

Indice di rifrazione del plexiglass. Potere diottrico di una lente divergente

Nicolò Bottiglioni, Marco Malucchi

5 aprile 2023

Obiettivi

L'esperienza consiste in due diversi obiettivi: in primo luogo, misurare l'indice di rifrazione del plexiglass a partire dalla misurazione dell'angolo di incidenza e di rifrazione di un raggio luminoso incidente in un semicilindro di plexiglass. Successivamente, misurare il potere diottrico di una lente divergente tramite la misurazione della distanza dalla lente della sorgente e dell'immagine creata.

1 INDICE DI RIFRAZIONE DEL PLEXIGLASS

1.1 Cenni teorici

Nell'ambito dell'ottica geometrica, la legge di Snell-Cartesio descrive la rifrazione di un raggio luminoso ogni qual volta che attraversa due mezzi con indice di rifrazione differente. L'equazione della legge di Snell-Cartesio è la seguente.

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad , \quad (1)$$

dove θ_i , θ_r sono rispettivamente gli angoli di incidenza e di rifrazione del raggio luminoso, misurati rispetto alla normale al piano di incidenza, e n_1 , n_2 sono gli indici di rifrazione dei due materiali attraversati dal raggio luminoso.

1.2 Setup sperimentale

L'apparato consisteva in una sorgente di luce, con diaframma a fenditura per creare un fascio di luce sottile, e in un supporto sul quale, al di sopra di un foglio di carta quadrettata con disegnata una circonferenza, è stato posizionato il semicilindro di plexiglass. Il montaggio è stato regolato in modo che il raggio luminoso incidesse nel centro della superficie piana del semicilindro, in modo da evitare un secondo raggio in uscita. Questo passaggio è stato facilitato dal fatto che, sul foglio quadrettato, erano disegnati in maniera rimarcata una circonferenza e due suoi diametri ortogonali: in questo modo è stato possibile disporre la superficie piana del cilindro in modo simmetrico rispetto al centro della circonferenza e lungo uno di questi ultimi, e anche assicurarsi che il raggio luminoso incidesse nel centro della superficie piana, coincidente quindi con il centro della circonferenza. Di fronte alla sorgente luminosa era posizionata anche una lente convergente e, prima di cominciare con le misurazioni, è stata regolata la distanza del supporto per il semicilindro dalla sorgente di luce in modo che il raggio incidente fosse il più sottile possibile.

1.3 Misurazioni effettuate

La carta quadrettata è stata fondamentale nella fase di presa dati. Infatti, sono state scelte dieci diverse angolazioni per il raggio di incidenza e, per ciascuna di esse, sono state misurate le distanze dal raggio della circonferenza rispettivamente del raggio incidente e del raggio rifratto. Le coppie di misure effettuate sono state dunque, detto R il raggio della circonferenza e θ_i e θ_r gli angoli di incidenza e rifrazioni, le seguenti.

$R\sin\theta_r \pm 1$	$[quadretti]$	$R\sin\theta_i \pm 1$	$[quadretti]$
	11		7
	26		17
	16		13
	9		6
	5		4
	15		10
	25		19
	13		9
	29		19
	3		4

Tabella 1

Come incertezza è stata associata ad ogni misura quella di un quadretto, dal momento che grazie alla regolazione del montaggio i raggi, sia incidenti che rifratti, erano contenuti entro i due quadretti.

1.4 Analisi dati

A partire dalla (1), si può esplicitare $\sin\theta_i$ in funzione di $\sin\theta_r$. Nel caso delle nostre misure:

$$n_1 R \sin\theta_i = n_2 R \sin\theta_r \quad [quadretti] \quad (2)$$

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta_r \quad [quadretti] \quad (3)$$

E' stato eseguito un fit con l'algoritmo odr con un modello lineare, ottenendo il seguente risultato.

