1845. ANNALEN №. 4.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND LXIV.

I. *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige; vom Studiosus Kirchhoff,*

Mitglied des physikalischen Seminars zu Königsberg.

Leitet man einen constanten galvanischen Strom durch eine Metallscheibe, so wird sich die Elektricität in dieser auf eine bestimmte Weise vertheilen. Die Art der Vertheilung kann man nach den von Ohm aufgestellten Principien theoretisch ermitteln. Ich habe die dazu nöthige Rechnung unter der Voraussetzung, dafs der Zustand der Scheibe ein stationärer geworden sey, in dem Falle durchgeführt, dafs die Scheibe eine kreisförmige ist, und dafs die Elektricität durch einen Draht in sie hinein, durch einen zweiten aus ihr heraustrete. Das Resultat wurde insbesonders einfach, wenn der Ein- und der Austrittspunkt in der Peripherie der Scheibe liegen; in diesem Falle habe ich dasselbe durch Versuche geprüft und, wie es mir scheint, eine hinreichende Bestätigung gefunden. Ich will hier zuerst die theoretischen Betrachtungen angeben, und dann die Experimente beschreiben, die ich angestellt habe.

Bestimmen wir die Lage eines Punktes der leitenden Ebene durch die rechtwinklichen Coordinaten x und y, so ist die elektrische Spannung desselben, u, eine Function von x und y; d. h. es ist:

$$u = f(x, y)$$

Die Gleichung $f(x, y) = u_0$ stellt, wenn u_0 eine Constante bezeichnet, ein Curve dar, in der alle Punkte dieselbe Spannung haben. Wir betrachten zwei solche unendlich nahe liegende „Curven gleicher Spannung:“

$$f(x, y) = u^0$$
$$f(x, y) = u^0 + \mathrm{d}u,$$

nehmen in der ersten 2 unendlich nahe liegende Punkte A, B an (Fig. 1. Taf. V.), und ziehen in ihnen die Normalen; diese sind zugleich Normalen der zweiten Curve in den Punkten A', B', so dafs $ABA'B'$ ein unendlich kleines Rechteck ist, bei dem jeder Punkt der Seite AB die Spannung u_0, und jeder Punkt der Seite $A'B'$ die Spannung $u_0 + \mathrm{d}u$ hat; durch dieses Rechteck fliefst also, nach den Ohm'schen Principien, in der Zeiteinheit in der Richtung von AA' eine Elektricitätsmenge, die

$$= -k.AB.\frac{\mathrm{d}u}{AA'}$$

ist, wo k die Leitungsfähigkeit der Scheibe bezeichnet; nehmen wir an, dafs dieselbe die unendlich kleine Dicke δ habe, so tritt δ noch als Factor hinzu, so dafs der Ausdruck:

$$-k.\delta.AB.\frac{\mathrm{d}u}{AA'}$$

wird. Dieselbe Menge von Elektricität fliefst durch eine jede Linie CD, die wir durch das Rechteck $ABA'B'$ ziehen; ziehen wir CD parallel der x Axe, und setzen den Winkel, den AA', d. h. die Richtung des Stromes, mit dieser bildet, $= \varphi$, so ist die Elektricitätsmenge, die durch CD fliefst:

$$= -k.\delta.CD.\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}u}{AA'}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich noch auf eine andere Form bringen; es ist nämlich:

$$\mathrm{d}u = \frac{du}{dx}\mathrm{d}x + \frac{du}{dy}\mathrm{d}y$$

wo $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ die Unterschiede der Coordinaten von A und A' bezeichnen; hieraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}u}{AA'} = \frac{du}{dx}\cos\varphi + \frac{du}{dy}\sin\varphi;$$

da ferner der Punkt A dieselbe Spannung hat, als B, so muſs

$$o = \frac{du}{dx} \sin\varphi - \frac{du}{dy} . \cos\varphi$$

seyn; aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{du}{AA'} \cos\varphi = \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{AA'} \sin\varphi = \frac{du}{dy}.$$

Der obige Ausdruck ist also:

$$= -k . \delta . CD . \frac{du}{dy}.$$

Da die Lage des Coordinatensystemes eine ganz willkührliche war, so ist das Resultat der angestellten Untersuchung: daſs durch irgend ein lineares Element ds in der Zeiteinheit eine Menge von Elektricität flieſst, die

$$= -k . \delta . ds . \frac{du}{dN}$$

ist, wenn wir mit $\frac{du}{dN}$ die Differentiation nach der Richtung der Normale von ds bezeichnen.

Durch diese Bemerkung wird es leicht, die Bedingung zu finden, der u genügen muſs, damit der elektrische Zustand der Scheibe ein stationärer seyn könne. Betrachten wir nämlich eine geschlossene Curve in derselben, innerhalb der ihr keine Elektricität zugeführt wird, so muſs die Summe aller Elektricitätsmengen, die durch diese Curve flieſsen $= o$ seyn; es muſs also:

$$\int ds . \frac{du}{dN} = o$$

seyn, wenn dieses Integral über die ganze Curve ausgedehnt wird. Bezeichnen wir die Winkel, die N mit den Coordinatenaxen bildet, durch (N, x) und (N, y), so haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dN} &= \frac{du}{dx} \cos(N, x) + \frac{du}{dy} \cos(N, y) \\ dx &= -ds . \cos(N, y) \\ dy &= ds . \cos(N, x), \end{aligned}$$

und die Gleichung wird diese [1]):

$$\int\left(\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx\right) = o.$$

Denken wir uns den Fall, daſs die Elektricität durch einzelne Punkte in die Scheibe und aus ihr heraustrete, und betrachten nun zweitens eine geschlossene Curve, die einen von den Eintrittspunkten umschlieſst, so muſs in Bezug auf sie:

$$-k.\delta.\int ds.\frac{du}{dN} = -k.\delta.\int\left(\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx\right) = E$$

seyn, wenn E die Elektricitätsmenge bezeichnet, die durch diesen Punkt der Scheibe zugeführt wird.

