SINTESIS DE REDES PASIV

Ing. Alberto José Araujo

TOMO II

G.Y.V.E.

CAPITULO 4

SINTESIS DE FUNCIONES TRANSFERENCIA

4.1. INTRODUCCION:

Ya hemos visto cómo a partir del conocimiento de una función real y positiva (F.R.P) que como modelo matemático define una impedancia o admitancia de excitación, es posible sintetizar un dipolo eléctrico pasivo y lineal que la satisfaga.

Recordemos que una función de excitación se obtiene como cociente entre respuesta y excitación, medida y aplicada respectivamente, en un mismo par de puntos de una red eléctrica, tal como lo muestra la FIGURA 4.1

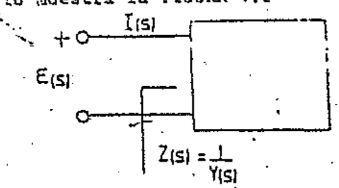


FIGURA (4.1.)

Si excitamos con tensión y medimos como respuesta una corriente, la función de excitación será Y(s) y recíprocamente, la función de excitación será Z(s) cuando al excitar con una fuente de corriente se mida como respuesta una tensión.

Estas dos circunstancias son las únicas posibles y la síntesis de una función de excitación, nos obligará a implementar un dipolo eléctrico para satisfacerla.

A continuación nos propondremos sintetizar una función transferencia mediante una red eléctrica pasiva y lineal. La variante con respecto al caso anterior radica en la forma en que se define una función transferencia, ya que ésta se obtiene como cociente entre respuesta y excitación, medida y aplicada respectivamente en pares de puntos distintos de una red eléctrica.

Habitualmente la excitación se aplica a la entrada de la red y la respuesta por consiguiente se mide en su salida, como se muestra en la FIGURA 4.2

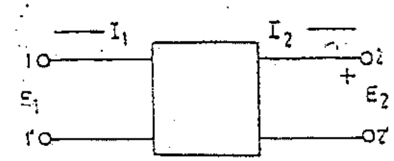


FIGURA (4.2.)

Claro está que ahora es posible excitar al cuadripolo con tensión o con corriente, y medir como respuesta tensión o corriente, lo cual trae aparejado la existencia de cuatro tipos fundamentales de transferencia, a saber:

EXCITACION	RESPUESTA	TRANSFERENCIA
TENSION	TENSION	TRANSFERENCIA DE TENSIONES
TENSION	CORRIENTE	ADMITANCIA DE TRANSFERENCIA
CORRIENTE	TENSION	IMPEDANCIA DE TRANSFERENCIA
CORRIENTE	CORRIENTE	TRANSFERENCIA DE CORRIENTES

Estas funciones transferencias han sido definidas con total generalidad y nada se menciona respecto de las características del generador empleado para excitar al cuadripolo ni tampoco de las exigencias impuestas por el extremo de carga.

Vamos a considerar en primer término, que los generadores empleados para excitar al cuadripolo son ideales; vale decir, sus impedancias o admitancias son nulas tratándose de generadores de tensión o corriente, respectivamente. Consideremos ahora el extremo de carga y pensemos en las diferentes situaciones que se pueden presentar:

1º- Puede ocurrir en un problema específico que la impedancia de carga resulte de tal magnitud, que el cuadripolo pueda suponerse en vacío.

2º- La otra circunstancia extrema se presenta, cuando la carga del cuadripolo posibilita suponer al mismo en condiciones de cortocircuito.

Estas dos circunstancias dan lugar a casos específicos de síntesis de transferencias reconocidas como: SINTESIS DE TRANSFERENCIAS EN VACIO y EN CORTOCIRCUITO, respectivamente.

Un caso más real se presenta cuando la impedancia de carga asume un valor tal que no posibilita considerar al cuadripolo, ni en condiciones de vacío ni en condiciones de cortocircuito, lo cual da lugar a la SINTESIS DE TRANSFERENCIAS CARGADAS EN UN EXTREMO.

Finalmente, cuando se considera al generador con una impedancia interna finita Z_g y además, cargado con una impedancia Z_c, la síntesis en este caso se conoce con la designación de SINTESIS DE TRANSFERENCIAS DOBLEMENTE CARGADAS o CARGADAS EN AMBOS EXTREMOS.

Aunque no lo hayamos puesto de manifiesto en forma expresa, es fácil adivinar que en todos los casos, que hemos mencionado, la síntesis de una función transferencia nos obligará a la implementación de un cuadripolo para satisfacerla. Claro está que en función de la transferencia propuesta podremos sintetizarla mediante redes reactivas puras o mediante redes, que además de elementos reactivos, posean resistores asociados. En el primer caso, hablaremos de cuadripolos no disipativos y en el segundo, de cuadripolos disipativos.

Para concluir digamos que según la ubicación en el plano complejo de los ceros que caracterizan una función transferencia, deberá adoptarse la configuración o estructura del cuadripolo.

Las estructuras que estudiaremos son: las Redes Escalera, las Redes T Puenteada y Doble T y, las Estructuras Balanceadas.

4. 2. TRANSFERENCIAS EN VACIO

En la FIGURA 4.3. (a) y (b) se ilustra el caso de Transferencias en Vacío, suponiendo en ambos casos que los generadores empleados para excitar los cuadripolos son ideales.

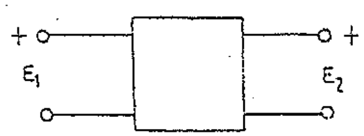


FIGURA (4.3.) (a)

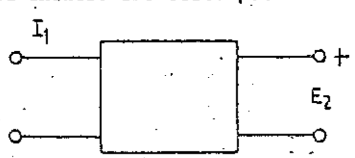


FIGURA (4.3.) (b)

En la figura (4.3)a se plantea el caso de una transferencia de tensiones en vacío, y si el cuadripolo es pasivo e integrado por elementos lineales resultará muy fácil vincular los parámetros que caracterizan a éste con la función transferencia propuesta, en efecto:

$$T(s) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} \quad \text{Es nuestro dato} \qquad (4 - 1)$$

Además podemos expresar si $I_2 = 0$

$$\begin{cases} E_1 = Z_{11}\, I_1 \\ E_2 = Z_{21}\, I_1 \end{cases}$$

$$E_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$E_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \qquad (4 - 2)$$

o sea que

$$\boxed{T(s) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}} \qquad (4 - 3)$$

O también, recordando las relaciones entre los parámetros Z e Y de un cuadripolo:

$$\boxed{T(s) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}} \qquad (4 - 4)$$

$$I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2$$
$$I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2$$

Las expresiones (4 - 3) y (4 - 4) vinculan la función transferencia propuesta con parámetros del cuadripolo que resuelve el problema. En otros términos: dada la función T(s), debemos hallar un cuadripolo caracterizado por Z_{11} y Z_{21} o por Y_{22} e Y_{21} de tal forma que los cocientes entre dichos parámetros satisfagan la transferencia propuesta. Si los cuadripolos son pasivos, $Z_{12} = Z_{21}$ e $Y_{12} = Y_{21}$, y obsérvese que en las expresiones (4 - 3) y (4 - 4) no figuran los parámetros Z_{22} ni Y_{11} respectivamente, vale decir que según la expresión (4 - 3) sintetizando un cuadripolo desde su entrada a través de Z_{11} pero observando durante el proceso de síntesis de esta función de excitación que se satisfagan las exigencias del parámetro de transferencia Z_{21} podremos hallar un cuadripolo que cumpla con la función transferencia propuesta. Además como en la (4 - 3) no figura Z_{22} cualquiera sea la expresión que resulte para la impedancia de salida del cuadripolo así obtenido, el problema quedará resuelto.

Obsérvese que la síntesis de Z_{11} es la correspondiente a una F.R.P., cosa que sabemos hacer perfectamente.

Análoga consideración vale para el caso de la expresión (4 - 4) salvo que en este caso el cuadripolo se sintetiza desde su salida y a través de Y_{22}.

En la figura (4.3.)b se plantea el caso de una impedancia de transferencia directa, o sea

$$T(s) = \left.\frac{E_2}{I_1}\right|_{I_2 = 0} = Z_{21} \qquad (4 - 5)$$

Y en este caso habrá que sintetizar un cuadripolo caracterizado por poseer una impedancia de transferencia que satisfaga la (4 - 5). Se pueden dar dos circunstancias: la primera ocurre cuando $Z_{21}(s)$ es F.R.P. y en este caso habrá que sintetizar un dipolo cuya impedancia de excitación sea de $Z_{21}(s)$. La segunda se presenta cuando $Z_{21}(s)$ no es F.R.P. , y en este caso habrá que adoptar una función de excitación que incluya a $Z_{21}(s)$ y posibilite la síntesis. Ya se intuye que habrá dos alternativas: o bien se adopta una cierta $Z_{22}(s)$ que contenga a $Z_{21}(s)$ y en ese caso se sintetiza el cuadripolo desde su salida forzando a que $Z_{22}(s)$ durante el proceso de síntesis satisfaga los requisitos de $Z_{21}(s)$ o bien se adopta una cierta $Z_{11}(s)$ que incluya a $Z_{21}(s)$ y en esa circunstancia

EXCITACION	RESPUESTA	TRANSFERENCIA
TENSION	TENSION	TRANSFERENCIA DE TENSIONES
TENSION	CORRIENTE	ADMITANCIA DE TRANSFERENCIA
CORRIENTE	TENSION	IMPEDANCIA DE TRANSFERENCIA
CORRIENTE	CORRIENTE	TRANSFERENCIA DE CORRIENTES

Estas funciones transferencias han sido definidas con total generalidad y nada se menciona respecto de las características del generador empleado para excitar al cuadripolo ni tampoco de las exigencias impuestas por el extremo de carga.

Vamos a considerar en primer término, que los generadores empleados para excitar al cuadripolo son ideales; vale decir, sus impedancias o admitancias son nulas tratándose de generadores de tensión o corriente, respectivamente. Consideremos ahora el extremo de carga y pensemos en las diferentes situaciones que se pueden presentar:

1°- Puede ocurrir en un problema específico que la impedancia de carga resulte de tal magnitud, que el cuadripolo pueda suponerse en vacío.

2°- La otra circunstancia extrema se presenta, cuando la carga del cuadripolo posibilita suponer al mismo en condiciones de cortocircuito.

Estas dos circunstancias dan lugar a casos específicos de síntesis de transferencias reconocidas como: SINTESIS DE TRANSFERENCIAS EN VACIO y EN CORTOCIRCUITO, respectivamente.

Un caso más real se presenta cuando la impedancia de carga asume un valor tal que no posibilita considerar al cuadripolo, ni en condiciones de vacío ni en condiciones de cortocircuito, lo cual da lugar a la SINTESIS DE TRANSFERENCIAS CARGADAS EN UN EXTREMO.

Finalmente, cuando se considera al generador con una impedancia interna finita Zg y además, cargado con una impedancia Zc, la síntesis en este caso se conoce con la designación de SINTESIS DE TRANSFERENCIAS DOBLEMENTE CARGADAS o CARGADAS EN AMBOS EXTREMOS.

Aunque no lo hayamos puesto de manifiesto en forma expresa, es fácil adivinar que en todos los casos, que hemos mencionado, la síntesis de una función transferencia nos obligará a la implementación de un cuadripolo para satisfacerla. Claro está que en función de la transferencia propuesta podremos sintetizarla mediante redes reactivas puras o mediante redes, que además de elementos reactivos, posean resistores asociados. En el primer caso, hablaremos de cuadripolos no disipativos y en el segundo, de cuadripolos disipativos.

Para concluir digamos que según la ubicación en el plano complejo de los ceros que caracterizan una función transferencia, deberá adoptarse la configuración o estructura del cuadripolo.

Las estructuras que estudiaremos son: las Redes Escalera, las Redes T Puenteada y Doble T y, las Estructuras Balanceadas.

4. 2. TRANSFERENCIAS EN VACIO

En la FIGURA 4.3. (a) y (b) se ilustra el caso de Transferencias en Vacío, suponiendo en ambos casos que los generadores empleados para excitar los cuadripolos son ideales.

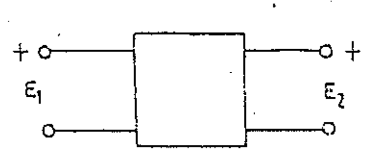


FIGURA (4.3.) (a)

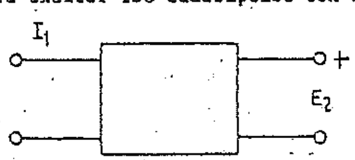


FIGURA (4.3.) (b)

En la figura (4.3)a se plantea el caso de una transferencia de tensiones en vacío, y si el cuadripolo es pasivo e integrado por elementos lineales resultará muy fácil vincular los parámetros que caracterizan a éste con la función transferencia propuesta, en efecto:

$$T(s) = \frac{E_2}{E_1}\Big|_{I_2 = 0} \qquad \text{Es nuestro dato} \qquad (4 - 1)$$

Además podemos expresar si $I_2 = 0$

$$E_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$E_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$\begin{cases} E_1 = Z_{11}\, I_1 \\ E_2 = Z_{21}\, I_1 \end{cases} \qquad (4 - 2)$$

o sea que

$$\boxed{T(s) = \frac{E_2}{E_1}\Big|_{I_2 = 0} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}} \qquad (4 - 3)$$

O también, recordando las relaciones entre los parámetros Z e Y de un cuadripolo:

$$I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2$$

$$\boxed{T(s) = \frac{E_2}{E_1}\Big|_{I_2 = 0} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}} \qquad (4 - 4)$$

$$I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2$$

Las expresiones (4 - 3) y (4 - 4) vinculan la función transferencia propuesta con parámetros del cuadripolo que resuelve el problema. En otros términos: dada la función T(s), debemos hallar un cuadripolo caracterizado por Z_{11} y Z_{21} o por Y_{22} e Y_{21} de tal forma que los cocientes entre dichos parámetros satisfagan la transferencia propuesta. Si los cuadripolos son pasivos, $Z_{12} = Z_{21}$ e $Y_{12} = Y_{21}$, y obsérvese que en las expresiones (4 - 3) y (4 - 4) no figuran los parámetros Z_{22} ni Y_{11} respectivamente, vale decir que según la expresión (4 - 3) sintetizando un cuadripolo desde su entrada a través de Z_{11} pero observando durante el proceso de síntesis de esta función de excitación que se satisfagan las exigencias del parámetro de transferencia Z_{21} podremos hallar un cuadripolo que cumpla con la función transferencia propuesta. Además como en la (4 - 3) no figura Z_{22} cualquiera sea la expresión que resulte para la impedancia de salida del cuadripolo así obtenido, el problema quedará resuelto.

Obsérvese que la síntesis de Z_{11} es la correspondiente a una F.R.P., cosa que sabemos hacer perfectamente.

Análoga consideración vale para el caso de la expresión (4 - 4) salvo que en este caso el cuadripolo se sintetiza desde su salida y a través de Y_{22}.

En la figura (4.3.)b se plantea el caso de una impedancia de transferencia directa, o sea

$$T(s) = \frac{E_2}{I_1}\Big|_{I_2 = 0} = Z_{21} \qquad (4 - 5)$$

Y en este caso habrá que sintetizar un cuadripolo caracterizado por poseer una impedancia de transferencia que satisfaga la (4 - 5). Se pueden dar dos circunstancias: la primera ocurre cuando $Z_{21}(s)$ es F.R.P. y en este caso habrá que sintetizar un dipolo cuya impedancia de excitación sea de $Z_{21}(s)$. La segunda se presenta cuando $Z_{21}(s)$ no es F.R.P. , y en este caso habrá que adoptar una función de excitación que incluya a $Z_{21}(s)$ y posibilite la síntesis. Ya se intuye que habrá dos alternativas: o bien se adopta una cierta $Z_{22}(s)$ que contenga a $Z_{21}(s)$ y en ese caso se sintetiza el cuadripolo desde su salida forzando a que $Z_{22}(s)$ durante el proceso de síntesis satisfaga los requisitos de $Z_{21}(s)$ o bien se adopta una cierta $Z_{11}(s)$ que incluya a $Z_{21}(s)$ y en esa circunstancia el cuadripolo se sintetiza desde su entrada con un criterio idéntico al comentado anteriormente.

4.3. TRANSFERENCIA EN CORTOCIRCUITO

En las figuras 4.4.(a) y (b) se ilustran estas transferencias en cortocircuito. En ambos casos seguimos suponiendo los generadores de excitación ideales.

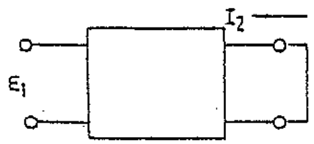


FIGURA (4.4.)a

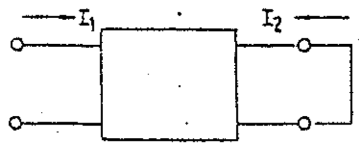


FIGURA (4.4.)b

La figura 4.4.(a) muestra el caso de una transferencia de tensión a corriente en cortocircuito, o sea

$$T(s) = \frac{I_2}{E_1}\Big|_{E_2 = 0} = Y_{21}(s) \qquad (4-6)$$

La expresión (4 - 6) sugiere que para sintetizar la transferencia propuesta habrá que hallar un cuadripolo que esté caracterizado por una admitancia de transferencia en cortocircuito que satisfaga la (4 - 6).

Y en este caso se dan las mismas circunstancias y alternativas que en la síntesis de una impedancia de transferencia en vacío, salvo que trabajaremos con parámetros de admitancia y no con parámetros de impedancia.

La figura 4.4.(b) ilustra el caso de una transferencia de corrientes en cortocircuito o sea

$$T(s) = \frac{I_2}{I_1}\Big|_{E_2 = 0} \qquad (4-7)$$

Y si procedemos tal cual lo hicimos con la transferencia de tensiones en vacío, es posible obtener las siguientes relaciones.

$$\frac{I_2}{I_1}\Big|_{E_2 = 0} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \qquad (4-8)$$

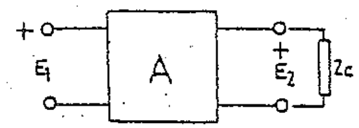
$$\frac{I_2}{I_1}\Big|_{E_2 = 0} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \qquad (4-9)$$

$E_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$
$E_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$

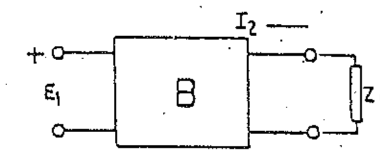
Las últimas expresiones sugieren la metodología de síntesis y es totalmente análoga a la comentada para el caso de transferencias de tensiones en vacío.

4.4. TRANSFERENCIAS CARGADAS EN UN EXTREMO

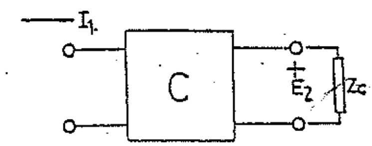
En las figuras 4.5. (a), (b), (c) y (d) se ilustran los casos posibles de transferen cargadas en un solo extremo



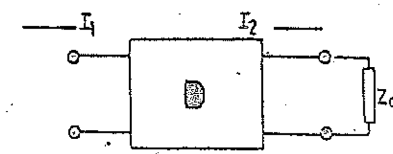
(4.5.)a



(4.5.)b



(4.5.)c



(4.5.)d

Trataremos a continuación, de hallar una vinculación para cada uno de los cuatro casos planteados, entre la función transferencia propuesta y los parámetros del cuadripolo que resuelve el problema.

A - TRANSFERENCIA DE TENSIONES: FIGURA (4.5.)a

$$T(s) = \frac{E_2}{E_1}\Big|_{Zc} \qquad \text{Es la transferencia propuesta} \qquad (4-10)$$

Además $\quad E_2 = -I_2 Zc \qquad (4-11)$

Planteamos las ecuaciones generales de malla para el cuadripolo (A) suponiendo que el mismo es pasivo y lineal, o sea:

$$\begin{cases} E_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} & (4-12)\text{a} \\ E_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} & (4-12)\text{b} \end{cases}$$

De la (4 - 12)a y teniendo en cuenta la (4 - 11)

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_{11}} + E_2 \frac{Z_{12}}{Z_{11}\, Z_c} \qquad (4-13)$$

y reemplazando (4 - 13) en la (4 - 12)b

$$E_2 = E_1 \frac{Z_{21}}{Z_{11}} + \frac{E_2\, Z_{12}\, Z_{21}}{Zc\, Z_{11}} - E_2 \frac{Z_{22}}{Zc}$$

$$E_2(\Delta Z + Z_{11}\, Zc) = E_1 Z_{21}\, Zc \qquad (4-14)$$

Donde $\Delta Z = Z_{11}\,Z_{22} - Z_{12}\,Z_{21}$

De la (4 - 14) resulta

$$T(s) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{Zc} = \frac{Z_{21}\,Zc}{\Delta Z + Z_{11}\,Zc} \qquad (4 - 15)$$

que podemos expresar en forma más compacta en términos de los parámetros admitancia, o sea

$$T(s) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{Zc} = \frac{-Y_{12}}{Yc + Y_{22}} \qquad (4 - 16)$$

La (4 - 16) es la expresión más comunmente empleada para resolver una transferencia de tensiones cargada

B - TRANSFERENCIA CORRIENTE - TENSION, EN CARGA

De la figura (4.5.) b y de la expresión (4 - 16) es sencillo obtener

$$T(s) = \left.\frac{I_2}{E_1}\right|_{Zc} = \frac{Y_{12}\,Yc}{Yc + Y_{22}} \qquad (4- 17)$$

C - TRANSFERENCIA TENSION - CORRIENTE, EN CARGA

De la figura (4.5.)c y de la expresión (4 - 12)b es fácil obtener la siguiente relación

$$E_2 = I_1\,Z_{21} - \frac{E_2}{Zc}\,Z_{22}$$

o sea

$$T(s) = \left.\frac{E_2}{I_1}\right|_{Zc} = \frac{Z_{21}\,Zc}{Z_{22} + Zc} \qquad (4 - 18)$$

D - TRANSFERENCIA DE CORRIENTES, EN CARGA

De la figura (4.5.)d y de la última relación obtenida es posible escribir

$$\frac{E_2}{I_1} = \frac{Z_{21}\,Zc}{Z_{22} + Zc} \quad \text{y como} \quad E_2 = -\,I_2\,Zc \quad \text{resulta}$$

$$\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{Zc} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Zc} \qquad (4 - 19)$$

4.5. TRANSFERENCIAS CARGADAS EN AMBOS EXTREMOS

Finalmente queda por considerar el caso de transferencias cargadas en ambos extremos tal como se ilustra en la figura (4.6.) , que lo trataremos más adelante al estudiar los métodos de síntesis de cuadripolos no disipativos doblemente cargados.

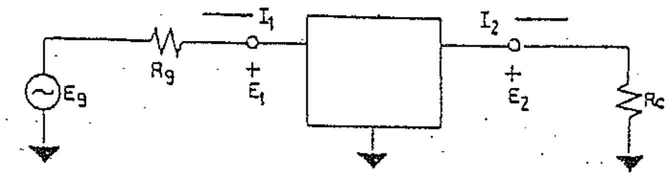


FIGURA (4.6.)

$$T(s) = \frac{E_2}{E_g} \qquad (4 - 20)$$

Además se impone la condición de carga a través de Rc y la de excitación a través de Rg.

4.6. PROPIEDADES DE LA FUNCION TRANSFERENCIA

Comentaremos a continuación las condiciones que debe satisfacer una función racional compleja para que la misma sea sintetizable a través de un cuadripolo pasivo, integrado por elementos lineales.

No trataremos el tema con todo el rigor matemático, y quienes deseen profundizar más sobre el mismo pueden consultar las obras mencionadas como bibliografía recomendada al final de este capítulo.

Las funciones transferencia, independientemente de su tipo (transferencias de tensiones, de corrientes, etc.) se pueden clasificar como: pasa bajos, pasa altos, pasa banda, elimina banda, o incluso pasa todo. Esta clasificación pone en evidencia que a lo sumo la función racional compleja estará dada por un par de polinomios del mismo orden, pero en general es mayor el orden del polinomio denominador con respecto al orden del polinomio numerador. En otros términos, en una función transferencia generalmente predominan los polos sobre los ceros. Jamás predominan los ceros sobre los polos, y esta circunstancia resulta aceptable si se piensa en un cuadripolo real y se lo examina en muy altas frecuencias: ocurre que las señales tienden a cortocircuitarse a masa a través de los inevitables parámetros residuales.

Los polos de una función transferencia ocurren en ciertas frecuencias a las cuales la red da una respuesta finita en ausencia de exitación. Estas frecuencias constituyen las denominadas frecuencias naturales de oscilación de la red, ya que es como si la red realmente oscilara. Todos los polos de una función transferencia, si es que se la desea sintetizar a través de un cuadripolo pasivo, deben estar ubicados sobre el semiplano izquierdo del plano complejo, o como caso extremo sobre el eje $J\omega$.

No existe la misma restricción con respecto a los ceros de transferencia, también conocidos como ceros de transmisión, que puedan estar ubicados en cualquier parte del plano complejo, incluso en el semiplano derecho

Con el enunciado de este par de propiedades, características de toda función transferencia, trataremos de movernos en el sentido de organizar el estudio de los métodos de síntesis de cuadripolos capaces de satisfacerlas. En este sentido comenzaremos por estudiar la síntesis de transferencias caracterizadas por poseer polos y ceros sobre el eje imaginario del plano complejo, lo que originará la realización de cuadripolos sin pérdidas o no disipativos. Veremos a través de problemas concretos, cómo mediante estructuras simétricas y balanceadas o escaleras asimétricas es posible satisfacer las transferencias mencionadas.

Luego nos dedicaremos a estudiar los métodos de síntesis de transferencias caracterizadas por poseer polos y ceros sobre el semieje real negativo del plano complejo, lo cual nos llevará a la síntesis de cuadripolos disipativos configurados en escalera. Trataremos el caso de transferencias con ceros complejos conjugados y veremos cómo mediante estructuras T puenteadas o doble T es posible resolver esta situación. Finalmente estudiaremos las transferencias con ceros sobre el semieje real positivo del plano complejo y veremos cómo mediante estructuras balanceadas es posible resolver el problema planteado.

Todos estos casos nos obligarán a la implementación de cuadripolos disipativos, y todos ellos los realizaremos asociando adecuadamente resistencias y capacitancias (cuadripolos RC). La razón de este proceder está vinculada con el estudio de los métodos de síntesis de filtros activos, donde veremos que sólo aparecen redes pasivas RC asociadas a elementos activos (amplificadores operacionales) para satisfacer la transferencia propuesta.

CAPITULO 5

SINTESIS DE CUADRIPOLOS NO DISIPATIVOS

5.1. CUADRIPOLOS ASIMETRICOS ESCALERA

Comenzaremos estudiando los métodos de síntesis de cuadripolos LC configurados en escalera, pero antes de atacar los métodos de síntesis hagamos algunos comentarios relativos a las redes escalera.

En la figura (5.1.) se ilustra con toda generalidad este tipo de configuración

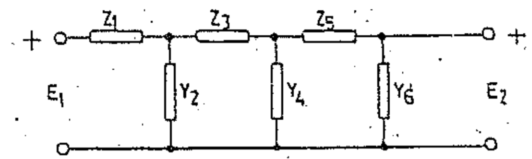


FIGURA (5.1.)

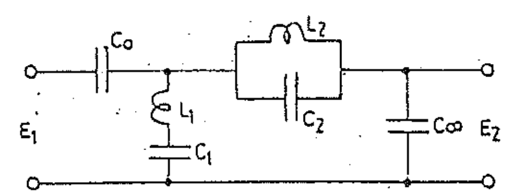
Es sencillo imaginar cuál es el temperamento de este tipo de configuración para generar ceros de transferencia. Supongamos que a una cierta frecuencia f_1 se desea que la transferencia de tensiones se anule totalmente, o sea:

$$T(j\omega_1) = \left.\frac{E_2(j\omega_1)}{E_1(j\omega_1)}\right|_{I_2 = 0} = 0 \qquad (5 - 1)$$

La escalera tiene dos posibilidades de satisfacer la (5 - 1) : o bien presentando a la frecuencia f_1 un polo de impedancia (apertura de una rama serie de la escalera) o bien un polo de admitancia (cortocircuito de una rama derivada).

No existe por parte de estas redes otra posibilidad y por lo tanto mediante tanques LC en serie o ramas LC serie conectadas en derivación generaremos los ceros de transmisión o de transferencia cuando el cuadripolo se implemente mediante una configuración escalera.

En la figura (5 - 2) se ilustra una red escalera caracterizada por poseer ceros de transferencia en $\omega_0 = 0$; $\omega_1 = 2\pi f_1$; $\omega_2 = 2\pi f_2$ y $\omega \to \infty$



$$\sqrt{L_1 . C_1} = \frac{1}{2\pi f_1}$$

$$\sqrt{L_2 . C_2} = \frac{1}{2\pi f_2}$$

FIGURA (5.2.)

El capacitor C_0 genera el cero de transmisión en corriente continua a través de un polo de impedancia; la rama derivada L_1C_1 genera el cero a f_1 mediante un polo de admitancia; el tanque L_2C_2 genera el cero a f_2 mediante otro polo de impedancia, y finalmente el capacitor C_∞ genera el cero de transmisión en alta frecuencia.
En la figura (5.3.) se ilustra una red que cumple con los mismos ceros de transmisión

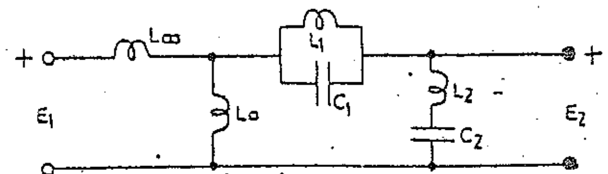


FIGURA (5.3.)

2. CONDICIONES DE REALIZABILIDAD DE UNA TRANSFERENCIA MEDIANTE REDES ESCALERA

Consideremos una sencilla red T que forma parte de una red escalera, figura (5.4.)

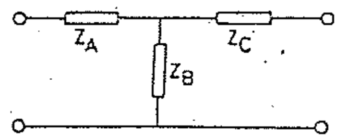


FIGURA (5.4.)

De esta red podemos escribir, si es pasiva

$$\begin{cases} Z_{11} = Z_A + Z_B & (5 - 2) \\ Z_{12} = Z_{21} = Z_B & (5 - 3) \\ Z_{22} = Z_B + Z_C & (5 - 4) \end{cases}$$

Como se observa, las funciones racionales que eventualmente representan a los dipolos integrantes de esta red (Z_A, Z_B, y Z_C) son necesariamente F.R.P.
Además de las expresiones (5 - 2), (5 - 3) y (5 - 4) se deduce que todos los polos de $Z_{12} = Z_{21}$ pertenecen a Z_{11} y Z_{22}, ya que Z_B es común a estos tres parámetros.
La recíproca no es válida, y puede ocurrir que Z_{11} y Z_{22} estén caracterizados por 'polos privados' o sea polos exclusivos de Z_{11} o Z_{22} y que no se hallan presentes en $Z_{12} = Z_{21}$. En nuestro caso, los eventuales polos de Z_A y Z_C definen los polos privados de Z_{11} y Z_{22} respectivamente.

No vale la misma consideración para los ceros de estos parámetros, o sea, no es necesario que los ceros de $Z_{12} = Z_{21}$ pertenezcan a Z_{11} y Z_{22}, es mas, en la mayoría de los casos esto no ocurre.
Por otra parte como los parámetros Z_{11} y Z_{22} son funciones de excitación y por tanto F.R.P. sus residuos son siempre cantidades reales y positivas; respecto del parámetro $Z_{12} = Z_{21}$ veremos como en la mayoría de los casos no es F.R.P. y por tanto sus residuos pueden estar dados por cantidades reales y negativas, pero para que la red sea físicamente realizable deberá verificarse la siguiente desigualdad conocida como condición de residuo

$$K_{11}\, K_{22} - K_{12}^2 \geq 0 \qquad (5 - 5)$$

En la (5 - 5), K_{ij} representa el residuo de la impedancia Z_{ij} en los polos comunes a los tres parámetros (Z_{11} Z_{22} y $Z_{12} = Z_{21}$).
En el caso extremo que la (5 - 5) se transforme en una igualdad, se dice que en los polos en los cuales se verifica la misma son 'compactos'. Es más, si para una red determinada se verifica que

$$K_{11}\, K_{22} - K_{12}^2 > 0 \qquad (5 - 6)$$

Veremos cómo es posible retirar el exceso de residuo y forzar a que la desigualdad (5 - 6) se transforme en una igualdad. Es mediante la aplicación de este criterio que se puede transformar una red que originalmente no es compacta en otra que si lo es. Analizaremos más adelante la ventaja de trabajar con redes compactas.
Otra condición de realizabilidad la podemos extraer de las expresiones (5 - 2), (5 - 3) y (5 - 4). Supongamos que Z_{11} y Z_{22} están dadas por las siguientes expresiones

$$Z_{11} = \frac{a_2\, s^2 + a_0}{s} \qquad (5 - 7)$$

$$Z_{22} = \frac{c_2\, s^2 + c_0}{s} \qquad (5 - 8)$$

Ambas serán F.R.P. y supongamos que $Z_{12} = Z_{21}$ dada por.

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{b_2\, s^2 + b_0}{s} \qquad (5 - 9)$$

Formemos la diferencia que sugiere la (5 - 2), o sea:

$$Z_A = Z_{11} - Z_{12} = \frac{(a_2 - b_2)\, s^2 + (a_0 - b_0)}{s}$$

Como Z_{11} es F.R.P., también lo debe ser Z_A para lo cual se deberá cumplir que

$$a_2 > b_2 \qquad y \qquad a_0 > b_0 \qquad (5 - 10)$$

Lo propio ocurrirá con la F.R.P. Z_C o sea

$$Z_C = Z_{22} - Z_{12} = \frac{(c_2 - b_2)\, s^2 + (c_0 - b_0)}{s}$$

Por lo tanto se verificará que

$$c_2 > b_2 \qquad y \qquad c_0 > b_0 \qquad (5 - 11)$$

Las expresiones (5 - 10) y (5 - 11) definen otra condición de realizabilidad conocida como <u>condición de coeficiente</u> y que podemos enunciar de la siguiente forma: los coeficientes que afectan a la variable compleja y el término independiente, si lo hubiera, del polinomio numerador que define una función de excitación, son mayores que los correspondientes al polinomio numerador que define la función transferencia.
De las expresiones (5 - 9) (5 - 3) y (5 - 7) es posible escribir la condición de residuo en el polo común que poseen Z_{11}, Z_{22} y $Z_{12} = Z_{21}$ en corriente continua, o sea:

$$K_{11} = a_0 \qquad K_{22} = c_0 \qquad K_{12} = K_{21} = b_0 \tag{5 - 12}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (5 - 10) y (5 - 11) podemos expresar:

$$a_0 \, c_0 - b_0^2 \geq 0 \tag{5 - 13}$$

Todo lo dicho para una estructura T vale para una configuración π figura (5.5.)

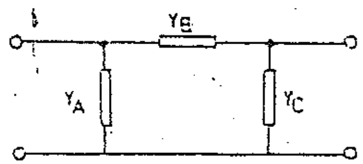


FIGURA (5.5.)

Para esta estructura podemos escribir:

$$\begin{cases} y_{11} = Y_B + Y_A \\ -y_{12} = Y_B \\ y_{22} = Y_B + Y_C \end{cases} \tag{5 - 14}$$

y por lo tanto podemos hacer extensible a los parámetros admitancia todo lo dicho para parámetros impedancia respecto de las condiciones de realizabilidad.

SINTESIS DE TRANSFERENCIAS EN VACIO MEDIANTE REDES ESCALERA

Vamos a ir presentando los métodos de síntesis a través de sencillos ejemplos numéricos

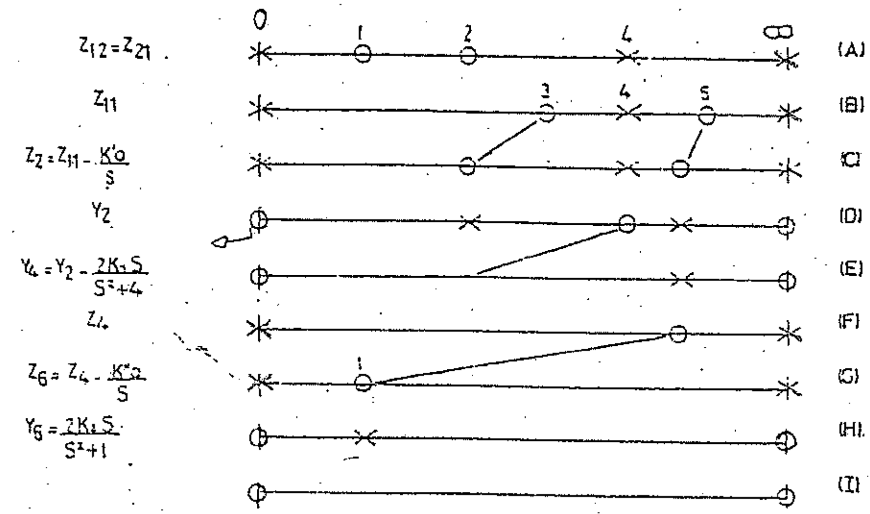
PROBLEMA 5-1

Sintetizar un cuadripolo que satisfaga simultaneamente el siguiente juego de parámetros

$$\begin{cases} z_{11} = \dfrac{s^4 + 34s^2 + 225}{s^3 + 16s} = \dfrac{(s^2+9)(s^2+25)}{s(s^2+16)} \\[2ex] z_{21} = \dfrac{s^4 + 5s^2 + 4}{s^3 + 16s} = \dfrac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+16)} \end{cases}$$

El método de síntesis consiste en implementar el cuadripolo desde su entrada, ya que conocemos $Z_{11}(s)$, y durante el transcurso de la síntesis de Z_{11} obligarla a satisfacer los ceros que caracterizan a $Z_{21}(s)$.

En primer lugar lo ilustraremos en forma gráfica y luego a partir del gráfico lo haremos analíticamente.



(A) Diagrama de polos y ceros de $Z_{21}(s)$.

(B) Diagrama de polos y ceros de $Z_{11}(s)$.

(C) Remoción parcial del polo de $Z_{11}(s)$ en continua. Se debe regular la remoción de forma de desplazar el cero ubicado en j3 hasta llevarlo a j2 satisfaciendo uno de los ceros de $Z_{21}(s)$.

(D) La inversión se realiza para poder remover como polo el conjunto de elementos asociados al cero generado en el paso (C).

(E) Remoción total del polo finito ubicado en j2.

(F) Inversión para ubicar un cero móvil como singularidad más próxima a s=0.

(G) Remoción parcial del polo en s = 0 de $Z_4(s)$ hasta lograr ubicar el cero finito en $\omega = 1$ ó $s = j1$.

(H) Inversión para poder remover como polo al conjunto de elementos que producen el cero generado en el paso anterior.

(I) Remoción total del polo finito.

Veamos cómo se va armando el cuadripolo siguiendo cada uno de los pasos del gráfico.

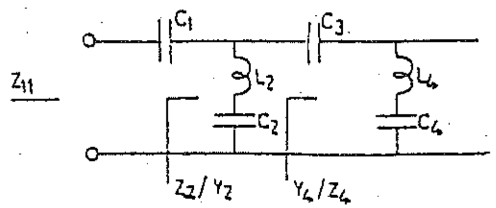


FIGURA (5.6.)

C_1 es una consecuencia de la primera remoción parcial del polo que posee Z_{11} en corriente continua.
Z_2 tendrá un cero en $j2$ y por lo tanto Y_2 tendrá un polo en esa frecuencia. Al removerlo totalmente aparece la serie (L_2C_2) resonante en $\omega = 2$ que genera el primer cero de $Z_{21}(s)$.
De acá en adelante se reitera el proceso.

Obsérvese que al no ser F.R.P. la $Z_{12} = Z_{21}$ no se la puede identificar en la red como en el caso de la estructura T de la figura (5.4.) donde $Z_{12} = Z_{21} = Z_3$.

SOLUCION ANALITICA

$$Z_{11} = \frac{(s^2+9)(s^2+25)}{s(s^2+16)}$$

$$Z_2 = Z_{11} - \frac{k'_0}{s} \qquad \text{con } Z_2(j2) = 0$$

$$\text{o sea } k'_0 = Z_{11}(j2)j2 = \frac{35}{4}$$

$$Z_2 = Z_{11} - \frac{35/4}{s} \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{4}{35}}$$

$$Z_2 = \frac{(s^2+9)(s^2+25)}{s(s^2+16)} - \frac{35/4}{s} = \frac{s^4 + \frac{101}{4}s^2 + 85}{s(s^2+16)}$$

$$Z_2 = \frac{(s^2+4)\ (s^2+85/4)}{s\ (s^2+16)}$$

$$Y_2 = \frac{s(s^2+16)}{(s^2+4)(s^2+85/4)}$$

$$Y_4 = Y_2 - \frac{2k_1 s}{s^2+4} \qquad \text{con } 2k_1 = \frac{16}{23}$$

$$Y_4 = Y_2 - \frac{\frac{16}{23}s}{s^2+4} \rightarrow \boxed{L_2 = \frac{23}{16} \quad y \quad C_2 = \frac{4}{23}}$$

$$Y_4 = \frac{\frac{7}{23}s^3 + \frac{28}{23}s}{(s^2+4)(s^2+\frac{85}{4})}$$

$$Y_4 = \frac{\frac{7}{23}s(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+\frac{85}{4})}$$

$$Z_4 = \frac{s^2 + 85/4}{\frac{7}{23}s}$$

$$Z_6 = Z_4 - Z_4(j1)$$

$$Z_4(j1) = -j\frac{81/4}{7/23} = -j\frac{1863}{28} = \frac{1}{j\frac{28}{1863}}$$

$$\text{o sea} \quad \boxed{C_3 = \frac{28}{1863}}$$

$$Z_6 = Z_4 - Z_4(j1) = \frac{s^2 + \frac{85}{4}}{\frac{7}{23}s} - \frac{1}{\frac{28}{1863}s} = \frac{s^2+1}{\frac{7}{23}s}$$

$$Y_6 = \frac{\frac{7}{23}s}{s^2+1} = \frac{7}{23s} + \frac{7}{23}s$$

$$\text{o sea} \quad \boxed{L_4 = \frac{23}{7} \quad y \quad C_4 = \frac{7}{23}}$$

o sea que la red final será:

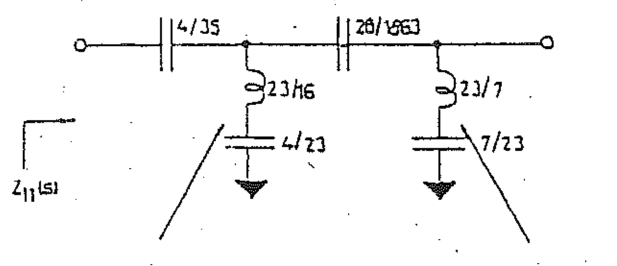


FIGURA (5.7.)