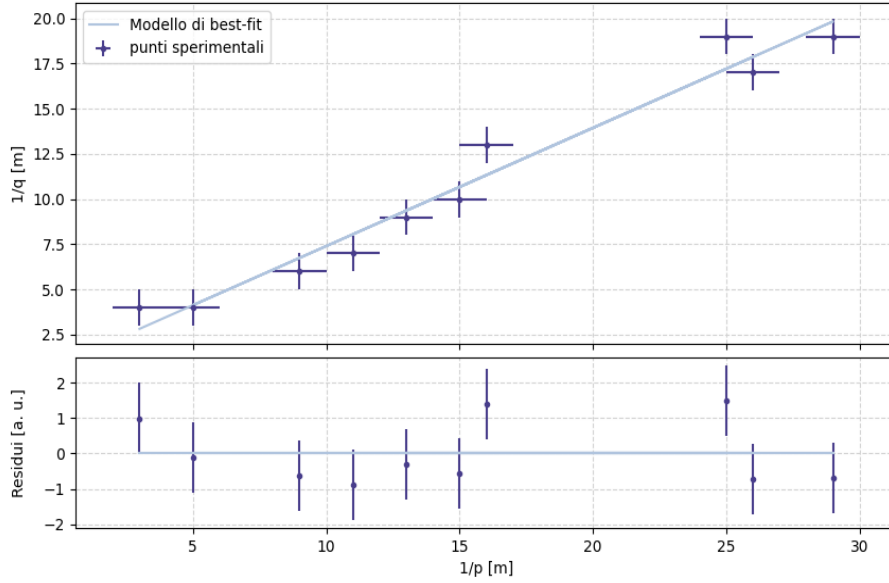


Figura 1: Grafico e residui del fit dei minimi quadrati con un modello lineare

Il fit tramite l'algoritmo odr è stato utilizzato perché l'incertezza sulla misura della distanza tra asse e raggio rifratto non è trascurabile rispetto alla misura della distanza tra asse e raggio incidente, ovvero non è rispettata la condizione $\frac{dy}{dx}\sigma_x \ll \sigma_y$. L'algoritmo odr permette di valutare l'accordo tra dati e modello in modo differente rispetto al fit dei minimi quadrati: infatti l'accordo viene valutato in base alla "distanza ortogonale" tra i punti e il grafico, e non in base alla loro distanza verticale, la quale non tiene conto dell'incertezza delle misure sull'asse delle ascisse.

Inoltre, per quest'esperienza è stato assunto $n_1 = 1$, con n_1 indice di rifrazione dell'aria. L'effettivo valore dell'indice di rifrazione è, invece, circa $n_1 = 1,000294$. Con tale approssimazione si è introdotto un errore relativo pari a $3 \cdot 10^{-4}$. Grazie a quest'approssimazione, il valore stimato dal fit per il coefficiente angolare coincide con il valore dell'indice di rifrazione del plexiglass.

1.5 Conclusioni

Il modello matematico utilizzato per il fit, come detto in precedenza, è quello di una retta, del tipo $y = mx + q$. Se la (3) descrive bene il fenomeno di rifrazione, i valori attesi per n_2 , q e χ^2 dovrebbero essere i seguenti.

Grandezze	Valori attesi
n_2	1.52
q	0
χ^2	8 ± 4

Tabella 2

Riportiamo di seguito i valori stimati tramite il fit.

Grandezze	Valori attesi
n_2	1.53 ± 0.10
q	0.86 ± 0.78
χ^2	7.8

Tabella 4

Notiamo che il valore dell'indice di rifrazione del plexiglass è compatibile con il valore atteso, essendo entro una σ da quest'ultimo. Il valore stimato per l'intercetta, invece, è entro 2σ dallo zero. Infine, anche il χ^2 è compatibile con il valore atteso.

L'errore relativo sulla misura di n_2 è pari a $\frac{\sigma_{n_2}}{n_2} = 0.07$. Quest'ultimo risulta molto maggiore dell'errore relativo introdotto tramite l'approssimazione $n_1 = 1$ e, ciò, giustifica l'approssimazione stessa.

