

OSCILLAZIONI ACCOPPIATE

Nicolò Bottiglioni, Marco Malucchi

April 2023

1 Introduzione

1.1 Obiettivi

L'obiettivo dell'esperienza è lo studio del moto di due pendoli accoppiati, collegati da una molla. L'esperienza si suddivide in varie fasi: la prima verte nello studio del moto (ed in particolare del suo periodo di oscillazione) di un singolo pendolo lasciato oscillare liberamente, la seconda parte consiste nello studio dello stesso pendolo precedente, ma questa volta smorzato, mentre la terza e la quarta parte hanno come obiettivo quello di studiare i due pendoli accoppiati. Prima si isoleranno i modi normali del moto in modo da determinare, attraverso l'analisi dei dati, la pulsazione del moto dei due pendoli in fase e, successivamente, in contro fase. Dopo di che si studierà il fenomeno dei battimenti relativo all'oscillazione dei due pendoli.

1.2 Cenni teorici

Per quanto riguarda l'oscillazione del pendolo singolo, la teoria prevede che la pulsazione del suo moto sia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (1)$$

e di conseguenza il periodo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2)$$

Aggiungendo uno smorzatore, l'ampiezza del pendolo decresce nel tempo come un esponenziale e si ha un'equazione del tipo:

$$\theta_0(t) = \theta_0(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

dove τ è il tempo di smorzamento dell'oscillazione, ovvero il tempo per cui l'ampiezza di oscillazione si riduce di un fattore $\frac{1}{e}$.

Per quanto riguarda le oscillazioni accoppiate, i modi normali di oscillazione sono due moti particolari che il sistema può compiere, dati da due configurazioni iniziali precise, per i quali le oscillazioni sono armoniche. I due modi normali per i pendoli accoppiati in esame sono costituiti dalle oscillazioni in fase dei due pendoli e dalle oscillazioni in contro fase dei due pendoli.

Qualsiasi altro moto degli oscillatori accoppiati risulta essere una combinazione lineare dei due modi normali e risulta essere molto più complicato delle oscillazioni in fase e contro fase.

Si può configurare il sistema in modo che il moto complessivo corrisponda all'uno o all'altro dei due modi normali. Se i pendoli inizialmente vengono configurati con lo stesso angolo iniziale, si isola l'oscillazione in fase durante la quale la molla, non sollecitata, non influenzerà il movimento dei due pendoli, che oscilleranno sincroni alla frequenza alla quale oscillerebbero se non fossero accoppiati. Se invece i pendoli vengono inizialmente configurati con angoli iniziali uguali in valore assoluto ma opposti in segno, allora si isola l'oscillazione in controfase del sistema.

Isolati i modi normali, si possono misurare le pulsazioni angolari ω_f ed ω_c delle oscillazioni in fase e controfase. Per quanto detto sopra, risulta che $\omega_f \sim \omega_0$ e che $\omega_c > \omega_f$. Inoltre, se la costante elastica della molla che accoppia i pendoli è trascurabile, la differenza tra la pulsazione delle oscillazioni in controfase e quella delle oscillazioni in fase non è molto grande.

Se si sposta uno dei due pendoli tenendo l'altro fermo nella sua posizione di equilibrio e si lascia oscillare il sistema con questa configurazione iniziale, la legge oraria del moto sarà data da una combinazione lineare delle leggi orarie corrispondenti ai due modi normali, come già accennato sopra. Il fenomeno che si va a creare è quello dei battimenti, dovuto all'interferenza di due oscillazioni periodiche di diverso periodo. Con quest'ultima configurazione iniziale il moto risultante è dato da

$$\theta(t) = 2\theta_0 \cos(\omega_b t + \phi_b) \cos(\omega_p t + \phi_p) \quad (4)$$

che può anche essere riscritta nella forma

$$\theta(t) = \theta_0(t) \cos(\omega_p t + \phi_p) \quad (5)$$

ω_p e ω_b sono rispettivamente la pulsazione portante e modulante dell'oscillazione, le quali risultano

$$\omega_p = \frac{\omega_f + \omega_c}{2} \quad \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (6)$$

$$\omega_b = \frac{\omega_c - \omega_f}{2} \quad \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (7)$$

Inoltre, vale che $\omega_p \approx \omega_f, \omega_c$ e che $\omega_b \ll \omega_f, \omega_c$.

2 Apparato sperimentale

L'apparato sperimentale consisteva in un supporto sul quale sono stati fissati due pendoli supposti, in buona approssimazione, uguali. Ciascuno di essi era costituito da un'asta rigida omogenea di alluminio alla cui base era presente un disco omogeneo di ottone. Il contributo al momento d'inerzia dell'asta di alluminio è stato supposto trascurabile rispetto al contributo del disco. Su ciascun pendolo era poi presente un apposito supporto per il fissaggio della molla, la quale permette l'accoppiamento dei due pendoli. Al di sotto di ciascun pendolo si trovava una vasca d'acqua, nella quale rimaneva immerso durante le oscillazioni un ago, fissato al di sotto del disco. Il sistema di acquisizione dati utilizzava Arduino come software di controllo ed acquisizione, un filo elettrico collegato al cip era fissato all'estremità superiore dell'asta di alluminio e la corrente passava attraverso il pendolo fino alla punta dell'ago. L'acqua fungeva da resistenza variabile, con differenza di potenziale nota agli estremi della vasca, l'ago immerso al suo interno "campionava" ad intervalli regolari di tempo la tensione dell'acqua nel punto in cui si trovava. Visto poi che la differenza di potenziale ai capi della vasca era nota, questa veniva suddivisa dal software di acquisizione in 1024 parti, così che ogni misura di tensione venisse convertita in modo da essere opportunamente inserita in questo intervallo da 0 a 1024.

