Wavelet

Alexandre M. Diaz   Bianca S. Trentin   Nicole S. H. Marques
Wagner C. C. da Silva

05/05/2022

Conhecendo o Wavelet

- *Wavelet* é uma função capaz de decompor e representar outra função (*eg.: uma série de dados*) originalmente descrita no domínio do tempo.
- A decomposição de uma função *wavelets* é conhecida como "transformada wavelet" e tem suas variantes contínuas e discretas.
- Devido a sua capacidade de decompor as funções (domínio da frequência, domínio do tempo), este tipo de função possui ampla aplicação:
  - Processamento de sinais:
    - Compreensão de dados.
    - Eliminação de ruído.
    - Separação de componentes no sinal.
    - Identificação de singularidade.
    - Detecção de auto-semelhança.

Fourier vs Wavelets

- Fourier: podemos extrair apenas informações sobre o domínio da frequência, mas não podemos saber "quando" no tempo ocorre essas frequências.
- Wavelets: podemos extrair informações sobre o domínio da frequência e do tempo.

Características da função Wavelets

Para ser considerada uma *wavelet*, uma função deve atender as seguintes características:

1. A área total sob a curva da função é 0, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

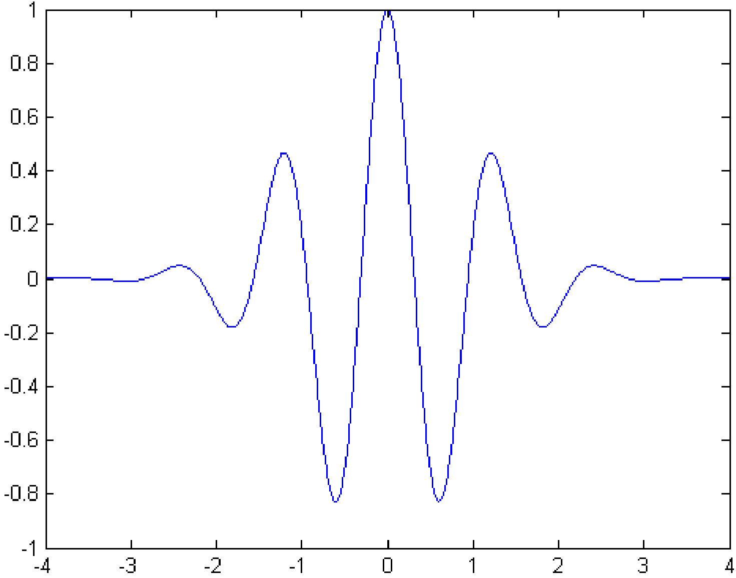
2. A energia da função finita, ou seja,

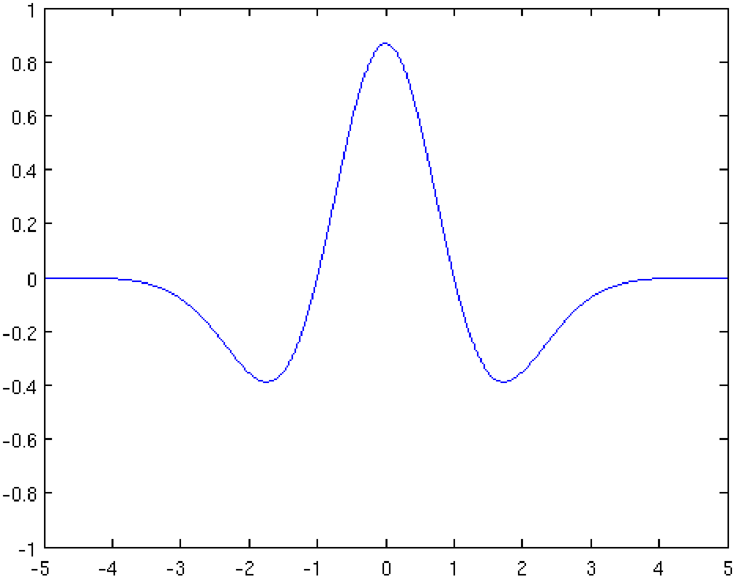
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < 0, \ L \in \mathbb{N}.$$

Isto equivale a dizer que $\psi(t)$ é um quadrado integrável.

Características

- Essa característica dita energia concentrada em uma região finita é que diferencia a análise wavelets da análise de Fourier.
- Uma maneira alternativa de expressar a característica de regularidade é dizer que a transformação wavelet é um operador local no domínio do tempo.
- Para ser utilizada na análise de sinais a função wavelet precisa de outra característica que é chamada de **condição de admissibilidade** a qual permite a transformação inversa de wavelet.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4



[widt

Transformada de wavelet contínua

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{a,b}(t)dt.$$

Onde **a** e **b** são parâmetros reais. (*) indica o conjugado complexo. Se definirmos $\psi_{a,b}(t)$ como:

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Podemos reescrever a transformada como produto interno das funções $f(t)$ e $\psi_{a,b}(t)$:

$$W(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{a,b}(t)\, dt$$

Esta função $\psi(t)$ equivale a $\psi_{1,0}(t)$ é chamado de *wavelet mãe*, enquanto as outras funções $\psi_{a,b}(t)$ são chamadas de *wavelets filhas*.

