Camera Basics Notes

Camera Basics Notes

Q1 相机内参、外参和相机矩阵

相机成像步骤

世界坐标系 (X_w, Y_w, Z_w)

刚体变换 ↓

相机坐标系 (X_c, Y_c, Z_c)

透视投影 ↓

理想图像坐标系 (x, y)

畸变校正 ↓

真实图像坐标系

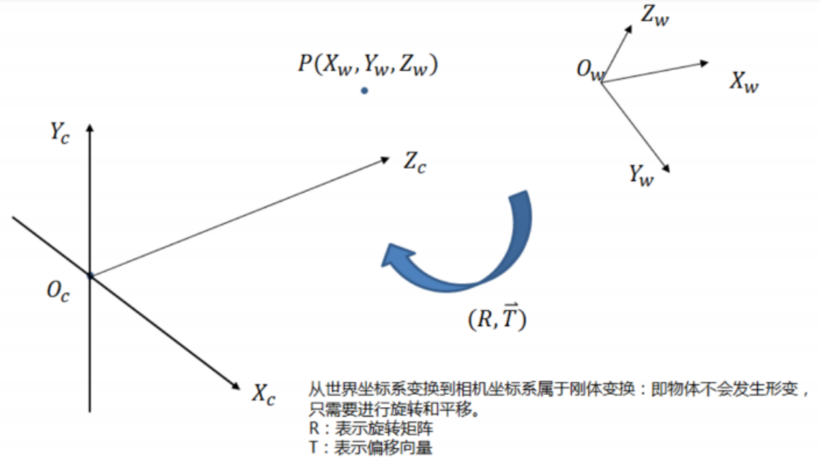
数字化图像 ↓

数字图像坐标系 (u, v)

世界坐标系（world coordinate）(xw,yw,zw)，也称为测量坐标系，是一个三维直角坐标系，以其为基准可以描述相机和待测物体的空间位置。世界坐标系的位置可以根据实际情况自由确定。

相机坐标系（camera coordinate）(xc,yc,zc)，也是一个三维直角坐标系，原点位于镜头光心处，x、y轴分别与相面的两边平行，z轴为镜头光轴，与像平面垂直。

刚体变换只改变物体的空间位置(平移)和朝向(旋转)，而不改变其形状，可用两个变量来描述：旋转矩阵R和平移向量t：齐次坐标下可写为：旋转矩阵R是正交矩阵，可通过罗德里格斯（Rodrigues）变换转换为只有三个独立变量的旋转向量：因此，刚体变换可用6个参数来描述，这6个参数就称为相机的外参(Extrinsic)，相机外参决定了空间点从世界坐标系转换到相机坐标系的变换，也可以说外参描述了相机在世界坐标系中的位置和朝向。



于是可以得到P点在相机坐标系中的坐标

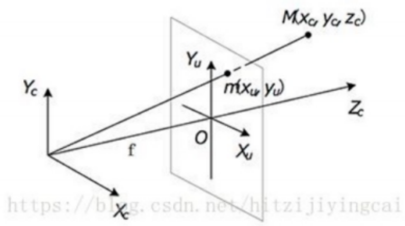
$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T \Rightarrow \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad R:3*3 \quad T:3*1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

2、透视投影

将成像平面平移到相机光心与物体之间，则有中心透视模型.

相似三角形原理.



齐次坐标系下有：

$$x_u = f\frac{x_c}{z_c}$$

$$y_u = f\frac{y_c}{z_c}$$

$$z_c\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f&0&0&0\\0&f&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\y_c\\z_c\\1\end{bmatrix}$$

总体上看，透视投影将相机坐标中的点投影到理想图像坐标中，其变换过程只与相机焦距有关

相机的内外参数

除此之外，我们还需要其他一些信息，例如相机的内在和外在参数。内部参数特定于摄像机。它们包括诸如焦距(f_x ，f_y)和光学中心(c_x, c_y)之类的信息。焦距和光学中心可用于创建相机矩阵，该相机矩阵可用于消除由于特定相机镜头而引起的畸变。相机矩阵对于特定相机而言是唯一的，因此一旦计算出，就可以在同一相机拍摄的其他图像上重复使用。它表示为3x3矩阵：

$$camera\ matrix = \begin{bmatrix}f_x&0&c_x\\0&f_y&c_y\\0&0&1\end{bmatrix}$$

外在参数对应于旋转和平移矢量，其将3D点的坐标平移为坐标系。

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=M_{int}M_{ext}\begin{pmatrix}X_w\\Y_w\\Z_w\\1\end{pmatrix}$$

$$M_{int}=\begin{bmatrix}-f_x&0&O_x\\0&-f_y&O_y\\0&0&1\end{bmatrix}$$

已知

$$M_{ext}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}&T_x\\r_{21}&r_{22}&r_{23}&T_y\\r_{31}&r_{32}&r_{33}&T_z\end{bmatrix}$$

