Universidad de San Andrés

Práctica C: Optimización y estudio de funciones

RESULTADOS

Recordar: cuando hablamos de extremos locales, no interesa saber si además son globales. Los extremos **globales** también podemos llamarlos extremos **absolutos**; y los extremos **locales** también podemos llamarlos extremos **relativos**.

1. Para cada una de las siguientes funciones determinar sus puntos críticos, ...

	PC	$I^{\nearrow}$	$I^{\searrow}$	Clasif. extremos
a)	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	No hay.
b)	$\{-\sqrt{3/2}, 0, \sqrt{3/2}\}$	$(-\sqrt{3/2}, 0)$ $(\sqrt{3/2}, +\infty)$	$(-\infty, -\sqrt{3/2})$ $(0, \sqrt{3/2})$	Máx local: $x = 0$, mín globales: $x = \pm\sqrt{3/2}$
c)	$\{e^{-\frac{1}{2}}\}$	$(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$	$(0, e^{-\frac{1}{2}})$	Mín global: $x = e^{-\frac{1}{2}}$
d)	$\{0, 2\}$	$(0, 2)$	$(-\infty, 0)$ $(2, +\infty)$	Máx local: $x = 2$, mín global: $x = 0$.
e)	$\{0\}$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	Mín global: $x = 0$
f)	$\{0, 2/5\}$	$(-\infty, 0)$ $(2/5, +\infty)$	$(0, 2/5)$	Máx local: $x = 0$, mín local: $x = 2/5$
g)	$\{1\}$	$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$;$(0, 1)$	Mín local: $x = 1$
h)	$\{4\}$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$	Máx global: $x = 4$
i)	$\{-3\}$	$(-3, 1)$	$(-\infty, -3)$ $(1, +\infty)$	Mín global: $x = -3$
j)	$\{-1, 1\}$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1)$ $(1, +\infty)$	Máx global: $x = -1$, mín global: $x = 1$

2. Hallar los extremos de las siguientes funciones y decidir si son locales o absolutos.

   (a) En $x = -\frac{1}{2}$ se alcanza un mínimo global.

   (b) En $x = \frac{16}{5}$ se alcanza un mínimo global.

   (c) En $x = \pm 1$ se alcanzan mínimos globales, en $x = 0$ se alcanza un máximo local.

   (d) En $x = 1$ se alcanzan un mínimo local.

3. Para cada una de las siguientes funciones hallar, si existen, el máximo absoluto y ...

   Gráficos

   (a) En $x = -1$ se alcanza un mínimo global, en $x = 1$ se alcanza un máximo global.

   (b) En $x = \sqrt{3/2}$ se alcanza el mínimo global, no hay máximo global.

   (c) En $x = e^{-\frac{1}{2}}$ se alcanza el mínimo global, en $x = 1$ se alcanza el máximo global.

   (d) En $x = 0$ se alcanza el mínimo global, en $x = -1$ el máximo global.

   (e) En $x = 0$ se alcanza el mínimo global, en $x = \sqrt{8}$ el máximo global.

   (f) En $x = -1$ se alcanza el mínimo global, en $x = 0$ y $x = 1$ se alcanza el máximo global.

   (g) En $x = 1$ se alcanza un mínimo global, en $x = 10$ se alcanza el máximo global.

(h) En $x = \frac{1}{4}$ se alcanza un mínimo global y en $x = 4$ un máximo global.

(i) En $x = -2$ se alcanza el mínimo global y en $x = 0$ el máximo global.

(j) En $x = 0$ se alcanza el mínimo global y en $x = 1$ el máximo global.

(k) En $x = 0$ se alcanza un mínimo global, en $x = \pm 1$ se alcanza un máximo global.

4. Mostrar que las siguientes funciones son o bien crecientes o bien decrecientes ...

(a) $f'(x) = 1 + x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} \geq 1 > 0$ y f es creciente estricta en $(0, +\infty)$.

(b) $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$ y f es creciente estricta.

(c) $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 2\} = (1,5)$. $f'(x) = \dfrac{x+1}{(-x^2+6\,x-5)^{\frac{3}{2}}}$ que es positiva en $(1,5)$, por lo que f es creciente estricta.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto y que además cumple las ...
En $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$ f alcanza máximos locales, en $x = 0$ se alcanza un mínimo local. Un posible ejemplo de dibujo.

6. Mostrar que valen las siguientes desigualdades: ...

(a) $f(x) = x^3 - x - 6$ tiene mínimo global en $x = 2$. Entonces $f(x) \geq f(2) = 0$.

(b) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ alcanza mínimo global en $x = 0$; $f(x) \geq f(0) = -1 > -2$.

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{3}{4}x$ alcanza máximo global en $x = -1$ con dominio $(-\infty, 1)$; $f(x) \leq f(-1) = \frac{1}{4}$.

(d) $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$ alcanza mínimo global en $x = 0$ con dominio $[0, +\infty)$; $f(x) \geq f(0) = 0$. Como $f(x) = 0$ sÃ³lo en $x = 0$ se tiene que $f(x) > f(0)$ si $x > 0$.