- O parâmetro **b** indica que a função $\psi(t)$ foi transladada no eixo t de uma distância equivalente a b.
- O parâmetro **a** causa uma mudança de escala, aumentando (se a > 1) ou diminuindo (se a < 1).
- No domínio do tempo, a transformada de wavelet é uma medida da correlação entre o sinal $f(t)$ e as wavelets filhas.

O termo $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ é um fator de normalização que garante que $\psi_{a,b}(t)$ seja independente de **a** e **b**, tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = |\psi_{a,b}(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \, dt$$

Transformada inversa de wavelet

- Como usamos wavelets para transformar uma função, precisamos da transformada inversa (com o intuito de recompor o sinal do domínio do tempo a partir da sua decomposição). Temos Ψ como a transformada de Fourier da função $\psi(t)$:

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t}\, dt = \sqrt{a}.\Psi(a\omega).e^{-i\omega t},$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{a}$.

E se W(a, b) for a transformada de wavelet da função f(t) usando a wavelet $\psi(t)$, então temos que a transformada inversa dada por:

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a, b) \psi_{a,b}(t) \, da \, db$$

onde

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} \, dw.$$

Transformada de wavelet discreta

É derivada da transformada contínua fazendo-se **a** e **b** variáveis discretas, usualmente usamos:

- $a = N^j$
- $b = kMa$ com $j, k \in \mathbb{N}$

a wavelet mãe resultante é uma matriz de valores h[j,k] relacionada à wavelet contínua $\psi(t)$ pela expressão

$$h[j,k] = N^{\frac{-j}{2}}.\psi\left(\frac{t}{N^j} - kM\right),$$

quanto mais próximo de 1 o valor de N, mais a versão discreta se aproxima da versão contínua. De forma similar, a transformada discreta é uma matriz de coeficientes $W_{j,k}$ dados por

$$W[j,k] = \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} f[k].h^*[j,k] = \langle f, h\rangle$$

Aplicação computacional

- Bancos de dados: PETRA4 e ITSA4.
- Área de finanças: dados de ações (período: Janeiro/2018 até Novembro/2018).
- A série será considerada em um período de 12 meses, pois os dados são coletados mensalmente.

Possibilidades da análise:

- O que está análise nos permite?
- Estimar o grau de correlação entre as variáveis em uma quantidade maior de frequências, verificando o comportamento da relação ao longo do tempo.
- Não precisamos assumir que os dados são estacionários.
- Pacotes utilizados:

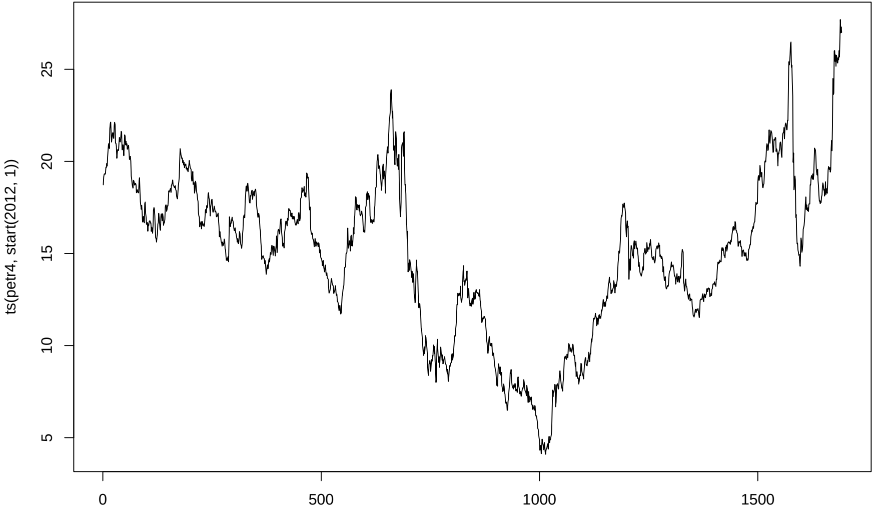
```
library(readr)
library(WaveletComp)
library(astsa)
```

Analisando as séries:

Ações PETR4:

```r
# Variável de interesse
petr4 <- da1$Maxima
```

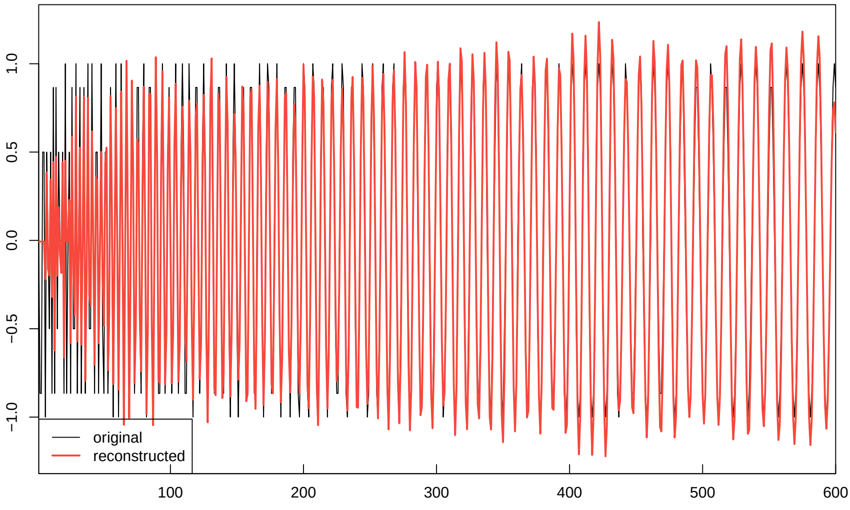
```r
ts.plot(ts(petr4, start(2012, 1)))
```



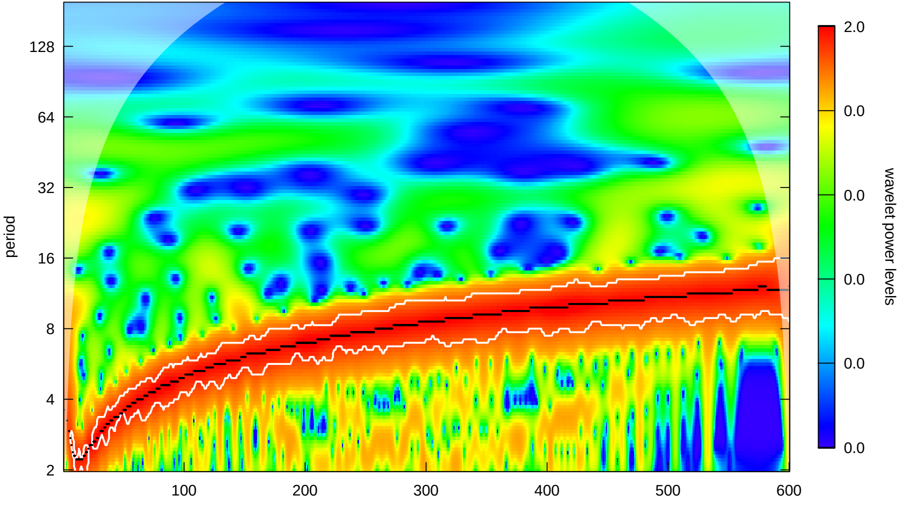
```r
# Inserindo frequência:
petr4 <- periodic.series(start.period = 1, end.period = 12)

data <- data.frame(petr4 = petr4)
```

```r
# Aplicando a transformada:
my.w <- analyze.wavelet(data, "petr4", loess.span = 0,
                        dt = 1, make.pval = T, n.sim = 10)
```

```
reconstruct(my.w, plot.waves = F, lwd = c(1,2), legend.coords
```



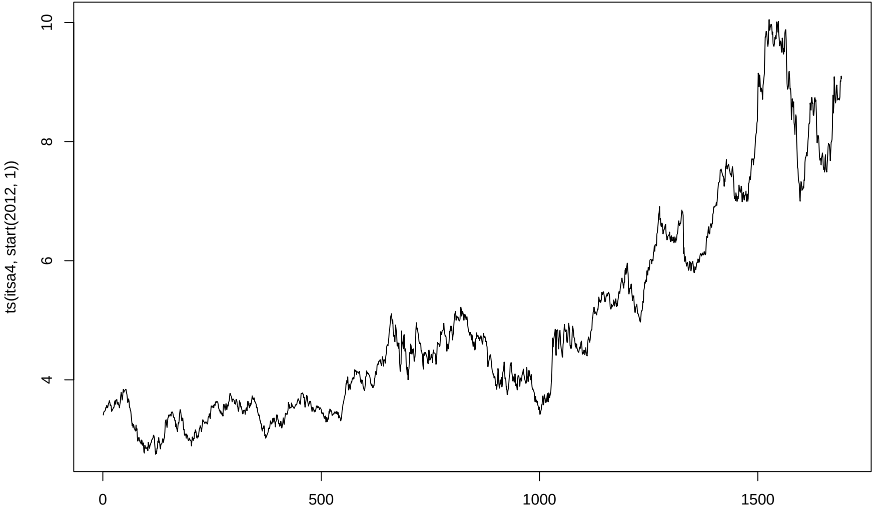
```
wt.image(my.w, color.key = "quantile", n.levels = 250, legend.
```