In questo modo, ad intervalli regolari di tempo, precisamente ogni 25 millesimi di secondo, veniva campionata la posizione dell'ago, o meglio, del baricentro della parte di ago immersa e quindi, di conseguenza, la posizione del pendolo (si vedrà in seguito che questo metodo di misurazione porterà consistenti problematiche).

3 Pendolo singolo

3.1 misure effettuate

Prima di mettere in oscillazione il sistema, sono state misurate con il metro a nastro le seguenti grandezze, funzionali alla misura del momento d'inerzia del cilindro.

Grandezze	Misure
2R	6.9 ± 0.1 [cm]
L	$48,0 \pm 0.1$ [cm]

R è il raggio del disco, mentre L è la distanza dal punto inferiore del disco al punto di sospensione. Come già detto sopra il contributo al momento d'inerzia e quindi anche alla posizione del centro di massa dell'asta, è stato supposto trascurabile rispetto al contributo del disco. Poi, visto che questi corpi sono stati supposti omogenei si è potuto pensare il centro di massa posizionato nel centro geometrico del disco di ottone. (le supposizioni che sono state fatte sono dovute principalmente al fatto che la densità dell'alluminio è circa 4 volte minore di quella dell'ottone quindi si è pensato ragionevole, anche se forse in maniera un po' forzata, fare le approssimazioni sopra menzionate, mentre invece il fatto che l'asta ed il disco siano stati ritenuti omogenei è semplicemente un fattore di pura comodità)

A causa di ciò, è stato possibile misurare la distanza l del centro di massa dal punto di sospensione, dopo aver convertito in metri le misure effettuate, come:

$$l = L - R = 0.446 \pm 0.001 \quad [m]$$

Successivamente, è stato misurato il momento d'inerzia del disco per unità di massa mediante il teorema di Huygens-Steiner:

$$\frac{I}{m} = \frac{1}{2} R^2 + l^2 = 0.201 \pm 0.001 \quad [m^2]$$

Infine, il sistema è stato messo in oscillazione. Il pendolo è stato spostato di dalla verticale ed è stato lasciato libero di oscillare pochi istanti dopo aver azionato il programma di acquisizione. La procedura è stata ripetuta aggiungendo

uno smorzatore al pendolo, consistente in un galleggiante fissato sull'ago il quale era a contatto con l'acqua nella vasca durante le oscillazioni.

Si è posta attenzione a non perturbare il sistema con colpi al supporto od al tavolo dove erano montato il set up e ogni volta che il pendolo è stato fatto oscillare si è aspettato che si fermasse, in modo da poter prendere più misurazioni possibili ed avere una serie di dati che mettesse ben in evidenza lo smorzamento a cui era sottoposto il pendolo.

Il programma di acquisizione restituiva in output un file di dati in cui la misura dell'ampiezza di oscillazione in funzione di tempo era espressa in unità arbitrarie (secondo la conversione discussa nella sezione precedente). Il programma, inoltre, registrava in contemporanea le oscillazioni di entrambi i pendoli.

3.2 Analisi dei dati

I dati acquisiti sono relativi alla posizione del pendolo (più precisamente alla posizione dell'ago del pendolo; è bene fare questa precisazione perché come si vedrà a breve questo fatto riveste un certo peso nelle conclusioni dell'esperienza) ed ai rispettivi istanti di tempo in cui venivano campionate le posizioni. Per quando riguarda l'incertezza associata alla posizione del pendolo bisogna tenere a mente come funzionava lo strumento di misura, infatti, come detto sopra, la differenza di potenziale ai lati della vasca d'acqua era costante, quindi è ragionevole pensare che la tensione nell'acqua fosse costante, nel tempo, punto per punto e che l'ago, campionandola, funzionasse come un metro a nastro quando si misura una lunghezza di un tavolo, cioè campionasse dei valori della differenza di potenziale che non erano affetti da fluttuazioni statistiche particolari, dunque effettuava dei campionamenti di una distribuzione probabilistica costante. Perciò secondo i ragionamenti fatti sarebbe sensato associare alle misure della posizione, un'incertezza pari a $\frac{1}{\sqrt{12}}$, derivante dalla varianza di una distribuzione costante. Però il programma di acquisizione si occupava di registrare, non solo la posizione del pendolo in movimento, ma anche dell'altro pendolo lasciato in quiete, visto che erano entrambe simultaneamente collegati alle apparecchiature di misura ed è stato evidente come queste misure, che, almeno secondo i ragionamenti fatti sopra, dovrebbe essere tutte uguali visto che il pendolo era fermo, invece fluttuino leggermente. Quindi ora sembrerebbe opportuno associare come incertezza, alle misure della posizione, la deviazione standard di dette misure.

Comunque, se nelle supposizioni precedenti, quando ci si supponeva in un regime a dispersione nulla, si stavano trascurando le fluttuazioni statistiche delle misure, ora si sta trascurando un altro effetto importante che interferisce sull'accuratezza delle stesse: cioè un particolare errore sistematico strumentale. Questo è dovuto al fatto che la posizione registrata, non è quella del centro di massa del pendolo, che a livello teorico è un punto, quindi è privo di estensione e la sua posizione relativa al punto di sospensione rimane invariata durante le oscillazioni, ma è la posizione del baricentro della parte dell'ago immersa quella che viene effettivamente registrata e, finché il pendolo è fermo, l'ago è immerso di una certa quantità nell'acqua e quindi, al massimo, si possono registrare le fluttuazioni viste nei dati della posizione del pendolo fermo, ma quando il pendolo inizia ad oscillare, l'ago, rispetto al fondo della vasca, si inclina e quindi, quando, per esempio, il pendolo raggiunge il punto di inversione del moto, la parte di ago immersa è cambiata ed il suo baricentro quindi si è spostato, ma il problema vero e proprio è che il baricentro dell'ago, per quanto la sua posizione sia comunque difficile da stimare, si trova comunque più lontano dal punto di sospensione rispetto al centro di massa vero e proprio del pendolo e l'errore sistematico dal quale sono affette le misure della posizione dipende principalmente proprio da questa problematica.