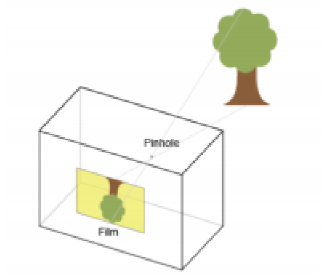
intrinsic matrix

The intrinsic matrix containing 5 intrinsic parameters. These parameters encompass focal length, image format, and principal point.

焦距　　图像格式　　关键点

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & \gamma & u_0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The intrinsic matrix transforms 3D camera coordinates to 2D homogeneous image coordinates.



$[u\ v\ 1]^T$ — 2D point position in pixel coordinates

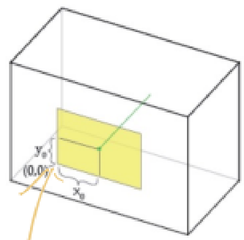
$[x_w\ y_w\ z_w\ 1]^T$ — 3D point position in world coordinate

① $\alpha_x = f \cdot m_x$　$\alpha_y = f \cdot m_y$

represent. focal length in terms of pixels 用像素的方式表述焦距

m_x · m_y are the scale factors relating pixels to distance.

② u_0 . v_0. principal point offset. 主点偏移



the exact definition depends on which convention is used for the location of the origin.

③ γ . Axis skew 轴偏斜.

"there isn't any analogue to axis skew a true pinhole camera.

extrinsic matrix

The camera's extrinsic matrix describes the camera's location in the world, and what direction it's pointing.

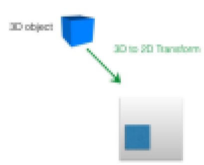
The camera's extrinsic matrix describes the camera's location in the world, and what direction it's pointing. It has two components: a rotation matrix, R, and a translation vector t

Represent the directions of the world-axes in camera coordinates.

$$[R\,|\,\boldsymbol{t}] = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & t_1 \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & t_2 \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & t_3 \end{array}\right]$$

Can be interpreted as the position of the world origin in camera coordinate.

Camera matrix



$$M=\begin{bmatrix} a_x & s & x_0 \\ 0 & a_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{3\times3} & T_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

5 3 3

总共11个自由度

$\underset{3\times3}{M=K}\underset{3\times4}{[R|T]} \Rightarrow M_{3\times4}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

http://ksimek.github.io/2013/08/13/intrinsic/

extrinsic matrix

The camera's extrinsic matrix describes the camera's location in the world, and what direction it's pointing.

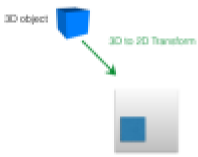
The camera's extrinsic matrix describes the camera's location in the world, and what direction it's pointing. It has two components: a rotation matrix, R, and a translation vector t

Represent the directions of the world-axes in camera coordinates.

$$[R\,|\,\boldsymbol{t}] = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & t_1 \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & t_2 \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & t_3 \end{array}\right]$$

can be interpreted as the position of the world origin in camera coordinate.