Als dritte Bedingung für u tritt noch hinzu, daſs für die Grenze der Scheibe $\frac{du}{dN} = o$ seyn muſs, weil durch diese an keiner Stelle Elektricität zu- oder abflieſsen soll; d. h. daſs die Curven gleicher Spannung die Gränze senkrecht schneiden [2]). Ist die Scheibe unbegränzt, so fällt

1) Da die betrachtete Curve eine ganz beliebige war (auſser daſs sie gewisse Punkte nicht umschlieſsen sollte), so kann diese Bedingung nicht anders erfüllt werden, als daſs $\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx$ ein vollständiges Differential, $= dv$, ist; d. h. es muſs:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = o$$

seyn. Die Gleichung $dv = o$, d. h. $v = const$, stellt ein System von Curven dar, die die Curven gleicher Spannung senkrecht schneiden, d. h. die Strömungslinien.

2) Bestände die Scheibe aus zwei Stoffen von verschiedener Leitungsfähigkeit, so würden für die Berührungscurve beider folgende Bedingungen hinzukommen (wenn k und k' die Leitungsfähigkeiten, u und u' die Spannungen bezeichnen):

$$k.\frac{du}{dN} = k'.\frac{du'}{dN}$$

und $u - u' =$ der elektromotorischen Kraft, die durch die Berührung der beiden Stoffe erzeugt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{du}{ds} = \frac{du'}{ds};$$

die letzte Bedingung fort; an ihre Stelle tritt die, dafs die Spannung in der Unendlichkeit = einer constanten endlichen Gröfse ist.

Fügen wir noch hinzu, dafs die Elektricitätsmenge, welche die ganze Scheibe enthält = einer gegebenen sey, oder dafs die Spannung in einem bestimmten Punkte eine gegebene sey, so haben wir alle Bedingungen aufgestellt, welchen u nach unserer Theorie genügen mufs; durch diese mufs u eindeutig bestimmt seyn, da die Vertheilung der Elektricität bei einem bestimmten Experimente nur *eine* bestimmte seyn kann. Haben wir also eine Function für u gefunden, welche diesen Bedingungen genügt, so können wir sicher seyn, dafs diese die wirkliche Vertheilung angiebt, falls die Theorie die richtige ist.

Wir wollen zuerst den Fall näher betrachten, wenn die Scheibe unbegränzt ist. Es seyen A_1, $A_2 .. A_n$ die Einströmungspunkte (ich will der Kürze halber jetzt unter diesem Namen sowohl die Einströmungspunkte im engern Sinne als auch die Ausströmungspunkte verstehen, und will die Elektricitätsmengen, die durch die letzteren abfliefsen, als negative einströmende bezeichnen); die Elektricitätsmengen, die durch diese in der Zeiteinheit in die Scheibe treten, seyen E_1, $E_2 .. E_n$, wobei

wir erhalten durch Division dieser Gleichung und der ersten:

$$k . \frac{\frac{du}{dN}}{\frac{du}{ds}} = k' . \frac{\frac{du'}{dN}}{\frac{du'}{ds}}.$$

Es ist aber $\frac{\frac{du}{dN}}{\frac{du}{ds}}$ = der *cotg.* des Winkels, den die Richtung des Stromes im ersten Medium mit N bildet; nennen wir diesen Winkel φ, und den entsprechenden für das zweite Medium φ', so haben wir:

$$tg\, \varphi : tg\, \varphi' = k : k'.$$

Diese Proportion giebt das Gesetz an, nach dem ein elektrischer Strom gebrochen wird, wenn er aus einem Medium in ein anderes tritt.

$E_1 + E_2 + .. + E_n = o$ seyn mufs; bezeichnen wir dann die Entfernungen eines Punktes in dieser von A_1, A_2.. durch r_1, r_2..r_n, so läfst sich leicht zeigen, dafs wir allen aufgestellten Bedingungen genügen, wenn wir:

$$u = M - \frac{E_1}{2\pi . k . \delta} \log r_1 - \frac{E_2}{2\pi . k . \delta} \log r_2 - .. - \frac{E_n}{2\pi . k . \delta} \log r_n$$

setzen.

Bilden wir nämlich das unbestimmte Integral:

$$\int \left(\frac{du}{dx} \mathrm{d}y - \frac{du}{dy} \mathrm{d}x \right),$$

so finden wir dieses:

$$= - \frac{1}{2\pi k \delta} \Big(E_1 . (r_1, R) + E_2 . (r_2, R) + .. + E_n (r_n R) \Big)$$

wenn wir durch (r_1, R), (r_2, R).. die Winkel bezeichnen, die r_1, r_2.. mit einer festen Linie R bilden. Nehmen wir von diesem Integral die Gränzen in Bezug auf eine geschlossene Curve, welche keinen von den Einströmungspunkten umschliefst, so wird es $= o$; umschliefst die Curve einen von den Punkten A_1, A_2.. etwa A_1, so wird das Integral in Bezug auf sie $= - \frac{1}{k . \delta} . E_1$; also die Menge von Elektricität, die in der Zeiteinheit durch sie hindurchströmt $= E_1$. Die dritte Bedingung wird ebenfalls erfüllt, denn für einen Punkt in der Unendlichkeit ist $r_1 = r_2 = ..$; also:

$$u = M + \frac{1}{2\pi k \delta} (E_1 + E_2 + .. + E_n) \log r_1$$
$$= M.$$

Um endlich der vierten Bedingung zu genügen, haben wir nur nöthig, der Constanten M einen passenden Werth zu geben.