Inoltre (senza considerare problemi dovuti alla composizione chimica dell'acqua ed alla sua variazione nel tempo dovuta in parte ai fenomeni di elettrolisi, ma anche senza considerare le perturbazioni del fluido dovute al movimento dell'ago nell'acqua oltre all'influenza del sottile strato di vapore che sicuramente si era formato sulla superficie del fluido) non si riesce più a capire bene se la tensione dell'acqua che viene misurata (e ricordiamo che questa è stata supposta costante, ma anche questo non è un fatto del tutto scontato) è relativa esattamente al baricentro della parte immersa dell'ago, oppure è relativa a qualche altro suo punto, il che implica, visto che l'ago è inclinato, che a questo punto si ha un'incertezza sulla posizione, maggiore della semplice deviazione standard sulle misure registrate del pendolo fermo (che per la cronaca si aggirava attorno al valore di circa $0.69[a.u.]$). Per essere precisi, visto che gli elettrodi erano immersi nella acqua, si può ragionevolmente supporre che gli elettroni della corrente elettrica si concentrassero mediamente in un certo strato d'acqua alla stessa profondità dei due elettrodi, quando l'ago si inclinava nell'acqua, la sua porzione "immersa (od esposta che dir si voglia) nel fascio di elettroni" aumentava, dunque aumenta anche l'incertezza sulle posizioni del pendolo nei punti più distanti dalla verticale.

Ora riuscire a stimare questa incertezza in maniera precisa esulava dagli scopi della nostra esperienza, ma alla fine si è deciso di associare a tutte le misure delle posizioni lo stesso errore dell'ordine di $\pm 1[a.u.]$, che ci è sembrata essere una stima ragionevole, visto quanto detto sopra e visto anche il modo in cui le misure della tensione erano convertite in unità arbitrarie.

Questo purtroppo, porta ad una leggera sovrastima dell'errore, in particolare nelle misure più vicine alla verticale, rispetto alle quali, probabilmente, avrebbe avuto più senso associare la deviazione standard calcolata sulle misure della posizione del pendolo rimasto fermo, però si è deciso di procedere così visto anche la mancanza della strumentazione necessaria per stimare meglio questo errore sistematico e anche gli ovvi limiti di tempo. Per quanto riguarda invece gli errori sulle misure di tempo, si è preferito "fidarsi" del cronometro interno ad Arduino che funziona utilizzando un cristallo di quarzo e che quindi dovrebbe essere particolarmente preciso per i nostri scopi, dunque si è pensato sensato trascurare fin da subito l'incertezza relativa a queste misure.

Ovviamente sia il pendolo libero che il pendolo smorzato erano affetti un considerevole smorzamento, anche nel secondo l'effetto era ovviamente molto più accentuato:

- Nel primo caso c'è solo l'attrito tra ago ed acqua e con l'aria.
- Nel secondo caso, invece, aggiungendo il galleggiante, si accentua considerevolmente l'attrito con l'acqua.

Dunque, come già osservato nei cenni teorici, è stato eseguito un fit con il metodo dei minimi quadrati utilizzando la funzione *curve_fit* di Python utilizzando la seguente legge:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \phi) + k \quad (8)$$

Per il fit, i primi dati acquisiti sono stati scartati dal momento che, dopo aver azionato il programma di acquisizione, il pendolo è stato tenuto fermo per qualche istante. I grafici ottenuti sono i seguenti. I punti sperimentali nei seguenti grafici sono stati ridotti di un fattore $\frac{1}{3}$ per una migliore visualizzazione.

