{x, \epsilon, y_1+, y_1-, y_2+, y_2-, y_3+, y_3-, y_4+, y_4-} \epsilon \\
& y_{i+}, y_{i-} \geq 0 \\
& (I, -I) \begin{pmatrix} y_{i+} \\ y_{i-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(\theta)x_1 \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n \end{pmatrix} \\
& \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad \forall \theta \in S_e \cup P_e \\
& \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{1+} + \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{1-} \leq \epsilon - d(\theta)^T x \\
& \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{2+} + \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{2-} \leq \epsilon + d(\theta)^T x \\
& \forall \theta \in S_e \\
& \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{3+} + \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{3-} \leq \epsilon + 1 - d(\theta)^T x \\
& \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{4+} + \mathbf{1}^{n \times 1} \tau y_{4-} \leq \epsilon - 1 + d(\theta)^T x \\
& \forall \theta \in P_e
\end{aligned}$$

Cette formulation introduit  $8N$  variables supplémentaires par rapport au modèle de base

## 2.2 Analyse des résultats

Les figures 2 montrent les résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\tau$ . Un récapitulatif des résultats pour les différents modèles est donné à la table 2.

- Dans le cas  $\tau = 0.001$ , on constate une augmentation du  $\epsilon$  par rapport au modèle de base. Les erreurs globales pour les  $x_i$  perturbés sont cependant bien moindres. On constate également que les erreurs globales pour des  $x_i$  perturbés avec une perturbation de l'ordre de  $\tau = 0.001$  ou de  $\tau = 0.01$  sont moindres que dans le modèle avec  $\tau = 0.01$ . Cependant, on observe des dépassements pour certaines réalisations des  $\xi_i$  si on applique les perturbations de  $\tau = 0.01$ . (ce qui est logique vu que le modèle n'est pas conçu pour résister à de telles perturbations). On constate que l'ordre de grandeur des  $x_i$  non-nuls est inférieur à celui du modèle de base ce qui confirme notre intuition comme quoi le modèle robuste a tendance à fournir des  $x_i$  plus petits.
- Dans le cas  $\tau = 0.01$ , on constate toujours une augmentation du  $\epsilon$  par rapport au modèle de base et au modèle où  $\tau = 0.001$ . Les erreurs globales pour les  $x_i$  perturbés sont plus grandes que dans le modèle  $\tau = 0.001$  pour des perturbations de l'ordre de  $\tau = 0.001$  et  $\tau = 0.01$ , mais le modèle ne présente jamais de dépassements. On constate que l'ordre de grandeur des  $x_i$  non-nuls est inférieur à celui du modèle  $\tau = 0.001$ , ce qui confirme encore notre intuition.



(a)  $D(\theta)$  pour le modèle  $\tau = 0.01$  (en vert) et  $\tau = 0.001$  (en bleu) et  $x$  non-perturbé. (b)  $D(\theta)$  pour une perturbation de  $\tau = 0.001$  sur les  $x$  (en vert pour un modèle de  $\tau = 0.01$  en bleu pour  $\tau = 0.001$ ). (c)  $D(\theta)$  pour une perturbation de  $\tau = 0.01$  sur les  $x$  (en vert pour un modèle de  $\tau = 0.01$  en bleu pour  $\tau = 0.001$ ).

FIGURE 2 – Les deux derniers graphes sont donnés pour une centaine de réalisations des  $\xi_i$ .

### 3 Seconde formulation robuste

#### 3.1 Modèle

Le modèle robuste linéaire se base sur le pire des cas possible pour calculer un *epsilon* optimal. On impose maintenant que

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \gamma^2$$

On veut choisir une valeur de  $\gamma$  telle que  $P(\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \gamma^2) \geq 0.9999$ . On va utiliser ici des variables intermédiaires  $\xi_i^2$ . La moyenne et la variance de ces variables sont  $\mu = \frac{\tau^2}{3}$  et  $\sigma^2 = \tau^4 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{9})$ . Par le théorème central limite, on sait que la distribution  $Z = \sum_{i=1}^N \xi_i^2$  tend vers une variable normale :  $Z \sim \mathcal{N}(N\mu, N\sigma^2)$ . Il suffit alors d'inverser la CDF de  $Z$  pour trouver  $\gamma$  tel que  $P(Z \leq \gamma^2) = 0.9999$  (voir table 1 pour les résultats).