PROBLEMA 5-2

Sintetizar un cuadripolo que satisfaga la siguiente transferencia de tensiones en vacío.

$$T_{21}(s) = \frac{E_2}{E_1}\bigg|_{I_2 = 0} = k\,\frac{(s^2+4)(s^2+9)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

Una posibilidad sería sintetizarlo a partir de la entrada, ya que

$$\frac{E_2}{E_1}\bigg|_{I_2 = 0} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \qquad \text{(A)}$$

Otra alternativa consistiría en sintetizarlo desde su salida, ya que:

$$\frac{E_2}{E_1}\bigg|_{I_2 = 0} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} \qquad \text{(B)}$$

Por otra parte, como las redes escalera generan los ceros de transmisión por polos de impedancia (apertura de ramas serie) o por cortocircuitos de ramas derivadas (polos de admitancia) es posible asumir un criterio u otro, y a veces una mezcla de ambos, lo que en consecuencia dará lugar a diferentes arreglos circuitales como solución a un mismo problema. Además, observando las expresiones (A) y (B), se desprende que es posible generar ceros de transferencia a través de polos privados de Z_{11} o de Y_{22} respectivamente. Trataremos de ilustrar estas diversas alternativas resolviendo el problema planteado.

ALTERNATIVA A-1

Ceros de transmisión generados mediante polos de impedancia.

Consideremos la expresión (A) y vinculémosla con nuestro dato, o sea:

$$T_{21}(s) = \frac{K\,(s^2+4)\,(s^2+9)}{(s^2+1)\,(s^2+3)} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

Grafiquemos la configuración polos-ceros de $T_{21}(s)$, es decir:

Fig. (5.8)

Según lo sugerido por la última expresión, esta misma configuración polos-ceros es la resultante de efectuar el cociente gráfico entre las gráficas polos-ceros correspondientes a $Z_{21}(s)$ y $Z_{11}(s)$ respectivamente, o sea:

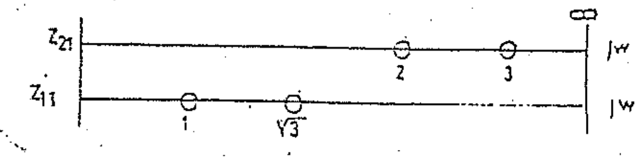


Fig. (5.9)

Como vemos, los ceros de $T_{21}(s)$ se han transformado en ceros de $Z_{21}(s)$, mientras que los polos de $T_{21}(s)$ han pasado a funcionar como ceros de $Z_{11}(s)$.
El cociente gráfico de $Z_{21}(s)$ a $Z_{11}(s)$ reproduce $T_{21}(s)$, pero $Z_{11}(s)$ debe cumplir con la condición de alternancia polos - ceros sobre el eje $j\omega$, pues se trata de una F.R.P. para lo cual debemos completar su definición sin alterar $T_{21}(s)$. Lo que podemos hacer es agregar polos a $Z_{11}(s)$, alternando entre sus ceros, y esos mismos polos pertenecerán a $Z_{21}(s)$, de modo que no variará en absoluto $T_{21}(s)$.
Supongamos que agregamos un polo en $\omega = 0$ y otro entre $\omega = 1$ y $\omega = \sqrt{3}$. Por comodidad lo ubicamos en $\omega = \sqrt{2}$, resultando las siguientes gráficas:

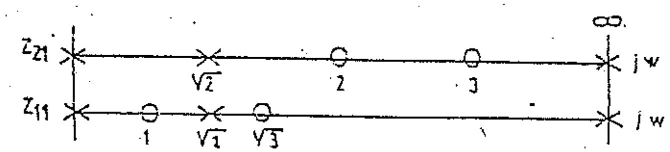


Fig. (5.10)

Ahora Z_{11} es F.R.P. tipo LC y podemos sintetizar el cuadripolo desde su entrada como si se tratara de una impedancia correspondiente a un dipolo, salvo que durante el proceso de síntesis de Z_{11} debemos cuidarnos de satisfacer los ceros que caracterizan a Z_{21} y no están presentes en la definición de Z_{11}.
Observese que lo que hemos hecho fue dividir el numerador y denominador que definen $T_{21}(s)$ por un cierto polinomio auxiliar $A(s)$, cuyas raíces están ubicadas sobre el eje imaginario y alternan con los ceros de $Z_{11}(s)$ (o los polos de T_{21}).
En este caso $A(s) = s\,(s^2+2)$ obteniendo:

$$T_{21}(s) = \frac{\dfrac{K\,(s^2+4)\,(s^2+9)}{A(s)}}{\dfrac{(s^2+1)\,(s^2+3)}{A(s)}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

La última expresión define Z_{21} y Z_{11} o sea

$$Z_{21}(s) = \frac{(s^2+4)(s^2+9)}{s(s^2+2)} \quad y \quad Z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)}$$

El polinomio auxiliar A(s) se adopta en forma arbitraria a condición que defina Z_{11} como F.R.P., en este caso tipo LC.

ALTERNATIVA A-1

Primero resolveremos nuestro problema en forma gráfica.

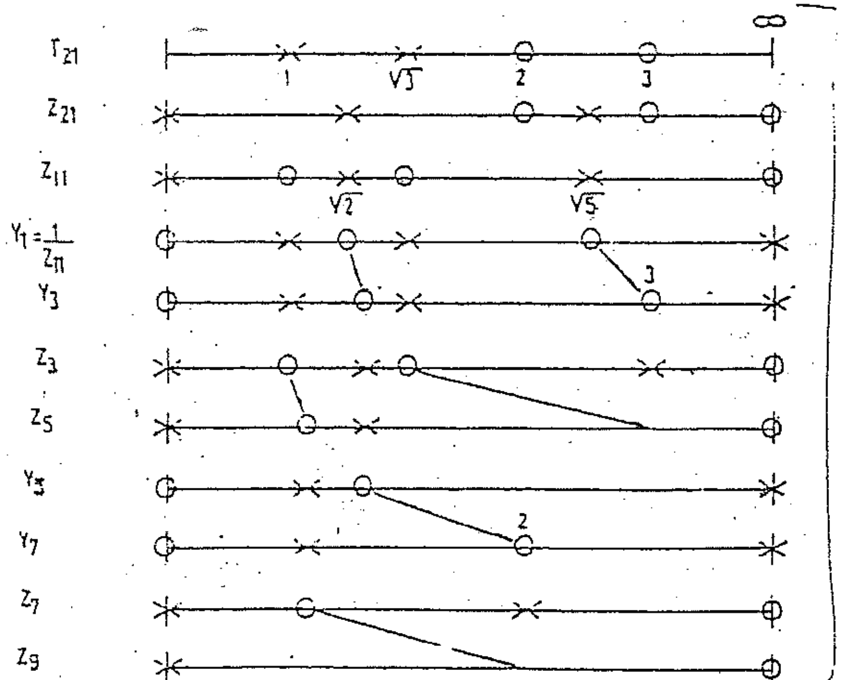


GRAFICO CORRESPONDIENTE A ALTERNATIVA A II

GRAFICO DE ALTERNATIVA II

La red que sugiere el conjunto de remociones efectuadas es la siguiente:

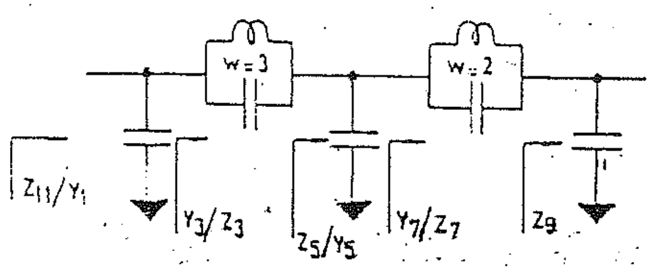


Fig. (5.11) ALTERNATIVA A 2

SOLUCION ANALITICA

$$Z_{11} = \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)}$$

$$Z_2 = Z_{11} - K'_\infty s \qquad K'_\infty = \frac{Z_{11}(j2)}{j2} = \frac{3}{8}$$

$$Z_2 = Z_{11} - \frac{3}{8}s$$

$$Z_2 = \frac{5}{8}\,\frac{(s^2+4)(s^2+\frac{6}{5})}{s(s^2+2)}$$

$$Y_4 = Y_2 - \frac{2K_1 s}{s^2+4} \qquad 2K_1 = \frac{8}{7}$$

$$Y_4 = Y_2 - \frac{\frac{8}{7}s}{s^2+4}$$

$$Y_4 = \frac{16}{35}\,\frac{s}{(s^2+\frac{6}{5})}$$

$$Z_6 = Z_4 - K''_\infty s \qquad K''_\infty = \frac{Z_4(j3)}{j3} = \frac{91}{48}$$

$$Z_6 = Z_4 - \frac{91}{48}s$$

$$Z_6 = \frac{7}{24}\,\frac{s^2+9}{s}$$

$$Y_6 = \frac{\frac{24}{7}s}{s^2+9}$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA CORRESPONDIENTE A ALTERNATIVA A I

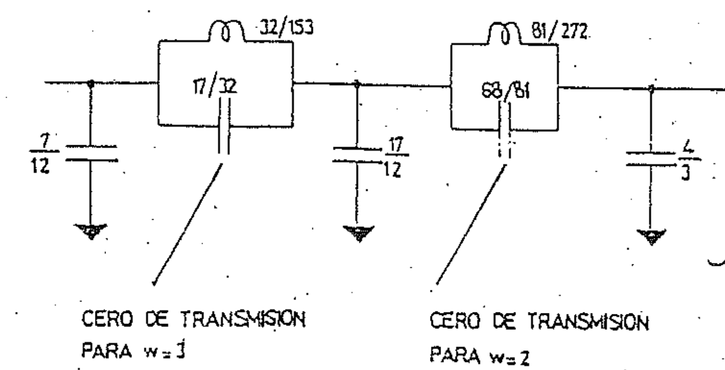


Fig. (5.12) ALTERNATIVA A-2

La red de la Figura (5.12.) genera los ceros de transmisión mediante cortocircuitos de ramas derivadas o sea mediante polos de admitancia.

ALTERNATIVA A - 2

El mismo problema podemos resolverlo adoptando como polinomio auxiliar A(s) uno de tercer orden cuidando por supuesto que sus raíces definan a Zu (s) como F.R.P.

Adoptemos por ejemplo $A(s) = s\,(s^2+2)\,(s^2+5)$

Resultando:

$$\frac{E_2}{E_1}(s) = \frac{K\,\dfrac{(s^2+4)\,(s^2+9)}{s\,(s^2+2)\,(s^2+5)}}{\dfrac{(s^2+1)\,(s^2+3)}{s\,(s^2+2)\,(s^2+5)}} = \frac{Z_{21}}{Z_u}$$

En primer término resolveremos el problema en forma gráfica:

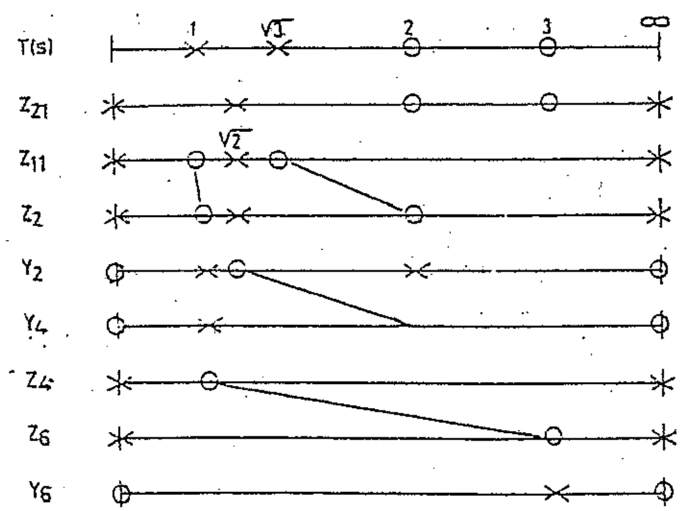


GRAFICO DE ALTERNATIVA I.

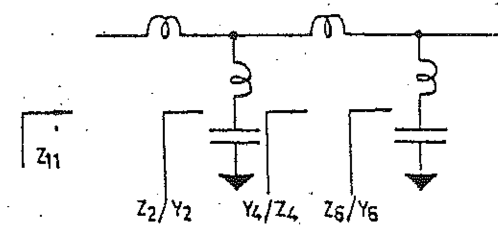


FIGURA (5.13.)
ALTERNATIVA A 1

En esta última estructura se observa como los dos ceros de transmisión resultan generados mediante polos de impedancia (apertura de ramas serie), o sea por la resonancia de un par de tanques LC conectados en las ramas serie de la escalera.

SOLUCION ANALITICA

$$Y_3 = Y_1 - K'_\infty s \qquad K'_\infty = \frac{Y_1(j3)}{j3} = \frac{7}{12}$$

$$Y_3 = Y_1 - \frac{7}{12}s$$

$$Y_3 = \frac{5}{12}\,\frac{s\,(s^2+9)\,(s^2+\frac{11}{5})}{(s^2+1)\,(s^2+3)}$$

$$Z_5 = Z_3 - \frac{2K_1 s}{s^2+9} \qquad 2K_1 = \frac{32}{17}$$

$$Z_5 = Z_3 - \frac{\frac{32}{17}s}{s^2+9}$$

$$Z_5 = \frac{44}{85}\,\frac{(s^2+\frac{17}{11})}{s\,(s^2+\frac{11}{5})}$$

$$Y_7 = Y_5 - K''_\infty s \qquad K''_\infty = \frac{Y_5(j2)}{j2} = \frac{17}{12}$$

$$Y_7 = Y_5 - \frac{17}{12}s$$

$$Y_7 = \frac{17}{33}\,\frac{s\,(s^2+4)}{(s^2+\frac{17}{11})}$$

ALTERNATIVA A 2

$$Z_9 = Z_7 - \frac{2K_2 s}{s^2+4} \qquad 2K_2 = \frac{81}{68}$$

$$Z_9 = Z_7 - \frac{\frac{81}{68}s}{s^2+4}$$

$$Z_9 = \frac{51}{68s}$$

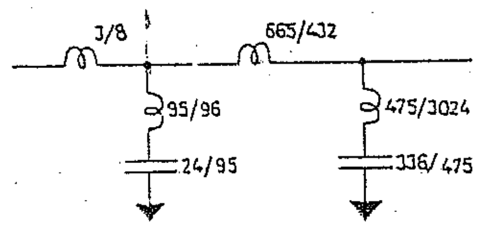


Fig. (5.14)

ALTERNATIVA A 1

ALTERNATIVA A - 3

También es posible adoptando convenientemente el polinomio auxiliar A(s), resolver el mismo problema pero generando ahora los ceros de transmisión mediante polos privados de la función de excitación.

Supongamos pretender sintetizar la misma función transferencia y adoptemos para $A(s) = s(s^2+1)(s^2+4)$.

Resolviendo gráficamente resulta:

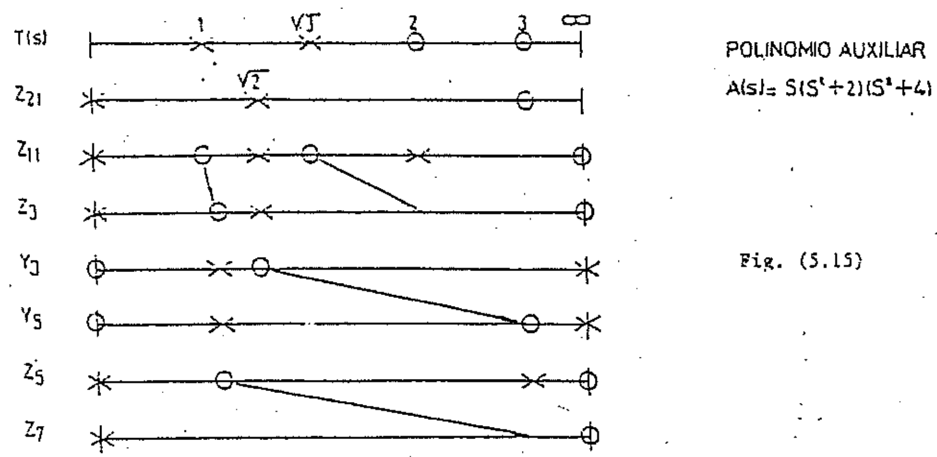


Fig. (5.15)

Obsérvese como lo primero que removemos es el polo privado que caracteriza a Z_{11} en $s = j2$ ya que éste es quien genera el cero de transmisión para $\omega = 2$.

La estructura de la red será, de acuerdo a lo que sugiere el método gráfico, la siguiente:

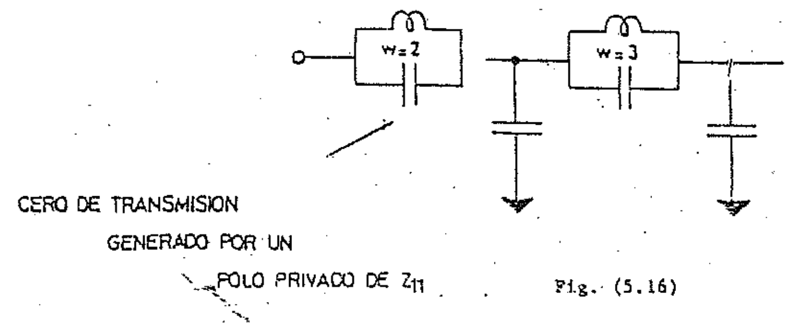


Fig. (5.16)

EL PROBLEMA DE LA VERIFICACION

Con el objeto de verificar si la síntesis de una función transferencia ha sido correctamente realizada es posible aplicar ciertas herramientas de análisis con el objeto de reconstruir la función transferencia partiendo del conocimiento de la red.

Nosotros aplicaremos la matriz admitancia indefinida al ejemplo resuelto y mas concretamente a la red resultante de la alternativa A-1.

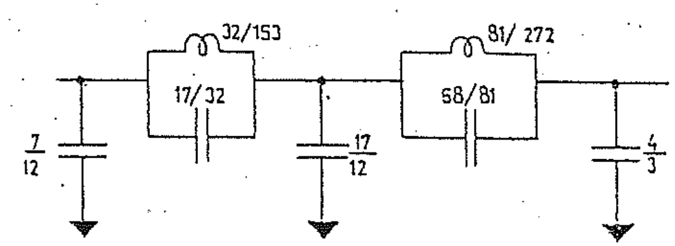


Fig. (5.17)

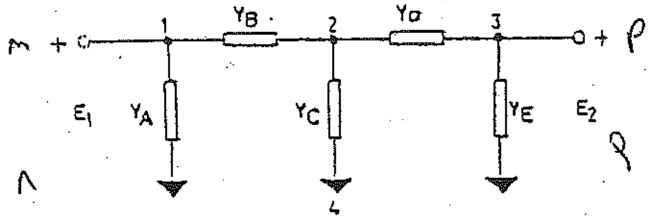


Fig. (5.18)

Planteamos la matriz admitancia indefinida Y_i

$$Y_i = \begin{vmatrix} Y_A + Y_B & -Y_B & 0 & -Y_A \\ -Y_B & Y_B + Y_C + Y_D & -Y_D & -Y_C \\ 0 & -Y_D & Y_D + Y_E & -Y_E \\ -Y_A & -Y_C & -Y_E & Y_A + Y_C + Y_E \end{vmatrix}$$

Evaluamos la transferencia

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{Y_i^{**}}{Y_i^{**}} = \frac{Y_B \cdot Y_D}{(Y_D + Y_E)(Y_B + Y_C) + Y_D\, Y_E} \rightarrow Y_D + Y_E)(Y_B + Y_C + Y_D) - Y_D^2 = \frac{Y_{mn}^{pp}}{Y_{mn}^{mn}} = \frac{Y_{19}^{34}}{Y_{14}^{14}}$$

$$Y_B = \frac{17}{32}s + \frac{153}{32\,s} = \frac{17}{32}\,\frac{s^2+9}{s}$$

$$Y_D = \frac{68}{81}s + \frac{272}{81\,s} = \frac{68}{81}\,\frac{s^2+4}{s}$$

$$Y_C = \frac{17}{12}s \qquad\qquad Y_E = \frac{4}{3}s$$

Efectuando las operaciones indicadas se obtiene

$$T_{21}(s) = \frac{1}{12}\,\frac{(s^2+9)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

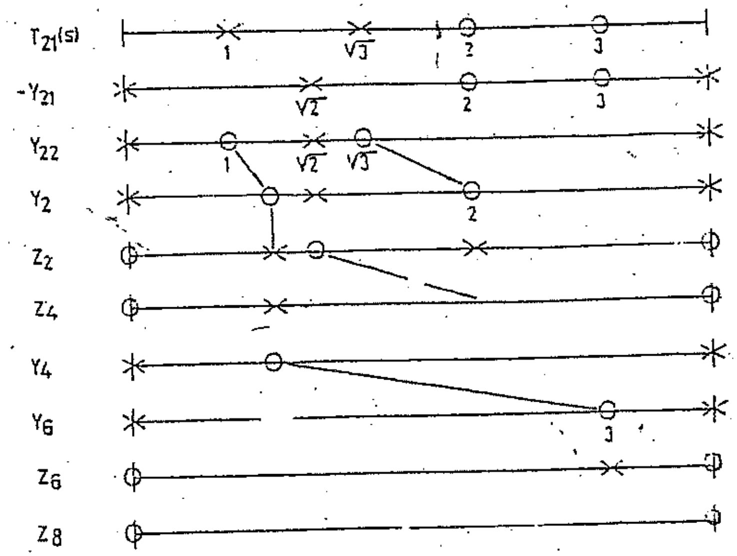
Como vemos no solo hemos verificado la transferencia, sino que resulta determinado el valor de la constante K para la cual esta red la satisface ($K = \frac{1}{12}$)

ALTERNATIVA B-1

Veamos aunque mas no sea en forma gráfica como es posible resolver la transferencia propuesta a traves del empleo de parámetros admitancia. La relación de partida será:

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2=0} \frac{K(s^2+4)(s^2+9)}{(s^2+1)(s^2+3)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$$

Adoptemos como polinomio auxiliar $A(s) = s(s^2+2)$



Ahora la síntesis del cuadripolo se realiza desde su salida o sea desde el extremo de carga y hacia el generador.

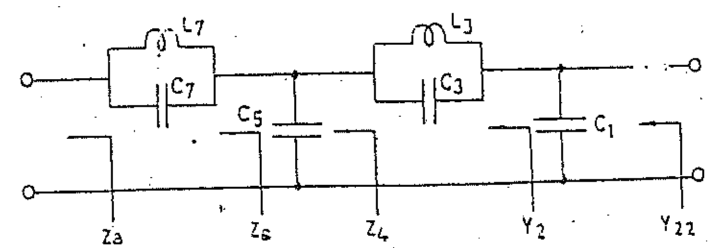


Fig. (5.19)

Como se observa hemos obtenido la misma red de la alternativa A-2, aunque no necesariamente debe ocurrir así.

5.4. CUADRIPOLOS REACTIVOS BALANCEADOS, SIMETRICOS Y COMPACTOS

Supongamos por ejemplo que deseamos acoplar una fuente de corriente a una fuente de tensión a traves de una red selectiva carente de pérdidas

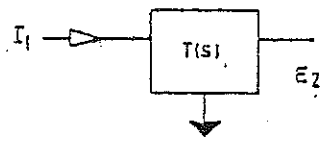


Fig. (5.20)

$$T(s) = \frac{E_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{21}$$

Por tratarse de una red reactiva pura (pasiva) $Z_{21} = Z_{12}$ tendrá polos simples sobre $j\omega$ con residuos reales y positivos si $Z_{12} = Z_{21}$ es función real positiva, o con algún residuo real negativo en el supuesto que no se diera esta circunstancia, que por otra parte es el caso mas general.
Los parámetros Z_{11} y Z_{22} no están especificados y por consiguiente tendremos amplia libertad para elegirlos.
Lo mas sencillo serí adoptar una red simétrica, o sea $Z_{11} = Z_{22}$, y en estas circunstancias la condición de residuo se simplificará, resultando:

$$K_{11}^2 - K_{12}^2 \geq 0$$

Esta última desigualdad la podemos transformar en una igualdad si removemos el exceso de residuo en $K_{11} = K_{22}$ transformando los polos en compactos. Esta serie de simplificaciones da origen a un método de síntesis que designaremos como el de los <u>cuadripolos sin pérdidas simétricas y compactos</u>.

PROCESO DE SINTESIS

1) Dada o conocida $Z_{12}(s) = Z_{21}(s)$ a la que supondremos no F.R.P. la expandimos en fracciones parciales, apareciendo residuos positivos y negativos. Agrupamos las fracciones caracterizadas por residuos positivos en $Z_{12p}(s)$ y las caracterizadas por residuos negativos en $Z_{12n}(s)$, o sea:

$$Z_{12}(s) = Z_{12p}(s) - Z_{12n}(s) \qquad 5.15$$

2) Adoptamos una estructura simétrica, o sea $Z_{11}(s) = Z_{22}(s)$, por tratarse de funciones reales positivas tendrán todos sus residuos reales y positivos. Además si imponemos la condición de compactos a estos polos podremos expresar a $Z_{11}(s) = Z_{22}(s)$ expandida en fracciones parciales como:

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = Z_{12p}(s) + Z_{12n}(s) \qquad 5.16$$

Esto es así pues la condición de polos compactos implica $K_{11}^2 - K_{12}^2 = 0$ o sea $K_{11} = |K_{12}|$

3) Conocidos los prámetros que definen al cuadrípolo ($Z_{12} = Z_{21}$ y $Z_{11} = Z_{22}$) tenemos que adoptar una estructura simétrica e indudablemente la mas sencilla corresponde a un cuadripolo lattica o puente balanceado, caracterizado por:

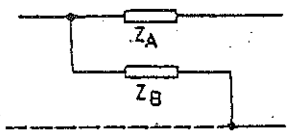


Fig. (5.21)

$$\begin{cases} Z_A = Z_{11} - Z_{12} \\ Z_B = Z_{11} + Z_{12} \end{cases} \qquad 5\text{-}17$$

de 5-15 y 5-16 resulta la 5-18

$$\begin{cases} Z_A = 2\,Z_{12n} \\ Z_B = 2\,Z_{12p} \end{cases} \qquad 5\text{-}18$$

Z_A y Z_B son funciones reales positivas sintetizables por cualquiera de los métodos vistos (Foster, Cauer)

N.B. como las ramas Z_A y Z_B del láttice no tienen polos comunes.

PROBLEMA 5.3.

Sintetizar la siguiente impedancia de transferencia.

$$Z_{12}(s) = \frac{2s}{(s^2+1)(s^2+2)(s^2+3)}$$

Expandimos en fracciones parciales

$$Z_{12}(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+2} + \frac{s}{s^2+3}$$ y formamos Z_{12p} y Z_{12n}

o sea

$$\begin{cases} Z_{12p}(s) = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{s}{s^2+3} \\ Z_{12n}(s) = \dfrac{2s}{s^2+2} \end{cases}$$

Finalmente

$$\begin{cases} Z_A = 2\,Z_{12n} = \dfrac{4s}{s^2+2} \\ Z_B = 2\,Z_{12p} = \dfrac{2s}{s^2+1} + \dfrac{2s}{s^2+3} \end{cases}$$

La red resultante será:

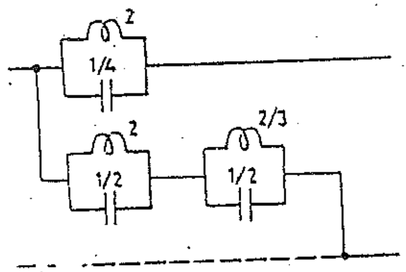


Fig. (5.22)

La mayor desventaja de esta estructura es que además de ser balanceada requiere una excesiva cantidad de componentes (12 en nuestro ej.)
En ocasiones es posible transformar un cuadripolo láttice (balanceado) en una red escalera simétrica equivalente (desbalanceada)

5.5 TRANSFORMACION DE ESTRUCTURAS BALANCEADAS EN DESBALANCEADAS

Analizaremos a continuación los procesos de transformación de una estructura balanceada en otra desbalanceada equivalente y para ello comencemos por analizar las siguientes posibilidades:

1- Supongamos que ambas impedancias Z_A y Z_B del láttice posean una impedancia Z_0 en común, entonces podremos expresar:

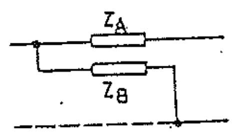


Fig. (5.23)

$$\begin{cases} Z_A = Z_0 + Z'_A \\ Z_B = Z_0 + Z'_B \end{cases} \qquad 5\text{-}19$$

como

$$\begin{cases} Z_{11} = \frac{1}{2}\,(Z_B + Z_A) = Z_{22} \\ Z_{12} = \frac{1}{2}\,(Z_B - Z_A) = Z_{21} \end{cases} \qquad 5\text{-}20$$

reemplazando 5-19 en 5-20 resulta 5-21

$$\begin{cases} Z_{11} = \frac{1}{2}\,(Z'_B + Z'_A) + Z_0 = Z_{22} \\ Z_{12} = \frac{1}{2}\,(Z'_B - Z'_A) = Z_{21} \end{cases} \qquad 5\text{-}21$$

La 5-21 sugiere la siguiente estructura

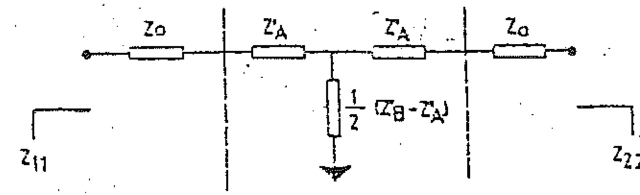
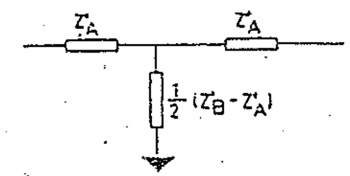


Fig. (5.24)

Si bien las impedancias Z'_A y Z'_B están representadas por funciones reales positivas no necesariamente ocurre lo propio con la función $(Z'_B - Z'_A)$ y por consiguiente si ocurriera esto, no se podría realizar físicamente la red "T" central.
No obstante, podríamos representar esta "T" mediante el láttice equivalente de la fig. (5.25) B .

Fig.(5.25) A



=

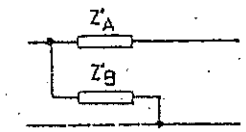
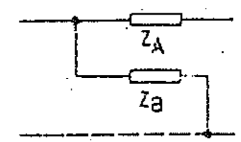


Fig. (5.25) B

Como vemos mediante este proceso la impedancia que eventualmente pudieran tener en común las ramas serie y cruzada del láttice original pueden ser removidas y ubicadas en serie con las ramas de entrada y salida, quedando un láttice central con ramas mas simples que las del láttice primitivo como ilustra la fig. (5.26) B

Fig.(5.26) A



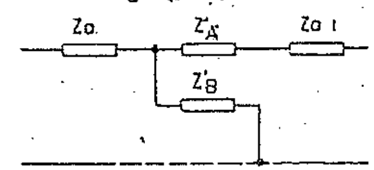


Fig. (5.26) B

2- La situación dual se puede presentar también, o sea

$$\begin{cases} Y_A = Y_0 + Y'_A \\ Y_B = Y_0 + Y'_B \end{cases}$$

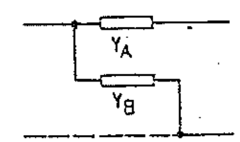


Fig. (5.27)

y la red equivalente será la representada en la fig. (5.28)

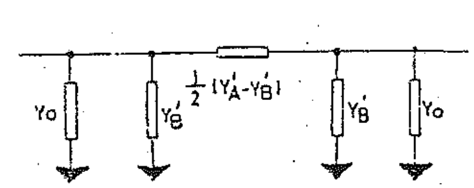


Fig. (5 28) A

=

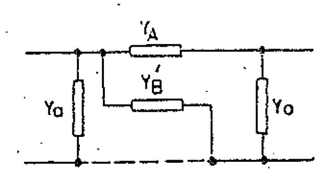


Fig. (5.28) B

PROBLEMA 5.4

Retomemos al ejemplo N°3 para transformando Z_A y Z_B en Y_A e Y_B aplicando Foster II, o sea

$$\begin{cases} Z_A = \dfrac{4s}{s^2+2} \\ Z_B = \dfrac{2s}{s^2+1} + \dfrac{2s}{s^2+3} = \dfrac{4s\,(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A = \dfrac{s^2+2}{4s} = \dfrac{1}{4}s + \dfrac{1}{2s} \\ Y_B = \dfrac{(s^2+1)(s^2+3)}{4s(s^2+2)} = \dfrac{1}{4}s + \dfrac{\frac{1}{8}s}{s^2+2} + \dfrac{3}{8s} \end{cases}$$

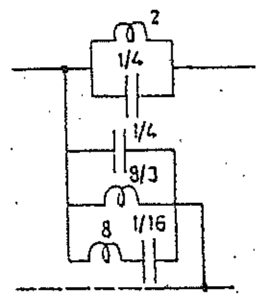


Fig. (5.29)

Como el capacitor $C = \frac{1}{4}$ aparece en ambas ramas del láttice podemos removerlo totalmente y ubicarlo como se indica en la fig. (5.30)

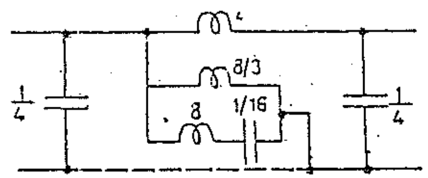


Fig. (5.30)

$$\begin{cases} Y'_B = Y_B - \dfrac{1}{4}s = \dfrac{3}{8s} + \dfrac{\frac{1}{8}s}{s^2+2} \\ Y'_A = Y_A - \dfrac{1}{4}s = \dfrac{1}{2s} \end{cases}$$

Estos parámetros Y' no poseen admitancias comunes pero si pasamos a sus inversos resultará

$$\begin{cases} Z'_B = \dfrac{1}{Y'_B} = \dfrac{4s(s^2+2)}{2s^2+3} = 2s + \dfrac{s}{s^2+\frac{3}{2}} \\ Z'_A = \dfrac{1}{Y'_A} = 2s \end{cases}$$

Como vemos ahora ambas ramas de este nuevo láttice poseen en común un inductor de valor 2 que podremos remover obteniendo la red de la Fig (5.31) B

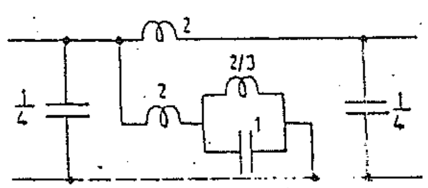


Fig. (5.31) A

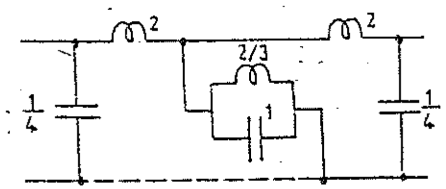


Fig. (5.31) B

o sea

$$\begin{cases} Z''_A = Z'_A - 2s = 0 \\ Z''_B = Z'_B - 2s = \dfrac{s}{s^2+\frac{3}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''_A = \infty \\ Y''_B = s + \dfrac{3}{2s} \end{cases}$$

Finalmente la red equivalente al láttice original, pero desbalanceada, será la de la figura (5.32).

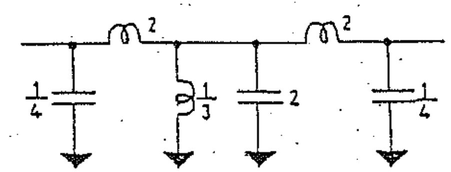


Fig. (5.32)

Como la rama serie del láttice último se transformó en un corto ($Z''_A = 0$) restarán los ramas cruzadas, o sea un paralelo de dos admitancias iguales a Y''_B, de ahí que se obtenga como red equivalente final la representada en la figura (5.32).

OTROS TIPOS DE DESCOMPOSICION

Supongamos que al intentar algún paso de simplificacion de los comentados anteriormente no se diera la circunstancia de que las ramas serie y cruzada del lattice compartan impedancias y/o admitancias comunes, podemos entonces intentar la descomposición de sus parámetros característicos según la (5-23):

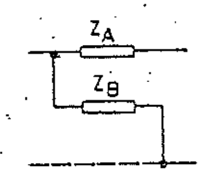


Fig. (5.33)

$$\begin{cases} Y_{11} = \dfrac{1}{2}\,(Y_B + Y_A) = \dfrac{1}{2}\,(Y_B + Y_{A_2}) + \dfrac{1}{2}Y_{A_1} \\ Y_{12} = \dfrac{1}{2}\,(Y_B - Y_A) = \dfrac{1}{2}\,(Y_B - Y_{A_2}) - \dfrac{1}{2}Y_{A_1} \end{cases} \qquad (5.23)$$

o sea
$$\begin{cases} Y_{11} = Y''_{11} + Y'_{11} \\ Y_{12} = Y''_{12} + Y'_{12} \end{cases}$$

Estas expresiones nos sugieren la posibilidad de hallar una red equivalente a la dada conectando en paralelo dos cuadripolos, uno caracterizado por las expresiones (5.25)

$$\begin{cases} Y''_{11} = \dfrac{1}{2}\,(Y_B + Y_{A_2}) = Y''_{22} \\ Y''_{12} = \dfrac{1}{2}\,(Y_B - Y_{A_2}) = Y''_{21} \end{cases} \qquad (5.25)$$

y el otro por las expresiones (5.26)

$$\begin{cases} Y'_{11} = \dfrac{1}{2}Y_{A_1} = Y'_{22} \\ Y'_{12} = \dfrac{1}{2}Y_{A_1} = Y'_{21} \end{cases} \qquad (5.26)$$

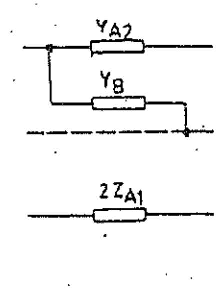


Fig. (5.34)

Si conectáramos ambos cuadripolos en paralelo resultaría el esquema de la fig. (5.35)

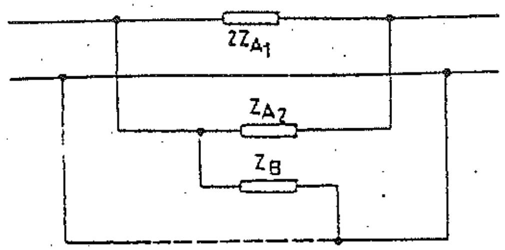


Fig. (5.35)

Como se observa queda cortocircuitada la rama serie inferior del láttice por la rama común del cuadripolo desbalanceado, para salvar esta dificultad podemos recurrir a un transformador perfecto de relación 1:1 como se ilustra en la fig. (5.36)

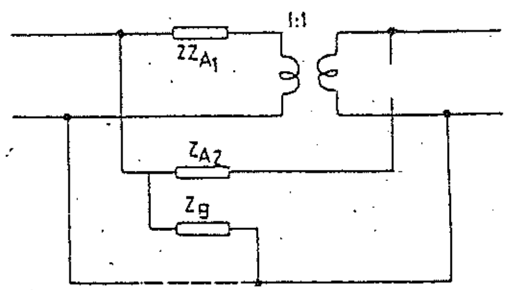
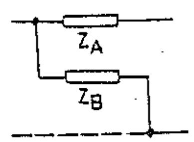


Fig. (5.36)

En el último caso removimos una admitancia que pertenecía exclusivamente a la rama serie del láttice original y mediante la conexión en paralelo de dos cuadripolos lográbamos simplificar la estructura del láttice original.

Ahora plantearemos la situación dual, o sea removeremos una impedancia de la rama cruzada y mediante conexión serie de dos cuadripolos obtendremos una estructura balanceada mas simple que la primitiva.

Partimos del láttice de la figura (5.37)



$$\begin{cases} Z_{11} = \frac{1}{2} \ (Z_B + Z_A) = Z_{22} \\ Z_{12} = \frac{1}{2} \ (Z_B - Z_A) = Z_{21} \end{cases} \qquad (5.27)$$

Fig. (5.37)

y la expresamos como:

$$\begin{cases} Z_{11} = \frac{1}{2} \ (Z_{B_2} + Z_A) + \frac{1}{2} Z_{B_1} = Z''_{11} + Z'_{11} \\ Z_{12} = \frac{1}{2} \ (Z_{B_2} - Z_A) + \frac{1}{2} Z_{B_1} = Z''_{12} + Z'_{12} \end{cases} \qquad (5.28)$$

Estas últimas expresiones nos sugieren la posibilidad de hallar una red equivalente a la original conectando en serie dos cuadripolos, uno caracterizado por (5.29)

$$\begin{cases} Z''_{11} = \frac{1}{2} \ (Z_{B_2} + Z_A) \\ Z''_{12} = \frac{1}{2} \ (Z_{B_2} - Z_A) \end{cases} \qquad (5.29)$$

y el otro por (5.30)

$$\begin{cases} Z'_{11} = \frac{1}{2} Z_{B_1} \\ Z'_{12} = \frac{1}{2} Z_{B_1} \end{cases} \qquad (5.30)$$

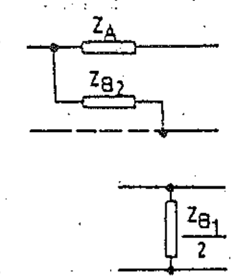


Fig. (5.38)

Analogamente a lo que ocurría en el caso anterior la conexión serie del cuadripolo desbalanceado (') con el balanceado ('') no es posible realizarla en forma directa sino que resulta imprescindible hacer uso de un transformador perfecto de relación 1:1 como se indica en fig. (5.39)

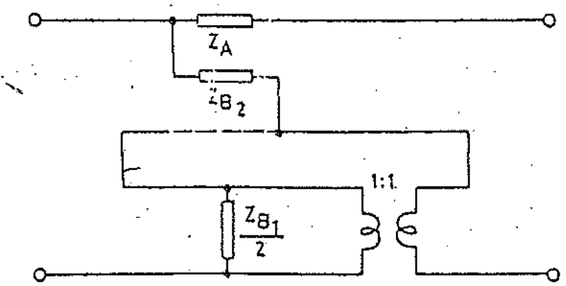


Fig. (5.39)

RESUMEN

Hemos analizado cuatro procedimientos de descomposición de cuadripolos balanceados tendientes a convertirlos en redes equivalentes desbalanceadas.

1) Remoción serie de Z comunes a las ramas serie y cruzada de un láttice.
2) Remoción paralelo de Y comunes a las ramas serie y cruzada de un láttice.
3) Remoción de una Y perteneciente a las ramas serie del láttice (o sea remoción de una rama puente).
4) Remoción de una Z perteneciente a las ramas cruzadas del láttice (o sea remoción de una rama derivada).

PROBLEMA 5-5

Supongamos la siguiente estructura balanceada

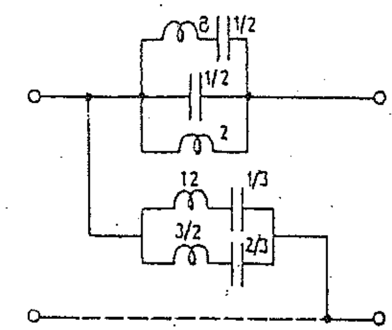


Fig. (5.40)

E intentemos transformarla en una red equivalente desbalanceada aplicando los procesos de descomposición o transformación vistos.

