Optimisation devoir 2
Synthèse robuste d'antennes

Quentin Laurent Nicolas Stevens

15 novembre 2014

On étudie le problème d'optimisation qui consiste à optimiser le diagramme $D(\theta)$ d'une antenne. Il s'agit de trouver les coefficients d'amplification x_i des N anneaux de l'antenne qui satisfassent aux conditions de diagramme unitaire (dans l'intervalle $\mathcal{P} = [\theta_P, 90°]$) ou nul (dans l'intervalle $\mathcal{S} = [0°, \theta_S]$).

1 Formulation linéaire

1.1 Modèle

On peut formuler le programme d'optimisation comme suit :

$$\min_{x_i,\epsilon} \epsilon \tag{1}$$

$$|D(\theta) - 1| \leq \epsilon \qquad \forall \theta \in \mathcal{P} \tag{2}$$

$$|D(\theta)| \leq \epsilon \qquad \forall \theta \in \mathcal{S} \tag{3}$$

$$\epsilon \geq 0 \tag{4}$$

$$\text{avec } D(\theta) = \sum_{i=1}^{N} x_i d_i(\theta) \text{ et } d_i(\theta) = \int_0^{2\pi} cos(2\pi r_i cos(\theta) cos(\phi)) d\phi \tag{5}$$

Le problème posé présente un désavantage majeur ; il est soumis à une infinité de contraintes (3).
Pour pallier à ce problème, nous échantillonnons le problème par rapport à θ. Les contraintes du problèmes ne s'appliquant que dans $P = [\theta_P \ 90°]$ et $S = [0° \ \theta_S]$, nous échantillonnons seulement dans ces deux ensembles. Nous avons ainsi un nombre fini de contraintes. Afin de n'obtenir que des contraintes linéaires, nous transformons chaque contrainte faisant intervenir une valeur absolue en deux contraintes linéaires. Le problème devient alors :

$$\min_{x_i,\epsilon} \epsilon$$

$$D(\theta) - 1 \leq \epsilon \qquad \forall \theta \in \mathcal{P}_e \tag{6}$$

$$-D(\theta) + 1 \leq \epsilon \qquad \forall \theta \in \mathcal{P}_e \tag{7}$$

$$D(\theta) \leq \epsilon \qquad \forall \theta \in \mathcal{S}_e \tag{8}$$

$$-D(\theta) \leq \epsilon \qquad \forall \theta \in \mathcal{S}_e \tag{9}$$

$$\text{avec } D(\theta) = \sum_{i=1}^{N} x_i d_i(\theta) \text{ et } d_i(\theta) = \int_0^{2\pi} cos(2\pi r_i cos(\theta) cos(\phi)) d\phi \tag{10}$$

$\mathcal{P}_e = \{p_0, p_1, ..., p_{Np}\}$ et $\mathcal{S}_e = \{s_0, s_1, ..., s_{Ns}\}$ sont les ensembles des échantillons dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$. Deux points consécutifs sont séparés par une distance maximale de h.
Cette formulation est bien évidemment une formulation approchée de notre problème initial puisque des

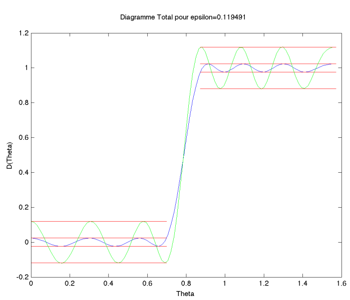
points entre les échantillons pourront ne pas satisfaire les contraintes de diagramme unitaire ou nul. Cependant le non-respect de ces contraintes peut être quantifié. En effet, d'après les définitions des $d_i(\theta)$, la valeur absolue de la dérivée de ceux-ci ne peut pas dépasser π. Ce qui signifie que le dépassement de l'erreur de diagramme est au maximum $\sum |x_i \pi h|$. Il nous suffit alors de choisir un h adapté au niveau de précision que nous voulons atteindre.
Notons que lors de l'implémentation de notre modèle, nous faisons une deuxième approximation en calculant les diagrammes $d_i(\theta)$. Comme l'intégrale de l'équation (5) n'est pas calculable analytiquement (il s'agit d'une fonction de Bessel), nous la calculons numériquement au moyen d'une somme de Rieman dans notre code Ampl. **Todo : Expliquer notre choix de h, trouver une meilleure borne ?, résoudre en ampl**