Derselbe Ausdruck für u wird auch gelten, wenn die Scheibe begränzt ist, sobald nur die Gränze die Curven gleicher Spannung senkrecht schneidet.

Nehmen wir an, dafs es nur zwei Einströmungspunkte gäbe, so ist:

$$u = M + N . \log \frac{r_2}{r_1},$$

wo $N . 2\pi k \delta = E_1 = - E_2$ gesetzt ist; die Curven gleicher Spannung werden also dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{r_2}{r_1} = const;$$

sie sind also Kreise, welche über der Entfernung zweier Punkte als Durchmesser beschrieben sind, die zu A_1 und A_2 harmonisch liegen. Die Curven, welche diese senkrecht schneiden (d. h. die Strömungscurven), sind die Kreise, welche durch A_1 und A_2 gelegt werden können; wird die Scheibe also durch einen oder mehrere solcher Kreise begränzt, so hat u den angegebenen Werth [1]).

Den beiden ersten Bedingungen für u wird für eine begränzte Scheibe immer genügt durch:

$$u = M - \frac{1}{2\pi k \delta}(E_1 \log r_1 + E_2 \log r_2 + .. + E_n \log r_n$$
$$+ E'_1 \log r'_1 + E'_2 \log r'_2 + . + E'_m \log r'_m),$$

wo $r_1, r_2 .., E_1, E_2 ..$ dieselbe Bedeutung wie oben haben. wo ferner $r'_1, r'_2 ..$ die Entfernungen des in Rede stehenden Punktes der Scheibe von willkührlichen Punkten A'_1 $A'_2 ..,$ die aufserhalb dieser liegen, bezeichnen, und E'_1, $E'_2 ..$ beliebige Coëfficienten sind. In manchen Fällen wird man die Punkte A'_1, $A'_2 ..$ und die Coëfficienten E'_1, $E'_2 ..$ so bestimmen können, dafs auch der dritten Bedingung genügt wird, d. h. dafs die Curven $u = const$ die Gränze der Scheibe rechtwinklich schneiden. Ist die Scheibe eine kreisförmige, so ist dieses immer möglich.

Betrachten wir zuerst den Fall, dafs nur zwei Einströmungspunkte vorhanden sind, so ist der Ausdruck für u, wenn wir wieder $2\pi k \delta N = E_1 = - E_2$ setzen:

$$u = M + N\left(\log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r'_2}{r'_1}\right),$$

1) Die Curven, welche alle Punkte enthalten, die von gleich starken Strömen durchflossen werden, sind in diesem Falle Lemniscaten, deren Gleichung $r_1 . r_2 = const$ ist.

wo wir die Punkte A'_1 und A'_2 durch folgende Construction finden: Wir verbinden den Mittelpunkt der Scheibe C (Taf. V. Fig. 2.) mit A_1 und A_2, und schneiden auf den verlängerten Linien CA_1, CA_2 zwei solche Stücke CA'_1 und CA'_2 ab, dafs der Radius der Scheibe die mittlere Proportionale zwischen CA_1 und CA'_1, und zwischen CA_2 und CA'_2 ist [1])

1) Der Beweis dafür, dafs die Curven $\log\frac{r_2}{r_1}+\log\frac{r'_2}{r'_1}=const$ die Gränze der Scheibe senkrecht schneiden, ist folgender: Die Gleichung der Curven, welche jene rechtwinklich schneiden, ist:

$$v=(r_2,R)-(r_1,R)+(r'_2,R)-(r'_1,R)=const.$$

Führen wir rechtwinkliche Coordinaten ein, so wird dieses eine Gleichung des vierten Grades. Sowohl die Curven: $\log\frac{r_2}{r_1}=const$, als auch die Curven: $\log\frac{r'_2}{r'_1}=const$, schneiden den Kreis, der durch die vier Punkte A_1, A_2, A'_1, A'_2 gelegt werden kann, rechtwinklich; dieser wird also auch von den Curven $\log\frac{r_2}{r_1}+\log\frac{r'_2}{r'_1}=const$ rechtwinklich geschnitten; seine Gleichung mufs daher auch in der Gleichung $v=const$ enthalten seyn; wir schliefsen daraus, dafs der linke Theil dieser Gleichung, wenn sie auf o gebracht ist, sobald wir der Constanten einen passenden Werth geben, sich in zwei Factoren zerlegen läfst, von denen der eine der linke Theil der auf o gebrachten Gleichung des durch A_1, A_2, A'_1, A'_2 gelegten Kreises ist; es läfst sich zeigen, dafs der andere Factor, wenn er $=o$ gesetzt wird, die Gleichung der Gränze der Scheibe bildet. Machen wir C zum Anfangspunkte der Coordinaten, setzen wir $CA_1=\varrho_1$, $CA_2=\varrho_2$, $CA'_1=\varrho'_1$, $CA'_2=\varrho'_2$, nennen wir ferner den Winkel, den ϱ_1 mit der x Axe bildet, φ_1 und den Winkel, den ϱ_2 mit ihr bildet, φ_2, so werden die Gleichungen der beiden in Rede stehenden Kreise:

$$x^2+y^2-\varrho_1.\varrho'_1=o \text{ (oder } x^2+y^2-\varrho_2.\varrho'_2=o)$$

und:

$$x^2+y^2+\frac{(\varrho_1+\varrho'_1)\sin\varphi_2-(\varrho_2+\varrho'_2)\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}x$$
$$-\frac{(\varrho_1+\varrho'_1)\cos\varphi_2-(\varrho_2+\varrho'_2)\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}y+\varrho_1.\varrho'_1=o.$$

Die Gleichung $v=C$ wird, wenn wir für R die y Axe annehmen:

Haben wir n Einströmungspunkte, so wird der Ausdruck für u, wenn wir der Kürze wegen N_i für $\frac{E_i}{2\pi k\delta}$ setzen:

$$u = M - N_1(\log r_1 + \log r'_1) - N_2(\log r_2 + \log r'_2) - .. \\ - N_n(\log r_n + \log r'_n),$$

wo wir die Punkte A'_1, A'_2.. wieder durch dieselbe Construction finden, indem wir C mit A_1, A_2.. verbinden und auf den verlängerten Verbindungslinien solche Stücke CA'_1, CA'_2.. abschneiden, daſs der Radius der Scheibe die mittlere Proportionale zwischen CA_1 und CA'_1, zwischen CA_2 und CA'_2 u. s. w. ist [1]).