De la red resulta que :

$$Y_B = \frac{1}{12s + \frac{3}{s}} + \frac{1}{\frac{3}{2}s + \frac{3}{2s}} = \frac{\frac{27}{2}s + \frac{9}{2s}}{\frac{9}{2s^2}(4s^2+1)(s^2+1)} = \frac{s(3s^2+1)}{(4s^2+1)(s^2+1)}$$

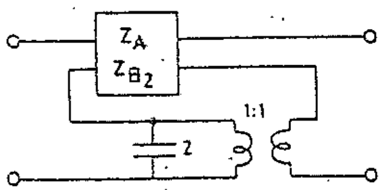
$$Z_B = \frac{(4s^2+1)(s^2+1)}{s(3s^2+1)}$$

$$Y_A = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{8s + \frac{2}{s}} = \frac{\frac{1}{2s} + \frac{1}{2}s^2}{s^2} + \frac{s}{8s^2+2}$$

$$Y_A = \frac{4s^4 + 6s^2 + 1}{2s(4s^2+1)}$$

1) REMOCION DE UNA RAMA DERIVADA

$$Z_B = \frac{(4s^2+1)(s^2+1)}{s(3s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{2s(2s^2+1)}{3s^2+1} = Z_{B_1} + Z_{B_2}$$



$Z_{B_2} = Z_B - Z_{B_1}$

Fig. (5.41)

$$2)\ Y_A = \frac{4s^4+6s^2+1}{2s(4s^2+1)} = \frac{1}{2s} + \frac{s(2s^2+1)}{4s^2+1} = Y_{A_1} + Y_{A_2}$$

$$Y_{B_2} = \frac{3s^2+1}{2s(2s^2+1)} = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(2s^2+1)} = Y_{B_3} + Y_{B_4}$$

Ahora podemos remover admitancias comunes a ambas ramas del láttice

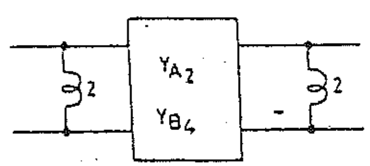


Fig. (5.42)

$$3)\ Z_{A_2} = \frac{4s^2+1}{s(2s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{2s}{2s^2+1} = Z_{A_3} + Z_{A_4}$$

$$Z_{B_4} = \frac{2(2s^2+1)}{s} = \frac{2}{s} + Z_{B_4'} = \frac{1}{s} + \frac{4s^2+1}{s} = Z_{B_5} + Z_{B_6}$$

hora podemos remover Z comunes a ambas ramas del láttice

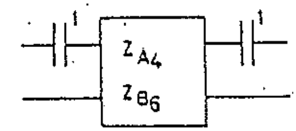


Fig. (5.43)

$$4)\ Y_{A_4} = \frac{2s^2+1}{2s} = s + \frac{1}{2s} = Y_{A_5} + Y_{A_6}$$

$$Y_{B_6} = \frac{s}{4s^2+1}$$

Removemos Y_{A_5} de ambas ramas serie (conexión paralelo).

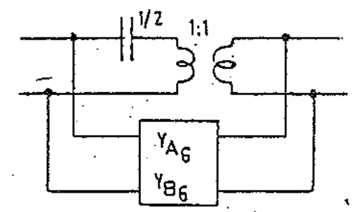
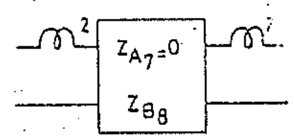


Fig. (5.44)

5) Finalmente $Z_{A_6} = 2s$

$$Z_{B_6} = 4s + \frac{1}{s} = 2s + \frac{2s^2+1}{s} = Z_{B_7} + Z_{B_8}$$

Removemos nuevamente Z comunes



con $Z_{B_8} = 2s + \frac{1}{s}$

Fig. (5.46)

o sea

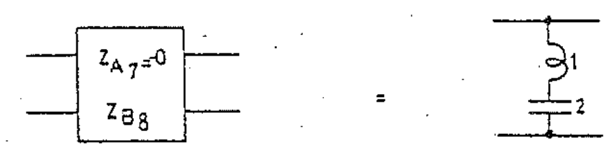


Fig. (5.47)

y en definicíva la red desbalanceada final será la indicada en la fig. (5.48)

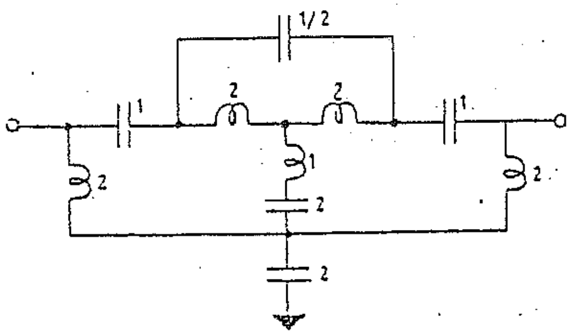


Fig. (5.48)

Por supuesto que el orden en que fuimos transformando la red no es el único posible y por consiguiente son varias las redes capaces de satisfacer el problema propuesto.

PROBLEMA 5-6

Consideremos el siguiente láttice

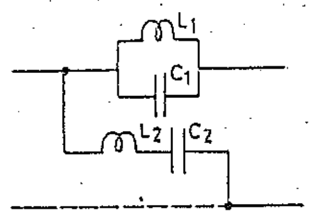


Fig. (5.49)

E intentemos transformarlo en una estructura equivalente desbalanceada.

Como no existen Z comunes ni Y comunes a ambas ramas del láttice intentemos remover por ej: C_1 como rama puente resultando, dos cuadripolos que deberemos conectar en paralelo.

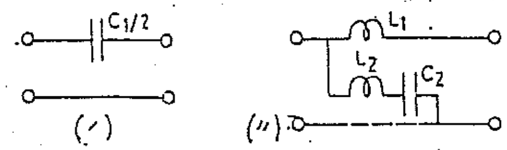


Fig. (5.50)

Para conectarlos en paralelo debemos emplear un transformador 1:1, pero observamos que el cuadripolo (") es susceptible de una nueva transformación ya que ambas ramas de este segundo láttice poseen Z comunes. Removamos totalmente L_1, obteniendo la red de la fig. (5.51)

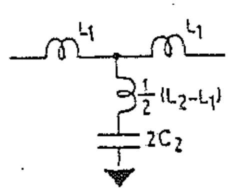


Fig. (5.51)

Al haber eliminado ambas ramas serie del láttice es posible la conexión paralelo directa o sea que la red desbalanceada equivalente sería la de la fig. (5.52)

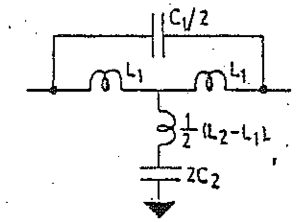


Fig. (5.52)

Hemos transformado una red balanceada integrada por 8 elementos en una T puenteada equivalente constituida por solo 5 componentes.

La condición de realizabilidad de esta red será lógicamente $L_2 > L_1$

Por supuesto que no es esta la única alternativa y es fácil demostrar que otra posible red es la que se ilustra en la fig. (5.53)

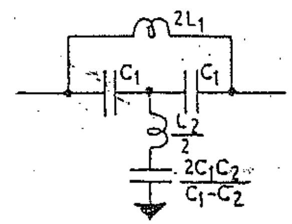


Fig. (5.53)

Condición de realizabilidad $C_1 > C_2$

5- SINTESIS DE TRANSFERENCIAS DE TENSIONES EN VACIO MEDIANTE CUADRIPOLOS BALANCEADOS

Supongamos pretender sintetizar la siguiente función transferencia

PROBLEMA 5-7

$$E_{21}(s) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{H\,(s^2+9)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Como se trata de una transferencia de tensiones en vacío podemos escribir

$$\frac{H\,(s^2+9)}{(s^2+1)\,(s^2+4)} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

como la implementaremos con un láttice, resultará:

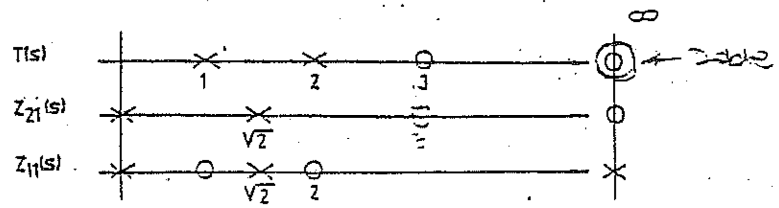
$$Z_{21}(s) = \frac{1}{2}(Z_B - Z_A) \qquad Z_{11} = \frac{1}{2}(Z_B + Z_A)$$

O sea

$$\frac{H\,(s^2+9)}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + Z_A}$$

Adoptemos como polinomio auxiliar $A(s) = s(s^2 + 2)$

Armemos el diagrama polos ceros correspondiente a $T(s)$ $Z_{11}(s)$ y $Z_{21}(s)$.



$$Z_{21}(s) = \frac{H\,(s^2+9)}{s(s^2+2)} \qquad Z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+2)}$$

Nó como hemos adoptado como polinomio auxiliar $A(s) = s(s^2+2)$. Ahora expandimos en fracciones parciales Z_{11} y Z_{21}, o sea

$$\begin{cases} Z_{21}(s) = H\left[\dfrac{K_o}{s} + \dfrac{2K_1 s}{s^2+2}\right] = H\left[\dfrac{\frac{9}{2}}{s} - \dfrac{\frac{7}{2}s}{s^2+2}\right] \\ Z_{11}(s) = \dfrac{K'_o}{s} + \dfrac{2K'_1 s}{s^2+2} + K'_\infty s = \dfrac{2}{s} + \dfrac{s}{s^2+2} + s \end{cases}$$

y evaluamos Z_A y Z_B mediante

$$\begin{cases} Z_A = Z_{11} - Z_{21} = \dfrac{(2 - \frac{9}{2}H)}{s} + \dfrac{(1 + \frac{7}{2}H)\,s}{s^2+2} + s \\ Z_B = Z_{11} + Z_{21} = \dfrac{(2 + \frac{9}{2}H)}{s} + \dfrac{(1 - \frac{7}{2}H)}{s^2+2} + s \end{cases}$$

como Z_A y Z_B deben ser F.R.P. debemos adoptar H de modo tal de satisfacer esta condición, o sea :

$$\begin{cases} 2 - \frac{9}{2}H \geq 0 & \rightarrow \quad H \leq \frac{4}{9} \\ 1 - \frac{7}{2}H \geq 0 & \rightarrow \quad H \leq \frac{2}{7} \end{cases}$$

Si adoptamos $H = \frac{2}{7}$ podemos ahorrarnos 4 elementos vale decir que :

$$\begin{cases} Z_A = \dfrac{\frac{5}{7}}{s} + \dfrac{2\,s}{s^2+2} + s \\ Z_B = \dfrac{\frac{23}{7}}{s} + s \end{cases}$$

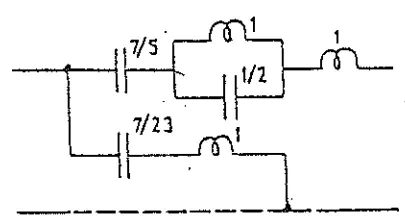


Fig. (5.54)

-7- SINTESIS DE TRANSFERENCIAS CARGADAS MEDIANTE CUADRIPOLOS NO DISIPATIVOS

Analizaremos los siguientes casos

- CARGADAS EN UN SOLO EXTREMO

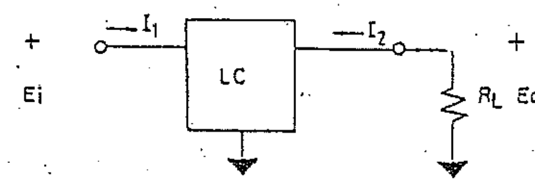


Fig. (5.55)

-1 $T_{21}(s) = \dfrac{E_2(s)}{E_1(s)}\Bigg|_{RL}$

-2 $T_{21}(s) = \dfrac{E_2(s)}{I_1(s)}\Bigg|_{RL}$

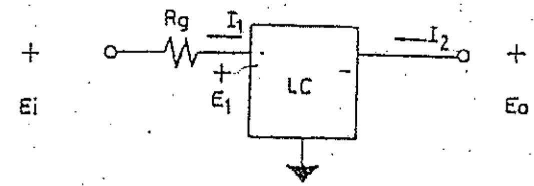


Fig. (5.56)

-3 $T_{21}(s) = \dfrac{E_2(s)}{E_1(s)}\Bigg|_{R_g}$

- CARGADAS EN AMBOS EXTREMOS

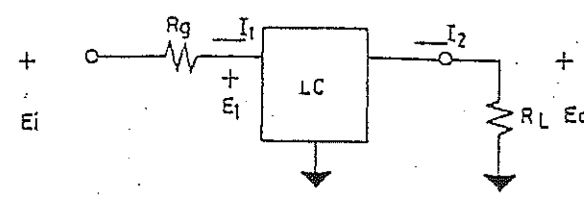


Fig. (5.57)

-1 $T_{21}(s) = \dfrac{E_2(s)}{E_1(s)}\Bigg|_{RL,\ RG}$

En todos lo casos supondremos que el cuadripolo sintetizar y que resuelve la función transferencia planteada está integrado por reactancias puras (L y C).

Comenzaremos por el esquema de la fig. (5.57) ya que este es el caso más general y una vez evaluada la expresión correspondiente a su transferencia de tensiones en función de los parámetros del cuadripolo, R_L y R_G, resultará sencillo obtener las correspondientes expresiones para los casos (A.1) y (A.3) haciendo $R_G = 0$ ó $R_L \to \infty$ respectivamente en la expresión general correspondiente al caso (B.1).

Para evaluar la transferencia de tensiones en el caso designado como (B.1) haremos uso de la matriz admitancia indefinida identificando al cuadripolo a través de sus parámetros admitancia.

El esquema de la Fig. (5.57) resultará entonces modificado como lo sugiere la Fig. (5.58).

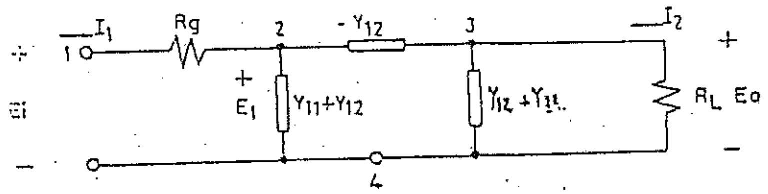


Fig. (5.58)

La matriz admitancia indefinida para este esquema está dada por:

$$Y_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_g} & -\frac{1}{R_g} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_g} & (Y_{11} + \frac{1}{R_g}) & Y_{12} & -(Y_{11}+Y_{12}) \\ 0 & Y_{12} & (Y_{22}+\frac{1}{R_L}) & -(Y_{22}+Y_{12}+\frac{1}{R_L}) \\ 0 & -(Y_{11}+Y_{12}) & -(Y_{22}+Y_{12}+\frac{1}{R_L}) & (Y_{11}+Y_{22}+2Y_{12}+\frac{1}{R_L}) \end{vmatrix} \qquad (5.31)$$

Evaluemos ahora la función transferencia de tensiones

$$\frac{Eo}{E_i}(s) = \frac{E_{14}}{E_{14}}(s) = \frac{Y_{14}^{12}}{Y_{14}^{11}} \quad (-1)^{22} \qquad (5.32)$$

o sea

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-\frac{1}{R_G} \; Y_{12}}{(Y_{11}+\frac{1}{R_G})(Y_{22}+\frac{1}{R_L}) - Y_{12}^2} \qquad (5.33)$$

operando sobre la (5.33) se obtiene

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{12}}{(Y_{22}+\frac{1}{R_L})(R_G(Y_{11} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{22}+\frac{1}{R_L}}) + 1)} \qquad (5.34)$$

La expresión (5.34) vincula la función transferencia de tensiones que se pretende sintetizar, con los parámetros admitancia del cuadripolo que resuelve el problema y las resistencias del generador y de carga.

Si en la (5.34) hacemos tender R_G a cero obtendremos una expresión útil para resolver caso (A.1) o sea

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{12}}{Y_{22}+\frac{1}{R_L}} \qquad (5.35)$$

Mientras que si en la (5.34) hacemos tender R_L a infinito encontraremos una expresión que nos facilitará la síntesis del caso (A.3), o sea

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{12}}{Y_{22}} \; \frac{Y_{22}}{R_G(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2) + Y_{22}}$$

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{12}}{R_G \; \Delta Y + Y_{22}} = \frac{\frac{-Y_{12}}{\Delta Y}}{R_G + \frac{Y_{22}}{\Delta Y}}$$

recordando las relaciones existentes entre los parámetros Z e Y es posible escribir

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{Z_{21}}{R_G + Z_{11}} \qquad (5.36)$$

Para el caso (A.2) podemos aplicar la matriz admitancia indefinida con el objeto de hallar una expresión que nos facilite la tarea de síntesis tal cual lo hemos hecho hasta el momento, resultando para este caso:

$$\frac{E_o}{I_1}(s) = \frac{E_{14}}{I_{14}} = \frac{Y^{*}_{14}}{Y^{*}_{44}} \qquad (5.37)$$

En donde

$$Y^{*} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_G} & -\frac{1}{R_G} & 0 \\ -\frac{1}{R_G} & Y_{11} + \frac{1}{R_G} & Y_{12} \\ 0 & Y_{12} & Y_{22} + \frac{1}{R_L} \end{bmatrix}$$

o sea $Y^{*} = \frac{1}{R_G} \{(Y_{11} + \frac{1}{R_G})(Y_{22} + \frac{1}{R_L}) - Y_{12}^2\} + \frac{1}{R_G}(-\frac{1}{R_G}(Y_{22} + \frac{1}{R_L}))$

$$= \frac{1}{R_G}(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 + \frac{Y_{11}}{R_L})$$

$$= \frac{1}{R_G}(\Delta Y + \frac{Y_{11}}{R_L})$$

Reemplazando en (5.37) resulta

$$\frac{E_o}{I_1}(s) = \frac{-\frac{1}{R_G}Y_{12}}{\frac{1}{R_G}(\Delta Y + \frac{Y_{11}}{R_L})} = \frac{\frac{-Y_{12}}{\Delta Y}}{1 + \frac{Y_{11}}{\Delta Y}\frac{1}{R_L}}$$

$$\frac{E_o}{I}(s) = \frac{Z_{21}}{1 + \frac{Z_{22}}{R_L}} \qquad (5.38)$$

Otra forma de resolver este problema consiste en efectuar un balance de las potencias activas puestas en juego aceptando que por ser el cuadripolo reactivo puro no absorbe potencia activa.

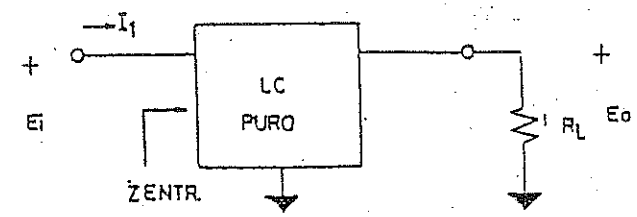


Fig. (5.59)

a) Potencia activa de entrada al cuadripolo: $P_i = |I_1|^2 \, R_e$ (5.39) en donde R_e re- enta la parte real de la Zentrada.

b) Potencia activa disipada en la carga: $P_o = \frac{|E_o|^2}{R_L}$ (5.40)

Igualando (5.39) y (5.40) resulta

$$\left|\frac{E_o}{I_1}\right|^2 = R_L \cdot R_e \qquad (5.41)$$

La (5.41) expresa que a partir del conocimiento de la función transferencia $\frac{E_o}{I_1}(s)$ y es factible sintetizar un cuadripolo (LC) que la satisfaga, para lo cual a partir de (5.41) habrá que evaluar R_e y luego el problema se reduce a dos pasos: (1º) Conocida la parte real de la impedancia de entrada del cuadripolo cargado, hallar una expresión para su impedancia de entrada. (2º) Sintetizarla.

.1. SINTESIS DE TRANSFERENCIAS CARGADAS EN UN EXTREMO

A continuación comentaremos los procedimientos de síntesis aplicables a estos casos os ilustraremos a través de unos sencillos ejemplos numéricos.

Comencemos con el caso (A-1). Nuestros datos serán

(5.42) $\quad T_{21}(s) = \left.\frac{E_o(s)}{E_i(s)}\right|_{R_L} = \frac{A(s)}{B(s)}$ y R_L

Supongamos por un momento que podamos elegir un polinomio auxiliar P(s) tal que dividendo numerador y denominador de (5.42) por este polinomio resulte

$$T_{21}(s) = \frac{\frac{A(s)}{P(s)}}{\frac{B(s)}{P(s)}} = \frac{C(s)}{D(s) + K} \qquad (5.43)$$

En donde K es una constante real positiva.

Si comparamos la (5.43) con la (5.35) resulta para este caso

$$-Y_{12}(s) = C(s) = \frac{A(s)}{P(s)} \qquad 5\text{-}44\ (a)$$

$$Y_{22}(s) = D(s) = \frac{B(s)}{P(s)} \qquad 5\text{-}44\ (b)$$

$$\frac{1}{R_L} = K \qquad 5\text{-}44\ (c)$$

Y el problema se reduce a sintetizar un cuadripolo que satisfaga simultáneamente $-Y_{12}(s)$ e $Y_{22}(s)$.

En este caso el cuadripolo se sintetizará desde la carga hacia el generador a través de $Y_{22}(s)$, cuidando que durante el transcurso de la síntesis de $Y_{22}(s)$ se generen los ceros de transmisión requeridos por $-Y_{12}(s)$.

Para el caso (A-3) los datos serán

$$(5.45) \qquad T_{21}(s) = \left.\frac{E_o(s)}{E_i(s)}\right|_{R_G} = \frac{A(s)}{B(s)} \quad y \quad R_G$$

Y supongamos que al dividir numerador y denominador de (5.45) por un cierto polinomio auxiliar obtengamos una expresión de la forma dada por (5-43). Comparando (5-43) y (5-36) resultará:

$$Z_{21}(s) = C(s) = \frac{A(s)}{P(s)} \qquad 5\text{-}46\ (a)$$

$$Z_{11}(s) = D(s) = \frac{B(s)}{P(s)} \qquad 5\text{-}46\ (b)$$

$$R_G = K \qquad 5\text{-}46\ (c)$$

Pero la cosa resulta bastante más complicada si pretendemos adoptar el mismo temperamento para resolver el caso (B-1) ya que por simple comparación entre la expresión (5.34) y nuestro dato, de la forma dada por:

$$T(s) = \left.\frac{E_o(s)}{E_i(s)}\right|_{R_L,\ R_G} = \frac{A(s)}{B(s)} \qquad (5.47)$$

No es posible obtener relaciones tan simples como las dadas por (5.44) y (5.46).

Volveremos más adelante sobre este último caso, y nos ocuparemos por ahora de profundizar un poco más sobre los casos simplemente cargados (A-1) y (A-3).

Por consiguiente nos dedicaremos al estudio de la síntesis de transferencias en las que el polinomio numerador es una función par o impar de S y el polinomio denominador es HURWITZ.

O sea

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{M_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \quad ó \quad \frac{N_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \qquad (5.52)$$

Donde $M_1(s)$ y $M_2(s)$ representan polinomios pares de s y $N_1(s)$ y $N_2(s)$, polinomios impares de s.

Además $B(s) = M_2(s) + N_2(s)$ es polinomio HURWITZ.

Bajo estas condiciones, dada $\frac{E_o}{E_i}(s)$ la podemos expresar como:

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{M_1(s)\ /\ N_2(s)}{1 + M_2(s)\ /\ N_2(s)} \qquad (5.53)$$

ó

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{N_1(s)\ /\ M_2(s)}{1 + N_2(s)\ /\ M_2(s)} \qquad (5.54)$$

Y para el caso (A-1) podemos identificar, si $R_L = 1\Omega$

$$-Y_{12}(s) = \frac{M_1(s)}{N_2(s)} \quad ó \quad \frac{N_1(s)}{M_2(s)} \qquad (5.55)$$

$$Y_{22}(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)} \quad ó \quad \frac{N_2(s)}{M_2(s)} \qquad (5.56)$$

Mientras que para el caso (A-3), si $R_G = 1\ \Omega$ resultará:

$$Z_{21}(s) = \frac{M_1(s)}{N_2(s)} \quad ó \quad \frac{N_1(s)}{M_2(s)} \qquad (5.57)$$

$$Z_{11}(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)} \quad ó \quad \frac{N_2(s)}{M_2(s)} \qquad (5.58)$$

Veamos algunos ejemplos numéricos sencillos.

PROBLEMA 5.8 Sintetizar la siguiente función transferencia de tensiones.

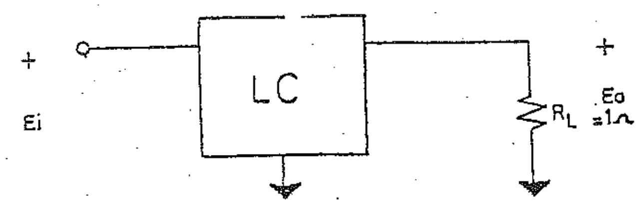


Fig. (5.60)

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Como el polinomio $A(s)$ es par, podemos dividir numerador y denominador de la transferencia por la parte impar del denominador de la transferencia, obteniendo

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{s^2+1}{s}}$$ de la forma dada por (5.53)

y según las expresiones (5.55) y (5.56), resulta

$$\begin{cases} -Y_{12}(s) = \frac{1}{s} \\ Y_{22}(s) = \frac{s^2+1}{s} = \frac{1}{s} + s \end{cases}$$

y el cuadripolo que satisface el problema será el indicado en la fig. (5.61)

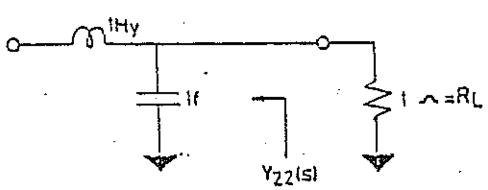


Fig (5.61)

Por comodidad consideraremos en una primera etapa que tanto R_L como R_G son resistores de 1 Ω. Esto no resta generalidad a nuestro análisis como veremos luego, ya que si R_L o R_G fueran distintos de 1 Ω lo único que habría que hacer es una desnormalización del nivel de impedancia asociado a la red que satisface la transferencia propuesta con R_L o R_G iguales a 1 Ω, justamente en los valores impuestos de R_L ó R_G.

En el supuesto de $R_L = R_G = 1$ Ω las expresiones (5.35) y (5.36) son estructuramente idénticas y basta con intercambiar los parámetros Y por los Z para pasar de un caso al otro.

Primero discutiremos el caso (A-1) con $R_L = 1$ Ω.

la (5.35) resulta

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{21}}{1 + Y_{22}} \qquad (5.48)$$

Como $-Y_{21}(s)$ e $Y_{22}(s)$ son funciones racionales las podremos expresar como

$$-Y_{12}(s) = \frac{n_{12}(s)}{d_{12}(s)} \qquad 5.49\ (a)$$

$$Y_{22} = \frac{n_{22}(s)}{d_{22}(s)} \qquad 5.49\ (b)$$

Si suponemos que $Y_{22}(s)$ no posee polos privados, entonces $d_{12}(s) = d_{22}(s)$ o sea

$$-Y_{12}(s) = \frac{n_{12}(s)}{d_{22}(s)} \qquad 5.50\ (a)$$

$$Y_{22}(s) = \frac{n_{22}(s)}{d_{22}(s)} \qquad 5.50\ (b)$$

Si el cuadripolo es LC puro tanto $n_{12}(s)$ como $n_{22}(s)$ serán polinomios pares si es que $d_{22}(s)$ es impar y recíprocamente, o sea que reemplazando (5.50) en (5.48) resulta

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{n_{12}(s)}{d_{22}(s) + n_{22}(s)} = \frac{A(s)}{B(s)} \qquad (5.51)$$

$A(s)$ es el numerador de $-Y_{12}(s)$ y será o bien un polinomio par o bien un polinomio impar.

Por otra parte $B(s)$ es la suma de un polinomio numerador (n_{22}) más un polinomio denominador (d_{22}) correspondientes a una FRP. Por tanto $B(s)$ forzosamente será un polinomio HURWITZ.

PROBLEMA 5.9 Sintetizar $\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$; $R_L = 1\ \Omega$ igual que en el caso anterior.

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{\frac{s^2}{3s}}{1 + \frac{s^2+1}{3s}}$$

$$\begin{cases} -Y_{12}(s) = \frac{1}{3}\, s \\ Y_{22}(s) = \frac{1}{3}\, s + \frac{1}{3s} \end{cases}$$

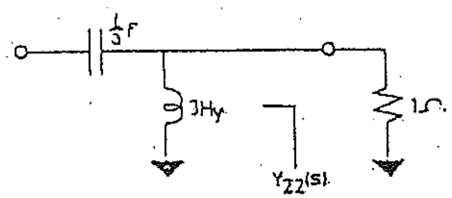


Fig. (5.62)

PROBLEMA 5.10 Sintetizar $\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + 3s + 1}$; $R_L = 1\ \Omega$

Ahora A(s) es impar, o sea de la forma (5.54)

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{\frac{s}{s^2+1}}{1 + \left(\frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1}\right)}$$

o sea

$$\begin{cases} -Y_2(s) = \frac{s}{s^2+1} \\ Y_{22}(s) = \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1} \end{cases}$$

Como la transferencia posee un cero de transmisión en $s = 0$ y un cero doble en alta frecuencia ($s\to\infty$), podemos comenzar aplicando Cauer II a la inversa del $Y_{22}(s)$ y aplicarle luego Cauer I a la inversa de la impedancia residual resultante.

$$\begin{array}{l|l} 1 + s^2 & \underline{3s + s^3} \\ 1 + \frac{s^2}{3} & \frac{1}{3s} \\ \hline \frac{2}{3}\, s^2 & \end{array} \qquad \rightarrow Z_A(s)$$

La impedancia residual será $\frac{\frac{2}{3}\, s^2}{3s + s^3}$ y a su inversa debemos aplicarle Cauer I.

$$\begin{array}{l|l} s^3 + 3s & \underline{\frac{2}{3}\, s^2} \\ s^3 & \frac{3}{2}\, s \\ \hline \end{array} \qquad \rightarrow Y_B(s)$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{2}{3}\, s^2 & \underline{3s} \\ \frac{2}{3}\, s^2 & \frac{2}{9}\, s \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \rightarrow Z_C(s)$$

y la estructura que resuelve el problema será la indicada en la fig. (5.63)

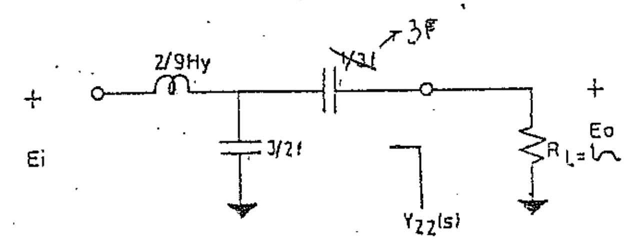


Fig. (5.63)

En el caso (A-3) admite un procedimiento de síntesis totalmente análogo como se ilustra a continuación:

PROBLEMA 5.11 Sintetizar $\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{s^3}{s^3 + s^2 + 3s + 1}$; $R_g = 1\Omega$

como A(s) es impar aplicamos (5.54) o sea

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{\dfrac{s^3}{s^2+1}}{1+\dfrac{s^3+3s}{s^2+1}}$$

y según (5.57) y (5.58) resultan

$$\begin{cases} Z_{21}(s) = \dfrac{s^3}{s^2+1} \\ \\ Z_{11}(s) = \dfrac{s^3+3s}{s^2+1} \end{cases}$$

Como todos los ceros de transmisión se hallan en corriente continua aplicamos Cauer II a la inversa de $Z_{11}(s)$, o sea:

$$\begin{array}{l|l}
1+s^2 & 3s+s^3 \\
\hline
1+\frac{s^2}{3} & \frac{1}{3s} \quad \to Y_A(s)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3s+s^3 & \frac{2}{3}s^2 \\
\hline
3s & \frac{9}{2s} \quad \to Z_B(s)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2}{3}s^2 & s^3 \\
\hline
\frac{2}{3}s^2 & \frac{2}{3s} \quad \to Y_C(s) \\
\hline
0 &
\end{array}$$

y la estructura que resuelve el problema será la indicada en fig. (5.64)

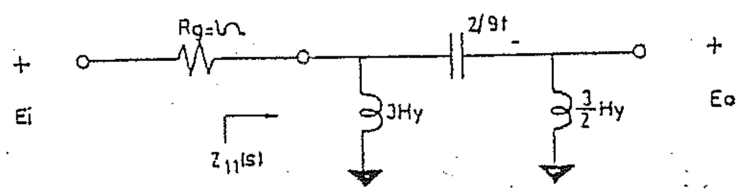


Fig. (5.64)

Obsérvese como ahora la síntesis se realiza, desde el generador hacia la carga a través del parámetro $Z_{11}(s)$.

Caso en que R_G ó R_L son diferentes de 1 Ω.

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{Z_{21}}{R_G + Z_{11}}$$

podemos expresarla como

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{\dfrac{Z_{21}}{R_G}}{1+\dfrac{Z_{11}}{R_G}} = \frac{Z'_{21}}{1+Z'_{11}} \qquad (5.59)$$

Sintetizamos un cuadripolo caracterizado por Z'_{11} y Z'_{21} con $R_G = 1$ Ω. Siguiendo el procedimiento descripto con anterioridad y luego modificamos el nivel de impedancia de todos los componentes de la red "levantándolos" en el valor R_G.

Lo propio ocurre cuando R_L es distinto de 1 Ω.

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}+\dfrac{1}{R_L}}$$

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{-Y_{21}\,R_L}{Y_{22}\,R_L+1} = \frac{-Y'_{21}}{1+Y'_{22}} \qquad (5.60)$$

Ahora debemos "bajar", en el valor R_L, el nivel de todas las admitancias de la estructura normalizada o lo que es equivalente "levantar" el nivel de todas sus impedancias componentes en ese mismo valor.

Comentemos ahora algo respecto del caso (A-2)

Nuestros datos serán: la función transferencia $T_{21}(s)$ y la resistencia de carga R_L

Para resolver nuestro problema haremos uso de la expresión (5.38) que reproducimos

$$T_{21}(s) = \frac{E_o}{I_1}(s) = \frac{Z_{21}}{1 + \frac{Z_{22}}{R_L}} \qquad (5.61)$$

Si suponemos $R_L = 1\ \Omega$ indudablemente que la estructura de esta última expresión será similar al caso (A-1) con $R_G = 1\ \Omega$ y por consiguiente podremos utilizar el mismo procedimiento de síntesis, salvo que ahora el cuadripolo se realizará a partir de la carga y hacia el generador a través del parámetro $Z_{22}(s)$.

Realizaremos la síntesis de algunos problemas a los efectos de ilustrar el método en forma práctica.

PROBLEMA 5.12 . Sintetizar la siguiente función transferencia

$$\frac{E_o}{I_1}(s) = \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad ; \quad R_L = 1\ \Omega$$

Como el polinomio numerador de la transferencia es par comenzamos por dividir numerador y denominador de la transferencia por su parte impar, o sea

$$\frac{E_o}{I_1}(s) = \frac{\frac{K}{s^3 + 2s}}{1 + \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}}$$

Comparando con la (5.61) y sabiendo que $R_L = 1\ \Omega$ resulta:

$$\begin{cases} Z_{21}(s) = \dfrac{K}{s^3 + 2s} \\[2ex] Z_{22}(s) = \dfrac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s} \end{cases}$$

Como $Z_{21}(s)$ posee un cero triple de transmisión en alta frecuencia $(s \to \infty)$ podemos fácilmente resolver nuestro problema aplicando Cauer I a la inversa de $Z_{22}(s)$, o sea:

$$\begin{array}{l|l}
s^3 + 2s & 2s^2 + 1 \\ \cline{2-2}
s^3 + \frac{s}{2} & \frac{s}{2} \quad \leftarrow Y_A(s) \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
2s^2 + 1 & \frac{3}{2}s \\ \cline{2-2}
2s^2 & \frac{4}{3}s \quad \leftarrow Y_B(s) \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{3}{2}s & 1 \\ \cline{2-2}
\frac{3}{2}s & \frac{3}{2}s \quad \leftarrow Y_C(s) \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Como el cuadripolo lo hemos sintetizado a partir de su parámetro de salida $Z_{22}(s)$ la estructura que resuelve nuestro problema es la indicada en la fig. (5.65).

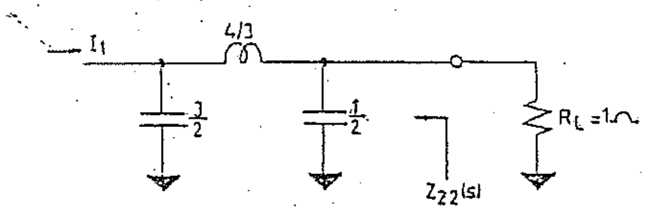


Fig. (5.65)

Si R_L hubiera sido distinto de 1 Ω el procedimiento de síntesis se inicia normalizando los parámetros impedancia respecto de R_L, se sintetiza el cuadripolo como en el ejemplo visto, y finalmente se desnormaliza la estructura respecto de R_L o sea se multiplican por R_L todos los inductores y el resistor de carga y se dividen por R_L todos los capacitores de la estructura.

Por ejemplo si en el problema anterior R_L en vez de 1 Ω hubiera sido especificado como 2 Ω, la estructura que resuelve el problema será la de la fig. (5.66)

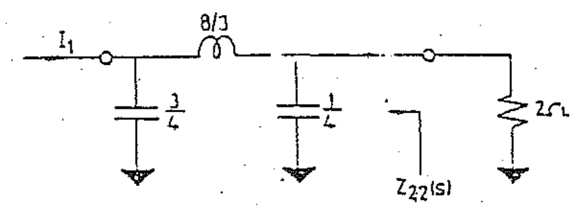


Fig. (5.66)

PROBLEMA 5.11   Caso de una transferencia con ceros finitos. $R_L = 1\Omega$

$$\frac{E_o}{I_1}(s) = \frac{K(s^2+4)}{s^3+2s^2+2s+1}$$

Iniciamos el proceso de síntesis del mismo modo que en el ejemplo anterior, o sea:

$$\frac{Z_{21}}{1+Z_{22}} = \frac{\dfrac{K(s^2+4)}{s^3+2s}}{1+\dfrac{2s^2+1}{s^3+2s}}$$

Z_{22} es la misma que la del caso anterior, pero Z_{21} es diferente ya que en este caso posee un cero en ∞ y el otro para $s = j2$. (También aparece el imaginario conjugado en $s = -j2$, pero a los efectos de la síntesis no nos interesará).

Como Z_{22} posee un cero en ∞, lo primero que haremos es remover totalmente el elemento que lo provoca

$$\frac{1}{Z_{22}} = \frac{s^3+2s}{2s^2+1} = \underbrace{\frac{s}{2}}_{\text{Elemento que provoca el cero en } \infty} + \frac{\frac{3}{2}s}{2s^2+1}$$

Ahora debemos generar los ceros en $(= \pm j2)$ para lo cual habrá que invertir la admitancia residual y efectuar una remoción parcial del polo que posee esta impedancia en ∞ hasta lograr su anulación en $= \pm j2$, o sea

$$Z_A(s) = \frac{2s^2+1}{\frac{3}{2}s}$$

$Z_B(s) = Z_A(s) - K'_\infty s$ como deseamos que $Z_B(j2) = 0$ resulta $K'_\infty = \dfrac{Z_A(j2)}{j2} = \dfrac{7}{6}$

$$Z_B(s) = Z_A(s) - \frac{7}{6}(s)$$

$$Z_B(s) = \frac{\frac{1}{4}(s^2+4)}{\frac{3}{2}s}$$

como se observa, luego de la remoción parcial efectuada hemos logrado generar el cero deseado en $(\pm j2)$

$$Y_B(s) = \frac{6s}{s^2+4} = \frac{1}{\frac{s}{6}+\frac{2}{3s}}$$

Resultando la red de la fig. (5.67)

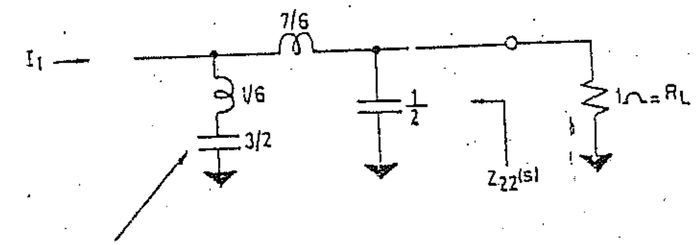
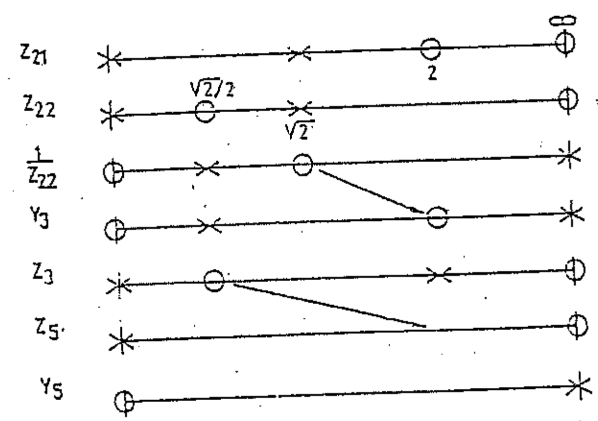


Fig. (5.67)

Red que provoca el cero en $\pm j2$

¿Cuál hubiera sido la red resultante, si en lugar de generar primero el cero en ∞ hubiéramos generado el cero finito en $(\pm j2)$?

Hagámoslo en forma gráfico-analítica



o sea $Y_3 = \dfrac{1}{Z_{22}} - K'_\infty s$.   Remoción parcial con $Y_3(j2) = 0$, o sea $K'_\infty = \dfrac{1}{j2\, Z_{22}(j2)}$

$$K_\infty = \frac{2}{7}$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_{22}} - \frac{2}{7}s = \frac{3}{7}\,\frac{s(s^2+4)}{2s^2+1}$$

y el resto del circuito lo podemos realizar aplicando Foster I A Z_1

$$Z_1 = \frac{7}{3}\,\frac{2s^2+1}{s(s^2+4)} = \frac{K_0}{s} + \frac{2K_1 s}{s^2+4}$$

$$Z_1 = \frac{7/12}{s} + \frac{49/12\ s}{s^2+4}$$

y el cuadripolo final será el ilustrado en la fig.(5.68)

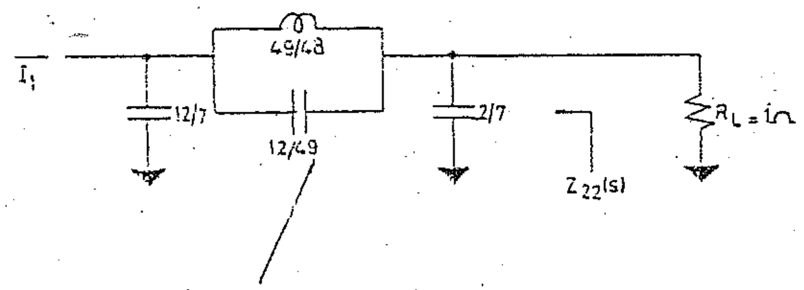


Fig. (5.68)

Red que provoca el cero en ($\pm j2$)

Comparando este cuadripolo con el obtenido en el caso anterior vemos que posee una inductancia menos, a expensas de poseer un capacitor más. Si por ej. esta red trabajara como interetapa entre dos elementos activos, mediante los capacitores derivados podríamos absorver las capacitancias de entrada y salida de dichos elementos. en consecuencia, y por lo expuesto, esta red resulta más práctica y apropiada que la anterior.

Resolveremos a continuación nuevamente el caso (A-2) pero teniendo en cuenta la expresión (5.41)

El método consiste en lo siguiente: Dada la función transferencia $E_0(s)/I_1(s)$, calcular primero su módulo y elevarlo al cuadrado. Conocida R_L, se obtiene de acuerdo a la expresión (5.41) la correspondiente a Re, y ahora estamos ante un problema conocido: Dada la parte real de una impedancia determinarla por completo. Hallada Zentr. sintetizamos $E_0(s)/I_1(s)$, a partir de Zentr, formando el cuadripolo desde el generador hacia la carga. Como verificación del proceso de síntesis deberá cumplirse que al final del desarrollo de Zentr. aparezca una constante de valor igual a R_L.