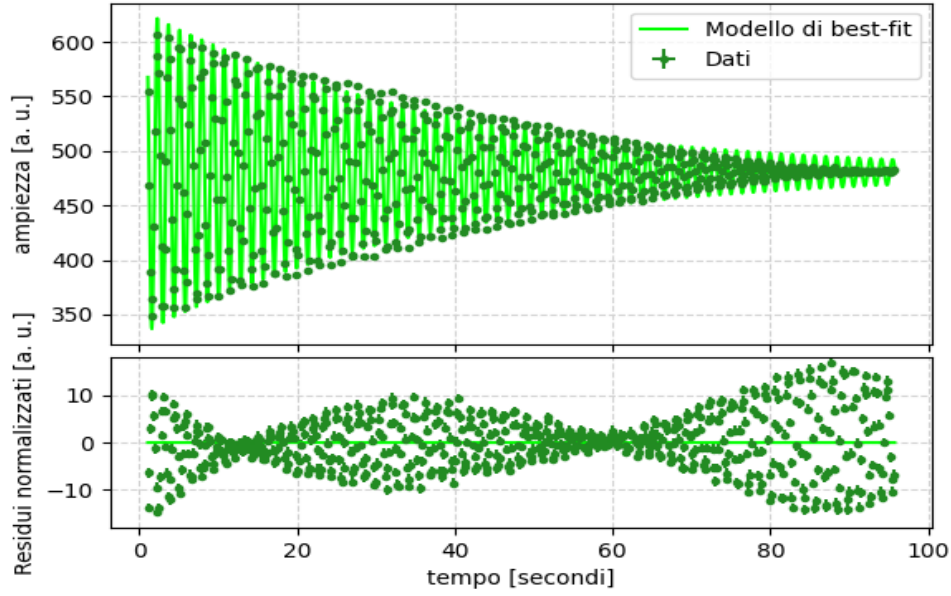


Figura 1: Pendolo senza galleggiante

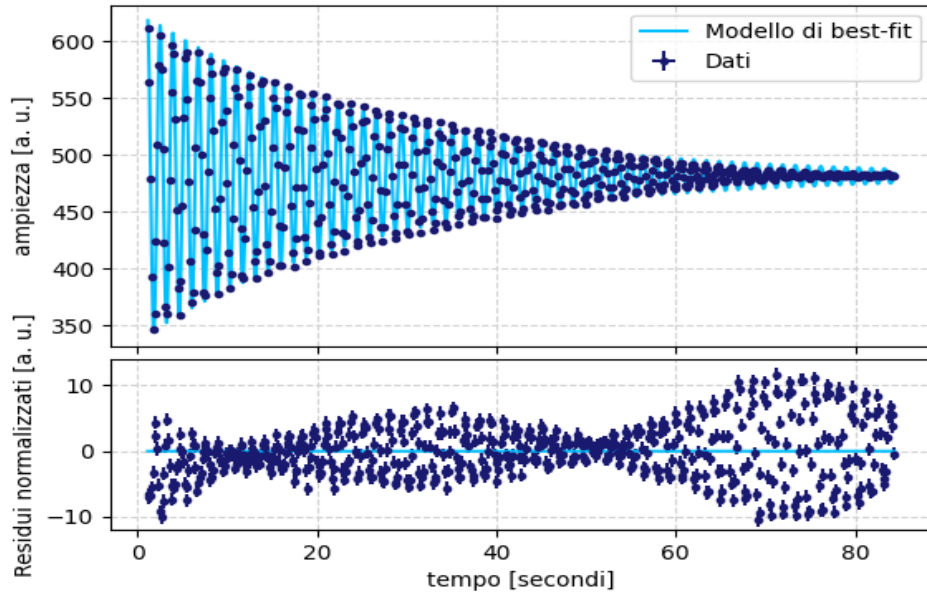


Figura 2: Pendolo con galleggiante

3.3 Conclusioni

Nel caso del pendolo senza galleggiante, il parametro di best-fit per ω è stato confrontato con il valore atteso dalla teoria mediante la (1). Inoltre è stato confrontato il tempo di decadimento nelle due oscillazioni, con e senza galleggiante, e il loro periodo.

Il valore atteso per ω tramite la (1) è :

$$\omega = 4.36 \pm 0.01 \quad [s^{-1}] \quad (9)$$

I valori attesi per il χ^2 sono:

Pendolo	Valori di χ^2
senza galleggiante	1869 ± 61
con galleggiante	1642 ± 57

I parametri di best-fit ottenuti secondo la (8) e i valori per il χ^2 sono invece i seguenti.

Grandezze	Misure pendolo senza galleggiante
θ_0	$150.1 \pm 0.7 \quad [u.a.]$
τ	$37.4 \pm 0.2 \quad [s]$
ω	$4.4478 \pm 0.0002 \quad [s^{-1}]$
ϕ	$-0.660 \pm 0.004 \quad [rad]$
k	$480.6 \pm 0.1 \quad [u.a.]$
χ^2	65675.2

Grandezze	Misure pendolo con galleggiante
A	$145.8 \pm 0.6 \quad [u.a.]$
τ	$27.0 \pm 0.1 \quad [s]$
ω	$4.4371 \pm 0.0002 \quad [s^{-1}]$
ϕ	$1.304 \pm 0.004 \quad [rad]$
k	$481.4 \pm 0.1 \quad [u.a.]$
χ^2	29138.2

Infine, di seguito sono riportati i periodi T delle due diverse oscillazioni

Pendolo	Valori di T [s]
senza galleggiante	$1.41266 \pm 5e-05$
con galleggiante	$1.41605 \pm 6e-05$

Innanzitutto, riguardo alla pulsazione dell'oscillazione senza il galleggiante, notiamo che il valore di best-fit per ω non è compatibile con quello ottenuto mediante la (1). In buona parte, ciò può dipendere dall'aver trascurato l'asta rigida omogenea che collega il cilindro al punto di sospensione: in realtà, il centro di massa del sistema non coincide esattamente con il centro di massa del cilindro e, di conseguenza, la reale misura del momento d'inerzia non coinciderebbe con quella misurata. Essendo ω dipendente dal momento d'inerzia I , l'approssimazione fatta ha influito negativamente sulla compatibilità tra valore teorico e valore di best-fit.

Riguardo τ , notiamo che nel caso dell'oscillazione smorzata dal galleggiante il tempo di decadimento è inferiore di $\sim 10[s]$. Ciò è dovuto al fatto che sul pendolo, in questo caso, agisce una forza d'attrito maggiore rispetto a quella agente sul pendolo lasciato oscillare senza galleggiante, chiaramente questo influisce molto sull'attrito con l'acqua, aumentandolo consistentemente.

I periodi, invece, non presentano una variazione significativa: differiscono infatti per ~ 4 millesimi di secondo. Del resto, l'aggiunta del galleggiante influisce significativamente sul tempo di decadimento, mentre non influisce in modo significativo sul periodo di oscillazione perché la resistenza offerta dal galleggiante non è tale da avere questo effetto.

