

# Optimisation devoir 2

## Synthèse robuste d'antennes

Quentin Laurent

Nicolas Stevens

11 novembre 2014

On étudie le problème d'optimisation qui consiste à optimiser le diagramme  $D(\theta)$  d'une antenne. Il s'agit de trouver les coefficients d'amplification  $x_i$  des  $N$  anneaux de l'antenne qui satisfassent aux conditions de diagramme unitaire (dans l'intervalle  $\mathcal{P} = [\theta_P, 90^\circ]$ ) ou nul (dans l'intervalle  $\mathcal{S} = [0^\circ, \theta_S]$ ).

## 1 Formulation linéaire

### 1.1 Modèle

On peut formuler le programme d'optimisation comme suit :

$$\min_{x_i, \epsilon} \epsilon \tag{1}$$

$$|D(\theta) - 1| \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{P} \tag{2}$$

$$|D(\theta)| \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{S} \tag{3}$$

$$\epsilon \geq 0 \tag{4}$$

$$\text{avec } D(\theta) = \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta) \text{ et } d_i(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi r_i \cos(\theta) \cos(\phi)) d\phi \tag{5}$$

Le problème posé présente un désavantage majeur ; il est soumis à une infinité de contraintes (3). Pour pallier à ce problème, nous échantillonnons le problème par rapport à  $\theta$ . Les contraintes du problèmes ne s'appliquant que dans  $\mathcal{P} = [\theta_P, 90^\circ]$  et  $\mathcal{S} = [0^\circ, \theta_S]$ , nous échantillonnons seulement dans ces deux ensembles. Nous avons ainsi un nombre fini de contraintes. Afin de n'obtenir que des contraintes linéaires, nous transformons chaque contrainte faisant intervenir une valeur absolue en deux contraintes linéaires. Le problème devient alors :

$$\min_{x_i, \epsilon} \epsilon$$

$$D(\theta) - 1 \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{P}_e \tag{6}$$

$$-D(\theta) + 1 \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{P}_e \tag{7}$$

$$D(\theta) \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{S}_e \tag{8}$$

$$-D(\theta) \leq \epsilon \quad \forall \theta \in \mathcal{S}_e \tag{9}$$

$$\text{avec } D(\theta) = \sum_{i=1}^N x_i d_i(\theta) \text{ et } d_i(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi r_i \cos(\theta) \cos(\phi)) d\phi \tag{10}$$

$\mathcal{P}_e = \{p_0, p_1, \dots, p_{N_P}\}$  et  $\mathcal{S}_e = \{s_0, s_1, \dots, s_{N_S}\}$  sont les ensembles des échantillons dans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$ . Deux points consécutifs sont séparés par une distance maximale de  $h$ .

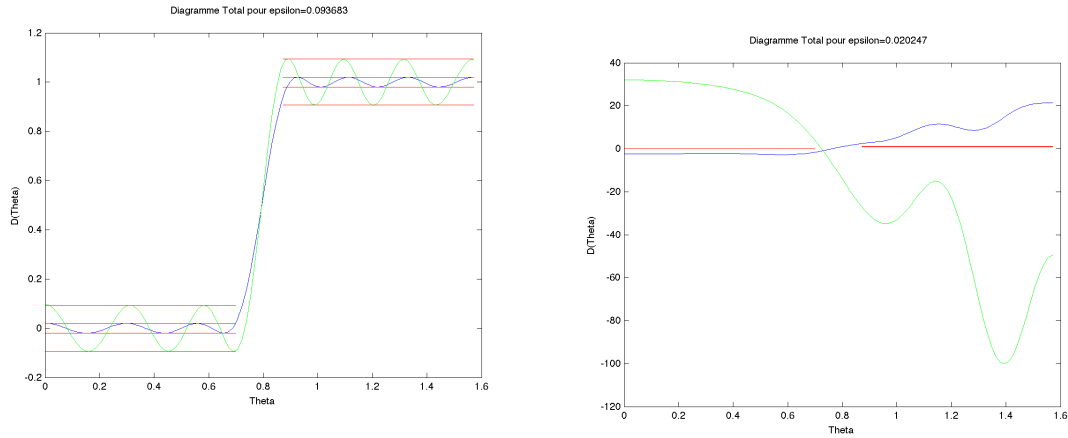
Cette formulation est bien évidemment une formulation approchée de notre problème initial puisque des