PROBLEMA 5.14

$$\frac{E_0}{I_1}(s) = Z_{21}^*(s) = \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \ ; \ R_L = 1\Omega$$

1º) Determinados $|Z_{21}^*|^2$ o sea

$$Z_{21}^*(j\omega) = \frac{K}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 1} = \frac{K}{(1-2\omega^2) + j(2\omega - \omega^3)}$$

$$|Z_{21}^*(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + (2\omega-\omega^3)^2}}$$

$$|Z_{21}^*(j\omega)|^2 = \frac{K^2}{(1-2\omega^2)^2 + (2\omega-\omega^3)^2} = \frac{K^2}{1+\omega^6} = R_L\ \mathrm{Re}$$

como $R_L = 1\Omega$ resulta $\mathrm{Re} = \dfrac{K^2}{1+\omega^6}$

2°) Debemos ahora hallar Zentrada a partir del conocimiento de su parte real que es un problema conocido.

$$R_e(\omega) = \frac{K^2}{1+\omega^6} \rightarrow \omega = \frac{s}{j} \rightarrow \text{PAR } Z_{(s)} = \frac{K^2}{1-s^6}$$

Ubicamos los polos de $Z_{(s)}$ PAR o sea las raíces sextas de la unidad.

$$s^6 = 1 \rightarrow s = \sqrt[6]{1}\ \varepsilon^{\,j\frac{2K\pi}{6}} \quad (K = 0,1,2,\ldots 5)$$

$s_1 = e^{j0}$

$s_2 = e^{j\pi/3}$

$s_3 = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$s_4 = e^{j\pi} = -1$

$s_5 = e^{j4\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Polos ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo.

$s_6 = e^{j5\pi/3}$

Ya podemos armar el denominador de Ze (s), para ello asumimos como polos de Ze (s) los ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo.

$$(s+1)\left|s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\left|s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = (s+1)\,(s^2+s+1)$$

o sea:

$$\text{Denominador de } Ze\,(s) = s^3+2s^2+2s+1$$

Para el numerador asumimos: $a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$ aunque podríamos haber asumido un polinomio de orden 3 o inclusive de orden 2. Se intu ye que por tratarse de una transferencia P.bajo el cuadripolo reactivo tendrá inducto res en serie y capacitores derivados y por tanto la Zentrada tenderá a cero para $s \to \infty$ de donde el orden del denominador tendrá que ser un orden mayor que el del numerador. Vale decir que podemos asegurar que el numerador de Zentrada será seguramente de orden 2. Sin embargo, como generalización podemos trabajar con la función propuesta de 4° or den.

$$Ze\,(s) = \frac{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^3+2s^2+2s+1}$$

Hallemos la parte PAR de $Z_{(s)}$

$$\text{PAR } Ze\,(s) = \frac{m_1\,m_2 - n_1\,n_2}{m_2^2 - n_2^2} = \frac{(a_4s^4 + a_2s^2 + a_0)\,(2s^2+1) - (a_3s^3 + a_1s)(s^3+2s)}{1-s^6}$$

$$\therefore \ \text{PAR } Ze\,(s) = \frac{(2a_4 - a_3)\,s^6 + (a_4 - 2a_2 - 2a_3 - a_1)\,s^4 + (2a_0 + a_2 - 2a_1)\,s^2 + a_0}{1-s^6}$$

E identificando esta expresión última con $\dfrac{K^2}{1-s^6}$

Resulta:

$$Z_e\,(s) = K^2\,\frac{(\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1)}{s^3+2s^2+2s+1}$$

Tal como lo intuíamos el orden del numerador de $Z_{e(s)}$ es 2.

Hallada la expresión de $Z_{e(s)}$ podemos sintetizar el cuadripolo. Por tratarse de una transferencia de 3°orden aparecerán como mínima 3 elementos reactivos y analitica mente podremos calcular sus valores aplicando CAUER I a la inversa de $Z_{e(s)}$.

Supongamos K = 1 por comodidad, o sea:

$$Z_{e(s)} = \frac{\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

$$\begin{array}{l|l}
s^3+2s^2+2s+1 & \frac{2}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1 \\
s^3+2s^2+\frac{3}{2}s & \frac{3}{2}s \\
\hline
\frac{2}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1 & \frac{1}{2}s+1 \\
\frac{2}{3}s^2+\frac{4}{3}s & \frac{4}{3}s \\
\hline
\frac{1}{2}s+1 & 1 \\
\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s \\
\hline
1 & 1 \\
1 & 1 \quad (R_L = 1) \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Y la red final será la de la Fig. (5.69)

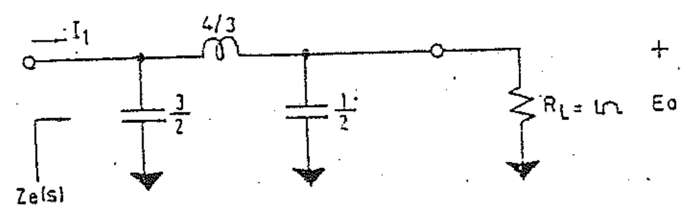


Fig. (5.69)

5.7.2. SINTESIS DE TRANSFERENCIA DOBLEMENTE CARGADAS

Discutiremos a continuación el método de síntesis representado como caso (B - 1) y asociado a la fig. (5.57). En esencia el problema consiste en lo siguiente: se desea sintetizar un cuadripolo de tal modo que insertado el mismo entre un generador y una carga, el conjunto satisfaga una transferencia de tensiones $H_{(s)}$ específica, tal como se esquematiza en la Fig. (5.70).

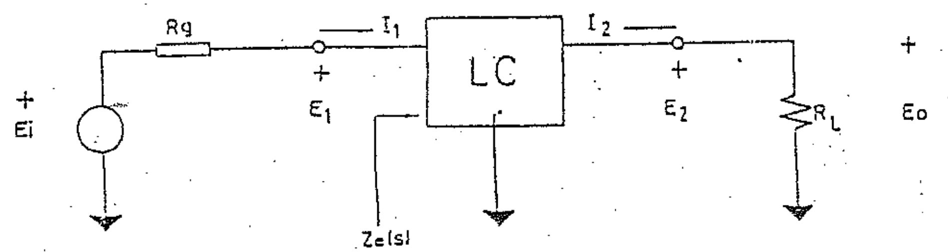


Fig. (5.70)

Este método es debido a D'Arlington y resuelve el problema mediante cuadripolos reactivos puros. Los datos o especificaciones de nuestro problema serán:

A - La función transferencia que deseamos satisfacer de acuerdo con la estructura de la Fig. (5.70), o sea:

$$H_{(s)} = \frac{E_0}{E_i}(s) \qquad (5 - 62)$$

B - Las condiciones de contorno, o sea los requisitos impuestos por la carga y el generador a través de sus respectivas impedancias R_L y R_g

El método apunta a encontrar una expresión para la impedancia de entrada del cuadripolo cargado tal que la misma resulte expresada en función de los datos del problema, o sea: $H_{(s)}$, R_g y R_L.

Para arribar a esta expresión de $Z_{e(s)}$ haremos una serie de consideraciones relativas a las potencias activas puestas en juego en el esquema de la Fig. (5 - 62)

Es sabido que el generador tendrá asociada una máxima potencia disponible, dada por:

$$P_d = \frac{|E_i\,(j\,\omega)|^2}{4\,R_g} \qquad (5 - 63)$$

Esta potencia disponible incidirá sobre el cuadripolo y como a éste lo hemos supuesto reactivo puro no absorverá potencia activa, transmitiéndola totalmente a la carga. Esta potencia transmitida igual a la incidente se disipará en la carga y podemos evaluar su magnitud mediante la siguiente expresión

$$P_0 = \frac{|E_0\,(j\omega)|^2}{R_L} \qquad (5 - 64)$$

Claro está que si no existiera una perfecta adaptación no ocurriría lo que hemos supuesto y parte de la potencia suministrada por el generador al cuadripolo se reflejará hacia el mismo como una cierta potencia P_R.

El balance de las potencias activas puestas en juego sería entonces el siguiente:

$$P_d = P_i + P_R = P_0 + P_R \qquad (5 - 65)$$

En donde: P_d es la máxima potencia disponible en el generador, P_i es la potencia que incide a la entrada del cuadripolo y que es transmitida integramente a la carga en donde se disipa como potencia activa, P_0, y P_R es la potencia reflejada hacia el generador como consecuencia de una eventual desadaptación.

A partir de la expresión (5 - 65) vamos a definir un par de coeficientes muy importantes:

$|T(j\,\omega)|^2$: Coeficiente de transmisión en potencia

$|P(j\,\omega)|^2$: Coeficiente de reflexión en potencia

Para ello dividamos ambos miembros de (5 - 65) por P_d obteniendo:

$$\frac{P_d}{P_d} = \frac{P_0}{P_d} + \frac{P_R}{P_d} \qquad (5 - 66)$$

y por definición designaremos:

$$\frac{P_0}{P_d} = |T(j\,\omega)|^2 \qquad (5 - 67)$$

$$\frac{P_R}{P_d} = |P(j\,\omega)|^2 \qquad (5 - 68)$$

o sea que introduciendo (5 - 67) y (5 - 68) en (5 - 66) resulta:

$$1 = |T(j\omega)|^2 + |P(j\omega)|^2 \qquad (5 - 69)$$

de donde:

$$|P(j\omega)|^2 = 1 - |T(j\omega)|^2 \qquad (5 - 70)$$

Ahora bien, como el cuadripolo es reactivo puro resultará

$$P_i = P_o \qquad (5 - 71)$$

La (5 - 71) podemos expresarla mediante:

$$\text{REAL } Z_{entrada}(j\omega)\,|I_1(j\omega)|^2 = \frac{|E_0(j\omega)|^2}{R_L} \qquad (5 - 72)$$

Además como:

$$\frac{E_i(j\omega)}{I_1(j\omega)} = R_g + Z_{entrada}(j\omega) \qquad (5 - 73)$$

Reemplazando (5 - 73) en (5 - 72) se obtiene:

$$\text{REAL } Z_{entrada}(j\omega)\,\frac{|E_i(j\omega)|^2}{|R_g + Z_{entrada}(j\omega)|^2} = \frac{|E_0(j\omega)|^2}{R_L} \qquad (5 - 74)$$

o sea:

$$\left|\frac{E_0(j\omega)}{E_i(j\omega)}\right|^2 = \frac{R_L\,\text{REAL } Z_{entrada}(j\omega)}{|R_g + Z_{entrada}(j\omega)|^2} \qquad (5 - 75)$$

como por definición:

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{P_2}{P_d} = \frac{|E_0(j\omega)|^2}{R_L}\;\frac{4R_g}{|E_i(j\omega)|^2} \qquad (5 - 76)$$

Reemplazando (5 - 75) en (5 - 76) se obtiene:

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{4R_g \cdot \text{REAL } Z_{entrada}(j\omega)}{|R_g + Z_{entrada}(j\omega)|^2} \qquad (5 - 77)$$

Y de acuerdo con la (5 - 70) resulta:

$$|P(j\omega)|^2 = 1 - 4\,\frac{R_g \cdot \text{REAL } Z_{entrada}(j\omega)}{|R_g + Z_{entrada}(j\omega)|^2} \qquad (5 - 78)$$

Y si adoptamos como expresión genérica para la $Z_{entrada}$ del cuadripolo la siguiente:

$$Z_{entrada}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \qquad (5 - 79)$$

Reemplazando (5 - 79) en (5 - 78) y operando, se obtiene:

$$|P(j\omega)|^2 = \frac{|Z_{entrada}(j\omega) - R_g|^2}{|Z_{entrada}(j\omega) + R_g|^2} \qquad (5 - 80)$$

o también

$$P(j\omega)\;P(-j\omega) = \left|\frac{Z_{entrada}(j\omega) - R_g}{Z_{entrada}(j\omega) + R_g}\right|^2 \qquad (5 - 81)$$

Y reemplazando $s = j\omega$ en (5 - 81) es posible obtener:

$$P(s) = \pm\,\frac{Z_{entrada}(s) - R_g}{Z_{entrada}(s) + R_g} \qquad (5 - 82)$$

Y finalmente:

$$Z_{entrada}\,(s) = R_g\,\frac{1 \pm P\,(s)}{1 \mp P\,(s)} \qquad (5 - 83)$$

Y es a través de esta última expresión que resolveremos el problema planteado, recordando que la $Z_{entrada}$ del cuadripolo cargado está integrada por un resistor R_L y sus restantes componentes son reactivos puros.

Vamos a deducir a continuación otra expresión que nos resultará útil como intermediaria en este proceso de síntesis. De la definición de $|T\,(j\,\omega)|^2$ resulta:

$$|T\,(j\,\omega)|^2 = \frac{P_o}{P_d} = \frac{4\,R_g}{R_L}\left|\frac{E_o\,(j\,\omega)}{E_i\,(j\,\omega)}\right|^2 \qquad (5 - 84)$$

Y si designamos por $H\,(j\,\omega) = \frac{E_o}{E_i}\,(j\,\omega)$ resulta:

$$|T\,(j\,\omega)|^2 = \frac{4\,R_g}{R_L}\cdot|H\,(j\,\omega)|^2 \qquad (5 - 85)$$

Y reemplazando (5 - 85) en (5 - 70) resulta:

$$|P\,(j\,\omega)|^2 = 1 - 4\,\frac{R_g}{R_L}\,|H\,(j\,\omega)|^2 \qquad (5 - 86)$$

Y reemplazando $j\,\omega = s$

$$P\,(s)\,P\,(-s) = 1 - 4\,\frac{R_g}{R_L}\,H\,(s)\,H\,(-s) \qquad (5 - 87)$$

Y ahora se vislumbra el proceso de síntesis pues conocidos $H\,(s)$, R_g y R_L, mediante la (5 - 87) se podrá evaluar $P\,(s)$. Conocido $P\,(s)$ y por intermedio de la (5 - 83) se obtiene $Z_{entrada}\,(s)$. Finalmente habrá que sintetizar $Z_{entrada}$ del cuadripolo cargado con R_L obteniendo la solución del problema.

Consideremos ahora paso a paso el proceso de síntesis de una función transferencia genérica de la forma

$$H\,(s) = \frac{E_o}{E_i}\,(s) = \frac{K\,s^m}{B\,(s)} \qquad (5 - 88)$$

En la (5 - 88) $B\,(s)$ es un polinomio Hurwitz de orden n con $0 \leq m \leq n$ (5 - 89)
Para simplificar el análisis supongamos $R_g = 1\Omega$

PASO 1: Este primer paso consiste en obtener una expresión para $P\,(s)$ a partir de la (5 - 87), que en el supuesto de $R_g = 1\Omega$ se transforma en:

$$P\,(s)\,P\,(-s) = 1 - \frac{4}{R_L}\,H\,(s)\,H\,(-s) \qquad (5 - 90)$$

Obtener una expresión para $P\,(s)$ es el paso más crucial en este proceso de síntesis, incluso puede ocurrir que la (5 - 90) no tenga solución respecto de $P\,(s)$.

De la (5 - 90) se desprende que los polos y ceros de $H\,(s)\,H\,(-s)$ tienen simetría cuadrantal. Lo propio ocurrirá con los polos de:

$$1 - \frac{4}{RL}\,H\,(s)\,H\,(-s) \qquad (5 - 91)$$

Pero no necesariamente tendrán simetría cuadrantal los ceros de la (5 -91) y cuando esto ocurra la (5 - 90) nos indica que los polos de $P\,(s)\,P\,(-s)$ tienen simetría cuadrantal pero no así sus ceros y en estas condiciones no será posible hallar una función $P\,(s)$ que nos permita satisfacer la $H\,(s)$ propuesta.

En consecuencia para obtener $P\,(s)$ de la (5 - 90), capaz de resolver nuestro problema, deberán exhibir simetría cuadrantal los polos y ceros de la (5 - 91).
Suponiendo que se de esta última circunstancia habrá indudablemente más de una expresión para $P\,(s)$ que satisface la (5 - 90) y de todas ellas habrá que asumir una que resulte de mínima fase, o sea aquella caracterizada por poseer polos y ceros ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo ya que de otra forma se requerirán capacitores o inductores negativos para satisfacer la expresión (5 - 83).

PASO 2: De la expresión (5 - 83) se advierte que existen dos funciones a través de las cuales es posible realizar la $Z_{entrada}\,(s)$ del cuadripolo cargado:

$$Z_{E_1}(s) = \frac{1 + P(s)}{1 - P(s)} \qquad (5 - 92)$$

$$Z_{E_2}(s) = \frac{1 - P(s)}{1 + P(s)} \qquad (5 - 93)$$

Como las expresiones (5 - 92) y (5 - 93) resulta ser una la inversa de la otra, es obvio que si aplicamos por ejemplo a la (5 - 92) alguno de los métodos de síntesis de dipolos, la última impedancia resultará ser R_L, mientras que sometiendo a idéntico procedimiento a la (5 - 93) obtendremos como impedancia final $(1/R_L)$, o viceversa.

En definitiva si R_L está prescripta y es distinta de 1Ω, sólo una de las expresiones (5 - 92) , (5 - 93) será válida para la síntesis del cuadripolo cargado.

Si R_L = 1Ω es indudable que cualquiera de estas expresiones arrojará un resultado valedero.

De todos modos bajo ciertas circunstancias es posible "adivinar" cual de las dos expresiones de $Z_{entrada}$ (s) es la que correponde utilizar.

Por ejemplo si en la (5 - 88) m = 0 la transferencia que deseamos sintetizar resulta tipo pasa bajo, con todos sus ceros de transmisión en infinito y por consiguiente el cuadripolo que resuelve nuestro problema estará integrado por inductores en serie y capacitores derivados a masa, por consiguiente:

$$Z_{entrada}(0) = R_L \qquad (5 - 94)$$

O sea que evaluando las expresiones (5 - 92) y (5 - 93) para s = 0 y conocido el valor de R_L automáticamente resulta asegurada la expresión de $Z_{entrada}$ que debemos utilizar.

Lo propio ocurre cuando m = n ya que ahora se trata de una transferencia tipo pasa alto, con todos sus ceros de transmisión en corriente continua, y con un razonamiento análogo al caso anterior resulta:

$$Z_{entrada}(\infty) = R_L \qquad (5 - 95)$$

Y por tanto podemos decidir rapidamente que expresión de $Z_{entrada}$ (s) debemos utilizar.

Finalmente cuando 0 < m < n estaremos en presencia de una transferencia pasa banda y en este caso habrá que probar cual de las dos expresiones de $Z_{entrada}$ (s) es la apropiada para resolver nuestro problema.

PASO 3: Finalmente para realizar H (s) debemos sintetizar el modelo matemático de la $Z_{entrada}$ (s) elegido en el paso 2, utilizando algún método apropiado de síntesis que nos posibilite satisfacer además de la $Z_{entrada}$ (s), los ceros de transmisión impuestos por H (s).

Los tres casos genéricos que veremos son:

3.A - m = 0 (en la 5 - 88) transferencia pasa bajo.

En este caso debemos aplicar el método de CAUER I ya que todos los ceros de transmisión ocurren para s → ∞

3.B - m = n transferencia pasa alto

Es el caso dual del anterior y por tanto habrá que aplicar el método de CAUER II.

3.C - 0 < m < n

Se trata ahora de una transferencia pasa banda y es posible aplicar CAUER I para extraer (m - n) elementos reactivos y el resto de la red se obtiene aplicando CAUER II, o también es posible comenzar aplicando CAUER II para remover los primeros m elementos reactivos de la red y los restantes se obtienen aplicando CAUER I.

PROBLEMA 5.15

Sintetizar la siguiente función transferencia de tensiones doble cargada.

$$H(s) = \frac{K}{(s^2 + 1)(s + 1)} \quad \text{con } R_g = 1\Omega \text{ y } R_L = 2\Omega \qquad (5.96)$$

Como se trata de una transferencia pasa bajo (m = 0) la estructura de la red reactiva que satisfará nuestro problema será de la forma indicada en la Fig. (5.71) (a) o (b).

(a)

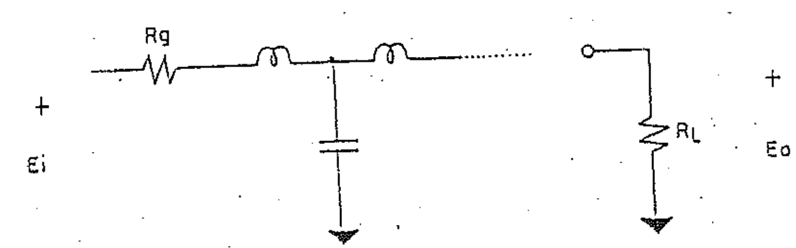


Fig. (5.71) a

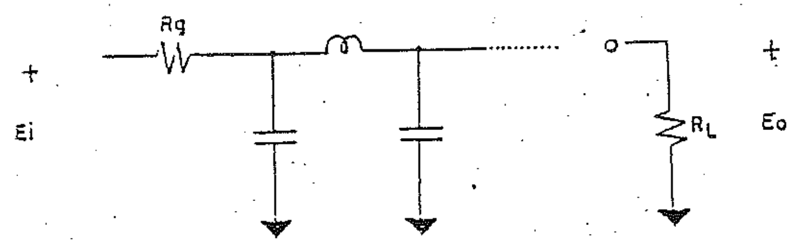


Fig. (5.72) b

Ambas redes para (s = 0) se transforman en:

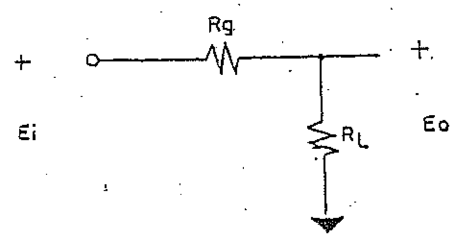


Fig. (5.72)

La transferencia de tensiones evaluada en corriente continua para estas redes estará dada por:

$$\frac{E_o}{E_i}(0) = \frac{R_L}{R_g + R_L} \qquad (5 - 97)$$

Si ahora evaluamos la expresión (5 - 96) para s = 0 resulta:

$$\frac{E_o}{E_i}(0) = H(0) = K \qquad (5 - 98)$$

Igualando (5 - 97) y (5 - 98) y reemplazando los valores de R_L y R_g dados, se obtiene:

$$K = \frac{R_L}{R_g + R_L} = \frac{2}{3} \qquad (5 - 99)$$

Este paso previo resulta impresindible ya que de no realizarlo, en la expresión (5 - 90) quedaría P (s) expresada como función paramétrcia de K.

<u>PASO 1:</u> Para evaluar P (s) utilizamos la expresión (5 - 90) con $R_L = 2\Omega$, o sea:

$$P(s)\,P(-s) = 1 - \frac{4}{2}\,\frac{2/3}{(s^2+1)(s+1)} \cdot \frac{2/3}{(s^2+1)(-s+1)}$$

$$P(s)\,P(-s) = \frac{-s^6 - s^4 + s^2 + 1/9}{(s^2+1)(s+1)(s^2+1)(-s+1)}$$

Y factoreando en los ceros del numerador:

$$P(s)\,P(-s) = \frac{(s+0{,}83)(-s+0{,}83)(s^2+1{,}59)(s^2+0{,}1)}{(s^2+1)(s+1)(s^2+1)(-s+1)}$$

En esta última expresión se observa claramente como los polos de P (s) P (-s) tienen simetría cuadrantal pero no así sus ceros, por consiguiente no es posible en este caso obtener una expresión para P (s) que satisfaga nuestro problema.

<u>PROBLEMA 5.16</u>

Sintetizar $H(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + 3}$, $R_g = 1\Omega$

Para a) $R_L = 1\Omega$

b) $R_L = 2\Omega$

CASO (a)

Comenzamos de idéntica forma a lo hecho en el problema anterior.

$$\left.\begin{aligned} H(0) &= \frac{K}{3} \\ \frac{E}{E_i}(0) &= \frac{R_L}{R_g + R_L} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} K = \frac{3}{2}$$

PASO 1

$$P(s)\,P(-s) = 1 - \frac{4}{1}\;\frac{3/2}{(s^2+3s+3)}\;\frac{3/2}{(s^2-3s+3)}$$

$$= 1 - \frac{9}{s^4 - 3s^2 + 9}$$

$$= \frac{s^4 - 3s^2}{s^4 - 3s^2 + 9}$$

Que podemos expresar como:

$$P(s)\,P(-s) = \frac{s(s+\sqrt{3})\,(-s)\,(-s+\sqrt{3})}{(s^2+3s+3)\,(s^2-3s+3)}$$

Y ahora sí $P(s)\,P(-s)$ está caracterizada por poseer polos y ceros con simetría cuadrantal. De las ocho posibles expresiones siguientes:

$$P_1(s) = \frac{s(s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3} \qquad P_4(s) = \frac{(-s)\,(-s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3} \qquad P_7(s) = \frac{s(-s+\sqrt{3})}{s^2-3s+3}$$

$$P_2(s) = \frac{(-s)\,(s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3} \qquad P_5(s) = \frac{s(s+\sqrt{3})}{s^2-3s+3} \qquad P_8(s) = \frac{(-s)\,(-s+\sqrt{3})}{s^2-3s+3}$$

$$P_3(s) = \frac{(-s+\sqrt{3})\,s}{s^2+3s+3} \qquad P_6(s) = \frac{(-s)\,(s+\sqrt{3})}{s^2-3s+3}$$

Adoptaremos la de mínima fase, o sea:

$$P(s) = \frac{s(s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3}$$

PASO 2: Ahora debemos adoptar la expresión correspondiente a $Z_{entrada}(s)$. Como $R_L = 1$, cualquiera de las expresiones (5 - 92) ó (5 - 93) resolverá nuestro problema.

$$Z_{E_1}(s) = \frac{1 + P(s)}{1 - P(s)} = \frac{2s^2 + (3+\sqrt{3})\,s + 3}{(3-\sqrt{3})\,s + 3} = \frac{2s^2 + 4{,}73s + 3}{1{,}268s + 3}$$

$$Z_{E_2}(s) = \frac{1}{Z_{E_1}(s)}$$

PASO 3:

Como los ceros de transmisión de $H(s)$ ocurren todos en alto frecuencia aplicamos CAUER I a $Z_{E_1}(s)$ obteniendo:

$$Z_{E_1}(s) = 1{,}577s + \frac{1}{0{,}423s + 1}$$

Y la red que satisface el problema será la de la Fig. (5.73)

De haber asumido $Z_{E_2}(s)$ resulta

$$Z_{E_2}(s) = \frac{1}{1{,}577s + \dfrac{1}{0{,}423s + 1}}$$

Y la red será la de la Fig. (5.74)

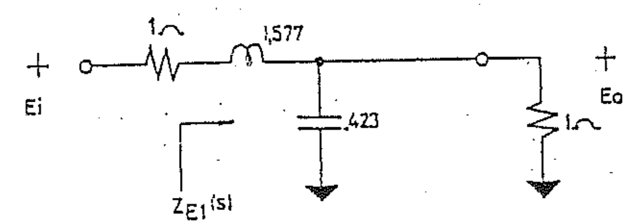


Fig. (5.73)

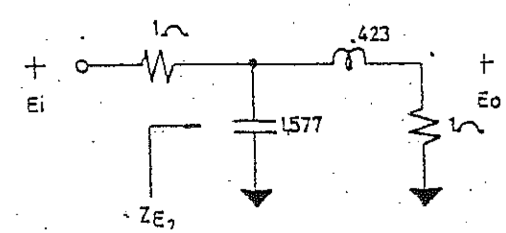


Fig. (5.74)

CASO (b)

$R_L = 2\Omega$

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1}(0) &= \frac{R_L}{R_L + R_g} = \frac{2}{3} \\ H(0) &= \frac{K}{3} \end{aligned}\right\} \quad K = 2$$

PASO 1

$$P(s)\,P(-s) = 1 - \frac{4}{2}\;\frac{2}{s^2 + 3s + 3}\;\frac{2}{s^2 - 3s + 3}$$

$$P(s)\,P(-s) = \frac{s^4 - 3s^2 + 1}{(s^2 + 3s + 3)\,(s^2 - 3s + 3)}$$

$$P(s)\,P(-s) = \frac{(s^2 + \sqrt{5}\,s + 1)\,(s^2 - \sqrt{5}\,s + 1)}{(s^2 + 3s + 3)\,(s^2 - 3s + 3)}$$

Adoptamos

$$P(s) = \frac{s^2 + \sqrt{5}\,s + 1}{s^2 + 3s + 3}$$

PASO 2:

$$Z_{E_1}(s) = \frac{1 + P(s)}{1 - P(s)} = \frac{2s^2 + (3 + \sqrt{5})s + 4}{(3 - \sqrt{5})s + 2}$$

$$Z_{E_2}(s) = \frac{1 - P(s)}{1 + P(s)} = \frac{1}{Z_{E_1}(s)}$$

Como $R_L = 2\Omega$ y $H(s)$ es pasa bajo resulta $Z_E(0) = R_L$ y haciendo $s = 0$ en $Z_{E_1}(s)$ y $Z_{E_2}(s)$ se obtiene:

$$Z_{E_1}(0) = 2$$

$$Z_{E_2}(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto debemos asumir como expresión de $Z_E(s)$ a $Z_{E_1}(s)$

PASO 3:

Finalmente aplicamos CAUER I a $Z_{E_1}(s)$ obteniendo:

$$Z_{E_1}(s) = 2{,}618s + \frac{1}{.191s + \frac{1}{2}}$$

Y la red será la de la Fig. (5.75)

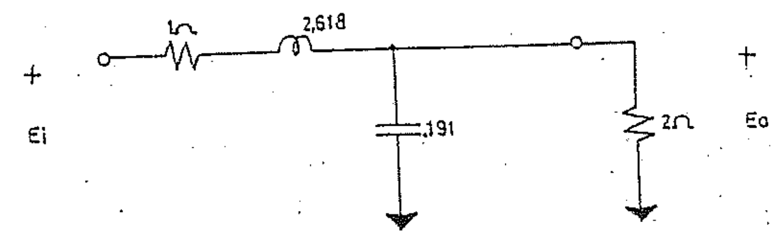


Fig. (5.75)

Idéntico criterio se aplica cuando $H(s)$ es una transferencia tipo pasa alto o pasa banda.

CAPITULO 6

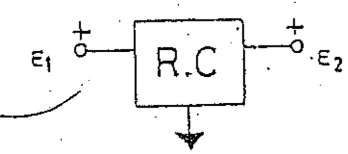
SINTESIS DE CUADRIPOLOS DISIPATIVOS (RC)

6.1. SINTESIS DE TRANSFERENCIAS EN VACIO MEDIANTE CUADRIPOLOS R.C ESCALERA

Realizaremos el estudio de estos métodos de síntesis a través de la resolución de una serie de ejemplos numéricos. Comenzaremos con las transferencias mas sencillas que son aquellas caracterizadas por poseer ceros de transmisión exclusivamente para $S \to \infty$ (PASA BAJO); $S = 0$ pasa alto y simultaneamente en ambos extremos (P. BANDA). A los efectos de no complicar excesivamente los cálculos trataremos solamente transferencias de 2º órden.

En una segunda etapa veremos como se resuelve el problema de transferencias caracterizadas por poseer ceros finitos de transmisión sobre el semieje real negativo de plano complejo.

PROBLEMA 6-1



$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{H}{S^2 + 6s + 8}$$

La transferencia dato la podemos expresar como

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{H}{(S + 2)\ (S + 4)}$$

y por tratarse de una transferencia de tensiones en vacío valen las siguientes igualdades

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$$

O sea que tenemos fundamentalmente dos alternativas: - o bien sintetizamos el cuadripolo desde su entrada a través de Z_{11}; - o bien lo sintetizamos desde su salida a través de Y_{22}.

Claro que en ambos casos el parámetro que se adopte para realizar la síntesis, como incluye necesariamente al de transferencia, deberá satisfacer las imposiciones que éste exija.

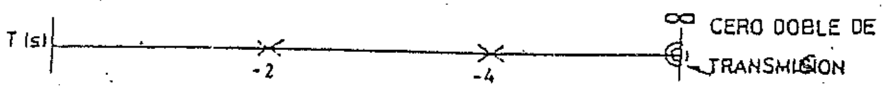
Sabemos ya que los polos de Z_{21} forzosamente pertenecerán a Z_{11} y lo propio se verifica con los polos de Y_{21} respecto de Y_{22}. Por consiguiente en lo único en que podrán diferir es en los ceros, de ahí que cuando sintetizamos el cuadripolo a través de Z_{11} (o Y_{22}) debemos forzar a que ésta satisfaga los ceros de Z_{21} (ó Y_{21}).

Lo primero que hay que hacer es, a través del conocimiento de la función transferencia, elegir un polinomio auxiliar A (S) que esté caracterizado por poseer raíces sobre el semieje real negativo del plano complejo. Dividiendo luego por A (S) tanto el polino-

mio numerador como al denominador la transferencia no alterará, pero por identificación podremos obtener las correspondientes expresiones para Z_{11} y Z_{21} o Y_{21} e Y_{22}.
Si deseamos que el cuadripolo resulte integrado por resistores y capacitores solamente, indudablemente Z_{11} o Y_{22} deberán cumplir con las condiciones vistas al estudiar los dipolos RC. Esta circunstancia obliga a ubicar las raíces de A (S) cumpliendo con la condición de alternancia, o sea las raíces de A (S) deben alternar con los polos de la transferencia, que ahora se han constituído en ceros de Z_{11} (o de Y_{22}).

Analicemos en forma gráfica lo expuesto:

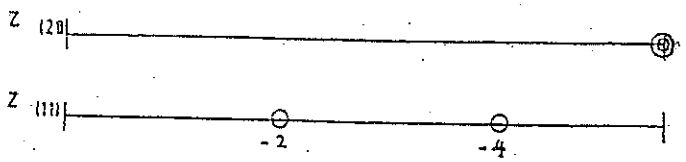
Dada $T(S) = \left.\dfrac{E_2}{E_1}\right|_{I_2=0} = \dfrac{H}{(S+2)(S+4)}$



Si adoptamos

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2=0} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

En base a la configuración polos - ceros de T (S) armemos la correspondiente a Z_{21} y Z_{11}, o sea:

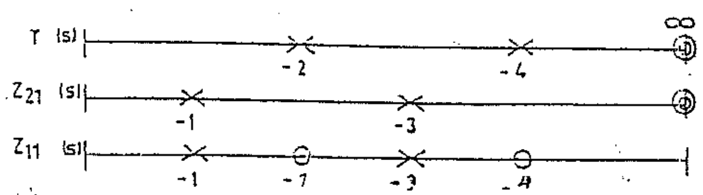


Como se observa, los polos de la transferencia han pasado a funcionar como ceros de Z_{11} y los ceros de la misma están asociados a los ceros de Z_{21}.

Claro está que Z_{11} no es ni remotamente una FRP tipo RC y para lograr que asuma este comportamiento debemos intercalar polos entre los ceros que ya ubicó la función transferencia en (- 2) y (- 4).

En esta elección tenemos amplia libertad. Debemos comenzar con un polo como singularidad mas próxima al origen o sea que, o bien ubicamos un polo en S = 0, o bien en algún lugar comprendiendo entre 0 y (- 2). Elijamos el polo en (- 1). El otro polo habrá que ubicarlo entre (- 2) y (- 4), un lugar cómodo desde el punto de vista algebraico puede ser (- 3). Claro está que los polos de Z_{11} deberán aparecer en Z_{21} para que el cociente gráfico entre Z_{21} y Z_{11} nos reproduzca T (S).

O sea que nuestro diagrama polos - ceros será el siguiente:



Observese que los polos que hemos agregado no son ni mas ni menos que las raíces de polinomio auxiliar A (S) que habíamos definido al principio.

O sea

$$A(s) = (s+1)(s+3)$$

$$T(S) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2=0} = \frac{H}{(S+2)(S+4)} = \frac{\dfrac{H}{(S+1)(S+3)}}{\dfrac{(S+2)(S+4)}{(S+1)(S+3)}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

De donde

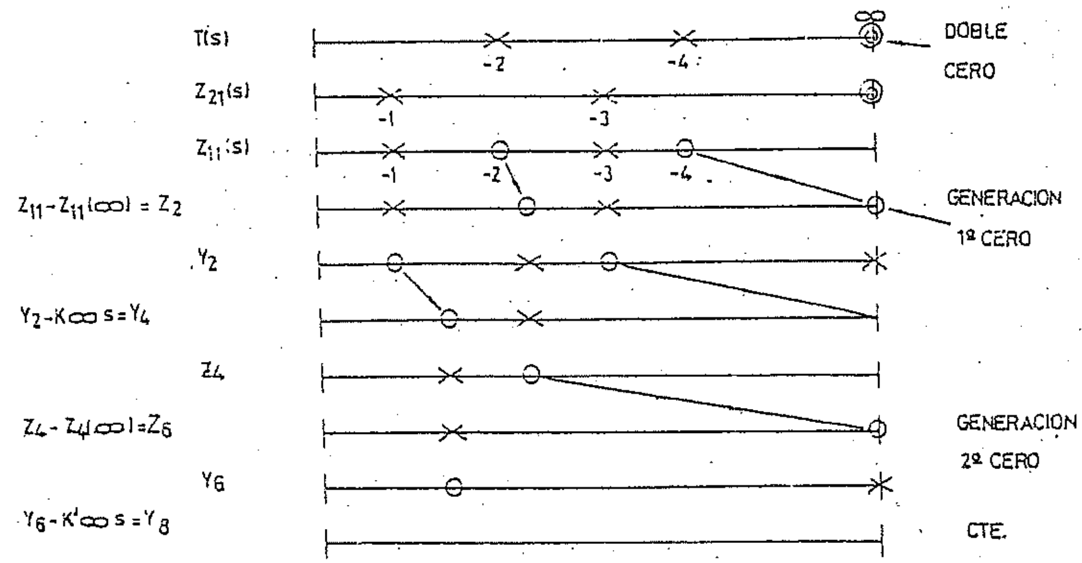
$$Z_{21}(S) = \frac{H}{(S+1)(S+3)}$$

$$Z_{11}(S) = \frac{(S+2)(S+4)}{(S+1)(S+3)}$$

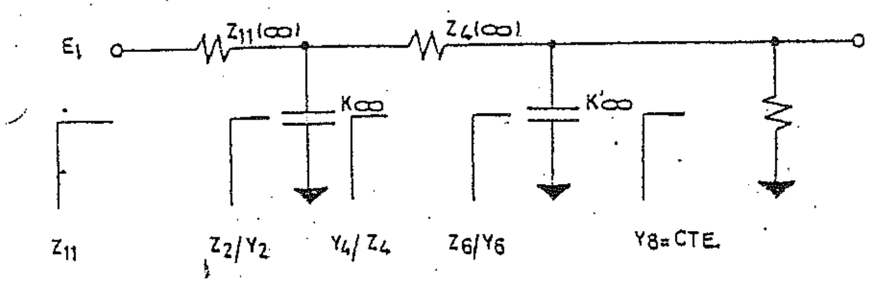
De acá en adelante la cosa es sencilla, pues debemos sintetizar un cuadrípolo que satisfaga simultaneamente a Z_{11} y Z_{21}.

Como vemos Z_{11} no posee polos privados, pero mientras Z_{21} posee un cero doble de transferencia en ∞, Z_{11} allí posee un valor cte. entonces debemos durante el proceso de síntesis de Z_{11} generar este cero doble de transmisión. Resolvemos el problema primero en forma gráfica y luego analíticamente.

1º) SINTESIS GRAFICA



La red que sugiere este gráfico es la indicada en la fig. (6 - 2).



ALGUNOS COMENTARIOS

El valor constante (Y_8 = cte.) removido en última instancia aparece en derivación, ya que forma parte de Z_{11} y este es un parámetro definido en condiciones de vacío. De haberlo colocado en serie no pesaría en la definición de Z_{11} (sí, de Z_{22}), y por tanto el cuadrípolo así configurado no satisfacería a Z_{11} y por tanto a T (S).

Z_{21} (S) no es FRP, ya que no cumple con la condición de alternancia polos - ceros, por consiguiente es lógico que no se lo pueda reconocer en este cuadripolo como un dipolo físico. (Como ocurre en un cuadripolo T).

Los ceros de transferencia son provocados en esta red mediante polos de admitancia (capacitores derivados).

De haber adoptado el polinomio auxiliar A (S) como A (S) = S (S + 3), o sea Z_{11} caracterizado por un polo en continua, la red final carecería del resistor derivado en su salida, ya que Z_{11} (0) → ∞.

Esta circunstancia en ocasiones no es deseable ya que con este resistor es posible absorber una carga cuando ésta es mayor que el resistor de salida. Vale decir que en estas circunstancias podremos sintetizar una transferencia cargada como si estuviera en vacío.

De haber adoptado como polinomio auxiliar uno de órden 3 habríamos armado una Z_{11} con comportamiento capacitivo en altas frecuencias y entonces además de complicar un poco los cálculos, en la red final no aparecería el resistor de entrada pues Z_{11} (∞) = 0. Este resistor es útil para absorber la resistencia del generador de excitación razón por la cual no conviene evitarlo, a pesar que la red se simplifique.

Estas últimas consecuencias derivan de la adopción del polinomio auxiliar A (S) y justamente deberemos adoptarlo en base también a las condiciones de excitación y carga del problema específico.

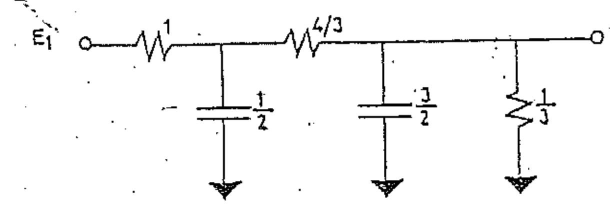
SOLUCION ANALITICA

Acá tenemos dos opciones:
(1) o bien seguir las sugerencias del gráfico ó
(2) aplicar Cauer I a Z_{11} (S) ya que las remociones de parte real y polos se efectúan todas en ∞.

* Apliquemos Cauer I a Z_{11} (S).

$$\begin{array}{l}
S^2 + 6S + 8 \;\big|\; S^2 + 4S + 3 \\
S^2 + 4S + 3 \;\big|\; 1 \\
\hline
S^2 + 4S + 3 \;\big|\; 2S + 5 \\
S^2 + \frac{5}{2}S \;\big|\; \frac{1}{2}S \\
\hline
2S + 5 \;\big|\; \frac{3}{2}S + 3 \\
2S + 4 \;\big|\; \frac{4}{3} \\
\hline
\frac{3}{2}S + 3 \;\big|\; 1 \\
\frac{3}{2}S \;\big|\; \frac{3}{2}S \\
\hline
1 \;\big|\; 3 \\
\quad\;\big|\; \frac{1}{3}
\end{array}$$

El cuadripolo será el representado en la Fig. (6 - 3).



* VERIFICACION DE Z_{11}

$$Z_{11}(\infty) = 1$$

$$Z_{11}(0) = 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

EVALUACION DE LA CTE. H

Como esta constante es independiente de la frecuencia, la podemos evaluar para cualquier valor de "S", no obstante conviene calcularla para aquel valor de "S" que nos complique menos los cálculos. En este caso indudablemente conviene trabajar en C.C, o sea S = 0.