1.2 Analyse des résultats

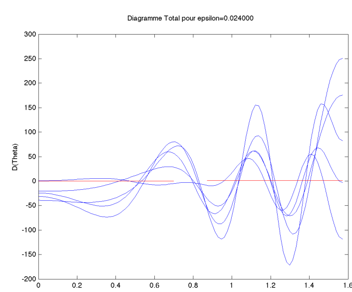
La figure 1a donne une illustration des diagrammes optimaux obtenus pour certains paramètres. On constate que lorsque θ_P et θ_S deviennent proches, le ϵ croit. On remarque également que tous les points $\in \mathcal{S}$ ou $\in \mathcal{P}$ sont bien compris entre les bornes fixées par ϵ ; et ce malgré que nous ayons discrétisé le problème et que nous n'ayons donc pas imposer cette contrainte pour tous les points. Cela confirme l'idée que l'approximation faite est acceptable. Définissons l'erreur du diagramme $D(\theta)$ comme suit :

$$err = \int_{\mathcal{S}} |D(\theta)| d\theta + \int_{\mathcal{P}} |D(\theta) - 1| d\theta. \tag{11}$$

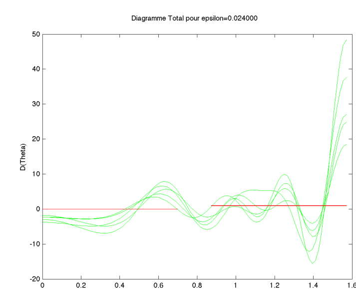
On obtient 0.0209 (en bleu) et 0.1151 (vert) comme erreur pour les diagrammes de la figure 1a. Pour les x perturbés, on obtient comme erreur moyenne 6.5605 pour les diagrammes de la figure 1b et 64.6476 pour les diagrammes de la figure 1b.



(a) Diagramme optimal $D(\theta)$ de l'antenne composé de 40 anneaux, pour $r_i = i/10$. En bleu pour $\theta_P = 50°$ et $\theta_S = 40°$; en vert pour $\theta_P = 47°$ et $\theta_S = 43°$. En rouge, les bornes du ϵ optimal trouvé (en bleu 2.4%, en vert 11.9%).



(b) Diagramme optimal $D(\theta)$ de l'antenne composé de 40 anneaux, pour $r_i = i/10$, $\theta_P = 50°$ et $\theta_S = 40°$ avec un vecteur x perturbé ($\tau = 0.01$).



(c) Diagramme optimal $D(\theta)$ de l'antenne composé de 40 anneaux, pour $r_i = i/10$, $\theta_P = 50°$ et $\theta_S = 40°$ avec un vecteur x perturbé ($\tau = 0.001$).

FIGURE 1

1.3 Analyse de la robustesse

En pratique, l'implémentation des x_i n'est pas réalise parfaitement. On a plutôt $\hat{x}_i = x_i(1 + \xi_i)$ où les erreurs ξ_i se situent dans un intervalle $[-\tau, \tau]$.
Reprenons le modèle linéaire précédent et appliquons-lui des erreurs xi_i de l'ordre de $\tau = 0.001$ et $\tau = 0.01$. On obtient les graphes aux figures 1b et 1c. On a donc une solution très sensible aux perturbations. Une

valeur des erreurs sont données aux tableau récapitulatif 1. Ce tableau nous donne aussi une indication sur l'ordre de grandeur des x_i. Ils sont très élevé dans notre cas. Intuitivement, un grand x_i positif vient compenser un grand x_i négatif... dés qu'on perturbe ces valeurs des x, on a directement de grandes erreurs. On peut supposer qu'on modèle plus robuste consisterait à réduire ces valeurs ces x_i.