2 POTERE DIOTTRICO DI UNALENTE DIVERGENTE

2.1 Cenni teorici

Le lenti convergenti sono tali da determinare la convergenza nel proprio fuoco di un fascio di raggi paralleli incidenti all'asse ottico. Data la simmetria delle lenti convergenti, esse posseggono due fuochi. Le lenti convergenti possono formare immagini reali, virtuali, dritte, capovolte e riscalate, a seconda della posizione dell'oggetto rispetto alla lente. Le lenti divergenti sono invece tali da determinare la divergenza di un fascio di raggi paralleli incidenti all'asse ottico; i prolungamenti dei raggi rifratti divergenti convergono nel fuoco della lente, il quale si trova dallo stesso lato da cui provengono i raggi incidenti. A causa di ciò, la lente divergente è solo in grado di produrre immagini virtuali, nel senso che esse non possono essere catturate su uno schermo. La legge matematica che regola il funzionamento delle lenti è

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad [m^{-1}] \quad (4)$$

dove f indica la distanza focale, ovvero la distanza del fuoco della lente dal proprio centro, p indica la distanza dell'oggetto reale dal centro della lente, mentre q indica la distanza dal centro della lente dell'immagine dell'oggetto reale, virtuale o reale che sia. A causa di quanto detto sopra, le lenti divergenti sono caratterizzate da una distanza focale negativa, mentre le lenti convergenti sono caratterizzate da una distanza focale positiva.

Infine, la quantità $\frac{1}{f}$ è detta "potere diottrico" della lente.

2.2 Setup sperimentale

L'apparato sperimentale è analogo a quello descritto per la misurazione del plexiglass, con la differenza che davanti alla sorgente di luce, al posto del diaframma a fenditura, è stato posizionato uno schermo con un foro triangolare, in modo da creare, appunto, un'immagine che avesse tale forma geometrica. A disposizione c'era anche un set di lenti, divergenti e convergenti, di diverso potere diottrico e uno schermo sul quale poter catturare l'immagine prodotta dalle lenti.

2.3 Misure effettuate

Dato che una lente divergente non produce immagini reali, è stato necessario utilizzare una lente convergente di potere diottrico maggiore in modulo di quello della lente divergente. È stata utilizzata, in particolare, una convergente di potere diottrico +10 e una divergente di potere diottrico -5. La convergente è stata posizionata di fronte alla sorgente, in modo che quest'ultima si trovasse nel fuoco della prima. Così facendo, si è potuto creare un fascio focalizzato. Dopodiché è stato posizionato lo schermo a una distanza tale dalla convergente che l'immagine triangolare fosse a fuoco. Fatto ciò, tale posizione dello schermo è stata "marcata" con un tratteggio a matita, in modo da riposizionare lo schermo nella stessa posizione ad ogni misurazione. Dopo queste accortezze, si è passati alle misurazioni vere e proprie. Sfruttando l'immagine prodotta dalla convergente come sorgente virtuale per la divergente, è stata posizionata la lente divergente tra la convergente e lo schermo e si è misurata la grandezza p , presa con il segno negativo, tra la divergente e lo schermo stesso. È stato poi spostato lo schermo in modo che l'immagine proiettata su esso risultasse nuovamente a fuoco e, a questo punto, è stata misurata la grandezza q , positiva, ovvero la nuova distanza tra lo schermo e la lente divergente. Tale procedura è stata iterata dieci volte, ottenendo le seguenti misure

p	\pm	0.5	[cm]	q	\pm	1	[cm]
			-6.5				10
			-8.6				17
			-10.1				18
			-11.5				26
			-12.8				34
			-13.3				41
			-14.2				44
			-14.7				52
			-15.1				58
			-15.3				60

Tabella 5

Come errore associato alle misure della grandezza p non è stato possibile utilizzare la risoluzione del metro a nastro a causa della posizione della lente divergente, non ben definita perché fissata all'interno di una ghiera. Quindi, come incertezza è stato preso il semispessore della ghiera stessa, mentre come valore centrale della misura è stata presa la distanza tra lo schermo e il punto medio tra le due estremità della ghiera.

Per quanto riguarda la misura della quantità q , l'incertezza deriva dall'essere sicuri di posizionare lo schermo alla distanza esatta per la quale l'immagine triangolare su esso fosse a fuoco. Mentre si eseguiva quest'ultima procedura, dopo aver trovato la posizione per cui l'immagine fosse a fuoco, ci si è accorti che essa rimaneva ben definita sullo schermo anche se si spostava lo schermo di circa 1[cm] verso la lente divergente oppure nel verso opposto. Dunque, l'immagine rimaneva ben definita entro un intervallo di circa 2[cm]. Come incertezza di misura è stata utilizzata la semilarghezza di tale intervallo, ossia 1[cm].