El valor de la transferencia dato, para S = 0 esta dado por (A)

$$T(0) = \frac{H}{8} \quad (A)$$

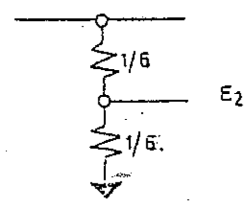
Mientras que la transferencia de tensiones que da el cuadripolo sintetizado en C.C esta dado por (B).

$$T(0) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{8} \quad (B)$$

Igualando (A) y (B), surge el valor de H para el cual satisface el cuadripolo a la transferencia dada, o sea: $H = 1$.

¿Qué hubiera pasado si $H = {}^{1}/_{2}$?

El cuadripolo hallado nos daría un nivel doble de transferencia. Colocar un atenuador resistivo a continuación modificaría la Z_{11}, pero podemos tomar la salida del punto medio del resistor de salida como muestra la Fig. (6 - 4).

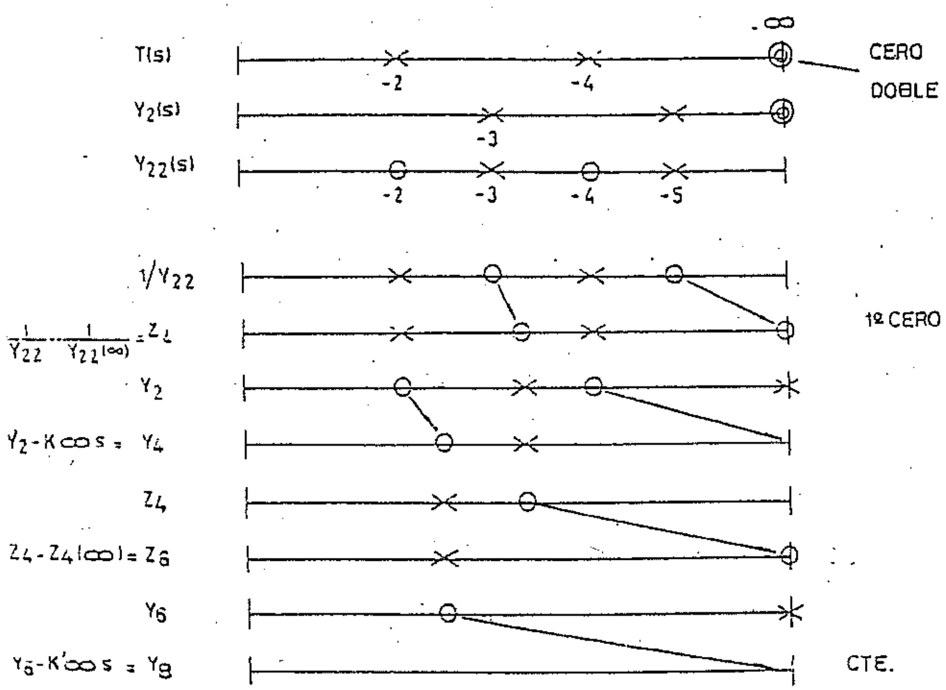


Supongamos ahora pretender resolver el mismo problema, pero haciendo uso de los parámetros de cortocircuito, o sea:

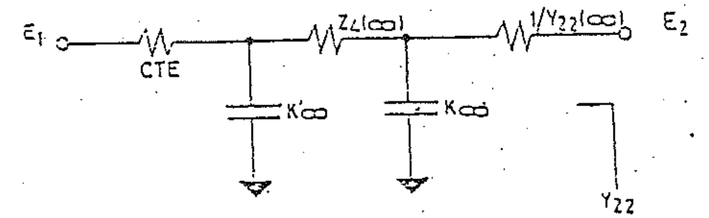
$$T(S) = \frac{H}{(S+2)\cdot(S+4)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$$

El procedimiento es análogo al caso anterior solamente varía la adopción del polinomio auxiliar A (S).

GRAFICAMENTE: ADOPTANDO $A(s) = (s+3)\cdot(s+5)$.



El cuadripolo se sintetiza ahora desde la salida generándose la red de la Fig. (6 - 4).



Obsérvese ahora como el "último" resistor (el de valor designado "cte.") aparece en serie ya que Y_{22} es un parámetro definido en la condición de cortocircuito.

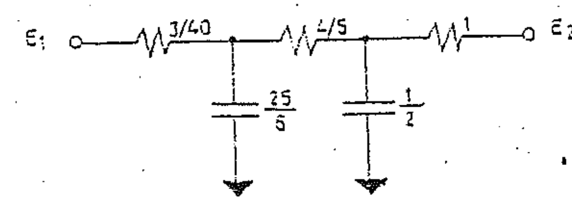
SOLUCION ANALITICA

$$Y_{22} = \frac{(S+2)\ (S+4)}{(S+3)\ (S+5)} = \frac{S^2+6S+8}{S^2+8S+15}$$

Aplicamos CAUER I a $^{1}/Y_{22}$

$$\begin{array}{l|l}
S^2+8S+15 & S^2+6S+8 \\
\underline{S^2+6S+8} & 1 \\
S^2+6S+8 & 2S+7 \\
\underline{S^2+\frac{7}{2}S} & \frac{1}{2}S \\
2S+7 & \frac{5}{2}S+8 \\
\underline{2S+\frac{32}{5}} & \frac{4}{5} \\
\frac{5}{2}S+8 & \frac{3}{5} \\
\underline{\frac{5}{2}S} & \frac{25}{6}S \\
\frac{3}{5} & 8 \\
\underline{\frac{3}{5}} & \frac{3}{40} \\
0 &
\end{array}$$

y el cuadripolo será el que se muestra en la Fig. (6 - 5).



En esta caso la transferencia del circuito en C.C es unitaria, o sea T (0) = 1

Mientras que el dato en C.C tiene una transferencia $T(0) = \frac{H}{8}$. Vale decir que en este caso el cuadripolo satisface la transferencia para H = 8.

PROBLEMA 6-2

Sintetizar la siguiente función transferencia pasa alto.

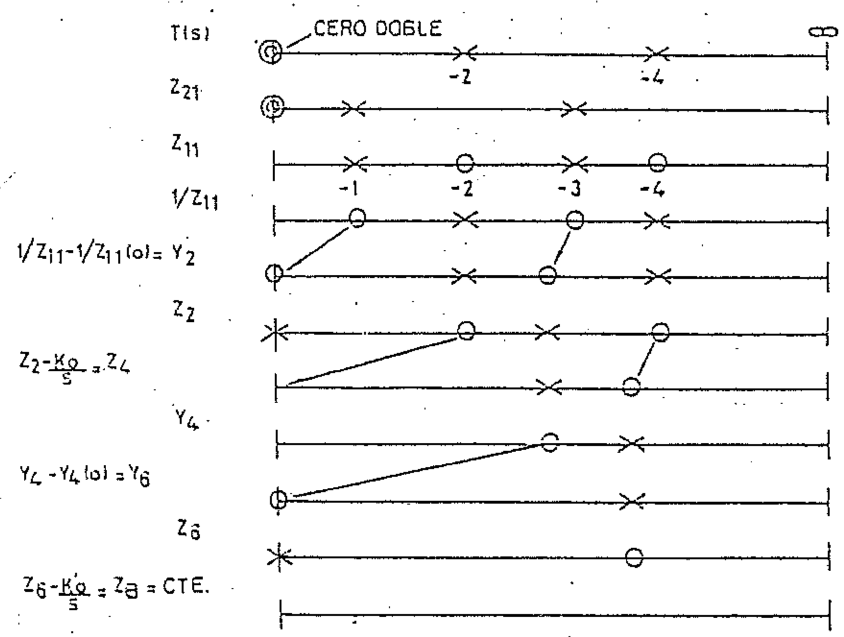
$$T(S) = \left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{H\,S^2}{S^2 + 6S + 8}$$

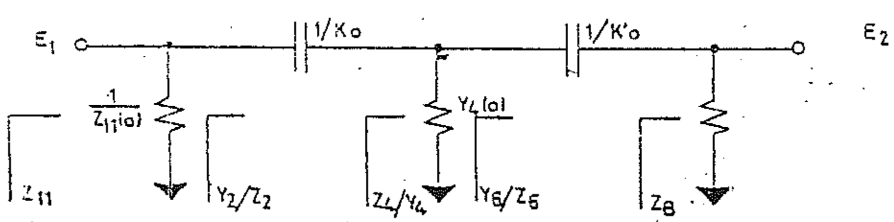
La diferencia con el caso anterior es que el cero doble de transmisión aparece en S = 0 (C.C.).

La solución es similar y debemos ahora aplicar el método de Cauer II

GRAFICAMENTE

La red obtenida será la de la Fig. (6 - 6).



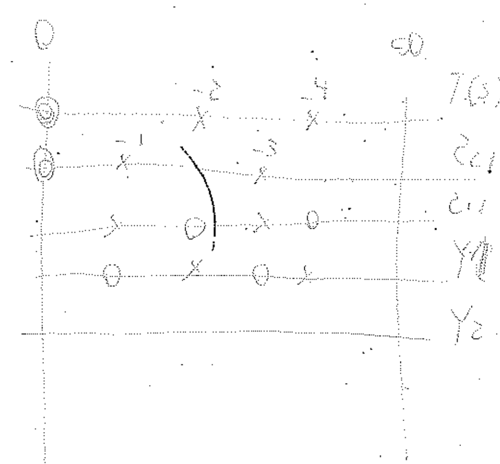


SOLUCION ANALITICA

Aplicando Cauer II a $1/Z_{11}$ obtendremos el valor de los componentes de la red.

$$Z_{11}(s) = \frac{(s+2)\,(s+4)}{(s+1)\,(s+3)}$$

$$\begin{array}{l|l}
3 + 4s + s^2 & 8 + 6s + s^2 \\
3 + \frac{9}{4}s + \frac{3}{8}s^2 & \frac{3}{8} \\
\hline
8 + 6s + s^2 & \frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2 \\
8 + \frac{20}{7}s & \frac{32}{7s} \\
\hline
\frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2 & \frac{22}{7}s + s^2 \\
\frac{7}{4}s + \frac{49}{88}s^2 & \frac{49}{88} \\
\hline
\frac{22}{7}s + s^2 & \frac{3}{44}s^2 \\
\frac{22}{7}s & \frac{968}{21s} \\
\hline
\frac{3s^2}{44} & s^2 \\
 & \frac{3}{44}
\end{array}$$



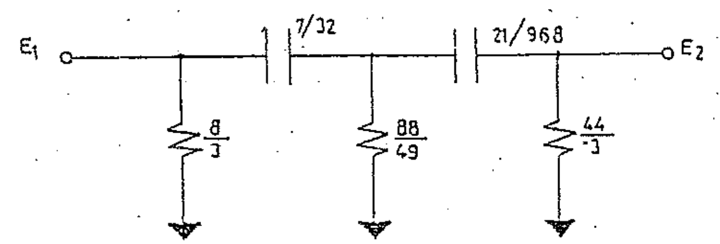


Fig. (6.7)

VERIFICACION de Z_{11}

$$Z_{11}(o) = \frac{8}{3}\,\Omega$$

$$Z_{11}(\infty) = \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{49}{88} + \frac{3}{44}} = \frac{88}{33 + 49 + 6} \therefore = \frac{88}{88} = 1\ \Omega$$

EVALUACION DE H Lo hacemos para $s \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l} T(s) = H \\ s \to \infty \\ \text{de la red } \underset{s \to \infty}{T(s)} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{o sea } H = 1$$

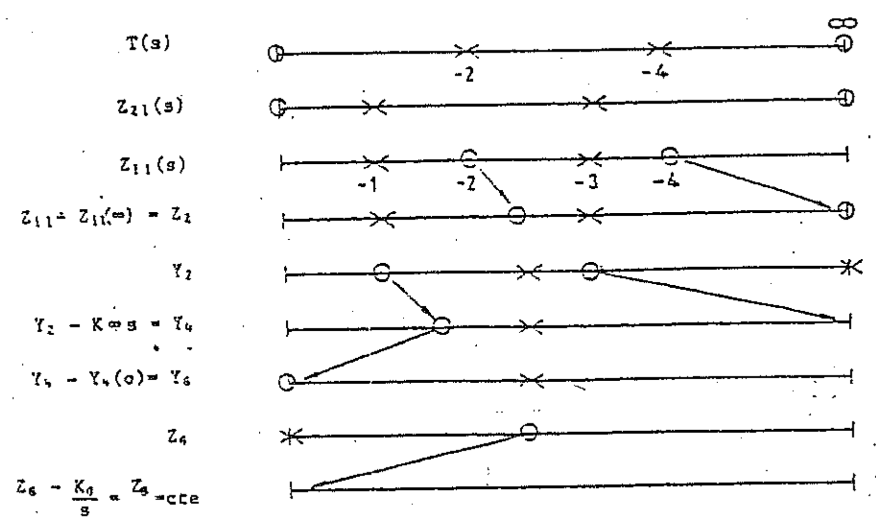
PROBLEMA 6 - 3 : Sintetizar la siguiente función Transferencia pasa banda.

$$\left.\frac{E_1}{E_2}\right|_{I_2 = 0} = \frac{Hs}{(s + 2)(s + 4)}$$

Ahora aparece un cero simple de Transferencia en CC ($S = 0$) y otro también simple en altas frecuencias, $S \to \infty$.

La solución es una mezcla de las dos anteriores, pero conviene comenzar generando el cero para $S \to \infty$ y luego el de C.C, o sea conviene comenzar con Cauer I y terminar con Cauer II.

SOLUCION GRAFICA



El cuadripolo será el de la fig. (6.8)

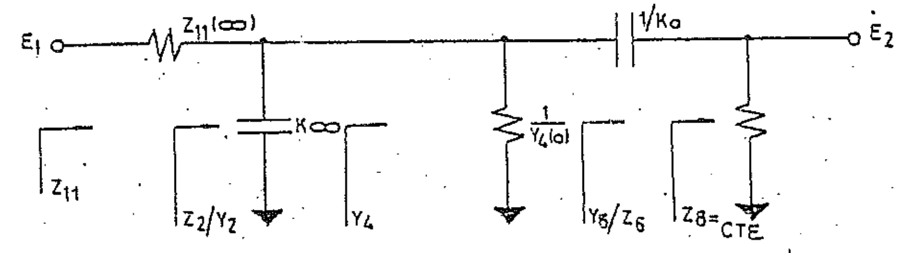


Fig. (6.8)

Ahora el capacitor K_∞ genera el cero de transmisión en alta frecuencia como polo de admitancia y el capacitor serie $^1/K_0$ genera el cero en C.C. como polo de impedancia.

SOLUCIÓN ANALITICA : Comenzamos aplicando Cauer I a $Z_{11}(s)$, o sea:

$$\begin{array}{r|l} s^2 + 6s + 8 & s^2 + 4s + 3 \\ s^2 + 4s + 3 & \overline{1} \quad \leftarrow Z_{11}(\infty) \\ \hline 2s + 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} s^2 + 4s + 3 & 2s + 5 \\ s^2 + \frac{5}{2}s & \overline{\frac{1}{2}s} \quad \leftarrow K_\infty s \\ \hline \frac{3}{2}s + 3 & \end{array}$$

Ahora aplicamos Cauer II a $Y_4(s)$ obteniendo :

$$\begin{array}{r|l} 3 + \frac{3}{2}s & 5 + 2s \\ 3 + \frac{6}{5}s & \overline{\frac{3}{5}} \quad \leftarrow Y_4(o) \\ \hline \frac{3}{10}s & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 + 2s & \frac{3}{10}s \\ 5 & \overline{\frac{50}{3s}} \quad \leftarrow K_0/s \\ \hline 2s & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{3}{10}s & 2s \\ & \overline{\frac{3}{20}} \quad \leftarrow {}^1/Z_8 = cte \end{array}$$

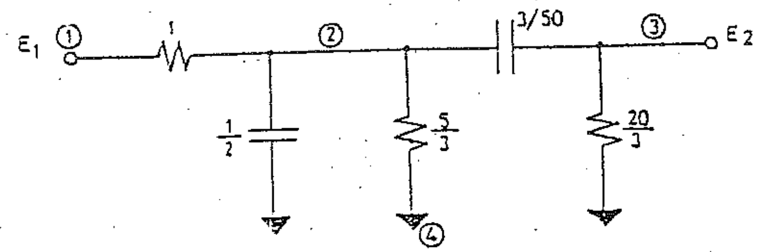


Fig. (6.9)

EVALUACION DE H

Podemos aplicar la matriz admitancia indefinida, ya que tanto para $s \to 0$, como para $s \to \infty$ la transferencia es nula.

o sea

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{8}{5} + \frac{28}{50}s & -\frac{3}{50}s & -(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}s) \\ 0 & -\frac{3}{50}s & \frac{3}{20} + \frac{3}{50}s & -\frac{3}{20} \\ 0 & -(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}s) & -\frac{3}{20} & \frac{3}{4} + \frac{1}{2}s \end{vmatrix}$$

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{E_{34}}{E_{14}} = \frac{Y_{14}^{34}}{Y_{14}^{14}} = \frac{\frac{3}{50}s}{(\frac{8}{5} + \frac{28}{50}s)(\frac{3}{20} + \frac{3}{50}s) - \frac{9}{2500}s^2}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{3}{50}s}{\frac{12}{50} + \frac{9}{50}s + s^2 + \frac{3}{100}s^2} = \frac{2s}{s^2 + 6s + 8}$$

CONCLUSION : La red satisface la transferencia para $H = 2$

Ahora nos dedicaremos a estudiar la síntesis de TRANSFERENCIAS CON CEROS FINITOS SOBRE EL SEMIEJE REAL NEGATIVO DEL PLANO COMPLEJO

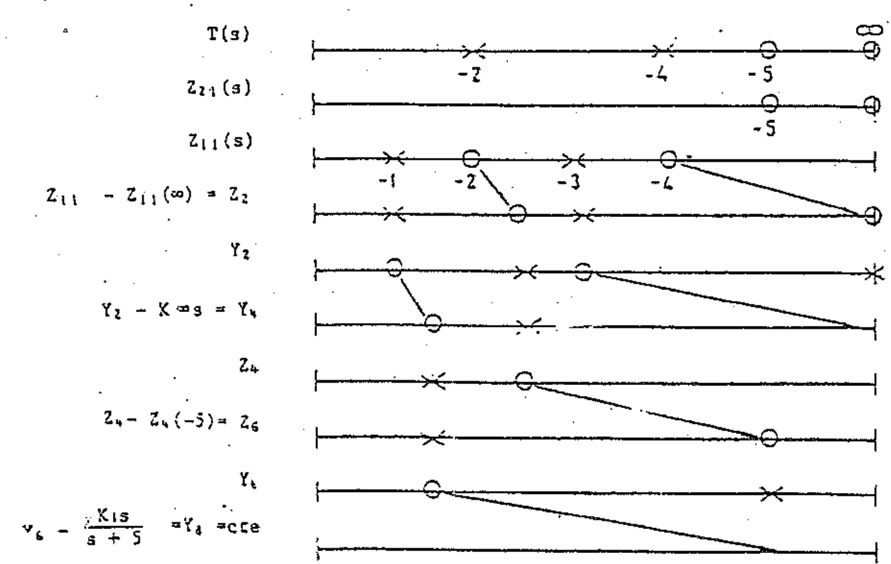
PROBLEMA 6 - 4 Sintetizar la siguiente función transferencia

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right| I_2 = 0 = \frac{H(s + 5)}{(s + 2)(s + 4)}$$

Vamos a elegir los parámetros de vacío para efectuar la síntesis.

Como vemos esta función transferencia tiene un cero simple de transmisión en ∞ y el otro ocurre para $s = -5$, comenzaremos generando el cero en ∞, o sea comenzamos aplicando Cauer I a $Z_{11}(s)$, y al llegar a $Z_4(s)$, mediante una remoción parcial de su parte real en alta frecuencia desplazamos el cero finito hasta ubicarlo en $(s = -5)$. Una vez generado este cero finito es necesario retirar el conjunto de elementos que lo generan, removiendo totalmente el polo que caracteriza a su función inversa en $(s = -5)$.

SOLUCION GRAFICA



El cuadripolo será

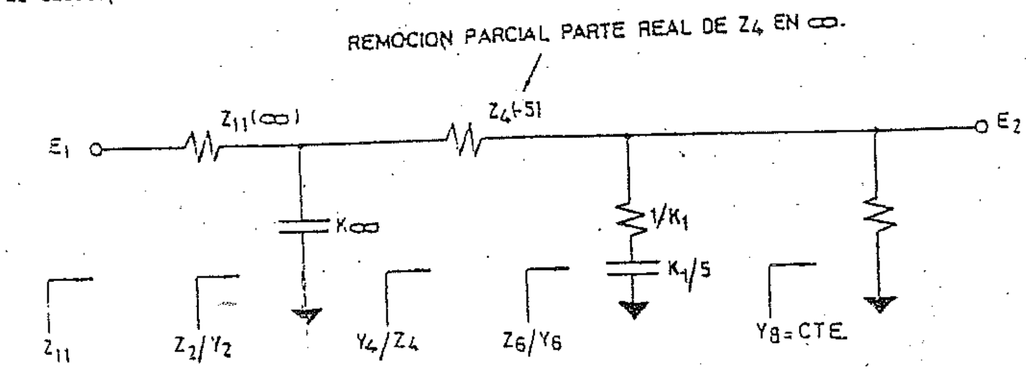


Fig. (6.10)

La rama derivada integrada por $R = \frac{1}{K_1}$ y $C = \frac{K_1}{5}$ provoca el cero de transmisión a través del polo asociado a su función admitancia.

<u>SOLUCION ANALITICA</u> Comenzamos aplicando Cauer I a $Z_{11}(s)$, o sea:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & s^2 + 6s + 8 & s^2 + 4s + 3 \\
 & \underline{s^2 + 4s + 3} & \overline{\;1\;} \\
s^2 + 4s + 3 & 2s + 5 & \\
\underline{s^2 + \frac{5}{2}s} & \overline{\frac{1}{2}s} & \\
\frac{3}{2}s + 3 & &
\end{array}$$

Obtenemos $Y_4 = \dfrac{\frac{3}{2}s + 3}{2s + 5}$

Pasamos a $Z_4 = \dfrac{2s + 5}{\frac{3}{2}s + 3}$

Calculamos $Z_4(-5) = \dfrac{10}{9}$

$$Z_6 = Z_4 - Z_4(-5) = \frac{2s + 5}{\frac{3}{2}s + 3} - \frac{10}{9} = \frac{2}{9}\,\frac{(s + 5)}{(s + 2)}$$

Hemos generado así el cero de Transmisión finito, ahora debemos remover totalmente el conjunto de elementos que lo producen o sea:

$$Y_6 = \frac{9}{2}\,\frac{(s + 2)}{(s + 5)}$$

$$Y_8 = Y_6 - \frac{K_1 s}{s+5} = Y_6 - \frac{\frac{27}{10}s}{s + 5} = \frac{9}{5}$$

La red será la que se ilustra en la figura (6 - 11)

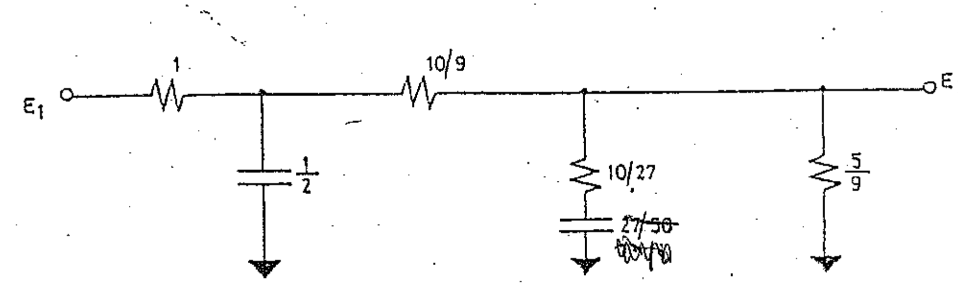


Fig. (6.11)

<u>EVALUACION DE LA CONSTANTE H</u>

de la transferencia dada y para $s = 0$, resulta

$$T(0) = H \cdot \frac{5}{8}$$

La transferencia en C.C. que suministra el cuadripolo es:

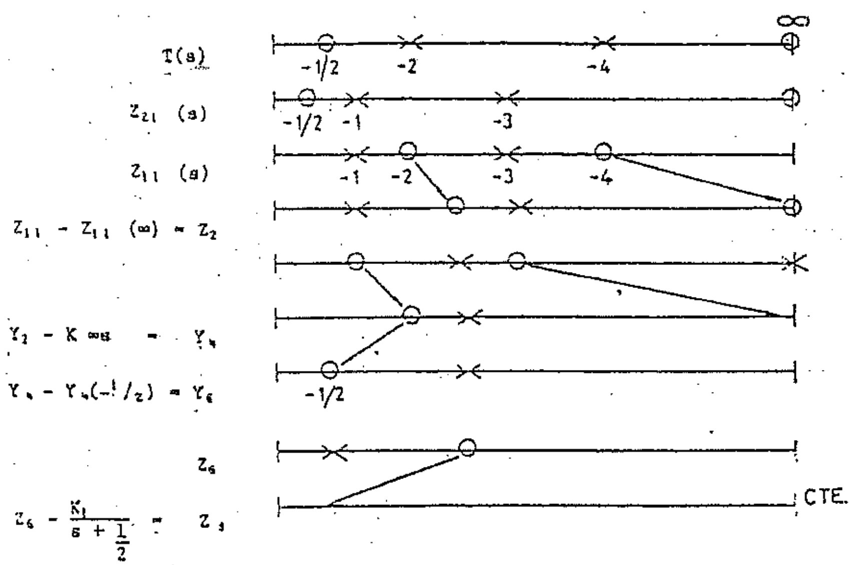
$$T(o) = \frac{\frac{5}{9}}{1 + \frac{10}{9} + \frac{5}{9}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{24}{9}} = \frac{5}{24}$$

o sea $H = \cancel{\frac{1}{3}}\ \frac{5}{3}$

PROBLEMA 6 - 5   Sintetizar la siguiente función transferencia

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2=0} = \frac{H(s + 1/2)}{(s+2)(s+4)}$$

Vamos a proceder como en el caso anterior



El cuadripolo que sugiere este proceso gráfico es el de la fig. (6-12)

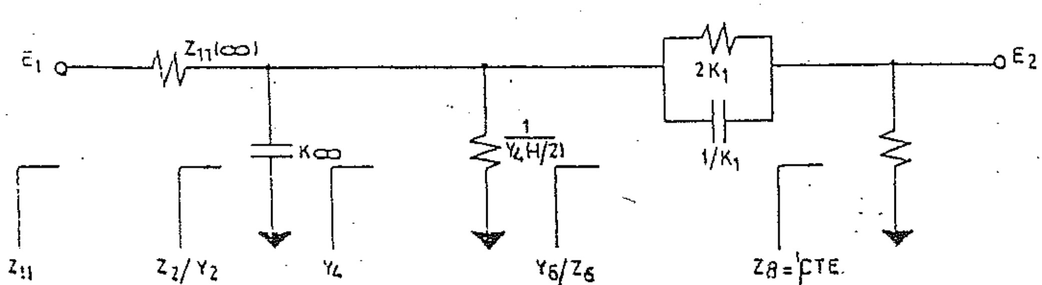
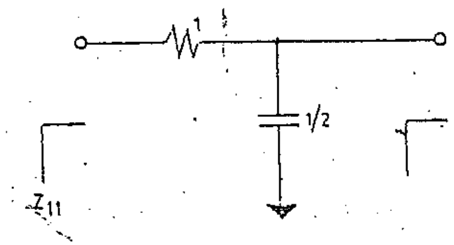


Fig. (6.12)

Ahora el tanque serie $R = 2K_1$ y $C = \frac{1}{K_1}$ es quien provoca el cero de transmisión finito a través de su polo de impedancia asociado.

SOLUCION ANALITICA

Comenzamos aplicando Cauer I a Z_{11} obteniendo la primera parte del cuadripolo como muestra la fig. (6-13).



$$Y_4 = \frac{\frac{3}{2}s + 3}{2s + 5}$$

Fig. (6.13)

Calculamos: $Y_4(-1/2) = \frac{9}{16}$

$$Y_6 = Y_4 - Y_4(-1/2) = \frac{\frac{3}{2}s + 3}{2s + 5} - \frac{9}{16} = \frac{\frac{3}{8}(s + \frac{1}{2})}{2(s + 5/2)}$$

$$Z_6 = \frac{16}{3}\,\frac{s + 5/2}{s + 1/2}$$

$$Z_8 = Z_6 - \frac{K_1}{s + \frac{1}{2}} \qquad \text{con } K_1 = 32/3$$

o sea $Z_8 = Z_6 - \dfrac{\frac{32}{3}}{s + \frac{1}{2}} = \dfrac{16}{3}$

La red finalmente será la de la fig. (6-14)

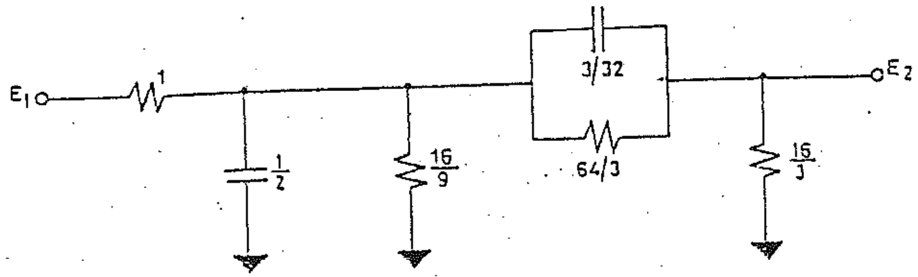


Fig. (6.14)

EVALUACION DE LA CTE. H

Del dato y para $s = o$ resulta $T(o) = \frac{H}{16}$

El cuadripolo en continua ($s = o$), asume el aspecto que muestra la fig. (6-15).

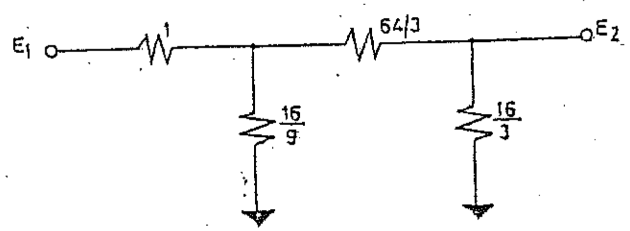


Fig. (6.15)

Podemos aplicar, Thevenin por ejemplo, obteniendo el esquema de la fig. (6-16)

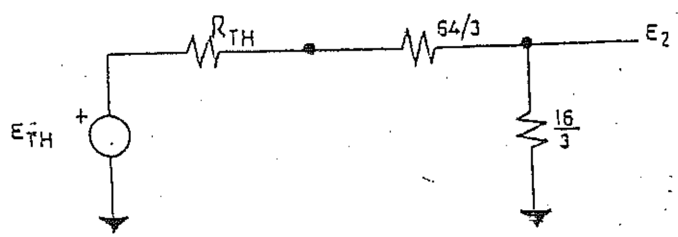


Fig. (6.16)

$$E_{TH} = E_1 \frac{\frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = E_1 \, \frac{16}{25}$$

$$R_{TH} = \frac{\frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{16}{25}$$

o sea $E_2 = E_{TH} \dfrac{\frac{16}{3}}{R_{TH} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3}} = \dfrac{E_1}{8}$

vale decir que $H = 2$

También podríamos haber aplicado la matriz admitancia indefinida, o sea:

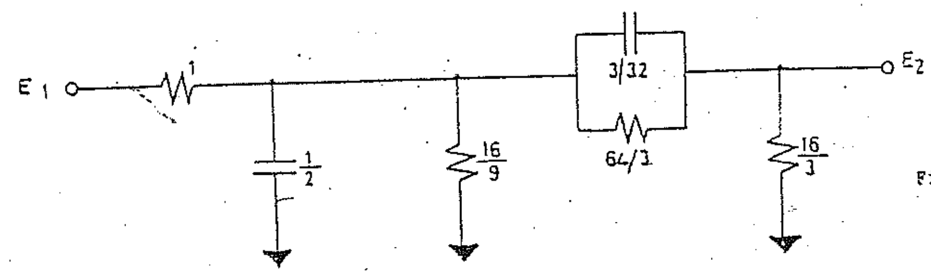


Fig. (6.17)

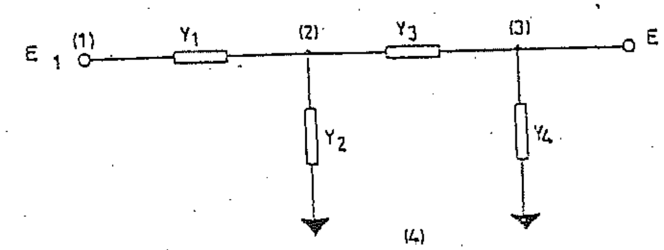


Fig. (6.18)

$$Y_i = \begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & -Y_2 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 & -Y_4 \\ 0 & -Y_2 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{1'}}{E_{1'}} = \frac{Y_{1'}}{Y_{1'}} \cdot \frac{Y_1 \; Y_3}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

$$\begin{cases} Y_1 = 1 \\ Y_2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\, s \\ Y_3 = \frac{3}{64} + \frac{3}{32}\, s \\ Y_4 = \frac{3}{16} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Y_1 Y_3 = \frac{3}{32}\left(s + \frac{1}{2}\right) \\ Y_1 + Y_2 = \frac{25}{16} + \frac{1}{2}\, s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{25}{8}\right) \\ Y_3 + Y_4 = \frac{15}{64} + \frac{3}{32}\, s = \frac{3}{32}\left(s + \frac{5}{2}\right) \\ Y_3 \, . \, Y_4 = \frac{9}{16 \times 64} + \frac{9}{16 \times 32}\, s = \frac{9}{16 \times 32}\left(s + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{3}{32}\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(s + \frac{25}{8}\right)\frac{3}{32}\left(s + \frac{5}{2}\right) + \frac{9}{16 \times 32}\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2\,(s + 1/2)}{s^2 + \frac{45}{8}\, s + \frac{125}{16} + \frac{3}{8}\, s + \frac{3}{16}}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2\,(s + 1/2)}{s^2 + 6s + 8} = \frac{2\,(s + 1/2)}{(s + 2)\,(s + 4)}$$

o sea $H = 2$

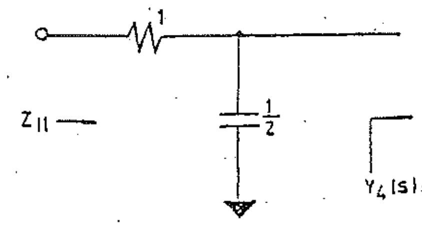
Veamos finalmente un último ejemplo que nos permitirá sacar importantes conclusiones.

<u>PROBLEMA 6-6</u> : Sintetizar la siguiente función transferencia

$$\left.\frac{E_2}{E_1}\right|_{I_2 = 0} = \frac{H(s + 7/3)}{(s + 2)(s + 4)}$$

Supongamos que el polinomio $A(s)$ es el mismo que adoptamos para los problemas anteriores, o sea $A(s) = (s + 1)(s + 3)$ entonces comenzamos generando el cero de transmisión en ∞, o sea aplicando Cauer I a $Z_{11}(s)$.

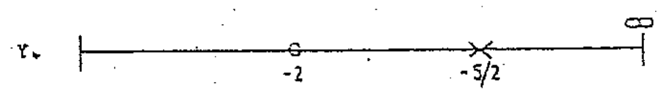
El cuadripolo se irá generando entonces como antes.



$$Y_4(s) = \frac{\frac{3}{2}s + 3}{2s + 5} = \frac{3}{4}\,\frac{(s + 2)}{\left(s + \frac{5}{2}\right)}$$

Fig. (6.19)

Grafiquemos esta circunstancia en el plano complejo:



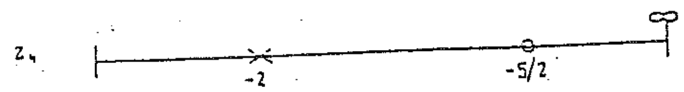
Como deseamos generar el cero en $s = -7/3$ o sea entre (-2) y $(-5/2)$ se nos podría ocurrir hacer una remoción parcial del valor real que posee Y_4 en ∞ hasta lograr acomodar el cero de Y_4 que está en (-2), en $(-7/3)$ tal como lo hicimos en el problema anterior.

O sea que primero debemos calcular $Y_4\,(-7/3)$ y luego retirarle a Y_4 ese valor cte. asegurándonos que la admitancia residual resulte caracterizada por un cero en $s = -7/3$, o sea:

$$Y_4(-7/3) = \frac{3}{4}\,\frac{(2 - 7/3)}{(\frac{5}{2} - 7/3)} = \frac{3}{4}\,\frac{(-\frac{1}{3})}{(+\frac{1}{6})} = -\frac{3}{2}$$

Como vemos resulta un valor real negativo y esto no lo podemos implementar mediante una red pasiva RC.

Intentemos entonces hacer lo siguiente: invertimos Y_4 obteniendo Z_4



Podemos ahora pensar en remover parcialmente la parte real de Z_4 en corriente continua hasta lograr ubicar el cero de Z_4 ubicado en $(-5/2)$ justamente en $s = -7/3$.

Comenzamos por calcular: $Z_4(-7/3) = \frac{4}{3}\frac{(\frac{1}{6})}{(-\frac{1}{3})} = -\frac{2}{3}$

y caemos en una situación análoga y nada podemos hacer si no tomamos otro rumbo.

Este nuevo rumbo es sencillo y gráficamente podemos intentar visualizarlo de la siguiente forma.

Grafiquemos nuevamente Y_4 y su ley de variación fig. (6-20).

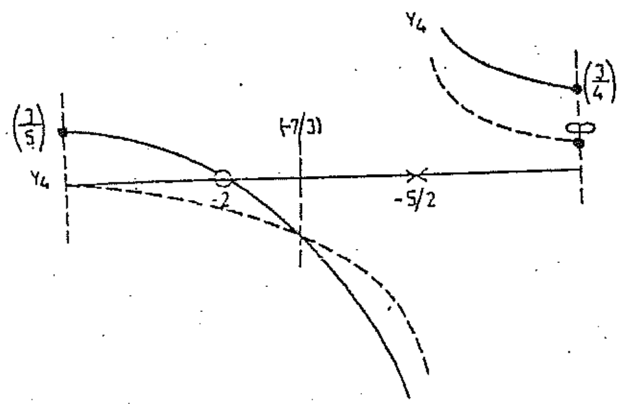


Fig. (6.20)

Si a esta gráfica le sustraemos una función que gráficamente varía como se indica en línea de puntos y cuyos puntos notables son:

1) Valor en continua: nulo
2) Valor en $s = -7/3$: el mismo valor de $Y_4(s)$
3) En $s = -5/2$: tiene un polo
4) En ∞ : tiene valor menor que $Y_4(\infty)$

Evidentemente habremos logrado, luego de la sustracción, una admitancia caracterizada por un cero en $(s = -7/3)$ y un polo en $(-5/2)$.

Obsérvese que la gráfica de esta función sustraendo, es la correspondiente a una admitancia RC integrada por un capacitor y un resistor en serie y cuyos valores son tales que caracterizan a esta admitancia mediante un polo en $(s = -5/2)$.

En otras palabras: la operación descripta no es ni más ni menos que la generación de un cero finito de transmisión mediante la remoción parcial del polo más próximo.

Analíticamente el proceso es el siguiente:

conocemos $Y_4(s) = \frac{3}{4}\frac{(s+2)}{(s+\frac{5}{2})}$

Efectuamos la remoción parcial de su polo finito

$$Y_5(s) = Y_4(s) - \frac{K_1 s}{s+\frac{5}{2}}$$

El valor de K_1 se calcula imponiendo la condición

$$Y_5(-7/3) = 0 \quad \text{o sea} \quad Y_4(s)\Big|_{s=-7/3} = \frac{K_1 s}{s+\frac{5}{2}}\Bigg|_{s=-7/3}$$

de donde: $\frac{3}{4}(-\frac{7}{3}+2) = K_1(-\frac{7}{3})$

o sea $K_1 = \frac{3}{28}$

entonces $Y_5 = Y_4 - \frac{\frac{3}{28}s}{s+\frac{5}{2}}$ y la red se va generando como se observa en la fig. (6-21)

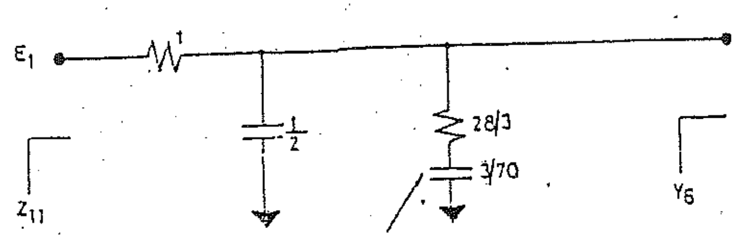


Fig. (6.21)

Rama que resulta de remover parcialmente el polo que posee Y_4 en $(-5/2)$ con el objeto que Y_6 posea un cero en $(-7/3)$.

Operando resulta: $Y_6 = \dfrac{\frac{9}{14}\left(s + \frac{7}{3}\right)}{\left(s + \frac{5}{2}\right)}$

Ahora invertimos y retiramos el conjunto de elementos que generan el polo de Z_6 en $(-7/3)$, o sea

$$Z_6' = Z_6 - \frac{K_2}{s + \frac{7}{3}} = Z_6 - \frac{\frac{7}{27}}{s + \frac{7}{3}}$$

$Z_3 = \frac{14}{9}$ y la red definitiva será la de la fig. (6-22)

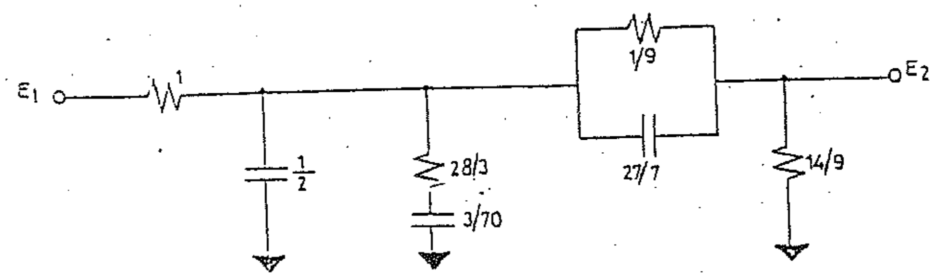


Fig. (6.22)

Constante

La corriente H es comodo evaluarla en corriente continua, o sea:

$$\frac{E_2}{E_1}(0) = H\,\frac{7}{24}$$

La transferencia de la red hallada en c.c. está dada por:

$$\frac{E_2}{E_1}(0) = \frac{\frac{14}{9}}{1 + \frac{1}{9} + \frac{14}{9}} = \frac{7}{12} \qquad \text{o sea } H = 2$$

Obsérvese que durante este proceso, el cero de transferencia finito (para $s = -7/3$), lo hemos generado mediante la remoción parcial de un polo de admitancia (red RC derivada) y lo implementamos mediante un polo de impedancia (tanque RC serie).

También es posible resolver este problema mediante el proceso dual del comentado, o sea generando al cero de transmisión mediante la remoción parcial de un polo finito de impedancia (tanque RC serie) e impleméntandolo a través de un polo de admitancia (serie RC derivada).