Beschreiben wir um die einzelnen Einströmungspunkte geschlossene Curven, und denken wir uns, daſs diesen Curven die Elektricität nicht durch die Punkte A_1, A_2.. zugeführt würde, sondern auf irgend eine andere Weise (etwa durch Cylinderoberflächen, die in ihnen errichtet sind), doch so, daſs einem jeden Punkte dieser Curven gerade so viel zugeführt wird, als früher, so wird sich der elektrische Zustand der Scheibe (mit Ausnahme

$$C = arc\,tg\frac{x-\varrho_2.\cos\varphi_2}{y-\varrho_2\sin\varphi_2} - arc\,tg\frac{x-\varrho_1\cos\varphi_1}{y-\varrho_1\sin\varphi_1} \\ + arc\,tg\frac{x-\varrho'_2\cos\varphi_2}{y-\varrho'_2\sin\varphi_2} - arc\,tg\frac{x-\varrho'_1\cos\varphi_1}{y-\varrho'_1\sin\varphi_1}.$$

Bringen wir diese Gleichung auf eine algebraische Form und setzen $C = \varphi_1 - \varphi_2$, so erhalten wir eine Gleichung, welche identisch mit dem Product der beiden ersten Gleichungen ist.

1) Da nämlich $N_1 + N_2 + .. + N_n = o$ ist, so läſst sich u unter folgender Form darstellen:

$$u = M - \sum \frac{N_k - N_\lambda}{n}(\log r_k + \log r'_k - \log r_\lambda - \log r'_\lambda),$$

wo die Summe in Bezug auf k und λ zu nehmen ist, doch so, daſs λ immer gröſser als k ist (denn suchen wir in den beiden Ausdrücken für u die Coëfficienten von $\log r_i + \log r'_i$, so finden wir sie gleich); ein einzelnes Glied dieses Ausdrucks $= const$ gesetzt, stellt nach dem Vorigen ein System von Curven dar, welche die Gränze der Scheibe senkrecht schneiden; ein solches System stellt also auch die Summe $= const$ gesetzt, dar.

der Fläche der Curven) nicht ändern, es wird also für u derselbe Ausdruck gelten. Wir wollen zu diesen Curven unendlich kleine Kreise nehmen, deren Mittelpunkte A_1, A_2.. sind; diesen Kreisen wurden von den Punkten A_1, A_2.. die Elektricitätsmengen E_1, E_2.. zugeführt, und zwar vertheilte sich eine jede gleichmäſsig auf alle Theile des zugehörigen Kreises [1]); denken wir uns also diese Kreise als die Peripherien der Flächen, mit denen die Scheibe von Drähten berührt wird, die ihr die Elektricitätsmengen E_1, E_2.. zuführen, so wird der aufgestellte Ausdruck für u Gültigkeit haben, wenn wir annehmen können, daſs der Strom in einem jeden Drahte gleichmäſsig in Bezug auf seine Axe vertheilt sey. In einiger Entfernung von der Scheibe findet diese Vertheilung im Drahte statt, da also die Möglichkeit da ist, daſs sie bis zum Ende des Drahtes bleibe, so wird dieses wirklich eintreffen.

Wir haben bis jetzt E_1, E_2.. immer als unmittelbar gegeben betrachtet; verfolgen wir ein bestimmtes Experiment, so müssen wir diese Gröſsen erst durch Rechnung ermitteln. Ich will von dieser Rechnung ein einfaches Beispiel geben, wobei wir zugleich den Widerstand der Scheibe finden werden.

Zwei um A_1 und A_2 beschriebene Kreise seyen die

1) Die Curven gleicher Spannung in der Nähe des Punktes A_1 werden die concentrischen Kreise $r_1 = const$, weil hier r_1 unendlich klein gegen $r_2, r_3 .. r'_1, r'_2$.. ist; und hieraus folgt, daſs sich die Elektricität vom Punkte A_1 gleichmäſsig nach allen Richtungen hin verbreitet. Diese Betrachtung gilt jedoch nicht, wenn A_1 sehr nahe an der Peripherie der Scheibe liegt, denn dann wird auch r'_1 unendlich klein. Befindet sich also einer von den Drähten sehr nahe an der Gränze, so wird der für u aufgestellte Ausdruck für Punkte, die nahe am Drahte liegen, nicht gelten; daſs er dennoch für entfernte Punkte gilt, ergiebt sich, wenn wir für den Draht eine unendliche Zahl sehr nahe liegender Einströmungspunkte substituiren. Hieraus ergiebt sich denn auch, daſs im allgemeinen Fall die Gestalt der Drähte in Bezug auf die Spannung der entfernt liegenden Punkte von gar keinem Einfluſs ist, wenn sie nur als unendlich dünn betrachtet werden können.

beiden Enden eines Drahtes, der den Radius ϱ und die Leitungsfähigkeit k' habe. In einem Querschnitte des Drahtes D habe die elektromotorische Kraft K ihren Sitz; es soll der elektrische Zustand der Schliefsung ermittelt werden.