points entre les échantillons pourront ne pas satisfaire les contraintes de diagramme unitaire ou nul. Cependant le non-respect de ces contraintes peut être quantifié. En effet, d'après les définitions des  $d_i(\theta)$ , la valeur absolue de la dérivée de ceux-ci ne peut pas dépasser  $\pi$ . Ce qui signifie que le dépassement de l'erreur de diagramme est au maximum  $\sum |x_i \pi h|$ . Il nous suffit alors de choisir un  $h$  adapté au niveau de précision que nous voulons atteindre.

Notons que lors de l'implémentation de notre modèle, nous faisons une deuxième approximation en calculant les diagrammes  $d_i(\theta)$ . Comme l'intégrale de l'équation (5) n'est pas calculable analytiquement (il s'agit d'une fonction de Bessel), nous la calculons numériquement au moyen d'une somme de Rieman dans notre code Ampl. **Todo : Expliquer notre choix de h, trouver une meilleure borne ?, résoudre en ampl**

## 1.2 Résultats des simulations

La figure 1a donne une illustration des diagrammes optimaux obtenus pour certains paramètres. On constate que lorsque  $\theta_P$  et  $\theta_S$  deviennent proches, le  $\epsilon$  croît.



(a) Diagramme optimal  $D(\theta)$  de l'antenne composé de 40 anneaux, pour  $r_i = i/10$ . En bleu pour  $\theta_P = 50^\circ$  et  $\theta_S = 40^\circ$ ; en vert pour  $\theta_P = 47^\circ$  et  $\theta_S = 43^\circ$ . En rouge, les bornes du  $\epsilon$  optimal trouvé (en bleu avec un vecteur  $x$  perturbé ( $\tau = 0.001$  en bleu et  $\tau = 0.01$  en vert).

FIGURE 1

## 1.3 Analyse de la robustesse

En pratique, l'implémentation des  $x_i$  n'est pas réalisée parfaitement. On a plutôt  $\hat{x}_i = x_i(1 + \xi_i)$  où les erreurs  $\xi_i$  se situent dans un intervalle  $[-\tau, \tau]$ .

Reprenons le modèle linéaire précédent

## 2 Première formulation robuste

### 2.1 Modèle

Afin de prendre en compte les erreurs sur les facteurs d'amplification  $x_i$ , nous utilisons les valeurs maximales des variations possibles de  $\hat{D}(\theta)$  sur un intervalle.

$$\begin{aligned}
|D(\hat{\theta})| &= \left| \sum_{i=1}^n x_i(1 + \xi_i)d_i(\theta) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^n x_i d_i(\theta) \right| + \left| \sum_{i=1}^n x_i \xi_i d_i(\theta) \right| \\
&\leq |D(\theta)| + \sum_{i=1}^n \left| \tau d_i(\theta) \frac{h}{2} \right|
\end{aligned}$$

En imposant

$$|D(\theta)| + \sum_{i=1}^n \left| \tau d_i(\theta) \frac{h}{2} \right| \leq \epsilon$$

on est sur que  $|D(\hat{\theta})| \leq \epsilon$ . De la même manière, on traduit les contraintes sur P :

$$|D(\theta) - 1| + \sum_{i=1}^n \left| \tau d_i(\theta) \frac{h}{2} \right| \leq \epsilon$$

Il nous faut donc introduire n variables  $v_i$  pour chaque  $\theta$  échantillonné, correspondant aux valeurs absolues des  $\tau d_i(\theta) \frac{h}{2}$ . On a alors

$$\begin{aligned}
|D(\theta)| + \sum_{i=1}^n \left| \tau x_i d_i(\theta) \frac{h}{2} \right| &\leq \epsilon \\
|D(\theta) - 1| + \sum_{i=1}^n \left| \tau x_i d_i(\theta) \frac{h}{2} \right| &\leq \epsilon \\
\tau x_i d_i(\theta) \frac{h}{2} &\leq v_i \\
-\tau x_i d_i(\theta) \frac{h}{2} &\leq v_i
\end{aligned}$$