Analíticamente el proceso consiste en lo siguiente:
partimos de

$$Z_4(s) = \frac{4}{3}\,\frac{(s + 5/2)}{(s + 2)}$$

y removemos parcialmente el polo finito que posee hasta lograr ubicar el cero finito de Z_4 en $s = -7/3$.

o sea

$$Z_6 = Z_4 - \frac{K_1}{s + 2} \qquad \text{con} \quad Z_6\left(-\frac{7}{3}\right) = 0$$

Esta última condición nos permitirá calcular K_1 como:

$$Z_4\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{K_1}{s + 2}\bigg|_{s = -\frac{7}{3}} \qquad \therefore\ K_1 = \frac{2}{9}$$

por tanto

$$Z_6 = Z_4 - \frac{\frac{2}{9}}{s + 2} = \frac{4}{3}\,\frac{(s + 7/3)}{(s + 2)}$$

Ahora removemos totalmente el polo finito de $Y_6 = 1/Z_6$

$$Y_8 = Y_6 - \frac{K_2 s}{s + \frac{7}{3}} = Y_6 - \frac{\frac{3}{28}s}{s + \frac{7}{3}} = \frac{9}{14}$$

o sea que en definitiva la nueva red que satisface la transferencia propuesta será la de la fig. (6-23).

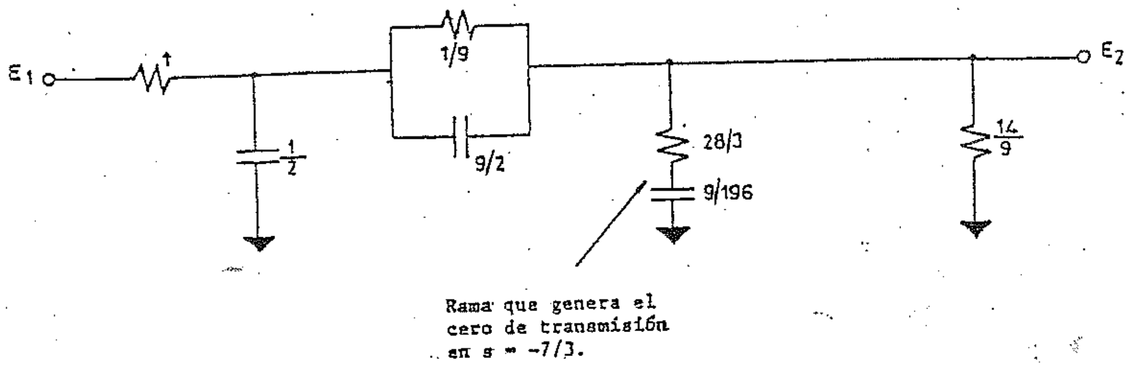


fig. (6-23)

EVALUACION DE H

$$T(s) = \frac{H\ (s + 7/3)}{(s + 2)\ (s + 4)} \qquad \text{en cc. asume el valor} \quad \frac{E_2}{E_1}(o) = \frac{7H}{24}$$

de la red en cc., obtenemos:

$$T(s) = \frac{\frac{14}{9}}{1 + \frac{1}{9} + \frac{14}{9}} = \frac{14}{24} \qquad \text{o sea } H = 2$$

ALGUNOS COMENTARIOS ADICIONALES:

* Tomemos parte del cuadripolo último, fig. (6-24)

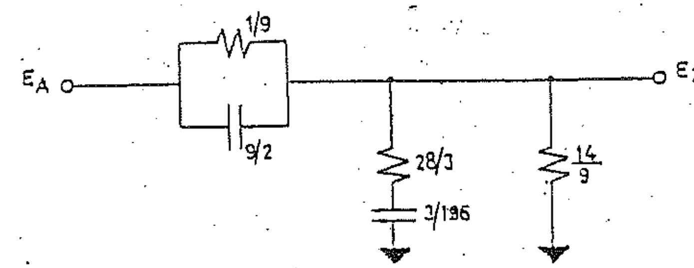
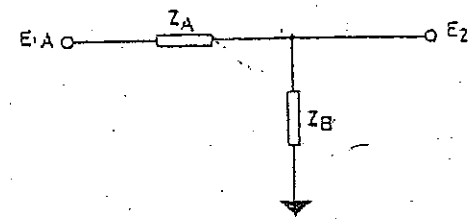


fig. (6-24)

Por comodidad vamos a representar el cuadripolo de la forma que muestra la fig. (6-25)



donde: $\begin{cases} Z_A = \dfrac{\frac{2}{9}}{s + 2} \\ Z_B = \dfrac{4}{3}\ \dfrac{s + 7/3}{s + 2} \end{cases}$

fig. (6-25)

Y nos preguntamos: ¿Habrá transferencia de tensiones para $s = -2$, siendo que para esa frecuencia tanto Z_A como Z_B tienden a ∞?

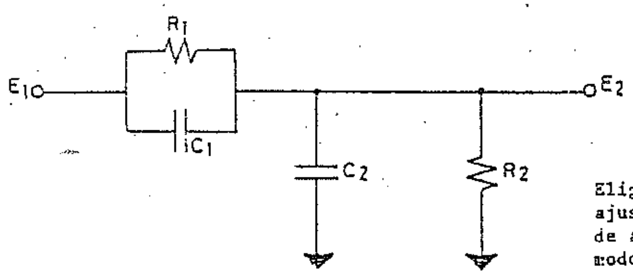
La respuesta es afirmativa y podemos justificarla calculando la transferencia $\frac{E_2}{E_A}$ para $s = -2$.

$$\frac{E_2}{E_A} = \frac{Z_B}{Z_B + Z_A} = \frac{s + 7/3}{s + 5/2}$$

y evidentemente habrá transferencia para $s = -2$

Esta propiedad la podemos generalizar diciendo :cuando al abrir una red se observa que en ambos sentidos existen polos de Z a una determinada frecuencia, a esa frecuencia existe transferencia.

Haciendo uso de esta propiedad podemos implementar divisores de tensión independientes de la frecuencia como se ilustra en la fig. (6-26).



Eligiendo $R_1 C_1 = R_2 C_2$ o sea ajustando las ctes. de tiempo de ambas impedancias de tal modo que se igualen resultará:

fig. (6-26)

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\dfrac{1/C_2}{s + 1/R_2C_2}}{\dfrac{1/C_1}{s + 1/R_2C_2} + \dfrac{1/C_1}{s + 1/R_1C_1}}$$ y como $R_1 C_1 = R_2 C_2$

se obtiene

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1/C_2}{1/C_1 + 1/C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} =$$ <u>cte. E independiente de la frecuencia.</u>

De la resolución de los tres últimos problemas y según la ubicación relativa de los ceros de transferencia finitos sobre el semieje real negativo del plano complejo podemos enunciar las siguientes reglas generales para redes RC; fácilmente extensibles a cuadripolos RL.

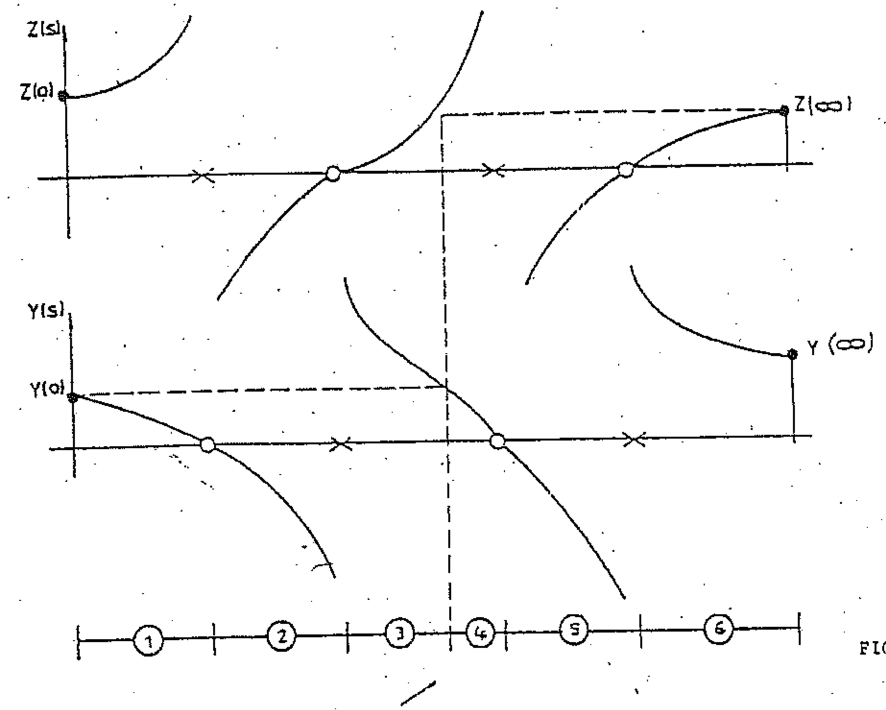


FIGURA (6.27.)

Cuando se desee genrar un cero de transmisión en las zonas:

* 1 ó 4 Remover parcialmente parte real de Y(s) en cc. o sea retirar un resistor derivado.
* 3 ó 6 Remover parcialmente parte real de Z(s) en ∞ o sea retirar un resistor serie.
* 2 ó 5 Remover parcialmente el polo más próximo de Z ó Y retirando un tanque RC ó una serie RC derivada.

<u>CADA UNA DE ESTAS ZONAS RESULTAN DEFINIDAS MEDIANTE:</u>

Zonas (1) ó (4)	$0 < Y(\sigma) < Y(0)$ (∞)
Zonas (3) ó (6)	$0 < Z(\sigma) < Z(\infty)$ (0)
Zonas (2) ó (5)	$Z(\sigma)$ ó $Y(\sigma) < 0$

El proceso previo a la síntesis consistirá entonces en:

1°) Conocida la ubicación del cero de transmisión y la función Z (s) ó Y (s) a través de la cual se efectúa la síntesis, determinar la zona.

2ª) Ubicada la zona, aplicar las reglas enunciadas.

6.2. METODOS DE SINTESIS MEDIANTE CUADRIPOLOS SIMETRICOS Y COMPACTOS

Comentaremos a continuación algunos métodos de síntesis que posibilitan la implementación de los cuadripolos RC pasivos más sencillos, que son los simétricos y compactos.

La condición de simetría expresada en términos de los parámetros Z ó Y está dada por

$$Z_{11} = Z_{22} \text{ ó } Y_{11} = Y_{22} \qquad (6-1)$$

Además por tratarse de cuadripolos pasivos, se verificará la condición de reciprocidad, o sea:

$$Z_{12} = Z_{21} \text{ ó } Y_{21} = Y_{12} \qquad (6-2)$$

Finalmente, si al cuadripolo, y por lo tanto a sus parámetros, le imponemos la condición de compacto, se verificará la igualdad:

$$K_{11}{}^2 - K_{12}{}^2 = 0 \qquad (6-3)$$

o sea $(K_{11} - K_{12})\ (K_{11} + K_{12}) = 0$ que se satisfará si

$$K_{11} = K_{12} \text{ ó } K_{11} = -K_{12} \qquad (6-4)$$

* $K_{11} = K_{22}$: Representa el valor del residuo en los polos de $Z_{11} = Z_{22}$ ó $Y_{11} = Y_{22}$ comunes a Z_{12} ó Y_{12} respectivamente.
  Estas cantidades son siempre reales y positivas ya que se originan en funciones reales y positivas (FRP).
* $K_{12} = K_{21}$: Representa el valor del residuo en los polos de Z_{12} ó Y_{12} comunes a $Z_{11} = Z_{22}$ ó $Y_{11} = Y_{22}$. Esta cantidad puede o no, ser real positiva.

Vale decir que un cuadripolo pasivo, simétrico y compacto es aquel que satisface simultáneamente las expresiones (6 - 2), (6 - 1) y (6 - 4) respectivamente.

Supongamos ahora conocer la $Y_{12}(s)$ de un cierto cuadripolo pasivo, simétrico y compacto integrado por R y C y admitamos que la misma no es FRP. Si la expandimos en fracciones parciales, en el caso más general, resultará expresada mediante

$$-Y_{12}\ (s) = K_\infty s + K_0 + \sum_i \frac{K_{ip}}{s + \sigma_{ip}} - \sum_j \frac{K_{jn}}{s + \sigma_{jn}} \qquad (6-5)$$

* K_∞: Es el valor del residuo de $-Y_{12}$ (s) en el eventual polo que ésta posee en alta frecuencia, $(s \to \infty)$.

* K_0 : Es el eventual valor constante que exhibe $-Y_{12}$ (s) en corriente continua $(s = 0)$

Ambas cantidades en el supuesto caso que existan serán siempre reales y positivas.

* K_{ip}: Representa los residuos reales y positivos en los polos finitos de $-Y_{12}$ (s).

* K_{jn}: Representa los residuos reales y negativos en los polos de $-Y_{12}$ (s), y no existirán cuando ésta resulte una FRP.

A partir de la (6 - 5) es posible definir las expresiones correspondientes a Y_{11} (s) $= Y_{22}$ (s), teniendo presente que por tratarse de un cuadripolo compacto deberá satisfacer la (6 - 4).

o sea $$Y_{11} = Y_{22} = K_\infty s + K_0 + \sum \frac{K_{ip}\, s}{s + \sigma_{ip}} + \sum \frac{K_{jn}\, s}{s + \sigma_{jn}} \qquad (6-6)$$

Tanto la (6 - 5) como la (6 - 6) podemos expresarlas, luego de realizar las operaciones en ellas indicadas, como sumas algebraicas de un par de funciones racionales, como se indica en (6 - 7)

$$\begin{aligned} -Y_{12}\ (s) &= \frac{P_p(s)}{Q_p(s)} - \frac{P_N(s)}{Q_N(s)} \\ Y_{11} = Y_{22} &= \frac{P_p(s)}{Q_p(s)} + \frac{P_N(s)}{Q_N(s)} \end{aligned} \qquad (6-7)$$

A partir de la (6 - 7) es posible obtener las expresiones correspondientes a los parámetros Z, ya que:

$$\begin{aligned} Z_{12}\ (s) &= \frac{-Y_{12}\ (s)}{|Y|} \\ Z_{11}\ (s) = Z_{22}\ (s) &= \frac{Y_{11}\ (s)}{|Y|} \end{aligned} \qquad (6-8)$$

donde $$|Y| = Y_{11}{}^2 - Y_{12}{}^2 = \left|\frac{P_p(s)}{Q_p(s)} + \frac{P_N(s)}{Q_N(s)}\right|^2 - \left|\frac{P_p(s)}{Q_p(s)} - \frac{P_N(s)}{Q_N(s)}\right|^2$$

$$= 4\, \frac{P_p(s)\ P_N(s)}{Q_p(s)\ Q_N(s)} \qquad (6-9)$$

Reemplazando (6 - 7) y (6 - 9) en (6 - 8) se obtiene:

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{4}\left|\frac{Q_N(s)}{P_N(s)} - \frac{Q_p(s)}{P_p(s)}\right| \qquad (6-10)$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \frac{1}{4}\left|\frac{Q_N(s)}{P_N(s)} + \frac{Q_p(s)}{P_p(s)}\right|$$

Apliquemos estos conceptos a un ejemplo numérico y saquemos conclusiones.

PROBLEMA 6 - 7

Sea $-Y_{12}(s) = \dfrac{s^2+3s+3}{s+2} = s + \dfrac{3}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}s}{s+2}$

A partir de esta expresión podemos armar $Y_{11}(s) = Y_{22}(s)$

o sea $Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = s + \dfrac{3}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}s}{s+2}$

De este último par de expresiones, y recordando la (6-7), resulta:

$$P_p(s) = s + \frac{3}{2} \qquad P_N(s) = \frac{1}{2}s$$

$$Q_p(s) = 1 \qquad Q_N(s) = s + 2$$

Aplicando la (6 - 10) podemos obtener los parámetros Z

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{4}\left|\frac{2s+4}{s} - \frac{1}{s+3/2}\right| = \frac{s^2+3s+3}{2s(s+3/2)}$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \frac{1}{4}\left|\frac{2s+4}{s} + \frac{1}{s+3/2}\right| = \frac{s^2+4s+3}{2s(s+3/2)}$$

Y expandiendo en fracciones parciales se obtiene:

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1/4}{s+3/2}$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2} + \frac{1/4}{s+3/2}$$

CONCLUSION 1: Partiendo de un juego de parámetros Y compactos y completos hemos obtenido un juego de parámetros Z, compactos y completos.

Supongamos ahora que los parámetros Y resulten compactos pero incompletos, por ejemplo sin polo para $s \to \infty$.

$$-Y_{12}(s) = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}s}{s+2}$$

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}s}{s+2}$$

Pasemos a parámetros Z.

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{4}\left[\frac{2s+4}{s} - \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{s}$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \frac{1}{4}\left[\frac{2s+4}{s} + \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{s}$$

CONCLUSION 2: Partiendo de un juego de parámetros Y compactos, pero sin polo para $s \to \infty$, (incompletos), hemos obtenido un juego incompleto de parámetros Z con un valor constante no compacto en alta frecuencia ($s \to \infty$).

Esta circunstancia sugiere el siguiente procedimiento: intentemos compactar los parámetros Z, removiendo el exceso de valor constante no compacto para $s \to \infty$, o sea:

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{s} = Z'_{12}(s)$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{3} = Z'_{11}(s) + \frac{1}{3}$$

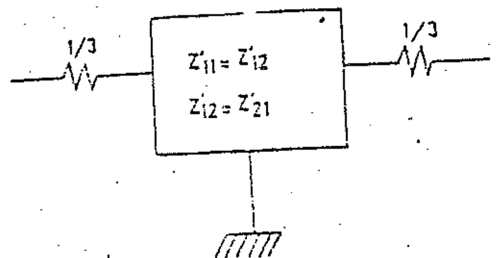


FIGURA (6.28.)

El cuadripolo caracterizado por los parámetros Z' es ahora compacto.

Analicemos ahora la circunstancia que se presenta cuando los parámetros Y son compactos, pero carecen del valor constante en corriente continua (s = 0).

$$-Y_{12}(s) = s - \frac{\frac{1}{2}s}{s+2}$$

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = s + \frac{\frac{1}{2}s}{s+2}$$

Los correspondientes parámetros Z serán:

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{4}\left[\frac{2s+4}{s} - \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{2} + \frac{3/4}{s}$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \frac{1}{4}\left[\frac{2s+4}{s} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{2} + \frac{5/4}{s}$$

<u>CONCLUSION 3</u> Partiendo de un juego de parámetros Y compactos pero sin valor constante en $s = 0$ (incompletos), hemos obtenido un juego de parámetros Z incompletos y con un polo no compacto en corriente continua.

Podemos compactar estos parámetros removiendo el exceso de polo no compacto en continua, o sea:

$$Z_{12}(s) = \frac{1}{2} + \frac{3/4}{s} = Z'_{12}(s)$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3/4}{s}\right) + \frac{1/2}{s} = Z'_{11}(s) + \frac{1/2}{s}$$

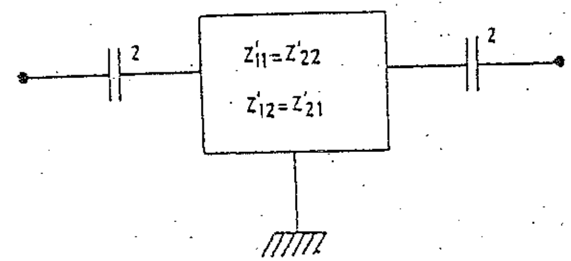


FIGURA (6.29.)

El cuadrípolo de la figura (6-29) caracterizado por los parámetros Z' es ahora compacto.

En forma completamente análoga es posible demostrar que:

<u>CONCLUSION 4</u> Partiendo de un juego de parámetros Z completos y compactos se obtiene un juego de parámetros Y, también completos y compactos.

<u>CONCLUSION 5</u> Partiendo de un juego de parámetros Z compactos pero sin valor constante en alta frecuencia ($s \to \infty$), se obtiene un juego de parámetros Y con un polo no compacto para $s \to \infty$.

Esta circunstancia podemos ilustrarla de la siguiente forma:

Si

$$Z_{12}(s) = \frac{K_0}{s} - \frac{K_1}{s + \sigma_1}$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \sigma_1}$$

Resultará

$$-Y_{12}(s) = K_\infty s - \frac{K_A s}{s + \sigma_A}$$

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = K'_\infty s + \frac{K_A s}{s + \sigma_A} = \left(K_\infty s + \frac{K_A s}{s + \sigma_A}\right) + K''_\infty s$$

Donde $K'_\infty = K_\infty + K''_\infty$

Y podremos compactar los parámetros Y, de la siguiente forma:

$$-Y_{12}(s) = -Y'_{12}(s)$$

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = Y'_{11}(s) + K''_\infty s$$

Expresiones que sugieren la configuración de la figura (6-30)

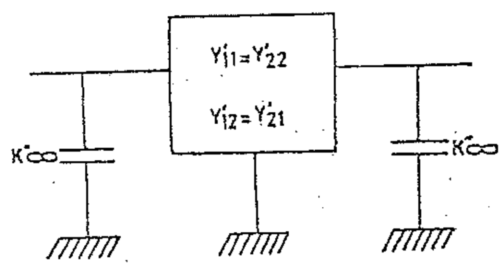


FIGURA (6.30.)

Ahora el cuadrípolo de la figura (6-30) caracterizado por los parámetros Y' es compacto.

CONCLUSION 6: Finalmente, si partimos de un juego de parámetros Z compactos pero sin polo en corriente continua obtendremos un juego de parámetros Y caracterizado por un valor constante no compacto para $s = 0$.

O sea que, partiendo de:

$$Z_{12}(s) = Z_\infty - \frac{K_1}{s + \sigma_1}$$

$$Z_{11}(s) = Z_{22}(s) = Z_\infty + \frac{K_1}{s + \sigma_1}$$

Arribaremos a:

$$-Y_{12}(s) = K_0 - \frac{KAs}{s + \sigma A} = -Y'_{12}(s)$$

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = K'_0 + \frac{KAs}{s + \sigma A} = \left(K_0 + \frac{KAs}{s + \sigma A}\right) + K''_0 = Y'_{11}(s) + K''_0$$

Donde $K'_0 = K_0 + K''_0$

Y podremos compactar los parámetros Y retirando de $Y_{11} = Y_{22}$ el exceso de valor constante K''_0, en $s = 0$, como lo indica la figura (6-31)

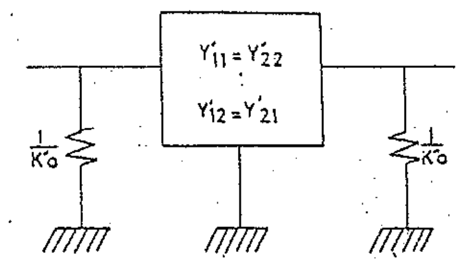


FIGURA (6.31.)

Ahora el cuadrípolo de la figura (6-31) caracterizado por los parámetros Y' es compacto.

CONCLUSION 7: Quedaría por considerar un último caso, poco frecuente en la práctica, y es el que ocurre cuando los parámetros Z o Y tienen un cero en común. En este caso los parámetros Y o Z, respectivamente, tendrán un polo no compacto a esa frecuencia específica que define el cero común. Para compactar la red habrá que remover: o bien una serie RC en derivación o bien un tanque RC en serie como se ilustra en la figura (6-32) y figura (6-33) respectivamente.

La (6 - 22) es la ecuación de una parábola y a partir de ella podemos armar una nueva función que designaremos $f_1(\sigma)$, o sea:

$$f_1(\sigma) = f(\sigma) - k = (\sigma + \sigma_0)^2 + \omega_0^2 - k \qquad (6 - 23)$$

En la (6 - 23) el valor de k adoptado condicionará las raíces de $f_1(\sigma)$. En efecto, al variar k el vértice de la parábola subirá o bajará respecto del semieje $(-\sigma)$ y sus ramas cortarán al mencionado semieje en dos puntos, variables con k.

Graficando la parábola $f_1(\sigma)$ y los polos de $Y_{12}(s)$ (supongamos que estén ubicados en $-\sigma_1$ y $-\sigma_2$), calculemos el valor de k que obliga a la rama derecha de la parábola a cortar al semieje real negativo en $(-\sigma_1)$, o sea:

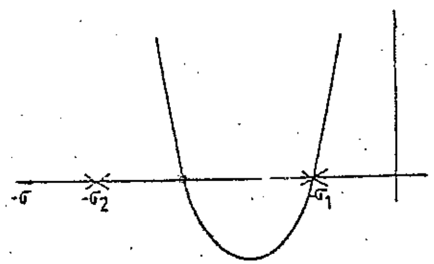


FIGURA (6.35.)

$$f_1(-\sigma_1) = (-\sigma_1 + \sigma_0)^2 + \omega_0^2 - k = 0 \qquad (6 - 24)$$

por tanto $\quad k = (\sigma_0 - \sigma_1)^2 + \omega_0^2 \qquad (6 - 25)$

y reemplazando (6 -25) en (6 - 23) resulta (6 - 26)

$$f_1(\sigma) = (\sigma + \sigma_0)^2 + \omega_0^2 - (\sigma_0 - \sigma_1)^2 - \omega_0^2 = \sigma^2 + 2\sigma\sigma_0 + 2\sigma_1\sigma_0 - \sigma_1^2 \qquad (6 - 26)$$

De la (6 - 26) sabemos que una raíz está ubicada en $(-\sigma_1)$. La otra raíz la evaluamos aplicando Ruffini.

	1	$2\,\sigma_0$	$2\sigma_1\sigma_0 - \sigma_1^2$
$-\sigma_1)$		$-\sigma_1$	$-2\sigma_1\sigma_0 + \sigma_1^2$
	1	$2\sigma_0 - \sigma_1$	0

Vale decir que la otra raíz está ubicada en $(-2\,\sigma_0 + \sigma_1)$

Factoreando $f_1(\sigma)$ en sus raíces, resultará:

$$f_1(\sigma) = (\sigma + \sigma_1)\,(\sigma + 2\,\sigma_0 - \sigma_1) \qquad (6 - 27)$$

$$f(s) = (s + \sigma_1)\,(s + 2\,\sigma_0 - \sigma_1) + k \qquad (6 - 28)$$

Y reemplazando (6 - 28) en (6 - 21) resulta:

$$P(s) = \left|(s + \sigma_1)\,(s + 2\,\sigma_0 - \sigma_1) + k\right| P_0(s) \qquad (6 - 29)$$

o sea

$$\begin{cases} P_1(s) = (s + \sigma_1)\,(s + 2\,\sigma_0 - \sigma_1)\,P_0(s) & (6 - 30\text{ a}) \\ P_2(s) = k\,P_0(s) & (6 - 30\text{ b}) \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{cases} -Y_{12_A}(s) = \dfrac{P_1(s)}{Q(s)} = \dfrac{(s + \sigma_1)\,(s + 2\,\sigma_0 - \sigma_1)\,P_0(s)}{Q(s)} & (6 - 31\text{ a}) \\ -Y_{12_B}(s) = \dfrac{P_2(s)}{Q(s)} = \dfrac{k\,P_0(s)}{Q(s)} & (6 - 31\text{ b}) \end{cases}$$

La (6 - 31 a) indica claramente que debido a la forma de adoptar la constante k, un cero de $-Y_{21_A}(s)$ se cancela con un cero de Q(s) reduciendo la complejidad del cuadripolo $|A|$.

Analicemos ahora si este valor de k satisface la condición de signos de K_{12_A} y K_{12_B}.

El único polo común de Y_{12_A} e Y_{12_B} es el ubicado en $(-\sigma_2)$, o sea:

$$\begin{cases} k_{12_A}(-\sigma_2) = \dfrac{(-\sigma_2 + 2\,\sigma_0 - \sigma_1)\,P_0(-\sigma_2)}{(-\sigma_2)} & (6 - 32\text{ a}) \\ k_{12_B}(-\sigma_2) = \dfrac{k\,P_0(-\sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,(-\sigma_2)} & (6 - 32\text{ b}) \end{cases}$$

Y en ambos casos se observa que el signo de $P_1(-\sigma_1)$ es quien determina el signo k_{12_A} = signo k_{12_B}.

De haber elegido k, tal que la rama derecha de la parábola cortara al semieje real positivo $(+\sigma)$, en este caso Y_{12_A} tendría un cero sobre el semiplano derecho del plano complejo y por tanto no se trataría de una transferencia de min. fase, contrariando nuestra hipótesis de partida.

Si k hubiera sido tal que la rama izquierda de la parábola cortara al semieje real negativo en $(-\sigma_2)$, los signos de K_{12_A} y K_{12_B} habrían resultado distintos contrariando lo requerido en (6 - 14).

* El valor de k es el menor de los que resulten de las siguientes evaluaciones:

$$\begin{cases} k_0 = \sigma_0^2 + \omega_0^2 \\ k_1 = (\sigma_0 - \sigma_1) + \omega_0^2 \\ k_2 = (\sigma_0 - \sigma_2)^2 + \omega_0^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (6 - 33)$$

Donde $(-\sigma_0 \pm j\omega_0)$ es el cero complejo de $-Y_{12}(s)$, y $(-\sigma_1), (-\sigma_2)\ldots$ son las raíces de $Q(s)$, o sea los polos de $-Y_{12}(s)$.

De todos estos se adopta el valor mínimo de k.

O sea $$k_m = (\sigma_0 - \sigma_m)^2 + \omega_0^2 \qquad (6 - 34)$$

En la (6 - 34), σ_m es el polo de $-Y_{12}(s)$ que hace mínimo el valor de k, y entonces:

$$-Y_{12_A}(s) = \frac{(s + \sigma_m)\,(s + 2\,\sigma_0 - \sigma_m)\,P_1(s)}{Q(s)} \qquad (6 - 35)$$

$$-Y_{12_B}(s) = \frac{k_m\,P_1(s)}{Q(s)} \qquad (6 - 36)$$

PROBLEMA 6 - 8 Sintetizar la siguiente función transferencia

$$-y_{12}(s) = \frac{s^2 + \sqrt{2}\,s + 1}{s + \sqrt{2}}$$

En este caso $P(s) = s^2 + \sqrt{2}\,s + 1$ y $Q(s) = s + \sqrt{2}$

Como se observa, $Q(s)$ está caracterizada por raíces ubicadas en el semieje real negativo del plano complejo, mientras que el polinomio $P(s)$ está caracterizado por poseer un par de raíces complejas conjugadas con parte real negativa. Por consiguiente $-y_{12}(s)$ resulta ser una transferencia de mínima fase. Podemos expresar $P(s)$, completando un binomio al cuadrado, de la siguiente forma:

$$P(s) = \left(s + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

y comparando esta última expresión con la (6 - 20) se concluye que

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y \qquad P_0(s) = 1$$

Además $\sigma_1 = \sqrt{2}$

Apliquemos ahora la descomposición sugerida por Osaki. Comenzamos evaluando el k min. mediante la expresión (6 - 33), o sea

$$\begin{cases} k_0 = \sigma_0^2 + \omega_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ k_1 = (\sigma_0 - \sigma_1)^2 + \omega_0^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Cualesquiera de estos valores de k podemos utilizar en nuestra descomposición. Adoptemos el segundo, obteniendo por aplicación de (6 - 35) y (6 - 36)

$$\begin{cases} -y_{21_A}(s) = \frac{(s + \sqrt{2})\,(s + \sqrt{2} - \sqrt{2})}{(s + \sqrt{2})} = s \\ -y_{21_B}(s) = \frac{1}{s + \sqrt{2}} \end{cases}$$

Expandiendo en fracciones parciales $-y_{21_B}$ se obtiene

$$-y_{21_B}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\, s}{s + \sqrt{2}}$$

Ahora debemos armar las expresiones correspondientes a las admitancias de excitación pertenecientes a los cuadripolos $|A|$ y $|B|$, recordando que los mismos son simétricos y compactos, o sea

$$\text{cuadripolo } |A| \begin{cases} -y_{12_A}(s) = s \\ y_{11_A}(s) = y_{22_A}(s) = s \end{cases}$$

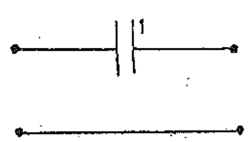
$$\text{cuadripolo } |B| \begin{cases} -y_{12_B}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\, s}{s + \sqrt{2}} \\ y_{11_B}(s) = y_{22_B}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\, s}{s + \sqrt{2}} \end{cases}$$

El siguiente paso consiste en la síntesis de los cuadripolos $|A|$ y $|B|$.

La estructura del cuadripolo $|A|$ es inmediata ya que

$$Y_{11_A}(s) = Y_{22_A}(s) = -Y_{12_A}(s) = s$$

y el cuadripolo de la figura (6 - 36) es el que satisface este juego de parámetros.



[A]

FIGURA (6.36.)

Sin embargo, observamos que los parámetros admitancia que definen el cuadripolo $|B|$ son compactos pero incompletos, ya que carecen de polo en alta frecuencia, y en estas circunstancias sabemos que sus correspondientes parámetros Z estarán caracterizados por un valor constante no compacto para $s \to \infty$

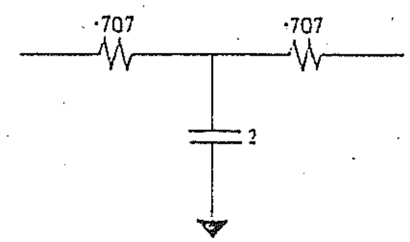
Transformemos los parámetros Y del cuadripolo $|B|$ en sus correspondientes parámetros Z aplicando la (6 - 10)

$$\begin{cases} Z_{12_B}(s) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2s + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\, s} - \sqrt{2}\right) \\ Z_{11_B}(s) = Z_{22_B}(s) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2s + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\, s} + \sqrt{2}\right) \end{cases}$$

y operando se obtiene

$$\begin{cases} Z_{12_B}(s) = \dfrac{1/2}{s} \\ Z_{11_B}(s) = Z_{22_B}(s) = \dfrac{1/2}{s} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Este último juego de parámetros sugiere, como solución del cuadripolo $|B|$, la siguiente estructura T.



[B]

FIGURA (6.37.)

Finalmente conectando en paralelo los cuadripolos $|A|$ y $|B|$ se obtiene la estructura que resuelve nuestro problema, o sea

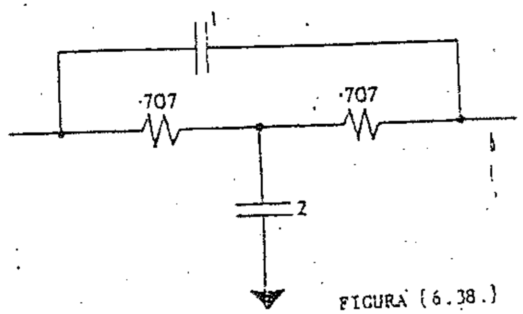


FIGURA (6.38.)

VERIFICACION

Vamos a realizarla en forma totalmente genérica, para lo cual partimos de la estructura T puenteada de la figura (6-39) y evaluamos su admitancia de transferencia $-y_{12}(s)$

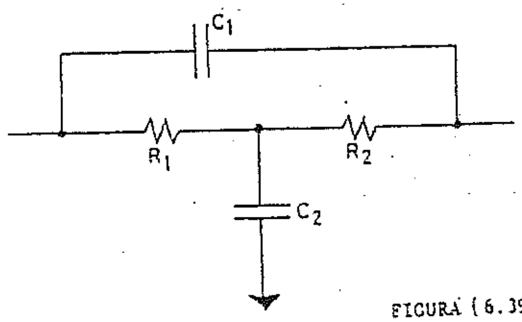


FIGURA (6.39)

Transformando la T en una π equivalente resulta

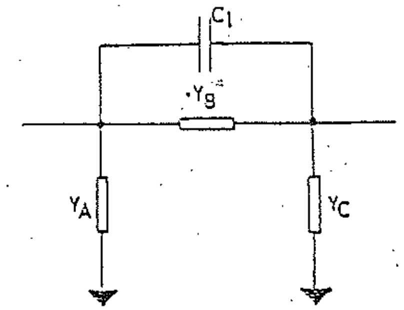


FIGURA (6.40.)

En la cual $\quad Y_B = \dfrac{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+s\,C_2}\quad$ y por tanto:

$$-y_{12}(s) = s\,C_1 + Y_B = s\,C_1 + \frac{1}{(R_1+R_2)+s\,C_2\,R_1\,R_2}$$

$$-y_{12}(s) = \frac{s^2\,C_1\,C_2\,R_1\,R_2 + s\,C_1\,(R_1+R_2)+1}{s\,C_2\,R_1\,R_2+(R_1+R_2)}$$

que finalmente podemos expresar como:

$$-y_{12}(s) = C_1\left[\frac{s^2 + s\left(\frac{R_1+R_2}{R_1\,R_2\,C_2}\right)+\frac{1}{R_1\,R_2\,C_1\,C_2}}{s^2+\left(\frac{R_1+R_2}{C_2\,R_1\,R_2}\right)}\right]$$

y reemplazando en esta expresión $\quad C_1 = 1\ ;\ C_2 = 2\ ;\ R_1 = R_2 = .707 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

resulta $\quad -y_{12}(s) = \dfrac{s^2+\sqrt{2}\,s+1}{s+\sqrt{2}}\quad$ verificando que la estructura de la figura (6-38) satisface nuestro problema.

PROBLEMA 6 - 9

$$\begin{cases} -Y_{12}(s) = \dfrac{(s^2+2s+5)(s+4)}{(s+1)\quad(s+2)} \\ \\ Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = \dfrac{s^3+30s^2+61s+20}{(s+1)\quad(s+2)} \end{cases}$$

(1º) Expandimos en fracciones parciales

$$-Y_{12}(s) = s + 10 + \frac{5\,s}{s+2} - \frac{12\,s}{s+1}$$

$$Y_{11}(s) = Y_{22}(s) = s + 10 + \frac{5\,s}{s+2} + \frac{12\,s}{s+1}$$

* Como vemos, se trata de un juego de parámetros simétricos, compactos y completos que carece de ceros comunes, por tanto no podemos ensayar ningún paso de reducción previa del tipo de los comentados en el apartado anterior.

- $Y_{12}(s)$ es de mínima fase con un par de ceros complejos conjugados $(-1 \pm j2)$ y un cero real negativo (-4)

(2º) Apliquemos la descomposición de Osaki

Datos
$$\begin{cases} \sigma_0 = 1 \\ \omega_0 = 2 \\ P(s) = (s^2+2s+5)\,(s+4) \\ \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 2 \end{cases}$$

Cálculo de k_m
$$\begin{cases} k_0 = \sigma_0^2 + \omega_0^2 = 5 \\ k_1 = (\sigma_0 - \sigma_1)^2 + \omega_0^2 = 4 \\ k_2 = (\sigma_0 - \sigma_2)^2 + \omega_0^2 = 5 \end{cases}$$

o sea $k_m = 4$; $\sigma_m = 1$

$$P_0(s) = \frac{P(s)}{(s+\sigma_0)^2 + \omega_0^2} = (s+4)$$

o sea:
$$\begin{cases} -Y_{12_A}(s) = \dfrac{(s+1)\,(s+4)}{(s+2)} \\ \\ -Y_{12_B}(s) = \dfrac{4\,(s+4)}{(s+1)\,(s+2)} \end{cases}$$

Estamos ahora en condiciones de armar $Y_{11_A} = Y_{22_A}$ e $Y_{11_B} = Y_{22_B}$ previa expansión de $-Y_{21_A}(s)$ e $-Y_{21_B}(s)$ en fracciones parciales.

$$(A)\begin{cases} -Y_{21_A}(s) = s + 2 + \dfrac{s}{s+2} \\ \\ Y_{11_A} = Y_{22_A} = s + 2 + \dfrac{s}{s+2} \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} -Y_{21_B}(s) = 8 + \dfrac{4\,s}{s+2} - \dfrac{12\,s}{s+1} \\ \\ Y_{11_B} = Y_{22_B} = 8 + \dfrac{4\,s}{s+2} + \dfrac{12\,s}{s+1} \end{cases}$$

El cuadripolo |A| es de síntesis inmediata ya que se trata de una π degenerada, $Y_{21_A} = Y_{11_A} = Y_{22_A}$, ver figura (6-41).

(A)

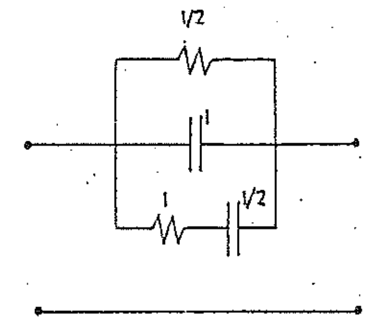


FIGURA (6.41.)

Respecto del cuadripolo |B| , como sus parámetros Y no tienen polo en $s \to \infty$, se comprende que los parámetros Z tendrán un término constante no compacto en alta frecuencia, o sea:

$$\begin{cases} Z_{12_B} = \dfrac{-Y_{12_B}}{|Y|} = \dfrac{s+4}{48\, s\, (3\, s+4)} = \dfrac{1}{48\, s} - \dfrac{\frac{1}{24}}{3\, s+4} \\[2ex] Z_{11_B} = Z_{22_B} = \dfrac{Y_{11_B}}{|Y|} = \dfrac{6s^2+13\, s+4}{48\, s\, (3s+4)} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{48\, s} + \dfrac{\frac{1}{24}}{3\, s+4} \end{cases}$$

Podemos retirar el exceso de valor constante no compacto resultando:

$$\begin{cases} Z'_{12_B} = Z_{12_B} = \dfrac{1}{48\, s} - \dfrac{\frac{1}{24}}{3s+4} \\[2ex] Z'_{11_B} = Z'_{22_B} = Z_{11_B} - \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{48\, s} + \dfrac{\frac{1}{24}}{3s+4} \end{cases}$$

y la red será la de la figura (6-42)

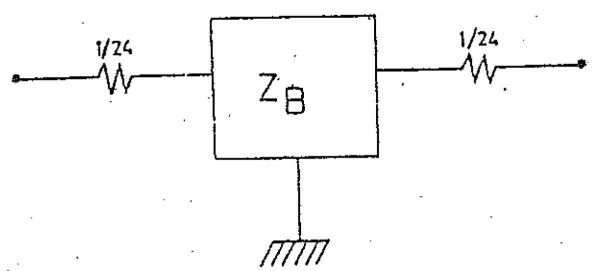


FIGURA (6.42.)

Como ahora los parámetros Z' no tienen valor constante en alta frecuencia, los parámetros Y' tendrán un polo no compacto para $s \rightarrow \infty$, o sea:

$$\begin{cases} -Y'_{12_B} = \dfrac{Z'_{12_B}}{|Z|} = 6\, s + 24 \\[2ex] Y'_{11_B} = Y'_{22_B} = \dfrac{Z'_{11_B}}{|Z|} = 30\, s + 24 = (6\, s + 24) + 24\, s \end{cases}$$

$$\begin{cases} -Y''_{12_B} = 6\, s + 24 \\ Y''_{11_B} = Y''_{22_B} = 6\, s + 24 \end{cases}$$

Hemos removido un capacitor derivado de valor 24 como se muestra en la figura (6-43).

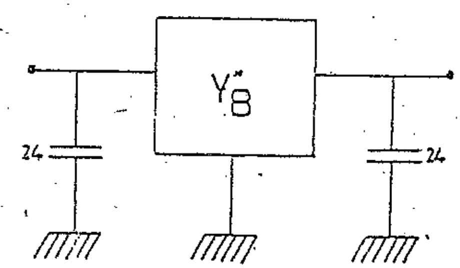


FIGURA (6.43.)