In Tabella 5 le misure riportate sono state opportunamente arrotondate alla prima cifra di cui si era incerti.

2.4 Analisi dei dati

Le misure sono state convertite in metri e successivamente si sono misurate le quantità $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$, invertendo i dati sperimentali p e q .

Per il fit dei dati è stato utilizzato un modello lineare. La (4) nel nostro caso, in cui $p < 0$, si riscrive come

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{q} & [m^{-1}] \\ \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{f} & [m^{-1}]\end{aligned}\tag{5}$$

La (5) è della forma $y = mx + k$. Utilizzando quest'ultima come modelli di fit, quindi, è possibile stimare la quantità $k = \frac{1}{f}$.

Il fit ottenuto, mediante l'algoritmo odr, è il seguente.

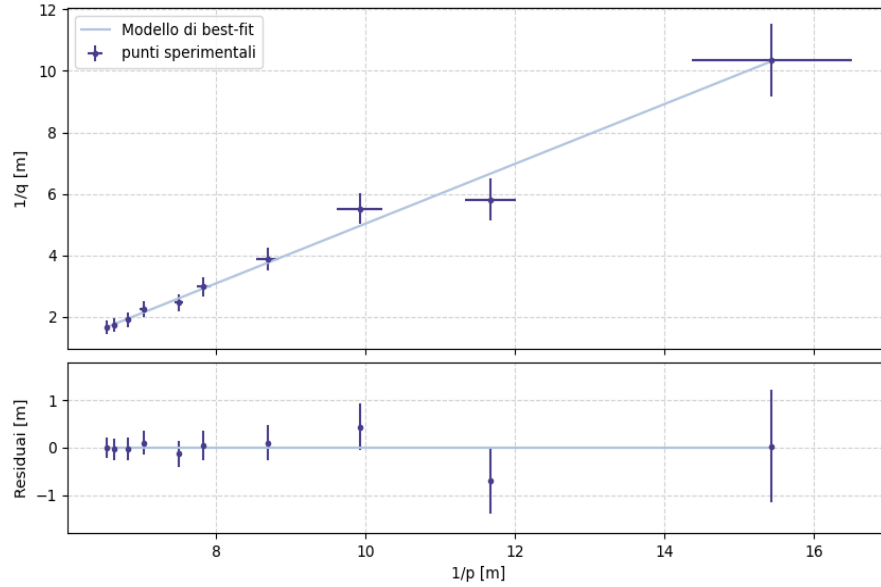


Figura 2: Grafico e residui del fit dei minimi quadrati con un modello lineare

2.5 Conclusioni

I valori attesi per i parametri di best-fit e per il valore del χ^2 sono:

Grandezze	Valori attesi
m	1
$k = \frac{1}{f}$	-5 $[m^{-1}]$
χ^2	8 ± 4

Tabella 6

Le misure stimante tramite il fit dei dati è invece il seguente

Grandezze	Valori attesi
m	0.97 ± 0.09
$k = \frac{1}{f}$	-4.68 ± 0.66 $[m^{-1}]$
χ^2	2.7

Tabella 8

La stima del coefficiente angolare risulta compatibile con il valore atteso $m = 1$ e analogamente la stima di del potere diottrico.

Il χ^2 non è, invece, compatibile con il valore atteso. La probabilità di ottenere il valore stimato per il χ^2 è la seguente

$$P(\chi^2_8 \leq 2,7) \approx 0.05\tag{6}$$

Ciò significa che, se ripetessimo l'esperienza con nuove coppie di dati sperimentali, avremo più probabilità di ottenere un χ^2 maggiore di 2.7.

Il valore ottenuto per il χ^2 indica la possibilità che le incertezze siano state sovrastimate. Tale possibilità è concreta e giustificata dal fatto che, come detto nella sezione precedente, vi era incertezza sia sulla posizione della lente divergente sia sulla distanza dello schermo dalla divergente per la quale l'immagine triangolare risultasse a fuoco. Tali incertezze hanno portato, probabilmente a una sovrastima dell'errore.