Infine, dai valori ottenuti per il χ^2 , possiamo concludere alcuni problemi riguardanti il fit.

Innanzitutto possiamo concludere che il modello matematico utilizzato per descrivere il fenomeno non è del tutto esatto. Si può evincere ciò anche osservando i grafici riportati in Figura 1 e Figura 2. Negli ultimi secondi, infatti, si può osservare che il modello prevede un minore smorzamento delle oscillazioni di quello che si verifica in realtà e, dai residui, si evince come in quest'intervallo di tempo ci sia una forte discordanza tra dati e modello. Ciò è causato probabilmente del fatto che la modellizzazione utilizzata, che considera un attrito viscoso agente sul pendolo, non è adeguata in realtà per il sistema in esame, cioè: l'attrito agente sul pendolo è tutt'altro che viscoso, dall'analisi dei residui si potrà osservare meglio questa problematica.

Inoltre, osservando i grafici in Figura 3 e Figura 4 nelle quali è riportata l'oscillazione nel tempo dei pendoli ristretta a un periodo, si può osservare che in corrispondenza dell'ampiezza massima di oscillazione ci sia una maggiore discordanza tra i dati ed il modello, mentre ciò non accade quando il pendolo passa per la posizione di equilibrio stabile o in prossimità della stessa. Ciò è dovuto dall'errore sistematico strumentale largamente discusso nella sezione precedente, in sostanza l'andamento dei residui è esattamente come ci si aspettava, visto quanto detto sopra, l'accuratezza relativa alle misure vicine alla posizioni di equilibrio è giustamente maggiore rispetto a quelle prese in prossimità dei punti di inversione del moto.

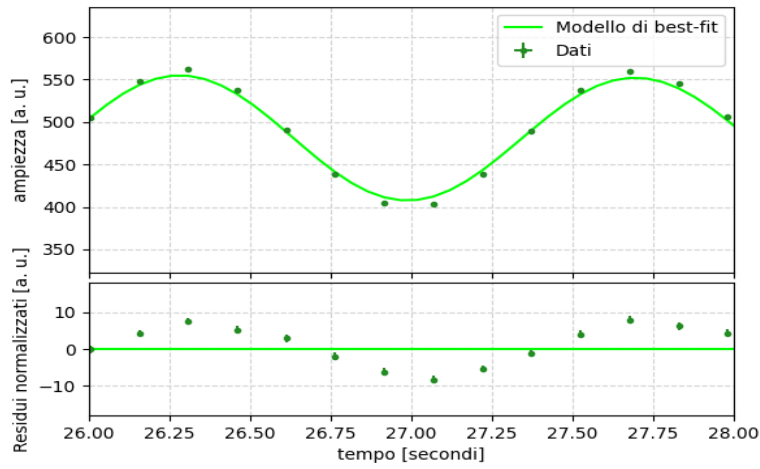


Figura 3: Pendolo senza galleggiante ristretto a un periodo

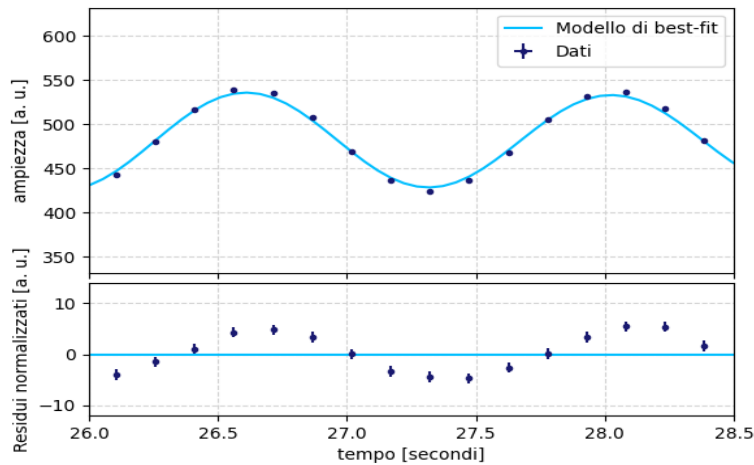


Figura 4: Pendolo con galleggiante ristretto a un periodo

4 Oscillazioni in fase e in controfase

4.1 Misure effettuate

I due pendoli sono stati accoppiati mediante una molla. Dopodiché essi sono stati spostati nello stesso verso e della stessa ampiezza, è stato azionato il programma di acquisizione e il sistema è stato lasciato libero di oscillare. In questo modo, si è isolato uno dei due modi normali di oscillazione, ovvero l'oscillazione in fase.

Successivamente, è stata ripetuta la stessa procedura, solo che i pendoli sono stati spostati della stessa ampiezza ma nel verso opposto. Così facendo, si è isolato il secondo modo normale, ovvero l'oscillazione in controfase.

4.2 Analisi dei dati

Come per l'oscillazione del pendolo singolo, i primi dati acquisiti sono stati scartati perché il sistema è stato lasciato libero di oscillare qualche istante dopo l'avvio del programma di acquisizione.

E' stato eseguito un fit dei minimi quadrati con il modello proposto dalla (8), sia nel caso dell'oscillazione in fase sia in quello dell'oscillazione in controfase.

Di seguito sono riportati i risultati ottenuti, rispettivamente per ciascuno dei due pendoli, dell'oscillazione in fase e in controfase. I dati sperimentali nelle figure è stato ridotto di un fattore $\frac{1}{3}$, al fine di consentire una migliore visualizzazione dei grafici.