Finalmente resulta $Y''_{12_B} = Y''_{11_B} = Y''_{22_B} = 6\, s + 24$ que eléctricamente está representada por el cuadripolo de la figura (6-44)

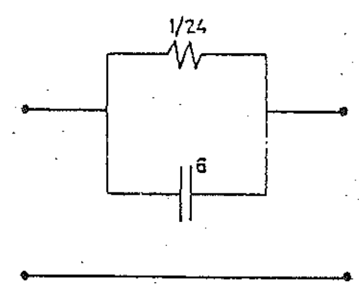


FIGURA (6.44.)

Y el cuadripolo $|B|$ completo será el ilustrado en la figura (6-45)

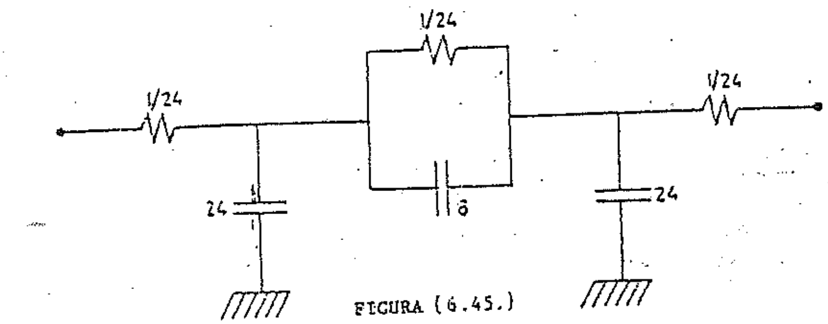


FIGURA (6.45.)

Finalmente la red completa que satisface nuestro problema será la de la figura (6-46)

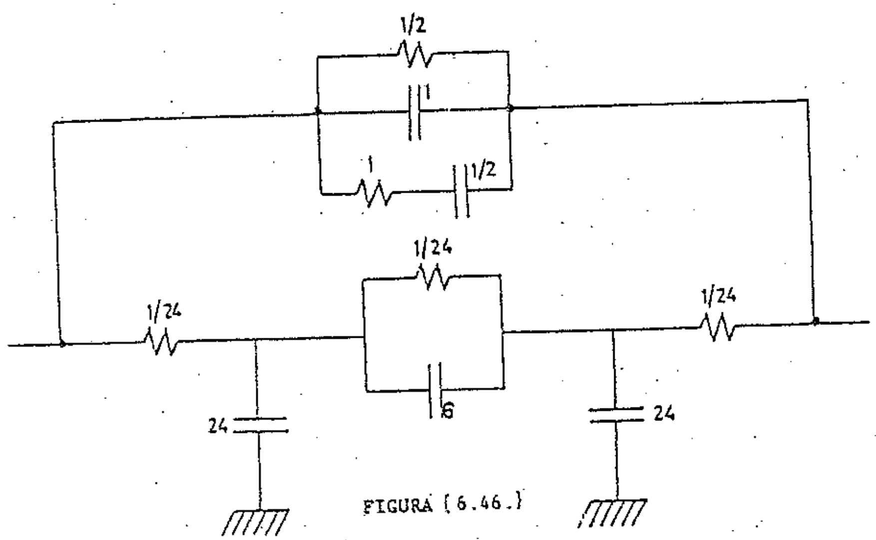


FIGURA (6.46.)

* Por supuesto que esta realización no es la única capaz de resolver el problema. Una variante posible sería la siguiente:

Luego de retirar R = 1/24 , de la red $|B|$ quedaría

$$Z'_{12_B} = Z_{12_B} = \frac{1}{48\,s} - \frac{\frac{1}{24}}{3s+4}$$

Supongamos que a esta Z'_{12_B} le removemos parcialmente el polo de corriente continua, o sea:

$$Z''_{12_B} = Z'_{12_B} - \frac{k}{s} = \frac{1}{48\,s} - \frac{\frac{1}{24}}{3s+4} - \frac{k}{s}$$

$$Z''_{12_B} = \frac{(1-144\,k)s + 4(1-48\,k)}{48\,s\,(3s+4)}$$

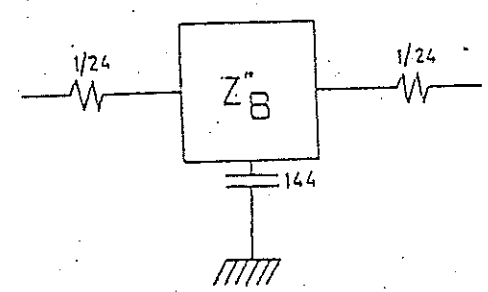
Para conservar positivos los coeficientes del polinomio numerador de $Z''_{12_B}(s)$ debemos adoptar $k \leq 1/144$.

Si adoptamos $k = 1/144$ resulta:

$$Z''_{12_B} = \frac{1}{18\,s\,(3s+4)}$$

Y por tratarse de un parámetro con valor nulo para $s \to \infty$, los parámetros Y tendrán allí un polo no compacto.

O sea que el cuadripolo $|B|$ se va armando como indica la figura (6-47)

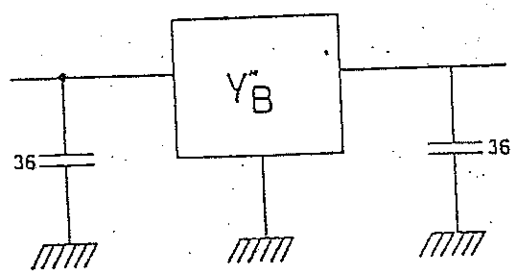


FIGURA(6.47.)

resultando
$$\begin{cases} -Y''_{12_B} = 24 \\ Y''_{22_B} = Y''_{11_B} = 24 + 36\,s \end{cases}$$

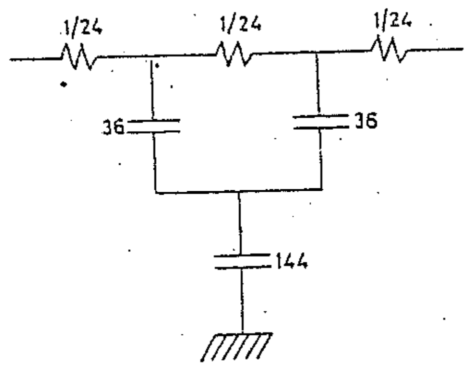
Removemos el exceso de polo no compacto para $s \to \infty$ (figura 6-48) y resultará una π degenerada integrada por un resistor 1/24

FIGURA (6.48.)



El cuadripolo |B| completo será entonces el que muestra la figura (6-49), que en paralelo con el |A| hallado anteriormente nos resolverá el mismo problema.

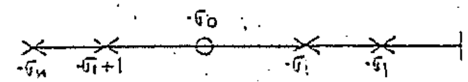
FIGURA (6.49.)



Consideremos finalmente el último caso de descomposición de Osaki.

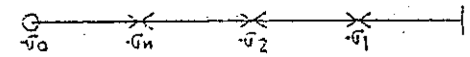
CASO C Ceros reales y negativos

En este caso P(s) es posible expresarlo como $P(s) = (s + \sigma_0)\,P_0(s)$ y según la ubicación, sobre el semieje real negativo del plano complejo, de este cero, se podrán dar las siguientes circunstancias



(C-1) Cero comprendido entre dos polos finitos de $-Y_{12}(s)$.

(C-2) Cero intercalado entre $s = 0$ y el primer finito de $-Y_{12}(s)$.



(C-3) Cero ubicado entre el último polo de $-Y_{12}(s)$ a ∞.

Las descomposiciones propuestas por Osaki son las siguientes:

CASO C-1 $P(s) = (s + \sigma_0)\,P_0(s) = k_1(s + \sigma_i)\,P_0(s) + k_2\,(s + \sigma_{i+1})\,P_0(s)$

(6 - 37)

Las constantes k_1 y k_2 se evalúan haciendo $s = -\sigma_{i+1}$ y $s = -\sigma_i$ respectivamente, obteniéndose:

$$k_1 = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_0}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} \qquad (6 - 38)$$

y

$$k_2 = \frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} \qquad (6 - 39)$$

resultando $P_1(s)$ y $P_2(s)$ dados por las expresiones

$$\begin{cases} P_1(s) = k_1(s + \sigma_i)\,P_0(s) & (6 - 40) \\ P_2(s) = k_2(s + \sigma_{i+1})\,P_0(s) & (6 - 41) \end{cases}$$

Donde $P_0(s)$ está dado por

$$P_0(s) = \frac{P(s)}{s + \sigma_0} \qquad (6-42)$$

<u>CASO C-2</u> $\quad P(s) = P_0(s)\,(s + \sigma_0) = k_1(s + \sigma_1)\,P_0(s) + k_2 s\,P_0(s) \qquad (6-43)$

k_1 y k_2 se evalúan haciendo $s = 0$ y $s = -\sigma_1$ respectivamente, obteniéndose:

$$k_1 = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \qquad (6-44)$$

y

$$k_2 = 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \qquad (6-45)$$

y ahora $P_1(s)$ y $P_2(s)$ estarán dados por

$$\begin{cases} P_1(s) = k_1\,(s + \sigma_1)\,P_0(s) & (6-46) \\ P_2(s) = k_2\,s\,P_0(s) & (6-47) \end{cases}$$

<u>CASO C-3</u> $\quad P(s) = (s + \sigma_0)\,P_0(s) = k_1(s + \sigma_n)\,P_0(s) + k_2\,P_0(s) \qquad (6-48)$

Para $s = -\sigma_n$ resulta $k_2 = \sigma_0 - \sigma_n \qquad (6-49)$

Para $s = 0$ resulta $k_1 = \frac{\sigma_0 - k_2}{\sigma_n} = 1 \qquad (6-50)$

o sea

$$\begin{cases} P_1(s) = k_1(s + \sigma_n)\,P_0(s) & (6-51) \\ P_2(s) = k_2\,P_0(s) = P_3(s) & (6-52) \end{cases}$$

6.3.2. <u>APLICACION A TRANSFERENCIAS DE NO MINIMA FASE</u>

La condición de mínima fase es ciertamente una condición necesaria para que los coeficientes del numerador de $-Y_{12}(s)$ resulten reales y positivos, pero no es suficiente. En efecto, puede ocurrir que todos los coeficientes del numerador de $-Y_{12}(s)$ sean reales y positivos y éste no sea un polinomio de Hurwitz, y por consiguiente $-Y_{12}(s)$ resulta una función de no mínima fase.
Si bien no es del todo cierto que el teorema de Osaki pueda aplicarse con éxito, hay algunos casos donde es posible sintetizar funciones de no mínima fase aplicando el mencionado teorema y su consecuente descomposición. Analicemos el siguiente ejemplo numérico:

<u>PROBLEMA 6 - 10</u>

sea

$$Y_{12}(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 2}{(s+1)\,(s+2)}$$

Ahora $s^3 + s^2 + s + 2$ no es Hurwitz y habrá algún cero de $-Y_{12}(s)$ en el semiplano derecho del plano complejo

Si expandimos $-Y_{12}(s)$ en fracciones parciales, obtendremos

$$-Y_{12}(s) = 1 + s - \frac{s}{s+1} - \frac{2\,s}{s+2}$$

Agrupemos las fracciones de modo que resulten definidas $Y_{12A}(s)$ e $Y_{12B}(s)$, o sea:

$$-Y_{12}(s) = \left(1 - \frac{s}{s+1}\right) + \left(s - \frac{2\,s}{s+2}\right)$$

adoptando para $-Y_{12A}(s)$ e $-Y_{12B}(s)$ las siguientes expresiones:

$$-Y_{12A}(s) = 1 - \frac{s}{s+1}$$

$$-Y_{12B} = s - \frac{2\,s}{s+2}$$

A partir de éstas armemos un juego de parámetros compactos, o sea:

$$Y_{11A} = Y_{22A} = 1 + \frac{s}{s+1}$$

$$Y_{11B} = Y_{22B} = s + \frac{2\,s}{s+2}$$

Como se observa, en términos de los parámetros Y las redes no son físicamente realizables como π, ya que tanto Y_{12A} como Y_{12B} no son funciones reales positivas.

Transformemos las redes π en T, obteniendo:

$$|A| \quad \begin{cases} Z_{12A} = \dfrac{-Y_{12A}}{|Y|} = \dfrac{1}{4s} \\ Z_{11A} = Z_{22A} = \dfrac{Y_{11}}{|Y|} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4s} \end{cases}$$

$$|B| \quad \begin{cases} Z_{12B} = \dfrac{-Y_{12B}}{|Y|} = \dfrac{1}{8} \\ Z_{11B} = Z_{22B} = \dfrac{Y_{11}}{|Y|} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2s} \end{cases}$$

Finalmente, conectando en paralelo los cuadripolos $|A|$ y $|B|$, resolveremos el problema planteado mediante una red RC doble T, compacta y simétrica, como se observa en la figura (6-50)

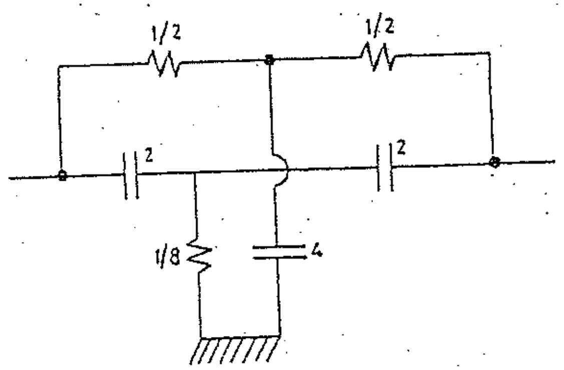


FIGURA (6.50.)

6.3.3. EXTENSION A LAS FORMAS ASIMETRICAS

Hasta el momento hemos trabajado con redes simétricas sólo por simplicidad de cálculo, veamos ahora un ejemplo de transferencia, resuelta mediante una red asimétrica.

PROBLEMA 6 - 11

Sintetizar el siguiente juego de parámetros admitancia mediante un cuadripolo RC.

$$\begin{cases} -Y_{12}(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 2}{s+1} \\ Y_{11}(s) = \dfrac{s^2 + \frac{7}{2}s + 2}{s+1} \\ Y_{22}(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 2}{s+1} \end{cases}$$

Vamos a expandir en fracciones parciales

$$\begin{cases} -Y_{12}(s) = s + 2 - \dfrac{s}{s+1} \\ Y_{11}(s) = s + 2 + \dfrac{\frac{1}{2}s}{s+1} \\ Y_{22}(s) = s + 2 + \dfrac{2s}{s+1} \end{cases}$$

Como vemos, se trata de un juego de parámetros compactos, completos, asimétricos y de mínima fase.

No podemos intentar reducción alguna a través de los parámetros Z.

Tomemos entonces el numerador de $-Y_{12}(s)$ y descompongámoslo de forma que resulte sencillo aplicarle Osaki.

O sea $\quad P(s) = s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$

De donde resulta $\quad \sigma_0 = 1 \;$ y $\; \omega_0 = 1$

Además el único polo que posee $Y_{12}(s)$ ocurre en $\sigma_1 = 1$

Calculemos kmin

$$k_0 = \sigma_0^2 + \omega_0^2 = 2$$

$$k_1 = (\sigma_0 - \sigma_1)^2 + \omega_0^2 = 1$$

o sea $\quad k_m = 1 \;$ y $\; \sigma_m = \sigma_1 = 1$

$$P_0(s) = \frac{P(s)}{(s+\sigma_0)^2 + \omega_0^2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)^2 + 1} = 1$$

$$\begin{cases} P_1(s) = (s+\sigma_m)(s + 2\sigma_0 - \sigma_m)\, P_0(s) = (s+1)^2 \\ P_2(s) = k_m P_0(s) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -Y_{21A}(s) = \dfrac{P_1(s)}{Q(s)} = (s+1) \\ -Y_{12B}(s) = \dfrac{P_2(s)}{Q(s)} = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

A partir del conocimiento de estos parámetros y los datos originales del problema, podemos hallar los restantes. O sea: adoptemos para el cuadripolo $|A|$ el siguiente juego de parámetros

$$|A| \qquad \begin{cases} -y_{21A}(s) = s+1 \\ y_{11A}(s) = s+1 \\ y_{22A}(s) = s+1 \end{cases}$$

Esta adopción simplifica sobremanera la síntesis del cuadripolo $|A|$ y no complica demasiado la del $|B|$.

Los parámetros Y del cuadripolo $|B|$ resultarán como diferencia entre el dato (y_{11}, y_{22} e y_{12}) y los parámetros del cuadripolo adoptado como $|A|$, o sea:

$$|B| \qquad \begin{cases} -y_{12B} = -|y_{12}(s) - y_{12A}(s)| = 1 - \dfrac{s}{s+1} = \dfrac{1}{s+1} \\ y_{11B} = y_{11}(s) - y_{11A}(s) = 1 + \dfrac{\frac{1}{2}s}{s+1} \\ y_{22B} = y_{22}(s) - y_{22A}(s) = 1 + \dfrac{2s}{s+1} \end{cases}$$

El cuadripolo $|A|$ resulta una π degenerada, de síntesis inmediata. Mientras que el cuadripolo $|B|$ caracterizado por parámetros compactos y sin polo en alta frecuencia tendrá parámetros Z caracterizados por un valor constante no compacto para $s \to \infty$.

o sea

$$\begin{cases} Z_{12B}(s) = \dfrac{-Y_{12B}(s)}{|Y_B|} \\ Z_{11B}(s) = \dfrac{Y_{22B}(s)}{|Y_B|} \\ Z_{22B}(s) = \dfrac{Y_{11B}(s)}{|Y_B|} \end{cases}$$

Ahora $|Y_B| = Y_{11B} Y_{22B} - Y_{12B}^2$ ya que el cuadripolo es asimétrico.

o sea:

$$\begin{cases} Z_{12B}(s) = \dfrac{2/9}{s} \\ Z_{11B}(s) = \dfrac{2/9}{s} + \dfrac{2}{3} \\ Z_{22B}(s) = \dfrac{2/9}{s} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vale decir que la red que resuelve el problema será la ilustrada en la figura (6-51)

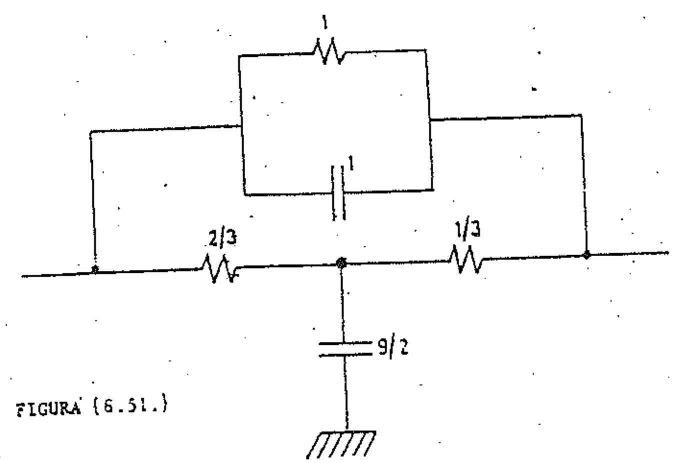


FIGURA (6.51.)

6.4. METODO DE LAS REDES L

6.4.1. REALIZACION DESBALANCEADA

Trataremos primero el caso de una función transferencia caracterizada por no poseer ceros sobre el semieje real positivo del plano complejo. Los ceros de transferencia podrán estar en cualquier lugar del plano complejo excepto en el mencionado semieje, se tratará por lo tanto de una transferencia que no es necesariamente de mínima fase.

Supongamos una cierta transferencia de tensiones en vacío $T_{21}(s)$, que representaremos genéricamente como indica la expresión (6 - 53)

$$T_{21}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_n s^n} \qquad (6 - 53)$$

En la cual, ningún coeficiente del polinomio numerador es negativo y además son menores que sus correspondientes en el denominador, o sea

$$a_i < b_i \quad \text{para todo } i \qquad (6 - 54)$$

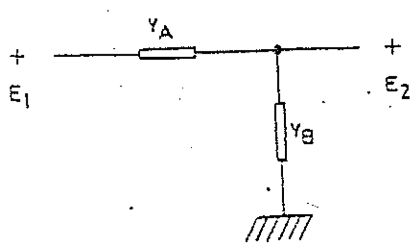
Por simplicidad, supongamos que $T_{21}(s)$ es de primer orden

$$T_{21}(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0} \qquad (6 - 55)$$

Esta transferencia de tensiones podemos implementarla mediante la red L de la figura (6-52), de cuyo análisis resulta

$$T_{21}(s) = \frac{Y_A}{Y_A + Y_B} \qquad (6 - 56)$$

FIGURA (6.52.)



Comparando (6 - 55) y (6 - 56) resulta

$$\begin{cases} Y_A = a_1 s + a_0 & (6 - 57\text{ a}) \\ Y_B = (b_1 - a_1)\, s + (b_0 - a_0) & (6 - 57\text{ b}) \end{cases}$$

La (6 - 57) sugiere la siguiente red L para satisfacer la (6 - 55)

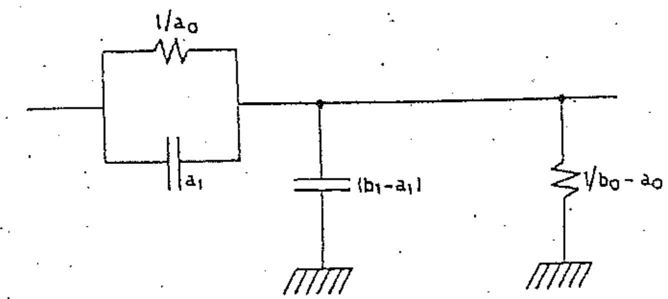


FIGURA (6.53.)

Fijemos ahora nuestra atención en la (6-53), nuestro objetivo consistirá en obtener dos funciones transferencias más sencillas a partir de ésta y de tal modo que al conectarlas en paralelo satisfagan la transferencia original.
Si estas dos transferencias componentes resultaran de primer orden las podríamos realizar mediante un par de redes L, si en cambio resultaran de orden superior, trataremos de efectuar una nueva descomposición, con el objeto de obtener un conjunto de transferencias de primer orden. Este será entonces nuestro esquema general.

Nuestro dato será

$$T_{21}(s) = \left.\frac{E_2(s)}{E_1(s)}\right|_{I_2 = 0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (6 - 58)$$

Sabiendo además que

$$T_{21}(s) = \left.\frac{E_2(s)}{E_1(s)}\right|_{I_2 = 0} = \frac{-Y_{21}(s)}{Y_{22}(s)} \qquad (6 - 59)$$

De las expresiones (6 - 58) y (6 - 59) intentemos la siguiente descomposición:

$$T_{21}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P_A(s) + P_B(s)}{Q_A(s) + Q_B(s)} = \frac{\frac{P_A(s)}{G(s)} + \frac{P_B(s)}{G(s)}}{\frac{Q_A(s)}{G(s)} + \frac{Q_B(s)}{G(s)}} \qquad (6 - 60)$$

De (6 - 59) y (6 - 60) se obtiene

$$T_{21}(s) = \frac{-Y_{21}(s)}{Y_{22}(s)} = \frac{-(Y_{21A} + Y_{21B})}{Y_{22A} + Y_{22B}} \qquad (6 - 61)$$

Comparando (6 - 61) con (6 - 60) resultan las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} -Y_{21A}(s) = \dfrac{P_A(s)}{G(s)} \\ Y_{22A}(s) = \dfrac{Q_A(s)}{G(s)} \end{cases} \qquad (6 - 62)$$

$$\begin{cases} -Y_{21B}(s) = \dfrac{P_B(s)}{G(s)} \\ Y_{22B}(s) = \dfrac{Q_B(s)}{G(s)} \end{cases} \qquad (6 - 63)$$

Por otra parte las transferencias individuales de tensión de cada cuadripolo resultarán dadas por

$$T_{21A}(s) = \frac{-Y_{21A}}{Y_{22A}} = \frac{P_A(s)}{Q_A(s)} \qquad (6 - 64)$$

$$T_{21B}(s) = \frac{-Y_{21B}}{Y_{22B}} = \frac{P_B(s)}{Q_B(s)} \qquad (6 - 65)$$

De las conocidas propiedades de las funciones transferencia y las de los parámetros admitancia correspondientes a cuadripolos RC, podemos establecer los requisitos que deberán cumplir los polinomios $Q_A(s)$, $Q_B(s)$, $P_B(s)$ y $G(s)$.

Si deseamos implementar la transferencia mediante un cuadripolo RC desbalanceado estos requisitos serán:

1) $G(s)$ sólo debe tener raíces reales y negativas alternando con las raíces de los polinomios $Q_A(s)$ y $Q_B(s)$. Además, la raíz más próxima al origen pertenecerá a $Q_A(s)$ y $Q_B(s)$ respecto de $G(s)$.

2) $Q_A(s)$ y $Q_B(s)$ sólo tendrán raíces reales y negativas.

3) Ningún coeficiente de $P_A(s)$ ni de $P_B(s)$ será negativo y además si $T_{21A}(s)$ y $T_{21B}(s)$ son transferencias correspondientes a cuadripolos RC desbalanceados, cada coeficiente de $P_A(s)$ y $P_B(s)$ será menor que los correspondientes a $Q_A(s)$ y $Q_B(s)$ respectivamente.

Suponiendo que estas propiedades se cumplen, el proceso es el siguiente: la primera descomposición dará lugar a un par de transferencias componentes. Operando nuevamente sobre cada una de estas transferencias obtendremos dos de cada una y así siguiendo hasta lograr expresar la transferencia propuesta como asociación de varias transferencias componentes de primer orden.

El proceso de descomposición de los polinomios $P(s)$ y $Q(s)$ consiste en asignar las mayores potencias de $P(s)$ al polinomio $P_A(s)$ y las menores al $P_B(s)$. Análogamente se procede con $Q(s)$. En estas circunstancias es factible admitir que tanto $P_A(s)$ como $Q_A(s)$ tendrán en común un factor "s" y por consiguiente se cancelarán en el cociente que define $T_{12A}(s)$. Si el cuadripolo $|A|$ lo sintetizamos mediante una red L que satisfaga $T_{12A}(s)$, es fácil admitir que el mismo no satisfará simultáneamente a $Y_{22A}(s)$. Esto es posible de interpretar siguiendo los pasos a continuación expuestos.

Partimos del conjunto de expresiones (6 - 62) y (6 - 64)

$$\begin{cases} -Y_{21A}(s) = \dfrac{P_A(s)}{G(s)} \\ Y_{22A}(s) = \dfrac{Q_A(s)}{G(s)} \\ T_{21A}(s) = \dfrac{-Y_{21A}}{Y_{22A}} = \dfrac{P_A(s)}{Q_A(s)} \end{cases}$$

La expresión de $T_{21A}(s)$ de acuerdo a lo expuesto precedentemente, la podemos describir como

$$T_{21A}(s) = \frac{s\,P'_A(s)}{s\,Q'_A(s)} = \frac{P'_A(s)}{Q'_A(s)} = \frac{\dfrac{P'_A(s)}{G(s)}}{\dfrac{Q'_A(s)}{G(s)}} = \frac{-Y'_{21A}}{Y'_{22A}} \qquad (6 - 66)$$

Además $Y_{22A}(s) = \dfrac{s\,Q'_A(s)}{G(s)}$, o sea que expandiendo su inversa obtendremos la (6 - 67)

$$\frac{1}{Y_{22A}(s)} = \frac{G(s)}{s\,Q'_A(s)} = \frac{k_0}{s} + \frac{G_1(s)}{Q'_A(s)} = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{Y'_{22A}(s)} \qquad (6 - 67)$$

Esta última expresión nos sugiere el cuadripolo de la figura (6-54)

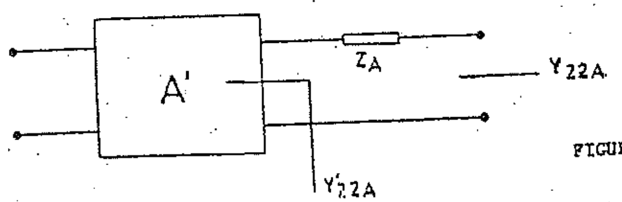


FIGURA (6.54.)

Indudablemente que este cuadripolo tiene la misma transferencia de tensión en vacío que el caracterizado por Y'_{22A} (A'), pero ahora el cuadripolo completo satisface al mismo tiempo a $T_{21A}(s)$ y a $Y_{22A}(s)$, como era nuestro propósito.

O sea que el proceso de síntesis consistirá en:

1º) A partir de $T_{12A}(s) = \dfrac{-Y'_{21A}}{Y'_{22A}} = \dfrac{P'_A(s)}{Q'_A(s)}$ se sintetiza el cuadripolo A'.

2º) Se multiplican todas las admitancias que integran |A'| por el factor que afecta al cociente $\dfrac{Q'_A(s)}{G_1(s)}$

3º) Se agrega en serie y en su rama de salida la impedancia de corrección Z_A.

Un razonamiento enteramente análogo se emplea para sintetizar el cuadripolo |B|. Partimos del conjunto de expresiones (6 - 63) y la (6 - 65)

$$\left|\begin{array}{l} -Y_{21B}(s) = \dfrac{P_B(s)}{G(s)} \\[2ex] Y_{22B}(s) = \dfrac{Q_B(s)}{G(s)} \\[2ex] T_{21B}(s) = \dfrac{P_B(s)}{Q_B(s)} \end{array}\right.$$

Sintetizamos mediante una "L" el cuadripolo que satisface a $T_{21B}(s)$, luego como este cuadripolo no satisface simultáneamente a $Y_{22B}(s)$, procedemos a corregirlo expandiendo en fracciones parciales $\dfrac{1}{Y_{22B}(s)}$ obteniendo

$$\frac{1}{Y_{22B}(s)} = \frac{G(s)}{Q_B(s)} = \frac{1}{Y_{22\infty}} + \frac{G_2(s)}{Q_B(s)} = Z_B + \frac{1}{Y'_{22B}(s)} \qquad (6 - 68)$$

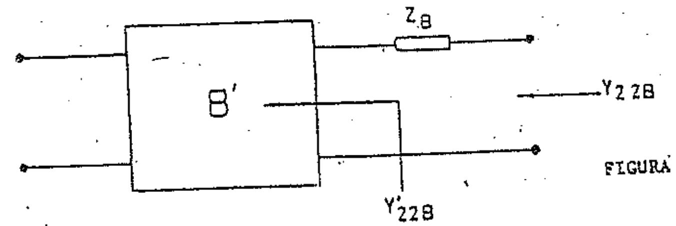


FIGURA (6.55.)

La (6 - 68) sugiere el esquema de la figura (6-55)

Entonces:

1º) Se sintetiza el cuadripolo B' a partir de $T_{21B}(s)$

2º) Se modifica el nivel de su admitancia en el factor que afecta el cociente $Q_B(s)/G_2(s)$

3º) Se agrega en serie con la salida la impedancia de corrección Z_B

Hemos discutido un método de síntesis aplicable a $T_{21}(s)$ supuesta una transferencia de tensiones en vacío, no obstante con ligeras variantes podemos aplicarlo a otras funciones transferencia, como por ejemplo la sugerida por el esquema de la figura (6-56)

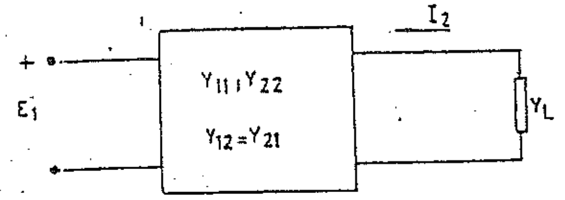


FIGURA (6.56.)

Para esta transferencia cargada, resulta:

$$-Y_{21}(s) = \left.\frac{I_2}{E_1}\right|_{Y_L} = \frac{-y_{12}\,Y_L}{Y_L + y_{22}} \qquad (6-69)$$

Si la carga es unitaria la (6 - 69) se transforma en

$$-Y_{21}(s) = \left.\frac{I_2}{E_1}\right|_{Y_L=1} = \frac{-y_{12}}{1+y_{22}} \qquad (6-70)$$

Si la carga no resultara unitaria podríamos normalizar con respecto a la misma, transformando la (6 - 69) en la (6 - 70) y luego del proceso de síntesis y antes de conectar la carga tendríamos que desnormalizar el cuadripolo.

En este caso podemos expresar la transferencia $-Y_{12}(s)$ como sigue:

$$-Y_{12}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q_A(s)+Q_B(s)} = \frac{\dfrac{P(s)}{Q_A(s)}}{1+\dfrac{Q_B(s)}{Q_A(s)}} \qquad (6-71)$$

De (6 - 71) y (6 - 70) surge

$$\begin{cases} -y_{12}(s) = P(s)/Q_A(s) & (6-71\ a) \\ y_{22}(s) = Q_B(s)/Q_A(s) & (6-71\ b) \end{cases}$$

Estos últimos son parámetros propios del cuadripolo excluída o normalizada la carga. La transferencia de tensiones para este cuadripolo está dada por

$$T'_{12}(s) = \frac{-y_{12}(s)}{y_{22}(s)} = \frac{P(s)}{Q_B(s)} \qquad (6-72)$$

Y ahora estamos en condiciones de aplicar el procedimiento de síntesis anteriormente expuesto recordando que la $y_{22}(s)$ requerida la obtendremos modificando el nivel de las admitancias del cuadripolo que satisface la (6 - 72) y conectando en serie una cierta impedancia en su salida que podemos evaluar como sugiere la expresión (6 - 73)

$$\frac{1}{y_{22}(s)} = \frac{Q_A(s)}{Q_B(s)} = Z + \frac{1}{y'_{22}(s)} \qquad (6-73)$$

La realización asumirá el aspecto de la figura (6-57)

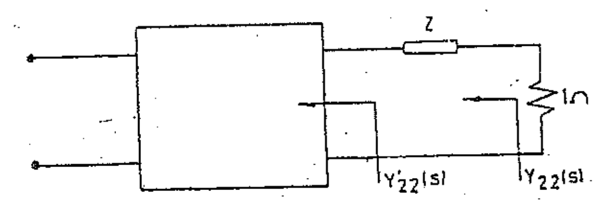


FIGURA (6.57.)

Z no afecta la función transferencia $T'_{12}(s)$ pero es necesaria para garantizar los valores correctos de $y_{22}(s)$ y $-y_{12}(s)$.

PROBLEMA 6 - 12

Sintetizar $\quad -Y_{12}(s) = K\,\dfrac{s^2+2s+2}{3s^2+9s+5} \quad$ con $R_L = 1\ \Omega$

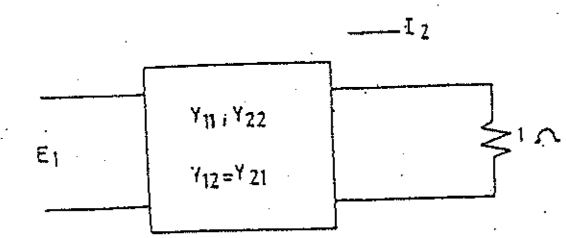


FIGURA (6.58.)

1º) Descomponemos el polinomio denominador de $-Y_{12}(s)$

$$-Y_{12}(s) = K\,\frac{s^2 + 2s + 2}{(2s + 1)\ (s + 2) + (s + 1)\ (s + 3)}$$

y lo aproximamos a la forma dada por (6 - 70)

$$-Y_{12}(s) = K\,\frac{\dfrac{s^2 + 2s + 2}{(s + 1)\ (s + 3)}}{1 + \dfrac{(2s + 1)\ (s + 2)}{(s + 1)\ (s + 3)}}$$

o sea

$$\begin{cases} -y_{12}(s) = K\,\dfrac{s^2 + 2s + 2}{(s + 1)\ (s + 3)} \\[2ex] y_{22}(s) = \dfrac{(2s + 1)\ (s + 2)}{(s + 1)\ (s + 3)} \end{cases}$$

Además $\quad T'_{12}(s) = \dfrac{-y_{12}(s)}{y_{22}(s)} = K\,\dfrac{s^2 + 2s + 2}{(2s + 1)\ (s + 2)}$

2º) Expandimos

$$\frac{1}{y_{22}(s)} = \frac{(s + 1)\ (s + 3)}{(2s + 1)\ (s + 2)}$$

$$\frac{1}{y_{22}(s)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\,s + 2}{(2s + 1)\ (s + 2)}$$

o sea $\quad Z_{corrección} = \dfrac{1}{2} \qquad y'_{22}(s) = \dfrac{2}{3}\ \dfrac{(2s + 1)\ (s + 2)}{(s + 4/3)}$

obteniendo la estructura de la figura (6-59)

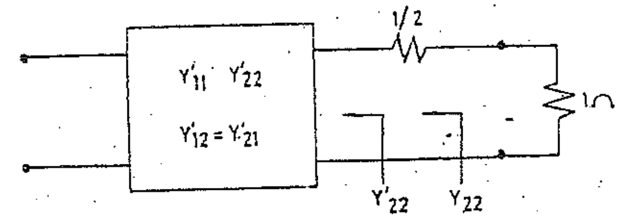


FIGURA (6.59.)

NO OLVIDARSE QUE TODAS LAS ADMITANCIAS DEL CUADRIPOLO DEFINIDO POR y'_{22} DEBERAN MODIFICAR SU NIVEL EN EL FACTOR $\frac{2}{3}$

* Para simplificar los cálculos supongamos $k = 1$

3º) Ahora podemos sintetizar $T'_{12}(s)$ para lo cual descomponemos su polinomio numerador y denominador como sigue:

$$T'_{12}(s) = \frac{(s^2 + 2s) + 2}{(2s^2 + as) + \left[(5 - a)\ s + 2\right]}$$

Dividimos numerador y denominador de $T'_{12}(s)$ por un polinomio auxiliar $G(s)$ que en este caso resultará lineal. Como este polinomio fija el polo de $y'_{22}(s)$ adoptamos

$$G(s) = s + \frac{4}{3}$$

resultando

$$\begin{cases} -y_{12A} = \dfrac{s^2 + 2s}{s + 4/3} & -y_{12B} = \dfrac{2}{s + 4/3} \\[2ex] y_{22A} = \dfrac{2s^2 + as}{s + 4/3} & y_{22B} = \dfrac{(5 - a)s + 2}{s + 4/3} \\[2ex] T_{21A} = \dfrac{s + 2}{2s + a} & T_{21B} = \dfrac{2}{(5 - a)s + 2} \end{cases}$$

"a" no puede ser mayor que 5; además deberá forzar la alternancia de polos-ceros de y_{22A} e y_{22B} para que estos parámetros representen una red RC. Esta consideración nos permite escribir las siguientes desigualdades:

$a < 5 \qquad$ y $\qquad \frac{8}{3} < a < \frac{7}{2}$

adoptamos , $a = 3$

4º) Ahora podemos realizar T_{21A} y T_{21B} mediante redes L tal como lo indican las figuras (6-60) y (6-61)

$$T_{21A} = \frac{s+2}{2s+3} \qquad T_{21B} = \frac{2}{2s+2}$$

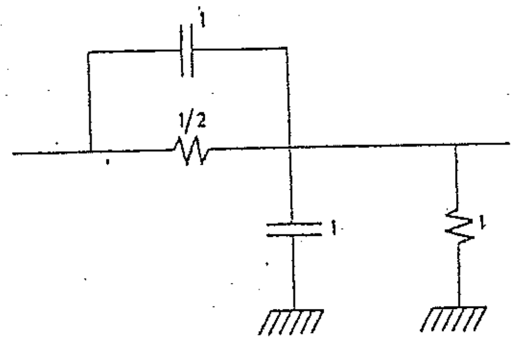


FIGURA (6.60.)

CUADRIPOLO A'

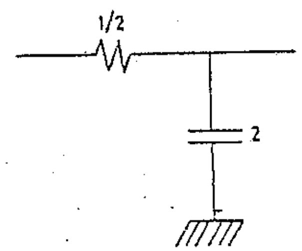


FIGURA (6.61.)

CUADRIPOLO B'

Si bien es cierto que el cuadripolo $|A'|$ satisface $T_{12A}(s)$ no satisface simultaneamente a $y_{22A}(s)$. En efecto, la y_{22} del cuadripolo $|A'|$ está dada por

$$y_{22A'} = 2s + 2 \quad \text{mientras que} \quad y_{22A} = \frac{s\,(2s+3)}{s + 4/3}$$

Para corregir este defecto hagamos una expansión sobre

$$\frac{1}{y_{22A}} = \frac{s + 4/3}{s\,(2s+3)} = \frac{k_o}{s} + \frac{1}{y'_{22A}} = \frac{4/9}{s} + \frac{1}{Y'_{22A}}$$

De esta última expresión podemos calcular

$$\frac{1}{y'_{22A}} = \frac{s + 4/3}{s(2s+3)} - \frac{4/9}{s} = \frac{1/9}{2s+3}$$

o sea

$$\frac{1}{y_{22A}} = \frac{4/9}{s} + \frac{1}{9\,(2s+3)}$$

Esta última expresión nos sugiere: 1º) Multiplicar por 9 el valor de cada admicancia que integra el cuadripolo $|A'|$ y 2º) Agregar en serie en su rama de salida un capacitor de valor 9/4

[A]

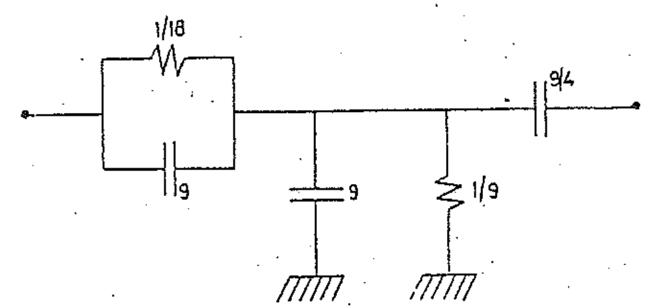


FIGURA (6.62.)

El cuadripolo de la figura (6-62), como es fácil verificar, satisface simultáneamente a y_{22A} Y T_{21A}.

Procediendo análogamente con el cuadripolo $|B'|$ obtendremos el cuadripolo $|B|$.

$$\frac{1}{y_{22}\ B} = \frac{s + 4/3}{2s + 2} = \frac{1}{y_{22}\ B\ \infty} + \frac{1}{y'_{22}\ B} = \frac{1}{2} + \frac{y^{1/3}}{2s + 2}$$

o sea

$$y'_{22}\ B = 3(2s + 2)$$

1°) Multiplicamos por tres al nivel de cada admitancia del cuadripolo $|B'|$.

2°) Agregamos en serie en su salida una resistencia 1/2.

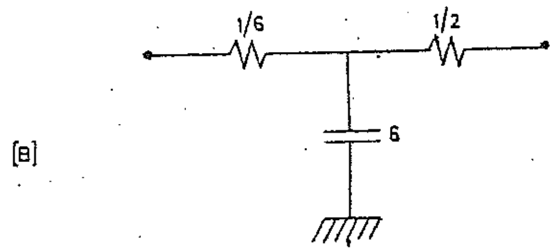


FIGURA (6.63.)

El cuadripolo de la Fig (6.63) ahora sí satisface simultáneamente a $T_{12}B$ y $y_{22}B$.