2 Première formulation robuste

2.1 Modèle

Afin de prendre en compte les erreurs sur les facteurs d'amplification x_i, nous utilisons les valeurs maximales des variations possibles de $\hat{D(\theta)}$ en chaque point de notre discrétisation. Nous imposons que malgré ces variations nous restons dans les intervalles voulus. On transforme par exemple la première contrainte $D(\theta) \leq \epsilon$ du modèle non robuste :

$$
\begin{aligned}
d(\theta)^T(x.*(1+\xi)) \leq \epsilon \\
dx(\theta)^T(\xi) \leq \epsilon - d(\theta)^T x
\end{aligned}
$$

Où $d(\theta)$ est le vecteur colonne contenant les $d_i(\theta)$ et $dx(\theta)$ le produit élément par élément de $d(\theta)$ avec x. Nous cherchons à ce que notre optimum (x, ϵ) soit valable dans le pire cas, c'est-à-dire pour cette contrainte celui où $d(\theta)^T(x.*\xi)$ est maximum. Comme nous imposons également que $|\xi_i| \leq \tau$ nous formulons un problème de maximisation linéaire et imposons une condition sur son objectif :

$$
\begin{aligned}
\max_{\xi_i} d(\theta)^T \xi x &\leq \epsilon - d(\theta)^T x \\
\xi_i &\leq \tau \\
-\xi_i &\leq \tau
\end{aligned}
$$

Nous avons donc un problème d'optimisation dont l'optimum sera inférieur à $\epsilon - d(\theta)^T x$. On peut mettre ce problème sous forme duale. Par dualité forte on sait que l'objectif optimal de ce problème dual sera le même que celui du primal. Celà nous donnera :

$$
\begin{aligned}
\min_{y_+, y_-} \mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_+ + \mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_- &\leq \epsilon - d(\theta)^T x \\
y_+ &\geq 0 \\
y_- &\geq 0 \\
(I, -I)\begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1(\theta)x_1 \\ d_2(\theta)x_2 \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Comme ce problème est un problème de minimisation, si la contrainte sur l'objectif est satisfaite pour n'importe quelle solution admissible, on sait que l'optimum satisfera aussi cette contrainte.
On peut alors revenir à notre problème de base dans lequel on remplace la contrainte $D(\theta) \leq \epsilon$ par les contraintes du dual et la contrainte sur l'objectif. On traduit de la même manière les autres contraintes. On obtient alors le modèle suivant :

$$
\begin{array}{rcl}
\min\limits_{x,\epsilon,y_1+,y_1-,y_2+,y_2-,y_3+,y_3-,y_4+,y_4-} & \epsilon & \\
y_{i+} & \geq & 0 \\
y_{i-} & \geq & 0 \\
(I,-I)\begin{pmatrix} y_i+ \\ y_i- \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} d_1(\theta)x_1 \\ d_2(\theta)x_2 \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n \end{pmatrix} \\
\forall i = 1,2,3,4 \;\; \forall \theta \in S_e \cup P_e & & \\
\mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{1+} + \mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{1-} & \leq & \epsilon - d(\theta)^T x \\
\mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{2+} + \mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{2-} & \leq & \epsilon + d(\theta)^T x \\
\forall \theta \in S_e & & \\
\mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{3+} + \mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{3-} & \leq & \epsilon + 1 - d(\theta)^T x \\
\mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{4+} + \mathbf{1}^{n\times 1}\tau y_{4-} & \leq & \epsilon - 1 + d(\theta)^T x \\
\forall \theta \in P_e & &
\end{array}
$$

Cette formulation introduit $8N$ variables supplémentaires par rapport au modèle de base