## 2.2 Analyse des résultats

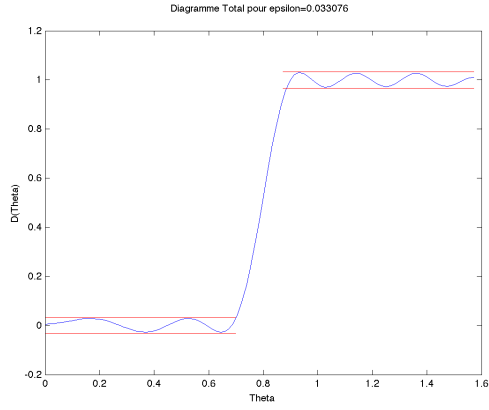
Les figures 2a, 2c, 2b et 2d montrent les résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\tau$ . Ici les  $x$  sont conçus pour mieux résister en cas de perturbations.

Dans le cas  $\tau = 0.01$ , on souhaite que les  $x$  résiste à de plus grande perturbation, ainsi le  $\epsilon$  est plus grand (3.3%) mais les perturbations sont moins dommageables (oscillations moins grandes sur la figure 2b que sur 2d).

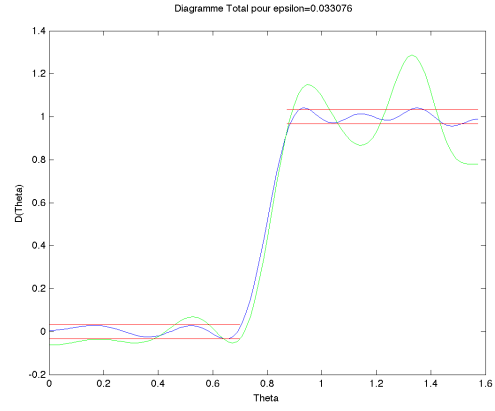
Dans le cas  $\tau = 0.01$ , on souhaite que les  $x$  résiste à de plus petites perturbation, ainsi le  $\epsilon$  est moins grand (2.8%) mais les perturbations sont plus dommageables.

Notons que ce modèle est bien plus performant que le mode de base. En effet le  $\epsilon$  augmente très peu 2% dans le modèle de base à 2.8% ou 3.3% dans le modèle robuste ; tandis que la robustesse s'améliore nettement.

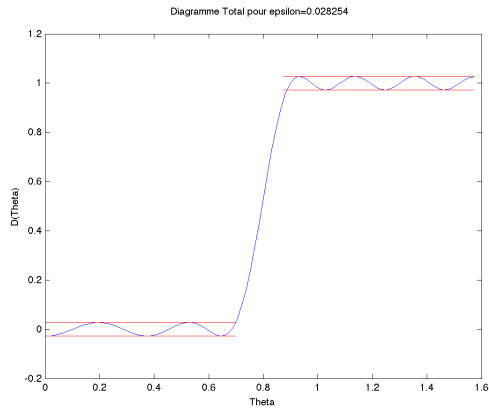
## 3 Seconde formulation robuste



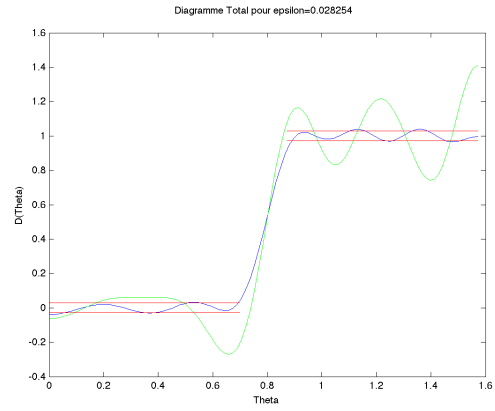
(a)  $D(\theta)$  pour  $\tau = 0.01$  et  $x$  non-perturbé.



(b)  $D(\theta)$  pour  $\tau = 0.01$  et  $x$  perturbés (en vert pour une perturbation de  $\tau = 0.01$  en bleu pour  $\tau = 0.001$ ).



(c)  $D(\theta)$  pour  $\tau = 0.001$  et  $x$  non-perturbé.



(d)  $D(\theta)$  pour  $\tau = 0.001$  et  $x$  perturbés (en vert pour une perturbation de  $\tau = 0.01$  en bleu pour  $\tau = 0.001$ ).

FIGURE 2