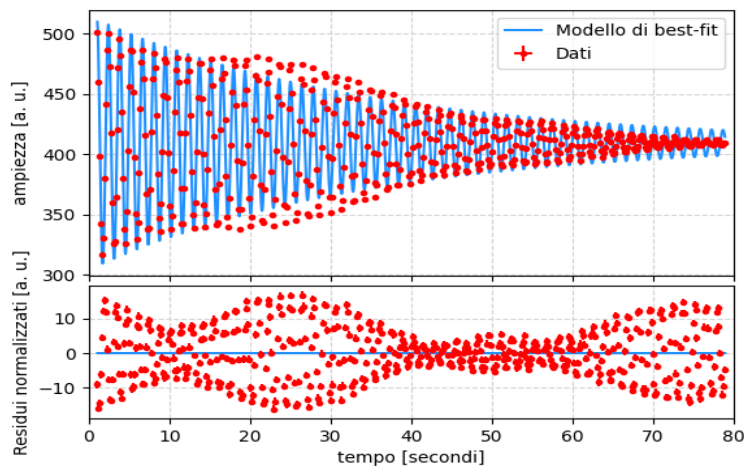


Figura 5: Oscillazione in fase pendolo A

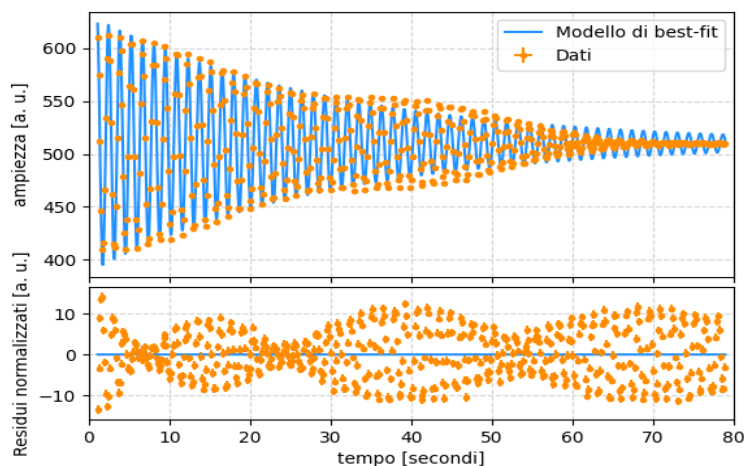


Figura 6: Oscillazione in fase pendolo B

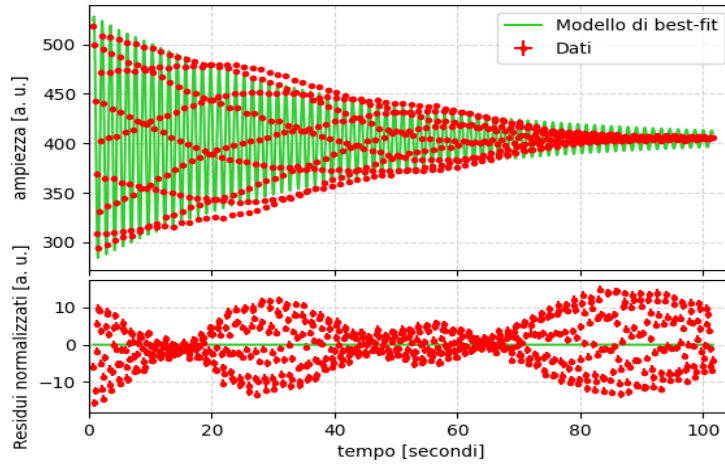


Figura 7: Oscillazione in controfase pendolo A

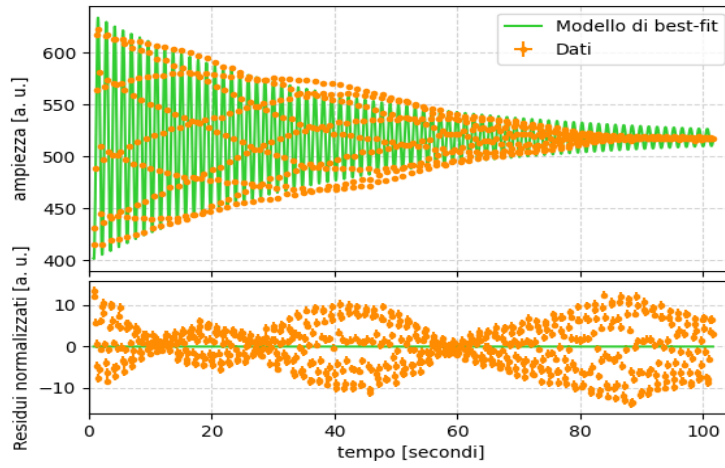


Figura 8: Oscillazione in controfase pendolo B

4.3 Conclusioni

Il valore del χ^2 atteso per il sistema oscillante, in fase e in controfase, è:

Oscillazioni	Valori di χ^2
in fase	1536 ± 55
in controfase	1989 ± 63

Tabella 6

I parametri di best-fit stimati per l'oscillazione in fase e in controfase, rispettivamente per il pendolo A e per il pendolo B sono:

Parametri oscillazioni in fase pendolo A	Valori stimati pendolo A
A	105.2 ± 0.9 [u.a.]
τ	34.4 ± 0.4 [u.a.]
ω_f	4.4498 ± 0.0004 [$\frac{rad}{s}$]
ϕ_f	1.841 ± 0.009 [rad]
k	409.6 ± 0.2 [u.a.]
χ^2	86281.6

Tabella 7

Parametri oscillazione in fase pendolo B	Valori stimati pendolo B	
A	122.2 ± 0.8	[u.a.]
τ	29.6 ± 0.3	[s]
ω_f	4.4502 ± 0.0003	$[\frac{rad}{s}]$
ϕ_f	1.820 ± 0.006	[rad]
k	510.0 ± 0.2	[u.a.]
χ^2	55944.4	