Camera matrix



$$M=\begin{bmatrix} a_x & s & x_0 \\ 0 & a_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{3\times3} & T_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

5 3 3

总共11个自由度

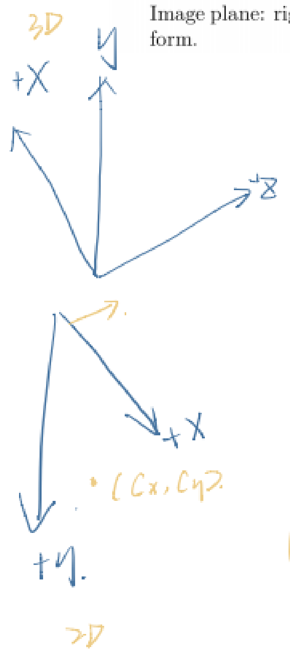
$\underset{3\times3}{M=K}\underset{3\times4}{[R|T]} \Rightarrow M_{3\times4}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

http://ksimek.github.io/2013/08/13/intrinsic/

Q2、计算题

2. (Camera Imaging) Given an ordinary camera with focal length f_x and f_y, optical center (c_x, c_y), the transform between the 3D world coordinates and the 3D camera coordinates is $(R|t)$, can you transform a 3D point $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ onto the image plane? (Consider only pinhole camera model. 3D camera coordinate position: front is +Z, left is +X, up is +Y. Image plane: right is +x, down is +y). Write down your answers in matrix form.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & C_x \\ 0 & a_y & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$P = (x, y)$

$\Uparrow$

(X_1, X_2, X_3)

$x = f_x \cdot u + x$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Uparrow$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & C_x & 0 \\ 0 & f_y & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$=$

$R = R_x(\theta) R_y(\theta) R_z(\theta)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

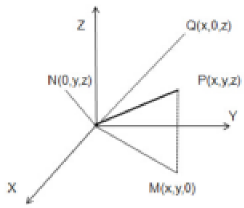
三维坐标旋转矩阵

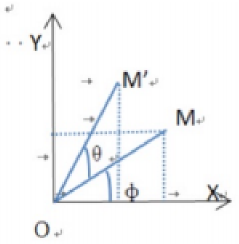
任何维的旋转可以表述为向量与合适尺寸的方阵的乘积。最终一个旋转等价于在另一个不同坐标系下对点位置的重新表述。坐标系旋转角度θ则等同于将目标点围绕坐标原点反方向旋转同样的角度θ。

若以坐标系的三个坐标轴X、Y、Z分别作为旋转轴，则点实际上只在垂直坐标轴的平面上作二维旋转。

$\vec{OP} = (x, y, z)^T$

绕 Z 轴旋转 θ 角





$OM \to OM'$

旋转前 → 旋转后

$(x, y, z)^T \to (x', y', z')^T$

$M(x, y)$ $M'(x', y')$ $z' = z$

$x = OM\cos\varphi$ $y = OM\sin\varphi$

$x' = OM'\cos(\varphi+\theta)$ $y' = OM'\sin(\varphi+\theta)$

$= x\cos\theta - y\sin\theta$ $= y\cos\theta + x\sin\theta$

好在右手坐标系下计算

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M = R_x(\theta)R_y(\theta)R_z(\theta)$

绕 x 轴 绕 y 轴 绕 z 轴

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \quad R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q3、计算题

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像坐标系下

像素的位置坐标 $u = \frac{f_x \cdot X}{Z} + c_x$, $v = \frac{f_y \cdot Y}{Z} + c_y$

$M \; (R|t)$ ✓ $\quad t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$X = \frac{(u-c_x) * Z}{f_x}$ → 深度图的缩放因子

$Y = \frac{(v-c_y) * Z}{f_y}$

point = 深度 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\Downarrow$ Z 轴归一化

$X = \frac{(u-c_x) * Z}{f_x \cdot depthscale}$

$Y = \frac{(v-c_y) * Z}{f_y \cdot depthscale}$

$Z = \frac{Z_c}{depthscale}$

$s \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = C \cdot \left(R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + t\right)$

假设相机没有旋转和平移

R为单位阵，t为0，s为scaling factor

即深度图中数据与实际距离的比值

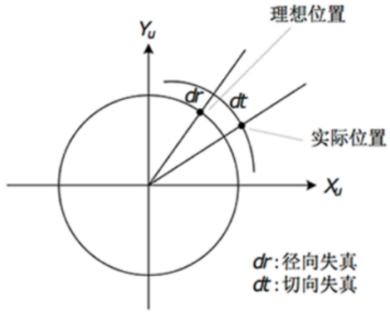
$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $s = z_t$

$z_t \begin{bmatrix} u \\ v \\ z_t \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_t \end{bmatrix}$

$\Downarrow$ z_t 为0 $\quad \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Q4、描述相机畸变