Bezeichnen wir die Länge des Drahtes von dem Querschnitte D bis zu einem andern Querschnitte mit l, so ist die Spannung dieses:

$$\left.\begin{array}{l} u' = m - n l \ldots \\ u' = m - K + n l' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für die eine Hälfte des Drahtes,} \\ \text{für die andere Hälfte.} \end{array}$$

Die Spannung eine Punktes der Scheibe ist:

$$u = M - \frac{E}{2\pi . k . \delta} \log \frac{r_1 . r'_1}{r_2 . r'_2}.$$

Hier bedeutet E die Intensität des Stromes, der durch den Draht fliefst; es ist also:

$$E = n . k' . \pi \varrho^2 \quad , \; n = \frac{E}{k' . \pi \varrho^2}.$$

Sind die Werthe von l, die zu den durch A_1 und A_2 gelegten Querschnitten des Drahtes gehören l_1 und l_2, so sind die Spannungen in diesen [1]):

$$u'_1 = m - \frac{E}{k' . \pi . \varrho^2} l'_1$$

$$u'_2 = m - K + \frac{E}{k' . \pi . \varrho^2} l_2.$$

Die Peripherien dieser Querschnitte gehören aber auch der Scheibe an, folglich ist:

$$u'_1 = M - \frac{E}{2\pi k \delta} \log \frac{\varrho . A_1 A'_1}{A_1 A_2 . A_1 A'_2}$$

$$u'_2 = M - \frac{E}{2\pi k \delta} \log \frac{A_2 A_1 . A_2 A'_1}{\varrho . A_2 A'_2}.$$

1) Diese Ausdrücke sind nicht strenge richtig; denn in der Nähe der Scheibe gilt nicht die Gleichung $u' = m - n l$, weil die Ströme in dem Drahte hier nicht parallel mit seiner Axe sind; doch da wir ϱ als unendlich klein betrachten, so können wir diesen Umstand vernachlässigen. — Auf dieselbe Art müssen wir die Gleichung $\omega' = \frac{l_1 + l_2}{k' . \pi \varrho^2}$ rechtfertigen.

(Da nämlich ϱ unendlich klein ist, so können wir in u'_1 für r'_1 A_1 A'_1 u. s. w. setzen.) Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$K = E.\left\{\frac{(l_1+l_2)}{k'.\pi\varrho^2}+\frac{1}{2\pi k\delta}\log\left(\left(\frac{A_1A_2}{\varrho}\right)^2.\frac{A_1A'_2.A'_1A_2}{A_1A'_1.A_2A'_2}\right)\right\}.$$

Bezeichnen wir den Widerstand der Scheibe mit ω, den des Drahtes mit ω', so mufs:

$$K = E.(\omega'+\omega)$$

seyn; da nun:

$$\omega' = \frac{l_1+l_2}{k'.\pi\varrho^2}$$

ist, so ist:

$$\omega = \frac{1}{2\pi.k.\delta}.\log\left\{\left(\frac{A_1A_2}{\varrho}\right)^2.\frac{A_1A'_2.A_2A'_1}{A_1A'_1.A_2A'_2}\right\}.$$

Ich wende mich jetzt zur Beschreibung der Versuche, welche ich angestellt habe.

Ich benutzte zu ihnen eine kreisförmige Scheibe von dünnem Kupferblech, die einen Fufs im Durchmesser hatte; an zwei Punkten ihres Randes, die $\frac{3}{4}$ F. von einander abstanden, waren zwei dünne Kupferdrähte angelöthet, die mit den Polen einer Hydrokette in Verbindung gesetzt wurden. Setzte ich auf die Scheibe die Enden zweier Drähte, deren andere Enden in die Quecksilberschälchen eines Multiplicators getaucht waren, so mufste die Magnetnadel desselben eine Ablenkung erleiden, wenn die Punkte der Scheibe, in denen diese berührt wurde, eine verschiedene Spannung hatten; sie mufste keine Ablenkung erleiden, wenn die berührten Punkte in *einer* Curve gleicher Spannung lagen. Liefs ich also den einen Draht fest stehen und suchte mit dem andern solche Punkte, dafs die Magnetnadel keine Ablenkung erlitt, so konnte ich beliebig viele Punkte finden, die in der durch den Fufspunkt des ersten Drahtes gezogenen Curve gleicher Spannung lagen. Nach der Theorie sollte diese Curve ein Kreis seyn, der über einem Durchmesser beschrieben ist, dessen Endpunkte zu den Einströmungspunkten harmonisch sind; ich suchte also einen solchen Kreis zu zeichnen, der den gefundenen Punkten möglichst nahe läge. In der folgenden Tabelle geben die erste Columne den Radius dieses Kreises, die folgenden die Entfernungen der gefundenen Punkte von ihm an (die Einheit ist $\frac{1}{100}$ Zoll).

Radius.	Entfernungen.
114	+1, −1, −1, +1
278	0, 0, 0, 0, 0, +1
604	+1, +1, +1, 0, −1, −1, −3, −2, 0, −4, +7,
590	−1, −2, −1, 0, 0, 0, +3
285	0, −1, −1, −1, 0, −2, +7
117	0, 0, −1, +1
	+2, +2, 0, −2, −3, 0, 0, +2, +4, +6, +3, 0.

Die Figur 3. Taf. V. zeigt die ungefähre Lage der beobachteten Punkte. (Die letzte Reihe in der Tabelle bezieht sich auf die Punkte, welche nahe an der Mittellinie BC liegen, und giebt ihre Entfernungen von dieser an.)