Tabella 8

Parametri oscillazioni in controfase pendolo A	Valori stimati pendolo A	
A	126.1 ± 0.7	[u.a.]
τ	37.5 ± 0.3	[u.a.]
ω_c	4.6224 ± 0.0002	$[\frac{rad}{s}]$
ϕ_c	-0.518 ± 0.005	[rad]
k	404.5 ± 0.1	[u.a.]
χ^2	72361.2	

Tabella 9

Parametri oscillazioni in controfase pendolo B	Valori stimati pendolo A	
A	120.2 ± 0.6	[u.a.]
τ	37.8 ± 0.3	[u.a.]
ω_c	4.6232 ± 0.0002	$[\frac{rad}{s}]$
ϕ_c	-0.516 ± 0.005	[rad]
k	518.2 ± 0.1	[u.a.]
χ^2	57865.9	

Tabella 10

Notiamo che i valori ottenuti per ω_f sono compatibili, mentre non lo sono quelli ottenuti per ω_c . Come misura di "riferimento" per la pulsazione dell'oscillazione in fase, utilizziamo la media pesata dei due valori ottenuti e riportati in Tabella 7 e in Tabella 8, ovvero:

$$\omega_f = 4.4501 \pm 0.0002 \quad (10)$$

Analogamente, per la pulsazione dell'oscillazione in controfase otteniamo:

$$\omega_c = 4.6228 \pm 0.0001 \quad (11)$$

Come ci si aspettava dalla teoria, risulta $\omega_c > \omega_f$ e $\omega_f \sim \omega$, con ω valore riportato in Tabella 3. Tuttavia, le misure di ω_f e ω non risultano essere compatibili, a causa dell'errata configurazione iniziale per le oscillazioni in fase del sistema discusse a breve.

Per quanto riguarda i valori ottenuti per il χ^2 , sia nel caso delle oscillazioni in fase che in controfase, si può discutere quanto già trattato nel paragrafo 3.3. Oltre a ciò si può concludere che non si sia riusciti a isolare completamente i due modi normali di oscillazione. Si può evincere ciò osservando i grafici riportati sopra: in alcuni intervalli di tempo si possono infatti osservare degli effetti di "risonanza", i quali sono dovuti alla sovrapposizione del modo normale opposto a quello che si è cercato di isolare. Questo è conseguenza di due fattori. Innanzitutto, è possibile che il sistema, prima di essere lasciato libero di oscillare, non sia stato configurato esattamente, ad esempio non disponendo i pendoli esattamente alla spessa ampiezza iniziale. Conseguenza di ciò è anche il fatto, come accennato poco sopra, dell'incompatibilità tra le misure di ω_f e ω . Il secondo fattore è dovuto invece alla molla di accoppiamento, la quale presentava una deformità in uno dei suoi estremi: due anelli della spirale erano infatti "allungati" rispetto al resto della molla. Ciò ha sicuramente amplificato, soprattutto nell'oscillazione in fase, l'influenza del modo normale opposto, presente dal momento che, come discusso poco sopra, non si è riusciti a configurare con precisione il sistema.

5 Battimenti

5.1 Misure effettuate

Uno dei due pendoli accoppiati è stato spostato dalla propria posizione di equilibrio stabile e, dopo aver azionato il programma di acquisizione, il sistema è stato lasciato libero di oscillare.

5.2 Analisi dei dati

E' stato eseguito un fit dei minimi quadrati utilizzando come modello la (4). I primi dati acquisiti sono stati scartati, dal momento che il sistema è stato lasciato oscillare qualche istante dopo aver azionato il programma di acquisizione.

Sono stati ottenuti i seguenti grafici, nei quali sono riportati $\frac{1}{3}$ dei punti sperimentali al fine di consentire una migliore visualizzazione.