(e) $f(x) = (x-1)^{-1}\ln(x-1)$ alcanza un máximo global en $x = e+1$ con dominio $(1, +\infty)$; $f(x) \leq f(e+1) = e^{-1}$.

7. Sea $f(x) = x^2 + px + q$.

(a) $p = -2, \; q = 4$

(b) Es mínimo global.

8. Sea $f(x) = \frac{1}{e^x(e^x-4)}$. Hallar dominio y calcular la imagen de f.
$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 4\}$; $\operatorname{Im} f = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (0, +\infty)$.

9. Sea $f(x) = \sqrt{x}e^{-36x^2+2}$. Hallar dominio e imagen de f.
$\operatorname{Dom} f = [0, +\infty)$; $\operatorname{Im} f = [0, \frac{e^{7/4}}{2\sqrt{3}}]$.

10. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2+1}}{x-2}$ tenga un punto crítico en $x = -\frac{1}{4}$...
$a = 2$. Para ese valor de a, $I^{\nearrow} : (-\infty, -\frac{1}{4})$, $I^{\searrow} : (-\frac{1}{4}, 2); (2, +\infty)$ y se alcanza un máximo local en $x = -\frac{1}{4}$.

11. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = (5x-4)\ln(5x-4) - 5x + k$ ...
$k \in [5, +\infty)$

12. Determinar los intervalos de concavidad/convexidad y los puntos de inflexión ...

	$I^{\cup}$	$I^{\cap}$	Ptos. inflexión
a)	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$	$\{0\}$
b)	$(-\infty,-\sqrt{2}/2);(\sqrt{2}/2,+\infty)$	$(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$	$\{-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\}$
c)	$(e^{-3/2},+\infty)$	$(0,e^{-3/2})$	$\{e^{-3/2}\}$
d)	$(-\infty,2-\sqrt{2});(2+\sqrt{2},+\infty)$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$
e)	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\varnothing$
f)	$(-1/5,0);(0,+\infty)$	$(-\infty,-1/5)$	$\{-1/5\}$
g)	$(-\infty,-\sqrt[3]{2});(0,+\infty)$	$(-\sqrt[3]{2},0)$	$\{-\sqrt[3]{2}\}$
h)	$(2^{10/3},+\infty)$	$(0,2^{10/3})$	$\{2^{10/3}\}$
i)	$(-5,1);(1,+\infty)$	$(-\infty,-5)$	$\{-5\}$
j)	$(-\sqrt{3},0);(\sqrt{3},+\infty)$	$(-\infty,-\sqrt{3});(0,\sqrt{3})$	$\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$

13. Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones

	AV	AH	AO
a)	$x=2/3$	$y=7/3$ para $\pm\infty$	no hay
b)	$x=3/5$ a derecha	no hay	no hay
c)	$x=-3$	no hay	$y=x-5$ para $\pm\infty$
d)	no hay	no hay	$y=x+1/2$ para $+\infty$, $y=-x+1/2$ para $-\infty$
e)	no hay	$y=0$ para $+\infty$, no hay en $-\infty$	no hay
f)	$x=0$	no hay	no hay
g)	$x=-1/3$ a derecha	$y=1$ para $+\infty$	no hay
h)	$x=-1$	no hay	$y=2x-5$ para $-\infty$ y no hay para $+\infty$.
i)	no hay	$y=0$ para $-\infty$, no hay en $+\infty$	no hay

14. Trazar los gráficos de las siguientes funciones, haciendo el estudio de f', f'', ...
Gráficos

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.
Dom $f=\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$,
AV: $x=0$, AO: $y=x$ para $\pm\infty$,
No tiene extremos. $I^{\nearrow}:(-\infty,0);(0,+\infty)$,
No tiene puntos de inflexión. $I^{\cup}=(-\infty,0)$, $I^{\cap}=(0,+\infty)$.

(b) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x-1}$.
Dom $f=\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$,
AV: $x=1$, AO: $y=2x+2$ para $\pm\infty$,
Mín local en $x=1+\sqrt{2}$, máx local en $x=1-\sqrt{2}$.
$I^{\nearrow}:(-\infty,1-\sqrt{2});(1+\sqrt{2},+\infty)$, $I^{\searrow}:(1-\sqrt{2},1);(1,1+\sqrt{2})$,
No tiene puntos de inflexión. $I^{\cup}=(1,+\infty)$, $I^{\cap}=(-\infty,1)$.

(c) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} + 3$.
Dom $f = \mathbb{R}$,
No hay asíntotas,
Mín global en $x = 1$. $I^{\nearrow} = (1, +\infty)$, $I^{\searrow} = (-\infty, 1)$,
No tiene puntos de inflexión. $I^{\cap} : (-\infty, 1); (1, +\infty)$.

(d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 9}$.
Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$,
AV: $x = \pm 3$, AH: $y = 0$ para $\pm\infty$,
No tiene extremos. $I^{\searrow} : (-\infty, -3); (-3, 3); (3, +\infty)$,
En $x = 0$ hay un punto de inflexión. $I^{\cup} : (-3, 0); (3, +\infty)$, $I^{\cap} : (-\infty, -3); (0, 3)$.