On s'attend donc à de meilleurs résultats car les zones de  $\mathbb{R}_N$  où tous les  $\xi_i$  ont une valeur absolue élevée sont supprimées. On peut à nouveau reprendre les contraintes du primal et reformuler un problème d'optimisation conique. On écrit à nouveau une paire primal/dual :

$$\begin{aligned} \max_{\xi} (d \cdot x)^T \xi \leq \epsilon - d(\theta)^T x \\ \begin{pmatrix} t \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{R^{n+1}} \\ t = \gamma \end{aligned} \quad \Leftrightarrow_{Dual} \quad \begin{aligned} \min_y \gamma y \leq \epsilon - d(\theta)^T x \\ \begin{pmatrix} y \\ d_1(\theta)x_1(\theta) \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_{R^{n+1}} \end{aligned}$$

Par la dualité forte, l'objectif optimal du dual conique est supérieur à l'optimum du primal. Cela nous permet encore une fois de réécrire notre problème de façon conique :

$\tau$	0.001	0.01
$\gamma$	0.0045107	0.045107

TABLE 1 – Résultat de nos calculs pour  $\gamma$

$$\begin{array}{lcl}
\min_{x, \epsilon, y_1, y_2, y_3, y_4} & \epsilon & \\
y_i(\theta) & \geq & 0 \\
\begin{pmatrix} y_i(\theta) \\ d_1(\theta)x_1(\theta) \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n(\theta) \end{pmatrix} & \succeq_{\mathbb{L}^{N+1}} & 0 \\
\forall i = 1, 2, 3, 4 & \forall \theta \in S_e \cup P_e & 
\end{array}
\quad \left| \quad \begin{array}{lcl}
\gamma y_1(\theta) & \leq & \epsilon - d(\theta)^T x \\
\gamma y_2(\theta) & \leq & \epsilon + d(\theta)^T x \\
\forall \theta \in S_e & & \\
\gamma y_3(\theta) & \leq & \epsilon + 1 - d(\theta)^T x \\
\gamma y_4(\theta) & \leq & \epsilon - 1 + d(\theta)^T x \\
\forall \theta \in P_e & & 
\end{array}$$

### 3.2 Analyse des résultats

La figure 3 présente nos résultats pour différents types de perturbations. On constate que notre modèle résiste bien aux perturbations. La table 2 reprend les résultats obtenus pour ce modèle conique. L'ordre de grandeur des  $x_i$  est plus petit que dans le modèle robuste précédent. Notons également que dans ce cas ci, tous les  $x_i$  sont non-nuls, tandis que dans les modèle robuste précédent, beaucoup de  $x$  étaient nuls. On a donc ici une meilleure diversification des  $x_i$ . Ainsi une perturbation sur un  $x_i$  aura moins d'impact. On constate que le  $\epsilon$  est plus élevé que dans le modèle robuste précédent mais les erreurs globales sont en générale moins grandes.

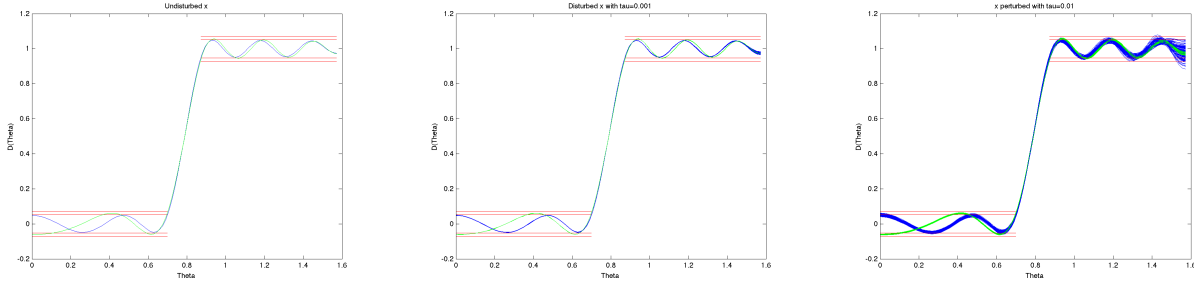


FIGURE 3 – Graphes de  $D(\theta)$  pour des  $x$  non-perturbés, avec une perturbation  $\tau = 0.001$  (graphe du milieu) et avec une perturbation  $\tau = 0.01$  (à droite)(en vert pour un modèle de  $\tau = 0.01$  en bleu pour  $\tau = 0.001$ ). Les deux derniers graphes sont donnés pour une centaine de réalisations des  $\xi_i$ .

Modèles	$\epsilon$	$\mathcal{O}(x_i) (x_i \neq 0)$	$\%x_i = 0$	Erreurs globales pour :		
				$x_i$	$x_i$ pert. ( $\tau = 0.001$ )	$x_i$ pert. ( $\tau = 0.01$ )
Base	2%	$10^3$	65%	0.0185	3.6302	34.9459
Robuste 1 ( $\tau = 0.001$ )	5.07%	$10^0$	72%	0.0396	0.0396	0.0440
Robuste 1 ( $\tau = 0.01$ )	6.79%	$10^{-1}$	75%	0.0508	0.0508	0.0510
Conique ( $\tau = 0.001$ )	5.20%	$10^{-1}$	0%	0.0413	0.0413	0.0423
Conique ( $\tau = 0.01$ )	7.14%	$10^{-2}$	0%	0.0490	0.0490	0.0490

TABLE 2 – Récapitulatif des résultats de la borne maximal  $\epsilon$ , des erreurs globales, des  $x_i$  obtenus pour les différents modèles et les différents types de perturbations.