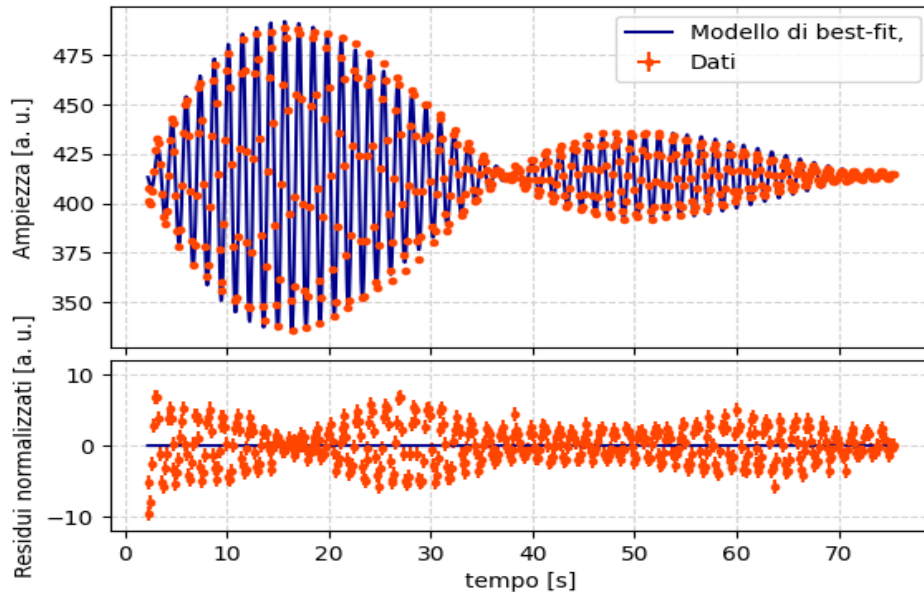


Figura 9: Battimenti pendolo A

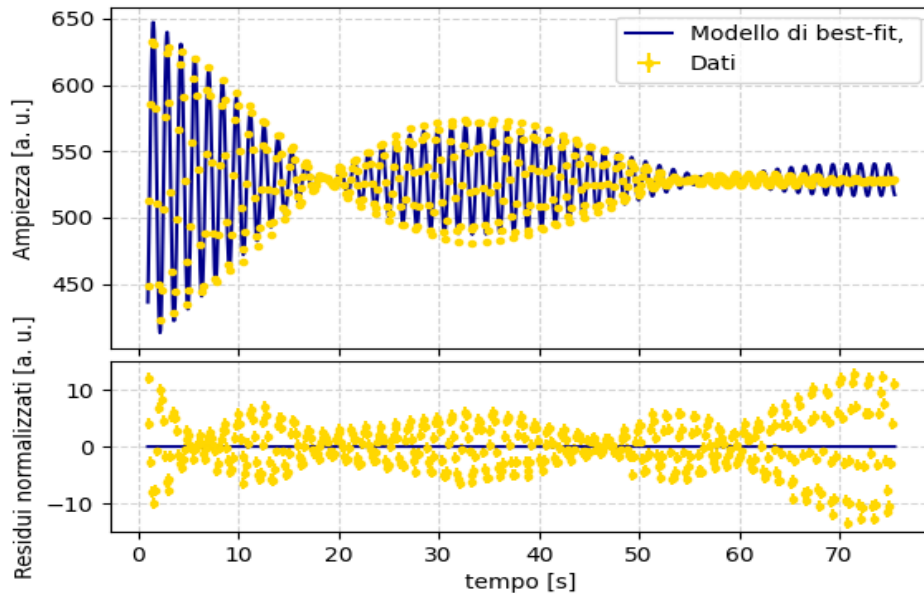


Figura 10: Battimenti pendolo B

5.3 Conclusioni

Il valore del χ^2 atteso per il sistema oscillante:

Oscillazioni	Valori di χ^2
Pendolo A	1443 \pm 53
Pendolo B	1469 \pm 54

Tabella 11

I parametri di best-fit stimati per il pendolo A e per il pendolo B sono:

Parametri pendolo A	Valori stimati pendolo A
A	72.9 \pm 0.4 [u.a.]
τ	28.4 \pm 0.2 [u.a.]
ω_b	0.0877 \pm 0.0002 [$\frac{rad}{s}$]
ϕ_b	1.391 \pm 0.004 [rad]
ω_p	4.5379 \pm 0.0002 [$\frac{rad}{s}$]
ϕ_p	1.054 \pm 0.005 [rad]
k	414.0 \pm 0.1 [u.a.]
χ^2	10218.3

Tabella 12

Parametri pendolo B	Valori stimati pendolo B
A	63.6 \pm 0.4 [u.a.]
τ	31.9 \pm 0.3 [s]
ω_b	0.0807 \pm 0.0004 [$\frac{rad}{s}$]
ϕ_b	0.06 \pm 0.01 [rad]
ω_p	4.5370 \pm 0.0002 [$\frac{rad}{s}$]
ϕ_p	2.633 \pm 0.005 [rad]
k	528.5 \pm 0.1 [u.a.]
χ^2	28264.1

Tabella 13

Ricordiamo che ω_b e ω_p sono rispettivamente la pulsazione modulante, ossia la pulsazione dei battimenti, e la pulsazione portante.

Come per i valori di ω_f e ω_c , riportiamo di seguito i valori ottenuti tramite una media pesata per ω_b e ω_p :

$$\omega_b = 0.0866 \pm 0.0002 \quad [\frac{rad}{s}] \quad (12)$$

$$\omega_p = 4.5375 \pm 0.0002 \quad [\frac{rad}{s}] \quad (13)$$

I valori per le stesse grandezze, ottenuti mediante la (6) e la (7) e utilizzando i valori stimati per ω_f e ω_c riportati dalla (10) e dalla (11), sono:

$$\omega_b = 0.0864 \pm 0.0001 \quad [\frac{rad}{s}] \quad (14)$$

$$\omega_p = 4.5364 \pm 0.0001 \quad [\frac{rad}{s}] \quad (15)$$

Notiamo che la misura della pulsazione modulante ottenuta mediante la media pesata è compatibile con la misura prevista dal modello teorico. La stessa cosa, però, non vale per la pulsazione portante. Ciò è dovuto alle motivazioni discusse nel paragrafo 4.3, riguardanti il mancato isolamento completo del modo normale dell'oscillazione in fase. Notiamo, inoltre, che vale $\omega_p \approx \omega_f, \omega_c$ e che $\omega_b << \omega_f, \omega_c$.

Per quanto riguarda i valori ottenuti per il χ^2 e l'accordo tra dati sperimentali e modello, si possono fare discussioni analoghe a quelle discusse in paragrafo 3.3.

Tuttavia, l'ottenimento costante di valori del χ^2 molto maggiori rispetto a quelli attesi, può essere indicatore non solo di quanto già trattato nei paragrafi precedenti, ma anche di una sottostima delle incertezze sulle misure dell'ampiezza in funzione del tempo. E' già stata motivata la scelta di sporcare le misure con un'incertezza pari a 1 [u.a.], ma i risultati ottenuti dall'analisi dei dati raccolti suggerisce che un'incertezza maggiore, compresa probabilmente probabilmente tra 1 [u.a.] e 2 [u.a.], sarebbe stata più ragionevole rispetto a quella adottata.