(e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.
Dom $f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$,
AV: $x = 1$,
Mín local en $x = e$. $I^{\nearrow} : (e, +\infty)$, $I^{\searrow} : (0, 1); (1, e)$,
Punto de inflexión en $x = e^2$. $I^{\cup} : (1, e^2)$, $I^{\cap} : (0, 1); (e^2, +\infty)$.

(f) $f(x) = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})$, $x \in (-1, 1)$.
No tiene asíntotas.
No tiene extremos. $I^{\nearrow} = (-1, 1)$.
Punto de inflexión en $x = 0$. $I^{\cup} = (0, 1)$, $I^{\cap} = (-1, 0)$.

(g) $f(x) = x(\ln(x))^2$.
Dom $f = (0, +\infty)$.
No tiene asíntotas.
Máx local en $x = e^{-2}$, mín global en $x = 1$. $I^{\nearrow} : (0, e^{-2}); (1, +\infty)$, $I^{\searrow} : (e^{-2}, 1)$.
Punto de inflexión en $x = e^{-1}$. $I^{\cup} = (e^{-1}, +\infty)$, $I^{\cap} = (0, e^{-1})$.

(h) $f(x) = x - e^x$.
Dom $f = \mathbb{R}$
AO: $y = x$ para $-\infty$.
Máx global en $x = 0$. $I^{\nearrow} = (-\infty, 0)$, $I^{\searrow} = (0, +\infty)$.
No hay punto de inflexión. $I^{\cap} = \mathbb{R}$.

(i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Dom $f = \mathbb{R}$
No tiene asíntotas.
Mín global en $x = 0$. $I^{\nearrow} = (-\infty, 0)$, $I^{\searrow} = (0, +\infty)$.
No tiene puntos de inflexión. $I^{\cup} = \mathbb{R}$.

(j) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.
Dom $f = (-1, +\infty)$.
AV: $x = -1$.
Mín global en $x = 0$. $I^{\nearrow} = (0, +\infty)$, $I^{\searrow} = (-1, 0)$.
No tiene puntos de inflexión. $I^{\cup} = (1, +\infty)$.

15. Hallar dos números no negativos que sumen 1 y tales que la suma de sus cuadrados ...
Optimizar $f(x) = x^2 + (1-x)^2$ con dominio $x \in [0, 1]$. En $x = y = \frac{1}{2}$ se alcanza el mínimo absoluto, en $x = 0$ $(y = 1)$ y $x = 1$ $(y = 0)$ el máximo absoluto.

16. Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa ...
Optimizar $V(x) = x^2 \cdot \frac{48-x^2}{4x}$ con dominio $x \in (0, 4\sqrt{3})$. En $x = 4$ se alcanza el máximo. Las dimensiones de la caja son 4 $cm \times 4$ $cm \times 2$ cm.

17. Entre todos los rectángulos de área 100 m^2, determine las dimensiones del que posee: ...

    (a) Optimizar $P(x) = 2(x + \frac{100}{x})$ con dominio $x \in (0, +\infty)$. En $x = 10$ se alcanza el mínimo absoluto. El rectángulo es de 10 $m \times 10$ m.

    (b) Optimizar $D(x) = \sqrt{x^2 + (\frac{100}{x})^2}$ con dominio $x \in (0, +\infty)$. En $x = 10$ se alcanza el mínimo absoluto. El rectángulo es de 10 $m \times 10$ m.

18. Hallar las coordenadas de los puntos del gráfico de la función $f(x) = \sqrt{16 - 3x}$ ...
Optimizar $D(x) = \sqrt{x^2 + (16 - 3x)}$ con dominio $x \in [0, {}^{16}\!/_3]$. En $x = {}^3\!/_2$ se alcanza el mínimo absoluto y en $x = {}^{16}\!/_3$, el máximo absoluto. El punto del gráfico de f más cercano al origen es $({}^3\!/_2, \sqrt{{}^{23}\!/_2})$ y el más lejano, $({}^{16}\!/_3, 0)$.

19. En la producción y comercialización de un producto ...
Optimizar $D(x)$ con dominio $x \in [0, 15]$. En $x = 5$ se alcanza el máximo absoluto.

20. Un empresa de alquiler de autos tiene una flota de 120 vehículos que alquila a ...
Optimizar $B(p) = p.q(p) - 4q(p)$, donde $q(p) = 120 - 2(p - 40)$ es la cantidad de autos alquilados a precio p. El dominio es $p \in [40, +\infty)$. En $p = 52$ se alcanza un máximo absoluto (es una cuadrática cóncava). Debe alquilar cada auto a $p = \$52$.

21. El triángulo rectángulo de la figura adjunta tiene área 18 y el cateto b verifica ...
Optimizar $A(b) = \frac{\pi}{8}(b^2 + (\frac{36}{b})^2)$ con dominio $b \in [1, 12]$. En $b = 6$ se alcanza el mínimo absoluto, y en $x = 1$ el máximo absoluto. Las dimensiones del triángulo son 6×6 el de área mínima, y 1×36 el de área máxima.