Finalmente, para llegar a la estructura que satisface $-y_{12}$ (s) dato debemos: primero modificar el nivel de admitancias de los cuadripolos $|A|$ y $|B|$ en el factor 2/3 y luego conectarlas en paralelo, no olvidando de agregar en serie con la salida el resistor de 1/2 y la carga como indica la Fig (6.59) obteniéndose el cuadripolo de la Fig (6.64).

$$D + 2\ (Y_1 + Y_2 + Y_3)\ (Y_4 + Y_5 + Y_6) \qquad (6 - 74)$$

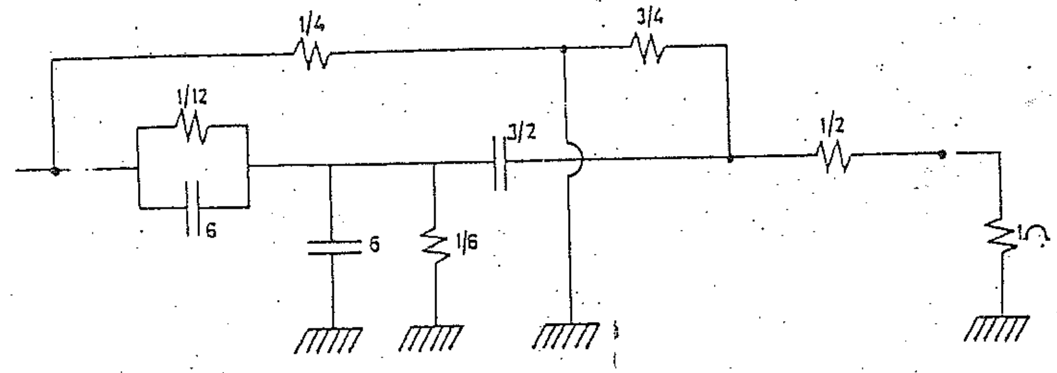
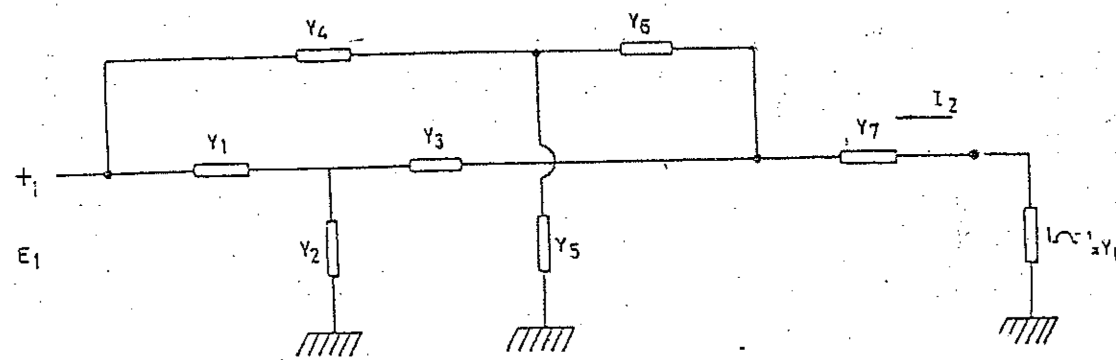


FIGURA (6.64.)

Es posible verificar que la red hallada satisface la $- y_{12}(s)$ propuesta, evaluando la expresión (6.74) sugerida por la estructura que muestra la Fig (6.65)

FIGURA (6.65.)



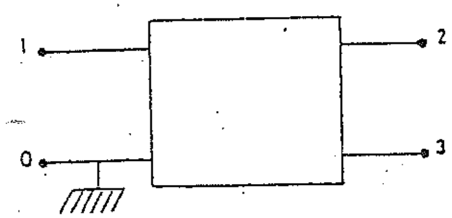
$$Y_{21}\ (s) = \frac{2}{3} \left| \frac{Y_1\ Y_3\ (Y_4 + Y_5 + Y_6) + Y_4\ Y_5\ (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{[(Y_4 + Y_5 + Y_6)\ (Y_1 + Y_2)\ Y_3 + (Y_1 + Y_2 + Y_3)\ (Y_4 + Y_5)\ Y_6]} \right.$$

6.4.2. <u>REALIZACION BALANCFADA</u>

Hasta ahora vimos como las funciones transferencia de mínima fase y no mínima fase pueden realizarse con estructuras desbalanceadas, salvo el caso en el cual la transferencia presenta ceros sobre el semieje real positivo del plano complejo (ceros de transmisión reales y positivos).

Vamos a ver ahora como también es posible la síntesis en este caso mediante la conexión en "paralelo" de dos cuadripolos desbalanceados.

Escribamos la transferencia de tensiones para el siguiente cuadripolo, con salida balanceada:



$$\frac{E_{21}}{E_{10}} = \frac{E_{20}}{E_{10}} - \frac{E_{30}}{E_{10}} \qquad (6-75)$$

FIGURA (6.66.)

Cada una de las funciones transferencia del segundo miembro de la (6.75) corresponde a un cuadripolo desbalanceado. Los coeficientes del numerador de la transferencia dada, los de $P(s)$ en (6.76), pueden ser ahora negativos.

$$\frac{E_{21}}{E_{10}} = T_{21}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (6.76)$$

Esta circunstancia provocará la presencia de ceros de transmisión reales y positivos, pero en valor absoluto estos coeficientes negativos serán de menor valor que sus correspondientes en $Q(s)$. Si esta circunstancia se verifica podremos escribir:

$$T_{21}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P_1(s)}{Q(s)} - \frac{P_2(s)}{Q(s)} = T_{21}A(s) - T_{21}B(s) \qquad (6.77)$$

En la (6.77) $P_1(s)$ será el polinomio formado por todos los términos positivos de $P(s)$ y $P_2(s)$ el integrado por todos los negativos.

En estas condiciones las funciones $T_{21}A(s)$ y $T_{21}B(s)$ las podremos sintetizar empleando, por ejemplo, el método de las redes L vistas en el apartado anterior. (6.4.1)

La realización completa se logra finalmente conectando los cuadripolos componentes que resuelven $T_{21}A$ y $T_{21}B$ como se ilustra en la Fig (6.67).

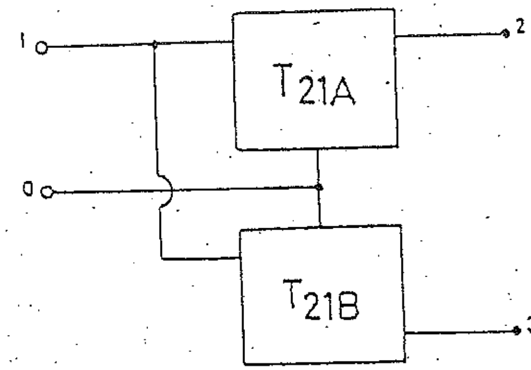


FIGURA (6.67.)

Para comprender más acabadamente el método resolvamos el siguiente problema:

PROBLEMA 6-13

$$T_{21}(s) = K\frac{4 - s}{(s+1)(s+2)} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad (6.78)$$

El valor de Kmáx surge de la condición de coeficiente: cada coeficiente de $P(s)$ es mayor que su correspondiente en $Q(s)$ y de la aplicación de esta condición a (6.78), resulta:

$$K_{máx} = 1/2 \text{ o sea } T_{21}(s) = \frac{2 - 1/2\, s}{(s+1)(s+2)}$$

$$T_{21}(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3s + 2} = T_{21}A(s) - T_{21}B(s)$$

a) Realización de $T_{21}A(s)$: Descompongamos el numerador y denominador de $T_{21}A$ como sigue:

$$T_{21}A(s) = \frac{\frac{0}{s+a} + \frac{2}{s+a}}{\frac{s^2+bs}{s+a} + \frac{(3-b)s+2}{s+a}}$$

de donde:

$$-Y_{21_C} = 0 \qquad\qquad -Y_{21_D} = \frac{2}{s+a}$$

$$Y_{22_C} = \frac{s^2 + bs}{s + a} \qquad\qquad Y_{22_D} = \frac{(3-b)\,s + 2}{s + a}$$

$$T_{21_C} = 0 \qquad\qquad T_{21_D} = \frac{2}{(3-b)\,s + 2}$$

Los subíndices C y D hacen referencia al par de cuadripolos que debemos sintetizar con el objeto de satisfacer $T_{21}A$.
Como Y_{22_C} e Y_{22_D} son F.R.P. del tipo RC se requerirá que:

$$a < b \quad y \quad \frac{2}{3-b} < a$$

para satisfacer estas desigualdades simultáneamente, adoptemos: $b = \frac{7}{4}$ y $a = \frac{5}{3}$ resultando:

$$-Y_{12_C} = 0 \qquad\qquad -Y_{12_D} = \frac{2}{s + 5/3}$$

$$Y_{22_C} = \frac{s^2 + \frac{7}{4}s}{s + a} \qquad\qquad Y_{22_D} = \frac{\frac{5}{4}s + 2}{s + 5/3}$$

$$T_{21_C} = 0 \qquad\qquad T_{21_D} = \frac{2}{\frac{5}{4}s + 2}$$

La transferencia de tensión de la red (C) es nula mientras que $Y_{22_C} \neq 0$ por consiguiente para solucionar el problema luego de hallar el cuadripolo (D) conectaremos en paralelo con su salida a Y_{22_C}.

Resolvamos el cuadripolo (D) a partir de T_{21_D} (s)

$$T_{21_D} = \frac{2}{\frac{5}{4}s + 2}$$

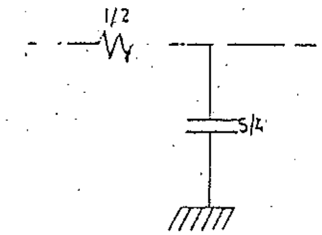


FIGURA (6.68.)

Mediante la red L indicada en la Fig. (6.68). Si ahora expandimos $\frac{1}{Y_{22D}}$ resulta:

$$\frac{1}{Y_{22_D}} = \frac{1}{Y_{22_D}(\infty)} + \frac{K_1}{\frac{5}{4}s + 2} = \frac{4}{5} + \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{4}s + 2}$$

de donde $Y'_{22_D} = 15\,(\frac{5}{4}s + 2)$ o sea que debemos multiplicar por (15) el nivel de las admitancias del cuadripolo obtenido y agregar en serie con su salida un resistor de ($\frac{4}{5}$) resultando la red de la Fig. (6.69)

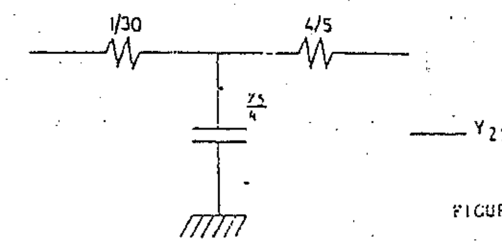


FIGURA (6.69.)

Por otra parte:

$$Y_{22_C} = \frac{s^2 + \frac{7}{4}s}{s + 5/3} = K_\infty s + \frac{K_1 s}{s + 5/3}$$

o sea

$$Y_{22_C} = s + \frac{\frac{1}{12}s}{s + \frac{5}{3}} = s + \frac{1}{12 + \frac{20}{s}}$$

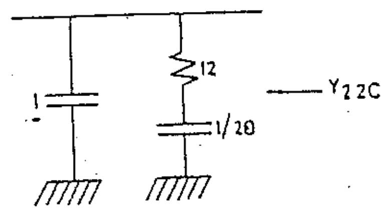


FIGURA (6.70.)

Conectando estos dos cuadripolos en "paralelo" habremos resuelto $T_{21_A}(s)$, como muestra la Fig. (6.71)

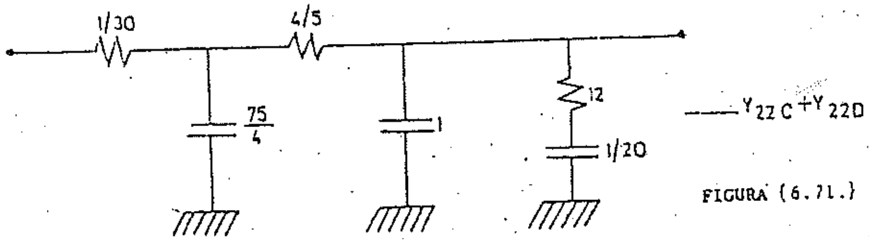


FIGURA (6.71.)

b) Realización de $T_{21_B}(s)$

$$T_{21_B} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3s+2} = \frac{\dfrac{0}{G(s)} + \dfrac{\frac{1}{2}s}{G(s)}}{\dfrac{s^2+3/2\,s}{G(s)} + \dfrac{3/2\,s+2}{G(s)}}$$

adoptemos $G(s) = s + \frac{7}{5}$

$$T_{21_B} = \frac{\dfrac{0}{s+\frac{7}{5}} + \dfrac{\frac{1}{2}s}{s+\frac{7}{5}}}{\dfrac{s^2+\frac{3}{2}s}{s+\frac{7}{5}} + \dfrac{\frac{3}{2}s+2}{s+\frac{7}{5}}}$$

y podemos a partir de esta expresión identificar los siguientes parámetros que definen los cuadripolos $|E|$ y $|F|$ que realizarán la transferencia $T_{21_B}(s)$.

$$-Y_{21_E} = 0 \qquad\qquad -Y_{21_F} = \frac{\frac{1}{2}s}{s+\frac{7}{5}}$$

$$Y_{22_E} = \frac{s^2+\frac{3}{2}s}{s+\frac{7}{5}} \qquad\qquad Y_{22_F} = \frac{\frac{3}{2}s+2}{s+\frac{7}{5}}$$

$$T_{21_E} = 0 \qquad\qquad T_{21_F} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{3}{2}s+2}$$

Comenzamos por el cuadripolo $|F|$

$$T_{21_F} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{3}{2}s+2}$$

sugiere la red de la Fig. (6.72)

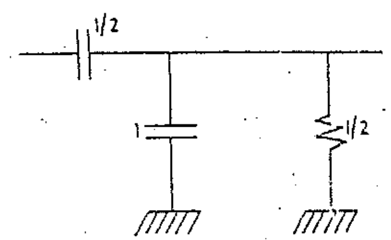


FIGURA (6.72.)

y expandiendo $1/Y_{22_F}$ se obtiene

$$\frac{1}{Y_{22_F}} = \frac{s+\frac{7}{5}}{\frac{3}{2}s+2} = \frac{1}{Y_{22_\infty}} + \frac{K_1}{\frac{3}{2}s+2}$$

$$\frac{1}{Y_{22_F}} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{2}s + 2} \qquad \text{o sea} \qquad Y'_{22\,F} = 15\left(\frac{3}{2}s + 2\right)$$

Debemos modificar en el factor (15) el nivel de admitancias de este último cuadripolo y además agregar como impedancia de corrección una resistencia de valor $\left(\frac{2}{3}\right)$ resultando la red de la Fig (6.73)

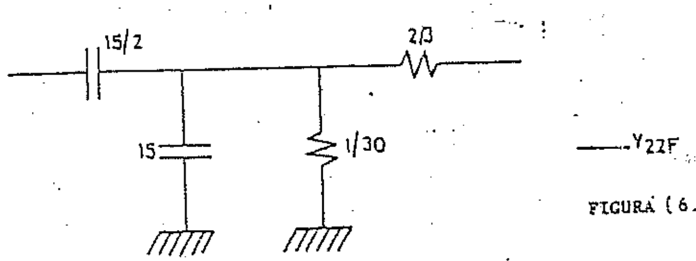


FIGURA (6.73.)

El cuadripolo |E| por tener $Y_{12_E} = 0$, lo sintetizaremos a través de su Y_{22_E}, o sea:

$$Y_{22_E} = \frac{s^2 + \frac{3}{2}s}{s + \frac{7}{5}} = K_\infty s + \frac{K_1 s}{s + \frac{7}{5}} = s + \frac{\frac{1}{10}s}{s + \frac{7}{5}}$$

$$Y_{22_E} = s + \frac{1}{10 + \frac{14}{s}}$$

Conectando Y_{22_E} en paralelo con la salida del cuadripolo |F| obtendremos la red que satisface $T_{21_B}(s)$, como muestra la Fig. (6.74).

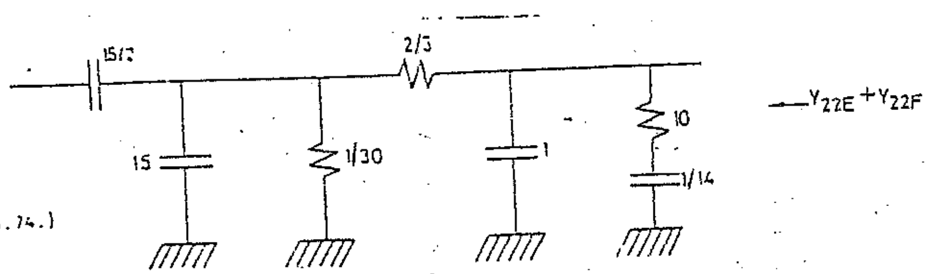


FIGURA (6.74.)

Ahora bien, el cuadripolo que en definitiva resuelve $T_{21}(s)$ será el que se muestra en la Fig. (6.75)

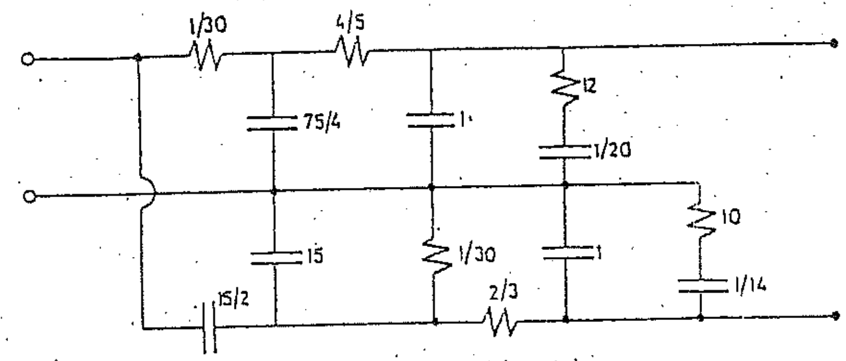


FIGURA (6.75.)

6.5. METODO DE GUILLEMIN

El método de Guillemin propone resolver una transferencia complicada mediante su descomposición en transferencias más sencillas. Si bien esta idea ha sido la base de los métodos vistos hasta el momento, el procedimiento de Guillemin tiene la siguiente particularidad.

Supongamos que necesitamos sintetizar un cuadripolo caracterizado por los siguientes parámetros:

$$-Y_{21}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{6.79}$$

$$Y_{22}(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Guillemin descompone el polinomio P(s) en suma de polinomios más sencillos y expresa $Y_{21}(s)$ como suma de admitancias más simples que la original.

$$Y_{21}(s) = Y_{21_A}(s) + Y_{21_B}(s) + \ldots\ldots\ Y_{21_N}(s) \tag{6.80}$$

Claro está que $Y_{21}(s)$ tendrá un cierto nivel constante de transferencia que podemos explicitarlo a través de la constante K. Entonces podemos admitir que este valor se reparte entre las distintas admitancias Y_{21_A}, Y_{21_B}... de modo tal que satisfacen a la igualdad siguiente:

$$K\,Y_{21}(s) = K'_A\,Y_{21_A}(s) + K'_B\,Y_{21_B}(s) + \dots + K'_N\,Y_{21_N}(s) \qquad (6.81)$$

Con respecto a $Y_{22}(s)$ podemos aplicar un concepto similar y escribirla como:

$$Y_{22}(s) = Y_{22_A}(s) + Y_{22_B}(s) + \dots + Y_{22_N}(s) \qquad (6.82)$$

la (6.81) y (6.82) sugieren satisfacer la (6.79) conectando "N" cuadripolos en paralelo. Estando caracterizados:

El |A| por $Y_{21_A}(s)$ e $Y_{22_A}(s)$

El |B| por $Y_{21_B}(s)$ e $Y_{22_B}(s)$ ... etc.

Hay varias descomposiciones posibles de Y_{21} e Y_{22} y la de Guillemin es la siguiente:

$$Y_{22}(s) = H_A\,Y_{22}(s) + H_B\,Y_{22}(s) + \dots + H_N\,Y_{22}(s) \qquad (6.83)$$

O sea que todas las admitancias de salida de los cuadripolos componentes tienen los mismos polos y los mismos ceros y en lo único que difieren es en su nivel constante de admitancia. Claro está que la (6.83) impone que se verifique

$$H_A + H_B + \dots + H_N = 1 \qquad (6.84)$$

Al modificar el nivel de Y_{22_A} en el factor H_A obligadamente resulta modificado en el mismo valor el nivel de Y_{21_A}. Y lo propio ocurrirá con Y_{21_B} cuyo nivel se modificará en HB etc...

Vale decir que la (6.81) podemos escribirla como

$$K\,Y_{21}(s) = K_A\,H_A\,Y_{21_A}(s) + K_B\,H_B\,Y_{21_B}(s) + \dots \qquad (6.85)$$

Y si conociéramos por Ej H_A; H_B ... podríamos calcular K_A; K_B... de modo de satisfacer la (6.85).

Guillemin propone una solución muy sencilla como es la de adoptar:

$$K_A\,H_A = K_B\,H_B = \dots = K_N\,H_N = K \qquad (6.86)$$

y entonces la (6.85) resulta expresable como lo indica la (6.87)

$$K\,Y_{12} = H_A\,K_A\,(Y_{21_A} + Y_{21_B} + \dots Y_{21_N}) = K(Y_{21_A} + Y_{21_B} + \dots + Y_{21_N}) \qquad (6.87)$$

Las expresiones (6.84) y (6.86) son la llave del método de Guillemin.

Ilustraremos el método a través de un ejemplo. Supongamos desear resolver la siguiente transferencia cargada, mediante un cuadripolo RC.

PROBLEMA 6-14

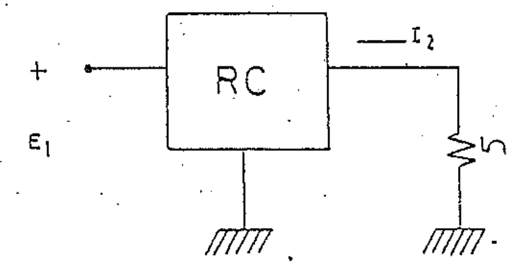


FIGURA (6.76.)

$$-Y_{12}(s) = \frac{y_{21}}{1 + y_{22}} \qquad (6.88)$$

$$-Y_{21}(s) = K\,\frac{s^2 + 2s + 2}{3\,s^2 + 9s + 5}$$

Comenzamos por descomponer el denominador de $Y_{21}(s)$ dato

$$-Y_{21}(s) = K \frac{s^2 + 2s + 2}{(s^2 + 4s + 3) + (2s^2 + 5s + 2)}$$

Obsérvese que la descomposición la hemos efectuado tratando que las raíces de los polinomios componentes resulten reales y negativas.

Ahora tratemos de hacer que esta última expresión presente la misma estructura que la (6.88).

$$-Y_{21}(s) = \frac{K \dfrac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 4s + 3}}{1 + \dfrac{2s^2 + 5s + 2}{s^2 + 4s + 3}}$$

$$-Y_{21}(s) = \frac{K \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s+3)}}{1 + \dfrac{(2s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)}} \equiv \frac{y_{21}}{1 + y_{22}}$$

o sea
$$y_{21}(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+3)}$$

$$y_{22}(s) = \frac{(2s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

A partir de este juego de parámetros aplicamos Guillemin.

Comenzamos por descomponer el numerador de $-Y_{12}(s)$ en un par de polinomios con ceros reales y negativos tratando que alguno de estos ceros se cancelen con los del denominador de $-Y_{12}(s)$ para simplificar, como veremos, la tarea de síntesis.

Intentemos la siguiente descomposición

$$s^2 + 2s + 2 = s(s+1) + (s+2)$$

y entonces

$$-y_{12}(s) = K \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+3)} = K \frac{s(s+1) + (s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$-y_{12}(s) = K_A \frac{s}{s+3} + K_B \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

Resolvemos primero el cuadripolo A.

En $y_{12_A}(s)$ se ha cancelado un factor $(s+1)$ por tanto Y_{22_A} tendrá un polo privado en $s = -1$ que podemos remover inmediatamente, o sea:

$$y_1 = y_{22} - \frac{K_1 s}{s+1} = y_{22} - \frac{\frac{1}{2}s}{s+1} = \frac{3s+4}{2(s+3)}$$

Como el único cero que posee y_{12_A} se halla ubicado en corriente continua primero lo generamos y luego lo removemos, o sea:

$$y_2 = y_1 - y_1(0) = y_1 - \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{6}s}{s+3}$$

$$Z_2 = \frac{s+3}{\frac{5}{6}s} = \frac{18/5}{s} + \frac{6}{5}$$

y la red |A| será la indicada en la Fig. (6.77)

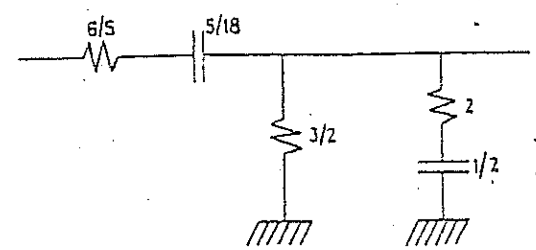


FIGURA (6.77.)

Resolvamos ahora el cuadripolo |B|.

y_{22_B} tiene un cero en $s = -2$ que también lo tiene $-y_{12_B}$ y por consiguiente podremos removerlo como polo de impedancia.

$$Z_1 = \frac{1}{y_{22}} = \frac{(s+1)\,(s+3)}{(2s+1)\,(s+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{s+2} + \frac{s+4/3}{2s+1}$$

$$Z_4 = Z_1 - \frac{1/3}{s+2} = \frac{s+4/3}{2s+1}$$

El otro cero $-Y_{21_B}$ está en alta frecuencia ($s \to \infty$), primero lo generamos y luego lo removemos

$$Z_5 = Z_4 - Z_4(\infty) = Z_4 - \frac{1}{2} = \frac{5/6}{2s+1}$$

$Y_5 = \frac{12}{5}s + \frac{6}{5}$ y el cuadripolo |B| será el ilustrado en la Fig (6.78)

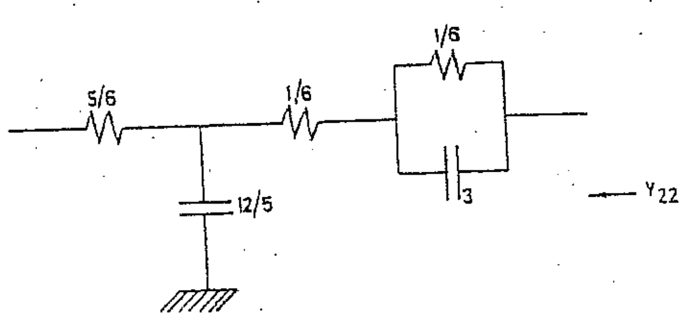


FIGURA (6.78.)

Vamos ahora a determinar las constantes multiplicadoras K_A y K_B.

de la expresión $-y_{12_A}(s) = K_A \frac{s}{s+3}$

obtendremos para $s \to \infty$ $\quad -y_{21_A} \to K_A$

mientras que de la Fig (6.77) resulta $-y_{21_A}(s)\Big|_{s\to\infty} = \frac{5}{6}$

o sea que $K_A = \frac{5}{6}$

análogamente resulta $-y_{21_B}(s)\Big|_{s\to 0} = K_B \frac{s+2}{(s+1)\,(s+3)}\Big|_{s\to 0} = \frac{2}{3} K_B$

mientras que de la Fig. (6.78) $-y_{21_B}(s)\Big|_{s\to 0} = \frac{2}{3}$

vale decir que $K_B = 1$.

Recordemos ahora las condiciones impuestas por Guillemin

$$H_A + H_B = 1 \quad (6.84)$$

$$K_A H_A = K_B H_B = K \quad (6.86)$$

como $K_A = \frac{5}{6}$ y $K_B = 1$ resultarán $H_A = \frac{6}{11}$; $H_B = \frac{5}{11}$ y $K = \frac{5}{11}$

Finalmente si modificamos los niveles de admitancia del cuadripolo |A| de la Fig. (6.77) por el factor $H_A = \frac{6}{11}$ y los del cuadripolo |B| de la Fig. (6.78) por el factor $H_B = \frac{5}{11}$ y luego los conectamos en paralelo, obteniendo la estructura de la Fig. (6.79) que en definitiva nos resuelve el problema.

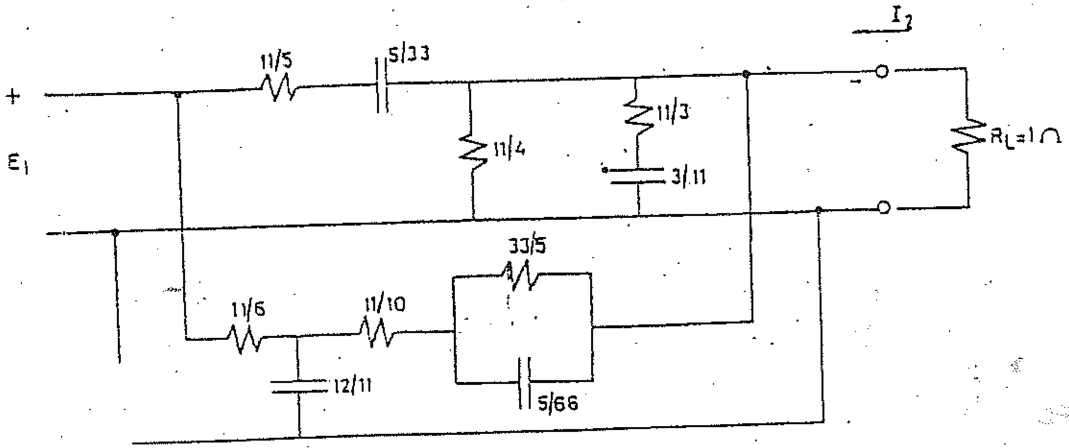
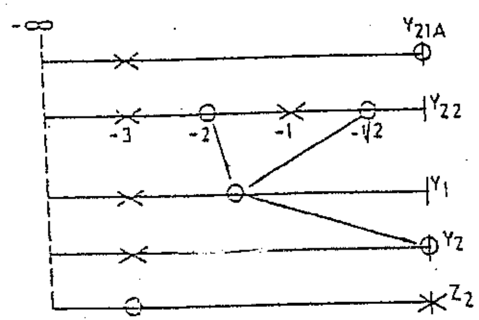
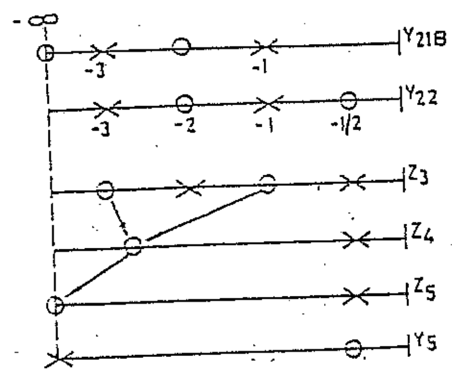


FIGURA (6.79.)

Como aporte tendiente a esclarecer el proceso de síntesis de los cuadripolos |A| y |B| que hemos resuelto en forma analítica, lo ilustraremos ahora en forma gráfica.

En ambos casos partimos de la misma $y_{22}(s)$.





$Y_1 = Y_{22} - \frac{K_1\, s}{s+1}$

$Y_2 = Y_1 - Y_1\,(0)$

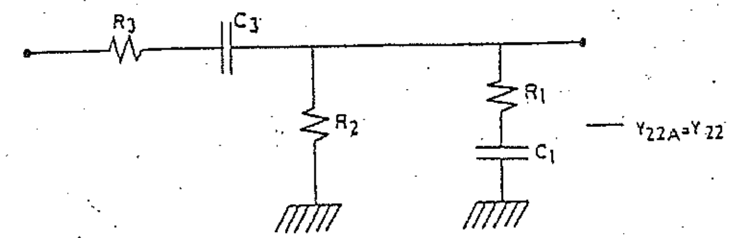
Z_2 = (sale por Foster I)

$Z_3 = 1/Y_{22}$

$Z_4 = Z_3 - \frac{K_2}{s+2}$

$Z_5 = Z_4 - Z_4\,(\infty)$

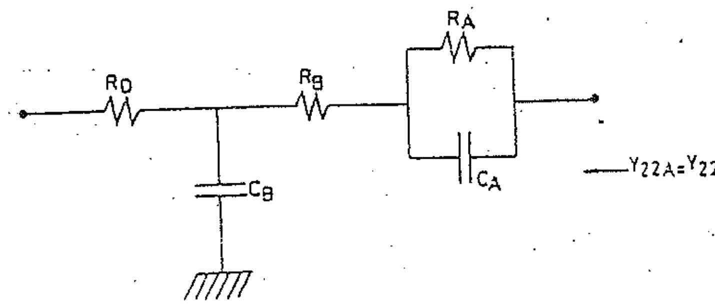
Y_5 = (sale por Foster II)



$R_1 = \frac{1}{K_1}$

$C_1 = K_1$

$R_2 = Y_1\,(0)$



6.6. SINTESIS DE TRANSFERENCIAS CARGADAS MEDIANTE CUADRIPOLOS DE RESISTENCIA CONSTANTE

Existen cuadripolos en los cuales la impedancia vista desde un par de terminales es una resistencia constante cuando el otro par se encuentra cargado o terminado con dicho valor de resistencia.

Cuando dos o más estructuras de este tipo son conectadas en cascada y cada una de ellas posee idéntico valor de resistencia constante, ocurre que al cargar la salida del conjunto con ese valor de resistencia, la impedancia de entrada del mismo coincide con el valor de la resistencia de terminación. Vale decir que desde el punto de vista del parámetro impedancia todo pasa como si los cuadripolos que integran la cascada no existieran. Las Figuras (6.80) y (6.81) ilustran los comentarios hechos en relación con este tipo de cuadripolos.

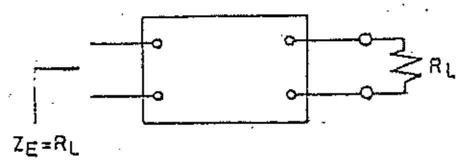


FIGURA (6.80.)

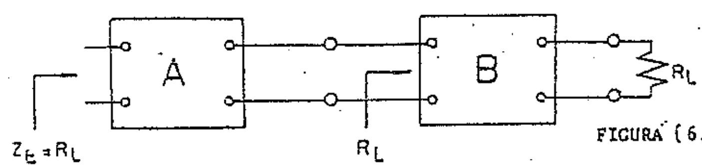


FIGURA (6.81.)

Si bien existen varios tipos de cuadripolos de resistencia constante nos ocuparemos de analizar sólo un par de estructuras: una balanceada y la otra desbalanceada, y luego veremos cómo es posible satisfacer una transferencia cargada más o menos compleja mediante la conexión en cascada de cuadripolos de resistencia constante.

6.6.1. ESTRUCTURA BALANCEADA

Consideremos la siguiente estructura balanceada y simétrica (Fig. 6.82) cargada con una cierta R_L y tratemos de investigar qué valores o qué relaciones deben cumplir las impedancias Z_A y Z_B para que $Z_E = R_L$.

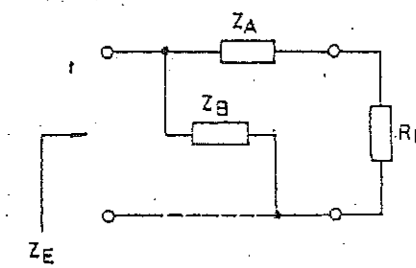


FIGURA (6.82.)

Sabemos que $Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$ (6.89)

Además para la estructura de la Fig. (6.82) valen las siguientes expresiones:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_B + Z_A}{2} \quad y \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{Z_B - Z_A}{2} \qquad (6.90)$$

Reemplazando (6.90) en (6.89) con $Z_L = R_L$ resulta:

$$Z_E = \frac{Z_{11}^2 - Z_{12}^2 + Z_{11} R_L}{Z_{11} + R_L} \qquad (6.91)$$

para que $Z_E = R_L$ deberá verificarse que

$$Z_{11}^2 - Z_{12}^2 = R_L^2 \qquad (6.92)$$

o también

$$\frac{1}{4} \left| (Z_B + Z_A)^2 - (Z_B - Z_A)^2 \right| = R_L^2$$

o sea

$$Z_A \cdot Z_B = R_L^2 \qquad (6.93)$$

Vale decir que a los efectos que un Láttice simétrico resulta de resistencia constante sus impedancias Z_A y Z_B deben ser recíprocas.

Examinemos a continuación la transferencia de tensiones correspondiente al cuadrípolo doble cargado de la Fig. (6.83).

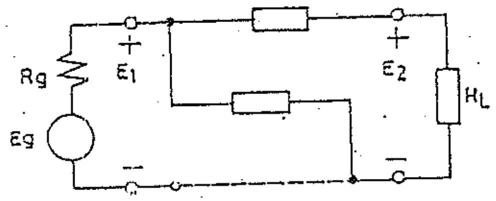


FIGURA (6.83.)

La expresión general para $\frac{E_2}{E_g}$ recordemos que estaba dada por:

$$\frac{E_2}{E_g} = \frac{Z_{21}\, R_L}{(Z_{11} + R_L)\,(Z_{22} + R_L) - Z_{12}Z_{21}} \tag{6.94}$$

Si nuestro Láttice es simétrico

$$\frac{E_2}{E_g} = \frac{Z_{12}\;\; R_L}{(Z_{11} + R_L)^2 - Z_{12}^2}$$

y si es de resistencia constante o sea cumple con (6.92) o (6.93) resultará:

$$\frac{E}{E_g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_B - R}{Z_B + R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R - Z_A}{R + Z_A} \tag{6.95}$$

PROBLEMA (6.15): sintetizar $\frac{E_2}{E_g} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s - 1}{s + 1} \right)$ mediante una estructura balanceada y sabiendo que $R_L = R_g = 1\Omega$.

Comparando $\frac{E_2}{E_g} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s - 1}{s + 1} \right)$ con la (6.95) se concluye que adoptando $Z_B = \frac{R^2}{Z_B} = \frac{1}{s}$ tendríamos resuelto el problema.

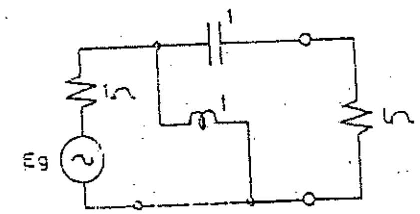


FIGURA (6.84.)

PROBLEMA (6.16): Idem con la siguiente transferencia:

$$\frac{E_2}{E_g} = \frac{1}{2}\; \frac{(s - 1)\,(s^2 - 2s + 2)}{(s + 1)\,(s^2 + 2s + 2)} \;;\; R_g = R_L = 1\,\Omega$$

podemos expresar

$$\frac{E_2}{E_g} = \frac{E_A}{E_g} \cdot \frac{E_2}{E_A}$$

si adoptamos para

$$\frac{E_A}{E_g} = \frac{1(s - 1)}{2(s + 1)}$$

resultará para

$$\frac{E_2}{E_A} = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

La transferencia $\frac{E_A}{E_g}$ la hemos sintetizado al resolver el problema anterior.

Para sintetizar $\frac{E_2}{E_A}$ separemos numerador y denominador en partes pares e impares

$$\frac{E_2}{E_A} = \frac{(s^2+2)-2s}{(s^2+2)+2s}$$

Dividamos ambos polinomios por la parte impar del polinomio numerador, o sea:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{s^2+2}{2s}-1}{\frac{s^2+2}{2s}+1}$$ y comparando con (6.95) resultará:

$$Z_B = \frac{s^2+2}{2s}$$ y por lo tanto $Z_A = \frac{2s}{s^2+2}$

Por consiguiente el cuadripolo que satisface nuestro problema será:

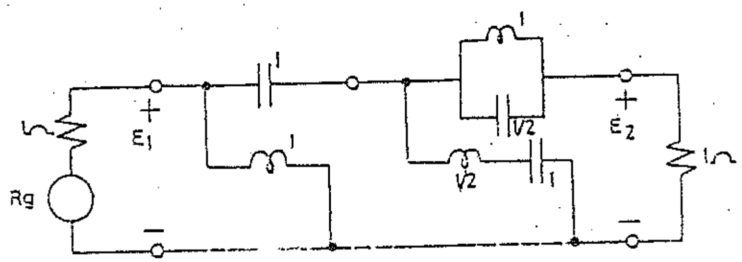


FIGURA (6.85.)

6.6.2. ESTRUCTURA DESBALANCEADA

Otra estructura utilizada como cuadripolo de resistencia constante es la T- puenteada.

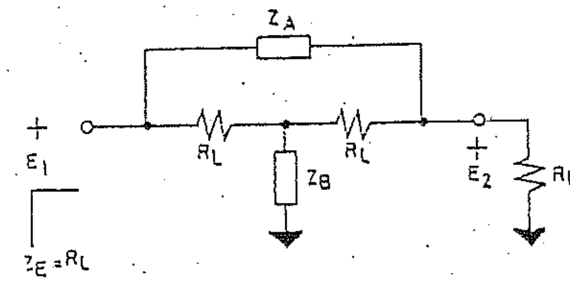


FIGURA (6.86.)

Mediante un razonamiento análogo al hecho en relación con la estructura balanceada es posible demostrar que en el caso que las impedancias Z_A y Z_B de la T puenteada resulten recíprocas y satisfagan por tanto la (6.93) el cuadripolo de la Fig. (6.86) será de resistencia constante y bajo estas circunstancias resultará:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{R_L}{R_L+Z_A} = \frac{Z_B}{R_L+Z_B} \qquad (6.96)$$

PROBLEMA (6.17): sintetizar la siguiente transferencia de tensiones mediante T puenteadas de resistencia constante, sabiendo que $R_L = 1\Omega$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{s^2+6s+8}{3s^2+13s+12}$$

Podemos descomponer nuestro dato de la siguiente forma:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)(3s+4)} = \frac{E_A}{E_1}\cdot\frac{E_2}{E_A}$$

si adoptamos $\frac{E_A}{E_1} = \frac{s + 2}{s + 3}$

y $\frac{E_2}{E_A} = \frac{s + 4}{3s + 4}$

por comparación con la (6.96) resulta

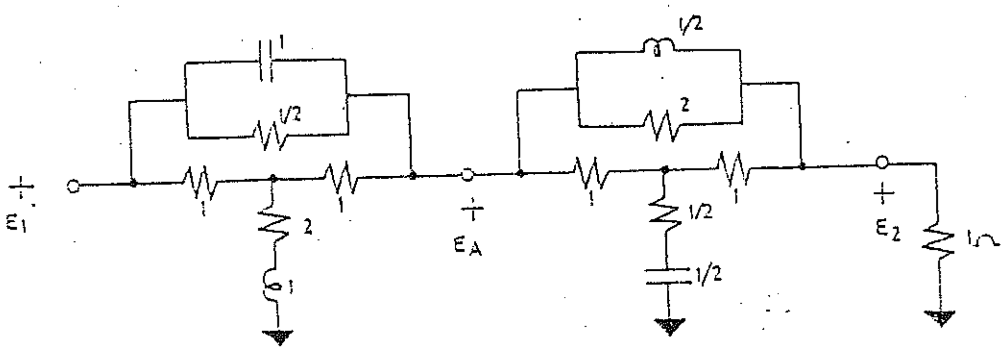
$$\frac{s + 2}{s + 3} = \frac{Z_{B_1}}{Z_{B_1} + 1} \quad \text{o sea} \quad Z_{B_1} = s + 2$$

y

$$\frac{s + 4}{3s + 4} = \frac{1}{1 + Z_{A_2}} \quad \text{o sea} \quad Z_{A_2} = \frac{2s}{s + 4}$$

vale decir que $Z_{A_1} = \frac{1}{s + 2}$ y $Z_{B_2} = \frac{s + 4}{2s}$

Por consiguiente nuestro cuadripolo será



I N D I C E

Este libro se terminó de imprimir y encuadernar en los talleres de Copymanía en el mes de abril de 1987 Virrey Cevallos 744 Cap. T.E. 38-9539.

Hecho el depósito de ley.