Die Abweichungen sind so geringe, daſs sie wohl hinreichend aus der ungleichmäſsigen Leitungsfähigkeit der Kupferscheibe und aus Beobachtungsfehlern erklärt werden können. Läſst man diese Erklärung zu, so beweist dieses Experiment, daſs die Spannung in einem jeden Punkte der Scheibe eine Function von $\frac{r_2}{r_1}$, d. h. daſs:

$$u = f\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

ist; welche Function f ist, zeigt ein anderer Versuch.

Ich leitete durch die Scheibe den Strom einer constanten Hydrokette, und berührte sie an zwei Punkten mit den Enden zweier Drähte, in deren Schlieſsung auſser dem Multiplicator eine schwache, aus Kupfer und Zink gebildete, Thermokette eingeschaltet war. Wählte ich jetzt die beiden Berührungspunkte so, daſs durch den Multiplicator kein Strom ging, so muſste die Differenz ihrer Spannungen gleich der elektromotorischen Kraft der Thermokette seyn. Ich nahm den einen Berührungspunkt in der Verbindungslinie der Einströmungspunkte an, und las an einer Scale seine Entfernungen von diesen, r_1 und r_2, ab; dann suchte ich in derselben Linie den entsprechenden Berührungspunkt; die Entfernung dieses von den Einströmungspunkten will ich R_1 und R_2 nennen; es war $r_1 + r_2 = R_1 + R_2 = 39$, und ich fand:

r_1	R_1
5	10,4
10	17,3
15	22,8
20	28
25	31,5
30	34,4.

Hieraus ergiebt sich das Gesetz, welches r_1, r_2, R_1, R_2 nahe befolgen:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = const$$

Berechnete ich nämlich nach diesem Gesetze R_1 aus r_1, so fand ich folgende Abweichungen:

R_1	Fehler von R_1.
10,4	+ 0,4
17,3	— 0,1
22,8	— 0,4
28	+ 0,2
31,5	0,0
34,4	— 0,2.

Dieselben Versuche, wie in der Verbindungslinie der Einströmungspunkte, stellte ich jetzt noch in einem durch diese gelegten Kreise an, der den Radius 5 Zoll hatte. Diesen Kreis hatte ich eingetheilt, um die Lage der Berührungspunkte bequem ablesen zu können, nenne ich die Bögen von dem einen Einströmungspunkte bis zu diesen beiden Punkten φ und Φ, so fand ich:

φ.	Φ.
10	25,4
20	48,3
30	62,5
40	70,9
50	78,7
60	84
70	88,75
80	92.

Der Bogen von dem einen Einströmungspunkte bis zum andern war $=100$; hieraus berechnete ich r_1, r_2, R_1, R_2 und untersuchte, ob diese Gröfsen auch hier dem oben ausgesprochenen Gesetze folgten. Die Fehler, welche dann bei Φ vorausgesetzt werden mufsten, waren:

Φ.	Fehler von Φ
25,4	+0,2
48,3	+0,3
62,5	−0,4
70,9	−1,4
78,7	0,0
84	−0,3
88,75	0,6
92	0,0.

Die Fehler dieser und der vorigen Beobachtungsreihe können, meiner Meinung nach, hinreichend erklärt werden, theils als Beobachtungsfehler, theils aus der ungleichmäfsigen Leitungsfähigkeit der Kupferscheibe, so dafs folgendes Gesetz als durch das Experiment bewiesen angesehen werden kann: Wenn $f\frac{r_2}{r_1} - f\frac{R_2}{R_1}$ constant ist, so ist auch $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$ constant. (Es ist nämlich nach dem Früheren $f\frac{r_2}{r_1} - f\frac{R_2}{R_1} =$ der Differenz der Spannungen der Berührungspunkte.)

Hieraus ist es leicht, die Function f zu finden; setzen wir nämlich $\frac{r_2}{r_1}=p$, $\frac{R_2}{R_1}=P$, so beweist der eben ausgesprochene Satz, dafs:

$$fp - fP = F\frac{p}{P}$$

ist, wo F eine noch unbekannte Function bezeichnet; setzen wir $\frac{p}{P}=q$, so wird die Gleichung:

$$f(qP)-f(P)=F(q)$$

oder wenn wir partiell nach P differenziren:

$$q.f'(qP)-f'P=o;$$

also, wenn wir $P=1$ setzen:

$$\begin{aligned} f'q &= \frac{f'(1)}{q} \\ &= \frac{N}{q} \\ fq &= M+N\log q \\ u &= M+N\log\frac{r_2}{r_1}, \end{aligned}$$

wo M und N zwei willkührliche Constanten bezeichnen.

Anmerkung.

Ich habe mir viele Mühe gegeben, den für den Widerstand der Scheibe aufgestellten Ausdruck durch Experimente zu prüfen; doch waren die Veränderungen, die der Widerstand erlitt, wenn die Entfernung der Drähte variirt wurde, so kleine Gröfsen, dafs die Beobachtungen eine Unsicherheit erhielten, bei der sie unmöglich etwas für oder gegen die Theorie beweisen konnten. Eine Hauptschwierigkeit, auf die ich aufserdem bei diesen Versuchen stiefs, war die: zu bewirken, dafs die Drähte die Scheibe immer mit derselben Innigkeit berührten; dieses konnte noch am besten dadurch bewirkt werden, dafs ich statt der Kupferscheibe eine Quecksilberscheibe anwandte, in die ich die Drähte hineintauchte.