理想的针孔成像模型确定的坐标变换关系均为线性的，而实际上，现实中使用的相机由于镜头中镜片因为光线的通过产生的不规则的折射，镜头畸变（lens distortion）总是存在的，即根据理想针孔成像模型计算出来的像点坐标与实际坐标存在偏差。畸变的引入使得成像模型中的几何变换关系变为非线性，增加了模型的复杂度，但更接近真实情形。畸变导致的成像失真可分为径向失真和切向失真两类：



径向畸变可以表示为 δ_{xr} $x_{distorted} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$

所有预期直线凸出. δ_{yr} $y_{distorted} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$

切向畸变可以表示成 δ_{xd} $x_{distorted} = x + [2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)]$

图像中某些区域看起来比预期近 δ_{yd} $y_{distorted} = y + [p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy]$

Q5、描述相机校准

- 要想对一个成像系统建模，进而进行相应的计算，所必须的参数就是相机的内参矩阵：$\begin{pmatrix} \frac{f}{dX} & -\frac{f\cot\theta}{dX} & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{dY\sin\theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和相机的外参矩阵 $\begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，因此，相机标定的第一个目的就是获得相机的内参矩阵和外参矩阵。
- 另外，相机拍摄的图片还存在一定的畸变，畸变包括桶形畸变和枕形畸变。对于畸变原理还不太明白的同学需要先查一查学习一下。

  畸变模型包括径向畸变和切向畸变。

  径向畸变公式（3阶）如下：

  $$\hat{x} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$
  $$\hat{y} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

  切向畸变公式如下：

  $$\hat{x} = x + (2p_1 y + p_2(r^2 + 2x^2))$$
  $$\hat{y} = y + (p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 x)$$

  其中，$(x, y), (\hat{x}, \hat{y})$ 分别为理想的无畸变的归一化的图像坐标、畸变后的归一化图像坐标， 为图像像素点到图像中心点的距离，即 $r^2 = x^2 + y^2$。

  相机标定的第二个目的就是获得相机的畸变参数，如上式中的 k_1, k_2, k_3, p_1, p_2 等，进而对拍摄的图片进行去畸变处理。

Q6、运用openCV的函数进行相机的校准

Q7、编程校正图像

原理参考：https://blog.csdn.net/zkl99999/article/details/48372203

https://blog.csdn.net/u010128736/article/details/52860364

相机标定参考：https://blog.csdn.net/JennyBi/article/details/85764988

Q8、张正友相机标定

（一）张正友相机标定原理

> *「张氏标定法」 是张正友博士在1999年发表在国际顶级会议ICCV上的论文《Flexible Camera Calibration By Viewing a Plane From Unknown Orientations》中，提出的一种利用平面棋盘格进行相机标定的实用方法。**该方法介于摄影标定法和自标定法之间，既克服了摄影标定法需要的高精度三维标定物的缺点，又解决了自标定法鲁棒性差的难题。**标定过程仅需使用一个打印出来的棋盘格，并从不同方向拍摄几组图片即可，任何人都可以自己制作标定图案，不仅实用灵活方便，而且精度很高，鲁棒性好。 因此很快被全世界广泛采用，极大的促进了三维计算机视觉从实验室走向真实世界的进程。*

（二）步骤

1、打印一张棋盘格，把它贴在一个平面上，作为标定物。

2、通过调整标定物或摄像机的方向，为标定物拍摄一些不同方向（这里拍摄15-20张）的照片。

3、从照片中提取棋盘格角点。（Harris角点）

4、估算理想无畸变的情况下，五个内参和六个外参。

5、应用最小二乘法估算实际存在径向畸变下的畸变系数。

6、极大似然法，优化估计，提升估计精度。

以下内容来自：

[相机标定之张正友标定法数学原理详解（含python源码）]

自己尝试运行成功代码，[作者GitHub链接]

1、求解内参矩阵与外参矩阵的积

将世界坐标系固定于棋盘格上，则棋盘格上任一点的物理坐标 $W=0$，因此，原单点无畸变的成像模型可以化为下式。其中，$R1, R2$ 为旋转矩阵 R 的前两列。为了简便，将内参矩阵记为 A。

$$Z\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{dX} & -\frac{f\cot\theta}{dX} & u_0 \\ 0 & \frac{f}{dY\sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R1 & R2 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} R1 & R2 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 1 \end{pmatrix}$$

