Universidad de San Andrés
Práctica C: Optimización y estudio de funciones

1. Para cada una de las siguientes funciones determinar sus puntos críticos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. De acuerdo a esto, clasificar los puntos críticos hallados.

   (a) $f(x) = x^3 + x - 2$
   (b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
   (c) $f(x) = x^2 \ln(x)$
   (d) $f(x) = x^2 e^{-x}$
   (e) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
   (f) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 1)$
   (g) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$
   (h) $f(x) = 9 - \dfrac{8}{x} - 2\sqrt{x}$
   (i) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$
   (j) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

2. Hallar los extremos de las siguientes funciones y decidir si son locales o absolutos.

   (a) $f(x) = x^2 + x + 1$
   (b) $f(x) = \dfrac{(x - 2)(x - 8)}{x^2}$
   (c) $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$
   (d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

3. Para cada una de las siguientes funciones hallar, si existen, el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo dado. Hacer un gráfico aproximado de la función en ese intervalo.

   (a) $f(x) = x^3 + x - 2$, en $[-1, 1]$
   (b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, en $[-1, 2)$
   (c) $f(x) = x^2 \ln(x)$, en $[e^{-4}, 1]$
   (d) $f(x) = x^2 e^{-x}$, en $[-1, 4]$
   (e) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, en $[0, \sqrt{8}]$
   (f) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 1)$, en $[-1, 1]$
   (g) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$, en $[\frac{1}{10}, 10]$
   (h) $f(x) = 9 - \dfrac{8}{x} - 2\sqrt{x}$, en $[\frac{1}{4}, 9]$
   (i) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$, en $[-2, 0]$
   (j) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, en $[0, 2]$
   (k) $f(x) = x^2 + |x|$, en $[-1, 1]$

4. Mostrar que las siguientes funciones son o bien crecientes o bien decrecientes en el conjunto indicado.

   (a) $f(x) = x + 3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$, en $\mathbb{R}_{>0}$.
   (b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, en $\mathbb{R}_{<0}$.
   (c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$, en $\mathrm{Dom}(f)$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto y que además cumple las siguientes condiciones:

   (i) $C_0(f') = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\}$

   (ii) $C_+(f') = (-\infty; -1) \cup (0, \frac{3}{2})$

   (iii) $C_-(f') = (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

   A partir de estos datos determinar todos los máximos y mínimos locales de la función f. Justficar cada afirmación hecha. Graficar una función que cumpla con estas condiciones.

6. Mostrar que valen las siguientes desigualdades:

   (a) $x^3 \geq x + 6$ para $x \geq 2$

   (b) $e^{2x} - 2e^x > -2$ para todo $x \in \mathbb{R}$

   (c) $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{3}{4}x \leq \frac{1}{4}$ para $x < 1$

   (d) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$ para $x > 0$

   (e) $\dfrac{\ln(x-1)}{x-1} \leq \frac{1}{e}$ para $x > 1$

7. Sea $f(x) = x^2 + px + q$.

   (a) Hallar todos los $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0, 2]$.

   (b) Para cada uno de los valores $p, q \in \mathbb{R}$ hallados en el item anterior, decidir si $x = 1$ es un máximo o un mínimo global.

8. Sea $f(x) = \dfrac{1}{e^x(e^x - 4)}$. Hallar dominio y calcular la imagen de f.

9. Sea $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-36x^2+2}$. Hallar dominio e imagen de f.

10. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \dfrac{\sqrt{ax^2+1}}{x-2}$ tenga un punto crítico en $x = -\dfrac{1}{4}$. Para el valor de a hallado estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y determinar si en $x = -\dfrac{1}{4}$ f alcanza un máximo o un mínimo.

11. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = (5x-4)\ln(5x-4) - 5x + k$ cumpla que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (\frac{4}{5}, +\infty)$.

12. Determinar los intervalos de concavidad/convexidad y los puntos de inflexión de cada una de las siguientes funciones del Ejercicio 1.

13. Calcular, si existen, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \dfrac{7x+2}{3x-2}$

   (b) $f(x) = \ln(5x-3)$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

   (e) $f(x) = e^{-2x}$

(f) $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$

(g) $f(x) = (1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(h) $f(x) = \sqrt[5]{x}e^x + \dfrac{2x^2-3x-7}{x+1}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)-x^2}{x^3} + 3e^{2x}$

14. Trazar los gráficos de las siguientes funciones, haciendo el estudio de f', f'', buscando extremos, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad y asíntotas. En los casos en que no está aclarado, considerar el dominio natural de la función.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x-1}$

(c) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} + 3$

(d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-9}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(f) $f(x) = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})$, $x \in (-1,1)$

(g) $f(x) = x(\ln(x))^2$

(h) $f(x) = x - e^x$

(i) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

15. Hallar dos números no negativos que sumen 1 y tales que la suma de sus cuadrados sea:

(a) la mayor posible.

(b) la menor posible.

16. Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa. La suma de las áreas de los lados y el fondo de la caja es de 48 cm^2. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que cumpla con los requerimientos mencionados.

17. Entre todos los rectángulos de área 100 m^2, determine las dimensiones del que posee:

(a) perímetro mínimo.

(b) diagonal más corta.

18. Hallar las coordenadas de los puntos del gráfico de la función $f(x) = \sqrt{16-3x}$ con $x \in [0, \frac{16}{3}]$ que están:

(a) más cercanos al punto $(0,0)$.

(b) más lejanos del punto $(0,0)$.

19. En la producción y comercialización de un producto la función de demanda y la función de costo dependen de la cantidad x (con $0 \leq x \leq 15$) y están dadas respectivamente por:

$$D(x) = 70 - \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{15} \quad \text{y} \quad C(x) = 50x + 5.$$

Si la función de ganancias de la operación es $G(x) = xD(x) - C(x)$, determinar el valor de x para el cuál se obtiene la mayor ganancia.

20. Un empresa de alquiler de autos tiene una flota de 120 vehículos que alquila a u$d 40 por semana. Luego de un análisis de mercado, estima que al incrementar el alquiler de cada auto en u$d 5, pierde el alquiler de 10 de ellos. El costo por manutención de un auto que alquila es de u$d 4 por semana. ¿A qué precio debe alquilar cada automovil para obtener el mayor beneficio posible?

21. El triángulo rectángulo de la figura adjunta tiene área 18 y el cateto b verifica que $1 \leq b \leq 12$. Hallar las dimensiones del triángulo rectángulo de manera tal que el semicírculo S construido a partir de la hipotenusa del triángulo tenga:

   (a) área máxima.

   (b) área mínima.