Um

Um die kleinen Veränderungen des Widerstandes beobachten zu können, traf ich folgende Vorrichtung: Der Strom einer starken Hydrokette theilte sich in die beiden Arme ACB und ADB (Taf. V. Fig. 4), die Punkte C und D waren durch einen Zwischenbogen verbunden, in den ein Multiplicator eingeschaltet war; AC enthielt die Scheibe mit den beiden Drähten, durch die der Strom durch diese hindurch geleitet wurde, BC einen Rheostaten; AD war ein kurzer dicker, BD ein langer dünner Kupferdraht. Stellte ich nun den Rheostaten so, daſs durch den Multiplicator kein Strom ging, so muſste ich, wie ich gleich beweisen will (wenn die Widerstände von AC, BC,.. durch (AC), (BC),.. bezeichne):

$$(AC):(BC)=(AD):(BD)$$

seyn. Die Veränderungen von (AC) waren also den unmittelbar beobachteten Veränderungen von (BC) proportional; einer kleinen Veränderung von (AC) entsprach aber eine bedeutende von (BC).

Um die angegebene Proportion auf eine bequeme Weise ableiten zu können, will ich zuerst den folgenden Satz beweisen:

Wird ein System von Drähten, die auf eine ganz beliebige Weise mit einander verbunden sind, von galvanischen Strömen durchflossen, so ist:

1) wenn die Drähte 1, 2,.. μ in einem Punkte zusammenstoſsen,

$$I_1+I_2+..+I_\mu=o,$$

wo I_1, I_2,.. die Intensitäten der Ströme bezeichnen, die jene Drähte durchflieſsen, alle nach dem Berührungspunkte zu als positiv gerechnet;

2) wenn die Drähte 1, 2,.. ν eine geschlossene Figur bilden,

$$I_1.\omega_1+I_2.\omega_2+..+I_\nu.\omega_\nu$$

$=$ der Summe aller elektromotorischen Kräfte, die sich auf dem Wege: 1, 2.. ν befinden; wo ω_1, ω_2,.. die

Widerstände der Drähte, I_1, I_2.. die Intensitäten der Ströme bezeichnen, von denen diese durchflossen werden, alle nach *einer* Richtung als positiv gerechnet.

Der erste Theil dieses Satzes ist eine unmittelbare Folge davon, dafs dem Berührungspunkte der Drähte 1, 2,.. μ eben so viel Elektricität zugeführt, als entzogen wird; der Beweis des zweiten Theiles ist folgender: die elektrische Spannung eines Punktes im Drahte i ist $= m_i - n_i l_i$, wo l_i die Entfernung desselben vom Anfangspunkte dieses Drahtes bezeichnet; nennen wir die ganze Länge dieses l'_i und die elektromotorische Kraft, die ihren Sitz in der Berührungsstelle dieses und des folgenden Drahtes hat, K_i, so erhalten wir durch die Betrachtung der Spannungen der Berührungspunkte je zweier auf einander folgenden Drähte die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
m_1 - n_1 l'_1 + K_1 &= m_2 \\
m_2 - n_2 l'_2 + K_2 &= m_3 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
m_\nu - n_\nu l'_\nu + K_\nu &= m_1 .
\end{aligned}
$$

Es ist also:

$$n_1 l'_1 + n_2 l'_2 + .. + n_\nu l'_\nu = K_1 K_2 + .. + K_\nu ;$$

da aber $I_i = n_i k_i q_i$ und $\omega_i = \frac{l'_i}{k_i . q_i}$ ist, wo k_i die Leitungsfähigkeit und q_i den Querschnitt des Drahtes i bezeichnet, so können wir diese Gleichung schreiben:

$$I_1 . \omega_1 + I_2 . \omega_2 + .. + I_\nu . \omega_\nu = K_1 + K_2 + .. + K_\nu$$

w. z. b. w.

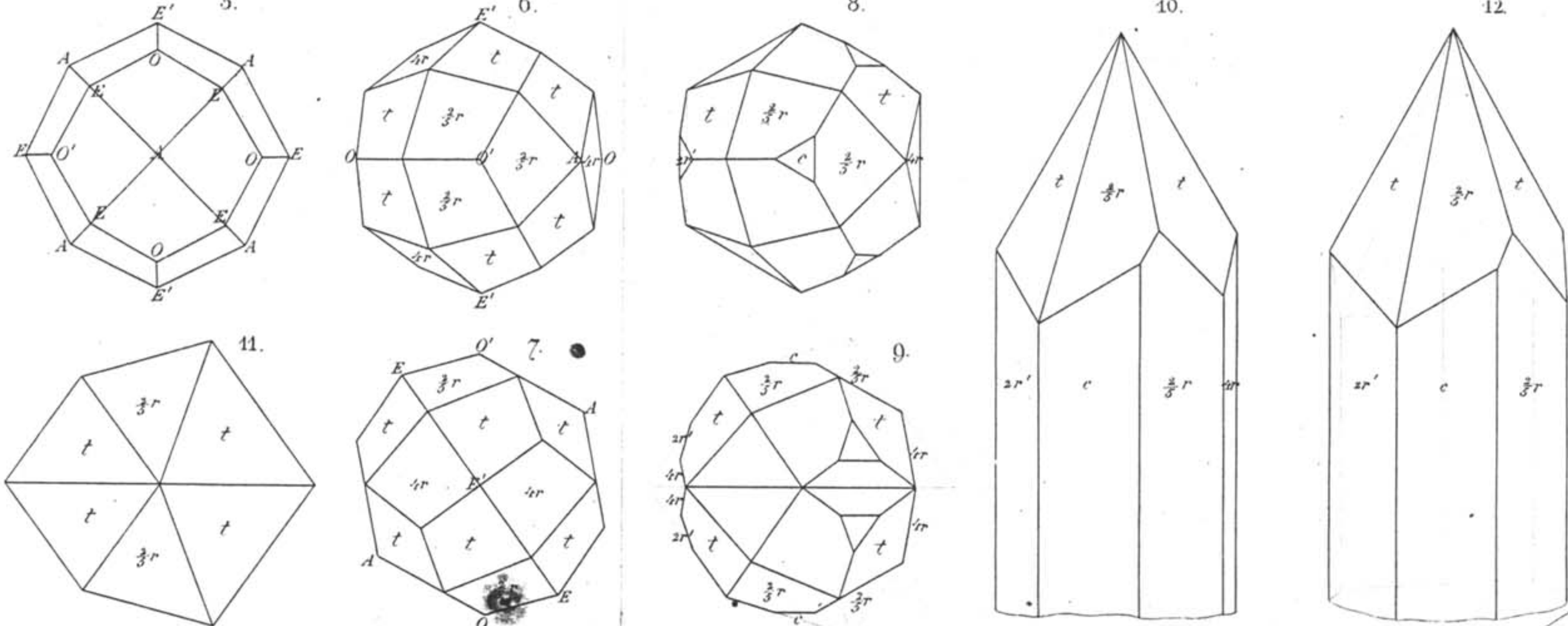
Dieser Satz liefert uns durch wiederholte Anwendung immer so viel Gleichungen, als zur Bestimmung aller I's nöthig sind. Wenden wir ihn auf den vorliegenden Fall an, so erhalten wir durch ihn (wenn wir die Drähte durch die in Fig. 4. Taf. V. beigeschriebenen Zahlen bezeichnen), da $I_5 = o$ seyn soll:

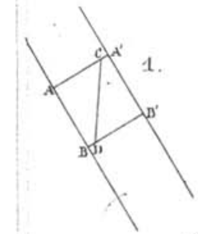
$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= o \ , & I_1 . \omega_1 - I_3 \omega_3 &= o \\
I_3 + I_4 &= o & I_2 \ \omega_2 - I_4 \omega_4 &= o.
\end{aligned}
$$

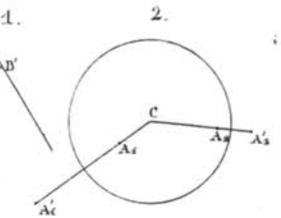
Aus diesen Gleichungen folgt: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_4}$.

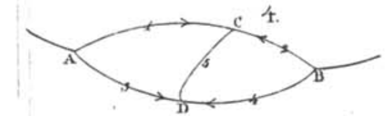
Ged. Silber von Kongsberg

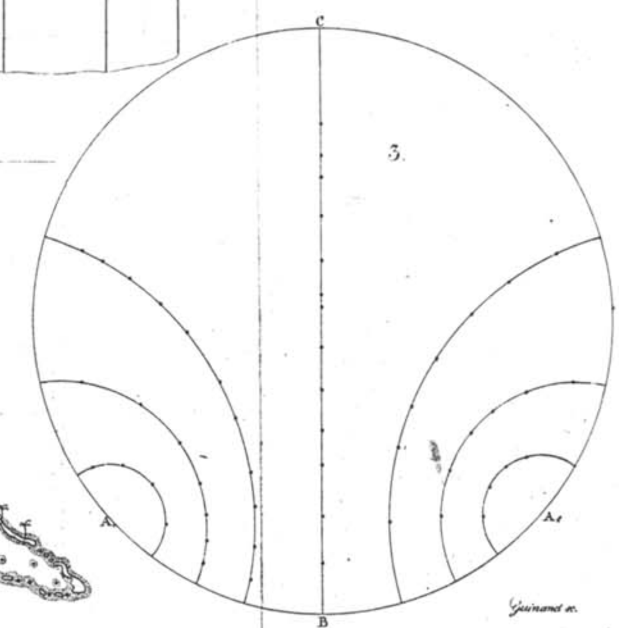
Schlesischer Calcit. Taf. V.

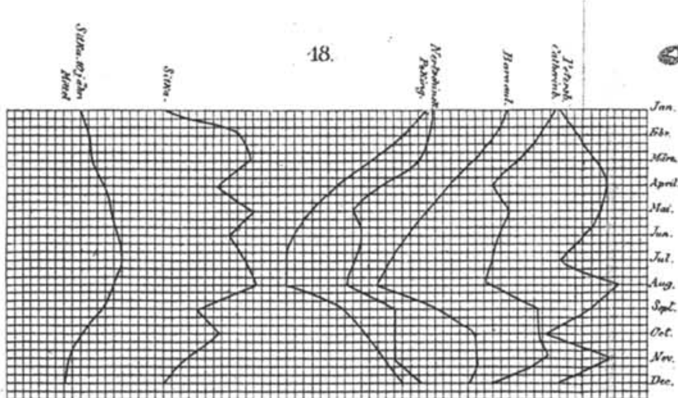


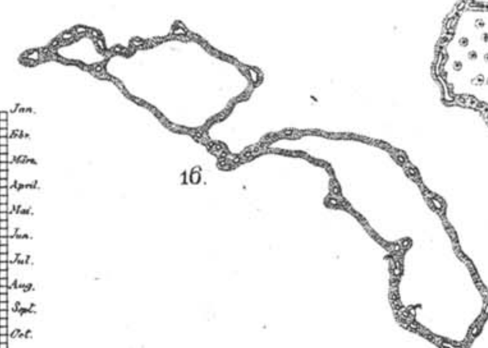


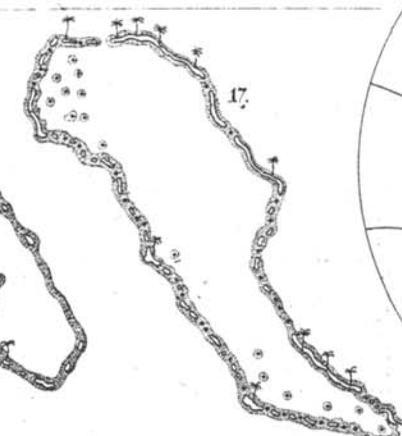












Ann. d. Phys. u. Chem. Bd. 64. St. 4.

Guinand sc.