我们对于上式做一定的说明。对于不同的图片，内参矩阵A为定值；对于同一张图片，内参矩阵A，外参矩阵$\begin{pmatrix} R1 & R2 & T \end{pmatrix}$为定值；对于同一张图片上的单点，内参矩阵$A$，外参矩阵$\begin{pmatrix} R1 & R2 & T \end{pmatrix}$，尺度因子$Z$为定值。

我们将 $A\begin{pmatrix} R1 & R2 & T \end{pmatrix}$ 记为矩阵 H， H 即为内参矩阵和外参矩阵的积，记矩阵 H 的三列为 $(H1, H2, H3)$，则有：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} H \begin{pmatrix} U \\ V \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{32} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 1 \end{pmatrix}$$

利用上式，消去尺度因子 Z，可得：

$$u = \frac{H_{11}U + H_{12}V + H_{13}}{H_{31}U + H_{32}V + H_{33}}$$
$$v = \frac{H_{21}U + H_{22}V + H_{23}}{H_{31}U + H_{32}V + H_{33}}$$

此时，尺度因子 Z已经被消去，因此上式对于同一张图片上所有的角点均成立。(u, v) 是像素坐标系下的标定板角点的坐标，(U, V) 是世界坐标系下的标定板角点的坐标。通过图像识别算法，我们可以得到标定板角点的像素坐标(u, v)，又由于标定板的世界坐标系是人为定义好的，标定板上每一个格子的大小是已知的，我们可以计算得到世界坐标系下的(U, V)。

由这里的 H 是齐次矩阵，有8个独立未知元素。每一个标定板角点可以提供两个约束方程（u, U, V 的对应关系、v, U, V 的对应关系提供了两个约束方程），因此，当一张图片上的标定板角点数量等于4时，即可求得该图片对应的矩阵 H 。当一张图片上的标定板角点数量大于4时，利用最小二乘法回归最佳的矩阵 H。

2、求解内参矩阵

我们已知了矩阵 $H = A(R1 \quad R2 \quad T)$ ，接下来需要求解相机的内参矩阵 A 。

我们利用$R1, R2$作为旋转矩阵 R 的两列，存在单位正交的关系，即：

$$R1^T R2 = 0$$
$$R1^T R1 = R2^T R2 = 1$$

则由 H 和 $R1, R2$ 的关系，可知：

$$R1 = A^{-1} H1$$
$$R2 = A^{-1} H2$$

代入可得：

$$H1^T A^{-T} A^{-1} H2 = 0$$
$$H1^T A^{-T} A^{-1} H1 = H2^T A^{-T} A^{-1} H2 = 1$$

另外，我们发现，上述两个约束方程中均存在矩阵 $A^{-T} A^{-1}$ 。因此，我们记 $A^{-T} A^{-1} = B$ ，则 B为对称阵。我们试图先求解出矩阵 B ，通过矩阵 B 再求解相机的内参矩阵 A 。

同时，为了简便，我们记相机内参矩阵 A 为：

$$A=\begin{pmatrix} \frac{f}{dX} & -\frac{f\cot\theta}{dX} & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{dY\sin\theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha\beta} & \frac{\gamma v_0-\beta u_0}{\alpha\beta} \\ 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{v_0}{\beta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则用矩阵 A表示矩阵 B 得:

$$B=A^{-T}A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma v_0-\beta u_0}{\alpha^2\beta} \\ -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{1}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\gamma(\beta u_0-\gamma v_0)}{\alpha^2\beta^2}-\frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{\gamma v_0-\beta u_0}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma(\beta u_0-\gamma v_0)}{\alpha^2\beta^2}-\frac{v_0}{\beta^2} & \frac{(\beta u_0-\gamma v_0)^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{v_0^2}{\beta^2}+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

注意：由于B为对称阵，上式出现了两次 B_{12}, B_{13}, B_{23} 。

这里，我们可以使用 $B=A^{-T}A^{-1}$ 将前面通过 $R1, R2$ 单位正交得到的约束方程化为:

$$H1^TBH2=0$$
$$H1^TBH1=H2^TBH2=1$$

因此，为了求解矩阵B ，我们必须计算 $H_i^TBH_j$ 。则:

$$H_i^TBH_j=\begin{bmatrix} H_{1i} & H_{2i} & H_{3i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{1j} \\ H_{2j} \\ H_{3j} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} H_{1i}H_{1j} & H_{1i}H_{2j}+H_{2i}H_{1j} & H_{2i}H_{2j} & H_{1i}H_{3j}+H_{3i}H_{1j} & H_{2i}H_{3j}+H_{3i}H_{2j} & H_{3i}H_{3j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix}$$