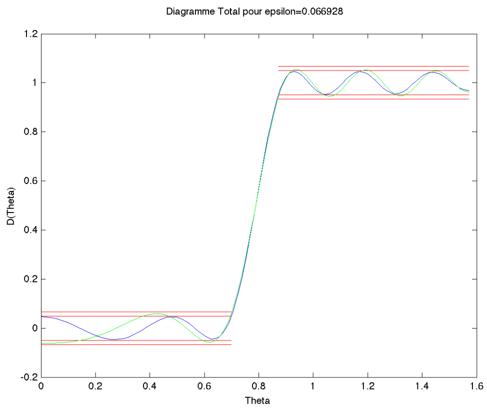
2.2 Analyse des résultats

Les figures 2a, 2b et 2c montrent les résultats obtenus pour différentes valeurs de τ (dans le modèle ainsi que dans les perturbations). Ici les x sont conçus pour mieux résister en cas de perturbations. Un récapitulatif des résultats pour les différents modèle est donné à la table 1. Notons que ces modèles sont bien plus performant que le modèle de base. En effet le ϵ augmente très peu 2% dans le modèle de base à 2.8% ou 3.3% dans le modèle robuste ; tandis que la robustesse s'améliore nettement.

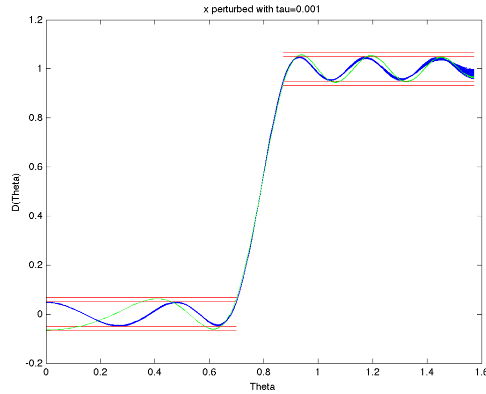
— Dans le cas $\tau = 0.001$, on constate une augmentation du ϵ par rapport au modèle de base. Les erreurs pour les x_i perturbés sont cependant bien moindre. On constate également que les erreurs pour le modèle x_i perturbés avec une perturbation de l'ordre de $\tau = 0.001$ ou de $\tau = 0.01$ sont moindre que dans le modèle avec $\tau = 0.01$. Mais malgré que les erreurs soient moindre que dans le modèle $\tau = 0.01$ même dans le cas où les perturbations sont de l'ordre de $\tau = 0.01$, on observe des dépassements pour certaines réalisation des ξ_i si on applique les perturbations de $\tau = 0.01$. On constate que l'ordre de grandeur des x_i non-nuls est inférieur à celui du modèle de base ce qui confirme notre intuition comme quoi le modèle robuste a tendance à fournir des x_i plus petits.

— Dans le cas $\tau = 0.01$, on constate toujours une augmentation du ϵ par rapport au modèle de base et au modèle où $\tau = 0.001$. Les erreurs pour les x_i perturbés sont plus grande que dans le modèle $\tau = 0.001$ pour des perturbations de l'ordre de $\tau = 0.001$ et $\tau = 0.01$, mais le modèle ne présente jamais de dépassement. On constate que l'ordre de grandeur des x_i non-nuls est inférieur à celui du modèle $\tau = 0.001$, ce qui confirme encore notre intuition.

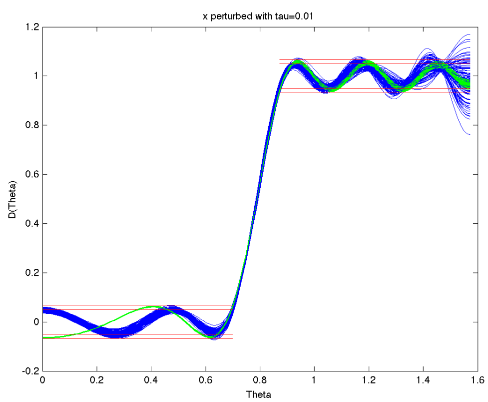
Bref, les deux modèle robustes se comporte le mieux pour les perturbations auxquelles ils sont sensés résister.