Ações ITSA4:

```r
# Variável de interesse
itsa4 <- da2$Maxima
```

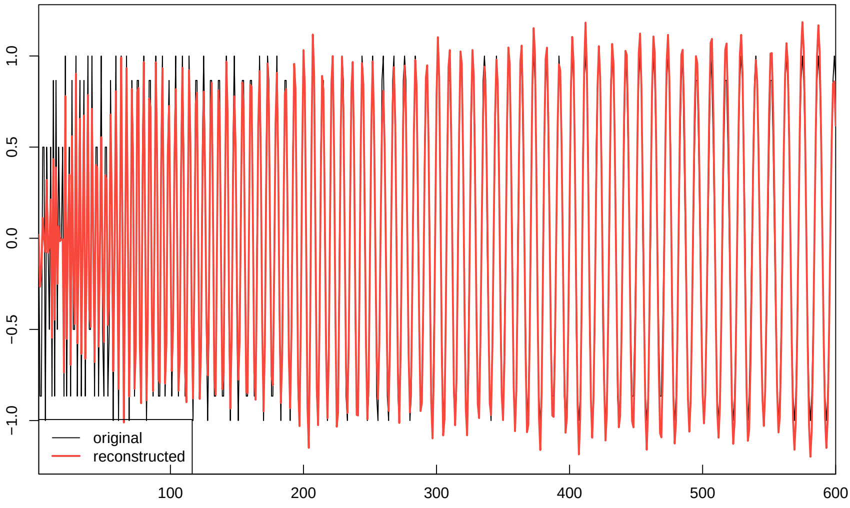
```r
ts.plot(ts(itsa4, start(2012, 1)))
```



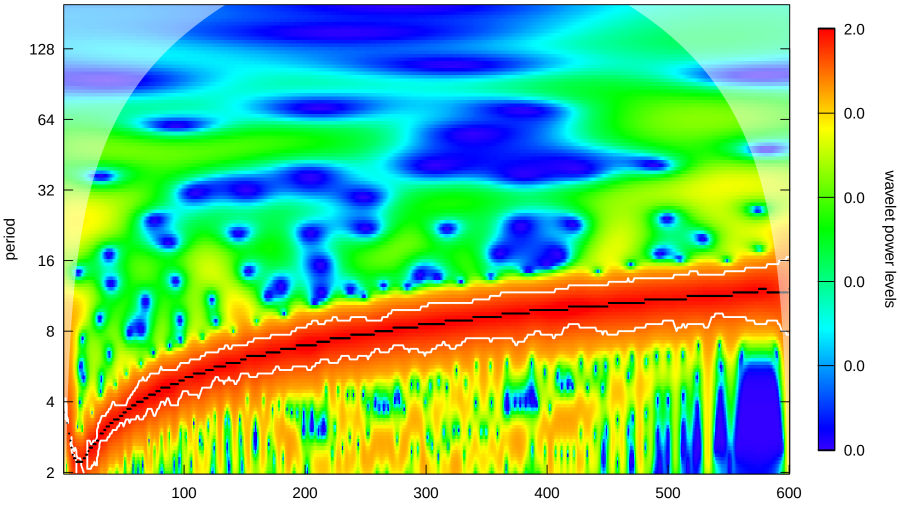
```r
# Inserindo frequência:
itsa4 <- periodic.series(start.period = 1, end.period = 12)

data <- data.frame(itsa4 = itsa4)
```

```r
# Aplicando a transformada:
my.w <- analyze.wavelet(data, "itsa4", loess.span = 0,
                        dt = 1, make.pval = T, n.sim = 10)
```

```r
reconstruct(my.w, plot.waves = F, lwd = c(1,2), legend.coords
```



```
wt.image(my.w, color.key = "quantile", n.levels = 250, legend.
```



Conclusão

- Ao longo do curso nos deparamos com diversos transformadores de regiões de probabilidade. *(eg.: método Jacobiano)*.
- Esta aplicação é muito utilizada na área da física e mercado financeiro.
- Conseguimos ter a percepção de que o “mapa de calor” proveniente da Wavelet é uma boa alternativa para verificar os coeficientes que possuem maiores pesos.

Referências

Morettin, Pedro A. (1999). ONDAS E ONDALETAS. Da Análise de Fourier à Análise de ondaletas 1 ed. [S.l.]: edUSP. 276 páginas. ISBN 8531405092

SHENG, Yunlong (2000). Wavelet Transform. cap. 10 - in Poularikas, A. - THE TRANSFORMS AND APPLICATIONS HANDBOOK 2 ed. Boca Raton: CRC Press