上述方程看起来有点复杂，但是其实不然，我们可以记:

$$v_{ij}=\begin{bmatrix} H_{1i}H_{1j} & H_{1i}H_{2j}+H_{2i}H_{1j} & H_{2i}H_{2j} & H_{1i}H_{3j}+H_{3i}H_{1j} & H_{2i}H_{3j}+H_{3i}H_{2j} & H_{3i}H_{3j} \end{bmatrix}^T$$
$$b=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}^T$$

则上述方程化为: $H_i^TBH_j=v_{ij}b$

此时，通过 $R1, R2$ 单位正交得到的约束方程可化为:

$$v_{12}^Tb=0$$
$$v_{11}^Tb=v_{22}^Tb=1$$

即：

$$\begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{bmatrix} b = vb = 0$$

其中，矩阵 $v = \begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{bmatrix}$

由于矩阵 H 已知，矩阵 v 又全部由矩阵 H 的元素构成，因此矩阵v已知。

此时，我们只要求解出向量 b ，即可得到矩阵 B 。每张标定板图片可以提供一个 $vb = 0$ 的约束关系，该约束关系含有两个约束方程。但是，向量 b 有6个未知元素。因此，单张图片提供的两个约束方程是不足以解出来向量 b。因此，我们只要取3张标定板照片，得到3个$vb = 0$ 的约束关系，即6个方程，即可求解向量 b。当标定板图片的个数大于3时（事实上一般需要15到20张标定板图片），可采用最小二乘拟合最佳的向量 b ，并得到矩阵 B 。

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma v_0 - \beta u_0}{\alpha^2\beta} \\ -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{1}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2} & \frac{\gamma(\beta u_0 - \gamma v_0)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{\gamma v_0 - \beta u_0}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma(\beta u_0 - \gamma v_0)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} & \frac{(\beta u_0 - \gamma v_0)^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{v_0^2}{\beta^2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

根据矩阵 B 的元素和相机内参 $\alpha, \beta, \gamma, u_0, v_0$ 的对应关系（如上式），可得到：

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{1}{B_{11}}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}} \\ \gamma &= -B_{12}\alpha^2\beta \\ u_0 &= \frac{\gamma v_0}{\beta} - B_{13}\alpha^2 \end{aligned}$$

即可求得相机的内参矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{f}{dX} & -\frac{f\cot\theta}{dX} & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{dY\sin\theta} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

3、求解外参矩阵

这里再次强调一下，对于同一个相机，相机的内参矩阵取决于相机的内部参数，无论标定板和相机的位置关系是怎么样的，相机的内参矩阵不变。这也正是在第2部分"求解内参矩阵"中，我们可以利用不同的图片（标定板和相机位置关系不同）获取的矩阵 H，共同求解相机内参矩阵 A 的原因。

但是，外参矩阵反映的是标定板和相机的位置关系。对于不同的图片，标定板和相机的位置关系已经改变，此时每一张图片对应的外参矩阵都是不同的。

在关系：$A(R1 \quad R2 \quad T) = H$ 中，我们已经求解得到了矩阵 H（对于同一张图片相同，对于不同的图片不同）、矩阵 A（对于不同的图片都相同）。通过公式：$(R1 \quad R2 \quad T) = A^{-1}H$，即可求得每一张图片对应的外参矩阵 $(R1 \quad R2 \quad T)$。

注意，这里值得指出，完整的外参矩阵为 $\begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。但是，由于张正友标定板将世界坐标系的原点选取在棋盘格上，则棋盘格上任一点的物理坐标 $W = 0$，将旋转矩阵的 R 的第三列 $R3$ 消掉，因此，$R3$ 在坐标转化中并没有作用。但是 $R3$ 要使得 R 满足旋转矩阵的性质，即列与列之间单位正交，因此可以通过向量 $R1, R2$ 的叉乘，即 $R3 = R1 \times R2$，计算得到$R3$。