(a) $D(\theta)$ pour le modèle $\tau = 0.01$ (en vert) et $\tau = 0.001$ (en bleu) et x non-perturbé.



(b) $D(\theta)$ pour une perturbation de $\tau = 0.001$ sur les x (en vert pour un modèle de $\tau = 0.01$ en bleu pour $\tau = 0.001$).



(c) $D(\theta)$ pour une perturbation de $\tau = 0.01$ sur les x (en vert pour un modèle de $\tau = 0.01$ en bleu pour $\tau = 0.001$).

FIGURE 2 – Les deux derniers graphes sont donnés pour une centaine de réalisations des ξ_i.

			Erreurs pour :		
	ϵ	$\mathcal{O}(x_i)$ $(x_i \neq 0$	x_i	x_i pert. $(\tau = 0.001)$	x_i pert. $(\tau = 0.01)$
Modèle de base	2%	10^3	0.0185	5.3977	47.9054
Modèle robuste 1 $(\tau = 0.001)$	5.07%	10^0	0.0396	0.0396	0.0440
Modèle robuste 1 $(\tau = 0.01)$	6.80%	10^{-1}	0.0508	0.0508	0.0510

TABLE 1 – Récapitulatif des résultats des erreurs et de la borne maximal ϵ obtenus pour les différents modèles et les différents types de perturbations.

3 Seconde formulation robuste

3.1 Modèle

Le modèle robuste linéaire se base sur le pire des cas possible pour calculer un *epsilon* optimal. On impose maintenant que

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \leq \gamma^2$$

On s'attend donc à de meilleurs résultats car les zones de $\mathbb{R}_N$ où tous les ξ_i ont une valeur absolue élevée sont supprimées. On peut à nouveau reprendre les contraintes du primal et reformuler un problème d'optimisation, conique cette fois.

$$\begin{aligned} \max_{\xi} dx^T \xi \quad &\leq \quad \epsilon - d(\theta)^T x && (12)\\ (t, \xi) \quad &\in \quad \mathbb{L}_{R^{n+1}} && (13)\\ t = \gamma & && (14) \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un problème d'optimisation conique. Son dual s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{y} \gamma^2 y \quad &\leq \quad \epsilon - d(\theta)^T x && (15)\\ \begin{pmatrix} y \\ d_1(\theta)x_1(\theta) \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n(\theta) \end{pmatrix} \quad &\in \quad \mathbb{L}_{R^{n+1}} && (16) \end{aligned}$$

Par la dualité forte, l'objectif optimal du dual conique est supérieur à l'optimum du primal.
Celà nous permet encore une fois de réécrire notre problème de façon conique :

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{x,\epsilon,y_1,y_2,y_3,y_4} \epsilon & & \\ y_i(\theta) & \geq & 0 \\ \begin{pmatrix} y_i(\theta) \\ d_1(\theta)x_1(\theta) \\ \vdots \\ d_n(\theta)x_n(\theta) \end{pmatrix} & \succeq_{\mathbb{L}^{N+1}} & 0 \\ & \forall i = 1,2,3,4 & \forall \theta \in S_e \cup P_e \\ \gamma^2 y_1(\theta) & \leq & \epsilon - d(\theta)^T x \\ \gamma^2 y_2(\theta) & \leq & \epsilon + d(\theta)^T x \\ \forall \theta \in S_e & & \\ \gamma^2 y_3(\theta) & \leq & \epsilon + 1 - d(\theta)^T x \\ \gamma^2 y_4(\theta) & \leq & \epsilon - 1 + d(\theta)^T x \\ \forall \theta \in P_e & & \end{array}$$

3.2 Analyse des résultats