此时，相机的内参矩阵和外参矩阵均已得到。

4、标定相机的畸变参数

张正友标定法仅仅考虑了畸变模型中影响较大的径向畸变。

径向畸变公式（2阶）如下：

$$\hat{x} = x\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right)$$
$$\hat{y} = y\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right)$$

其中，$(x, y), (\hat{x}, \hat{y})$分别为理想的无畸变的归一化的图像坐标、畸变后的归一化图像坐标，r 为图像像素点到图像中心点的距离，即 $r^2 = x^2 + y^2$。

图像坐标和像素坐标的转化关系为：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{dX} & -\frac{\cot\theta}{dX} & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dY\sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中，(u, v)为理想的无畸变的像素坐标。由于 θ 接近于 90°，则上式近似为：

$$u = \frac{x}{dX} + u_0$$
$$v = \frac{y}{dY} + v_0$$

同理可得畸变后的像素坐标$(\hat{u}, \hat{v})$的表达式为：

$$\hat{u} = \frac{\hat{x}}{dX} + u_0$$
$$\hat{v} = \frac{\hat{y}}{dY} + v_0$$

代入径向畸变公式（2阶）则有：

$$\hat{u} - u_0 = (u - u_0)\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right)$$
$$\hat{v} - v_0 = (v - v_0)\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right)$$

可化简得：

$$\hat{u} = u + (u - u_0)\left(k_1 r^2 + k_2 r^4\right)$$
$$\hat{v} = v + (v - v_0)\left(k_1 r^2 + k_2 r^4\right)$$

即为：

$$\begin{bmatrix} (u-u_0)\, r^2 & (u-u_0)\, r^4 \\ (v-v_0)\, r^2 & (v-v_0)\, r^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u} - u \\ \hat{v} - v \end{bmatrix}$$

上式中的 $\hat{u}, u, \hat{v}, v$ 可以通过识别标定板的角点获得，每一个角点可以构造两个上述等式。有m幅图像，每幅图像上有n个标定板角点，则将得到的所有等式组合起来，可以得到个mn未知数为的 $k = [k_1, k_2]^T$ 约束方程，将约束方程系数矩阵记为 D，等式右端非齐次项记为 d，可将其记着矩阵形式：

$$Dk = d$$

则使用最小二乘法可求得：

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \left(D^T D\right)^{-1} D^T d$$

此时，相机的畸变矫正参数已经标定好。

上述公式推导的时候以2阶径向畸变为例，但实际上更高阶的径向畸变同理，只是需要的约束方程个数更多而已。

thoughts

> - *一开始拿到项目题目，读明白题目答题需要我们去做什么，就开始直接阅读题目链接中的英文的资料，包括百科和文档，但是生词太多，参数也很多，没有办法比较快的建立起概念体系*
> - *然后开始上网查找相关概念，网上充斥着各式各样的中引文博客教程，这个查找资料的方式虽然可以比较直接的获得相关知识点的讲解，但是却是一种功倍事半的路径，因为那些文章都很离散，各种参数的定义都不统一，很容易混淆，在这个地方花里很多精力然后理解效果并不算太好。*
> - *之后在有了一定的概念的基础上，遇到了《学习openCV》这本教材，这本书非常好，其中的第18章非常成体系的介绍了相机模型及标定，以及openCV库中的函数，然后自己做了笔记，算是基本理解这些知识*

> - *然后开始配置Python上的openCV的库，并且学习了相关基础用法，参考网上博客教程调用openCV的函数实现相机的标定和图像的校正*
> - *张正友标定法的数学原理借鉴以上有了较为清晰的认识，在GitHub网站上找到了实现的代码，其中部分数学运算方法没有看明白*

Refer

> *Dissecting the Camera Matrix, Part 3: The Intrinsic Matrix*
>
> *Dissecting the Camera Matrix, Part 2: The Extrinsic Matrix*
>
> *相机标定求解相机内参数 https://www.cnblogs.com/gaoyixue/p/10406626.html*
>
> *张正友相机标定Opencv实现以及标定流程&&标定结果评价&&图像矫正流程解析（附标定程序和棋盘图*
>
> *OpenCV中文官方文档*
>
> *相机标定之张正友标定法数学原理详解（含python源码）*