

Catenaria

Nicolò Bottiglioni, Marco Malucchi

20 novembre 2022

1 Obiettivi dell'esperienza.

La **catenaria** è una curva lungo la quale tende a disporsi una qualsiasi corda omogenea vincolata ai suoi estremi. L'obiettivo dell'esperienza è quello di verificare quanto effettivamente il modello matematico che la descrive riesca ad approssimare la realtà, comparandolo con il grafico ottenuto dai dati raccolti attraverso delle misurazioni fatte su di un apposito set-up sperimentale.

2 Cenni teorici

L'equazione parametrica della catenaria risulta essere

$$y = y_0 + a * \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \quad (1)$$

dove x_0 corrisponde alla distanza del vertice della curva dall'origine, y_0 è un parametro da cui dipende l'intersezione della curva con l'asse delle ordinate e a è una costante che rappresenta la concavità della curva: per a grandi la curva è molto larga, per a piccoli la curva è molto stretta, per a negativi la curva è rivolta verso il basso e viceversa per a positivi. La catenaria è una curva iperbolica data la presenza del coseno iperbolico nell'equazione, la quale può essere ricavata imponendo l'equilibrio delle forze agenti su di un elemento infinitesimo della fune. L'equazione può essere inoltre descritta dalla somma di due funzioni esponenziali.

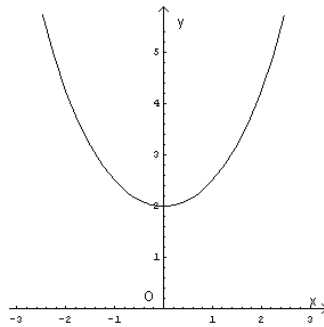


Figura 1: Grafico della catenaria

In natura qualsiasi fune omogenea vincolata ai propri estremi e sulla quale non agiscono ulteriori forze in aggiunta alla forza peso (considerando ovviamente anche le reazioni vincolari che agiscono, appunto, nei punti di vincolo), tende a disporsi come questa curva.

3 Apparato sperimentale

3.1 Materiale a disposizione

- Catena di alluminio;
- Livella laser;
- Scala graduata di risoluzione 0.001 m;
- Fotocamera digitale dello smartphone;
- Treppiede di supporto alla fotocamera;

3.2 Descrizione set-up sperimentale

Per l'esperienza è stata utilizzata una catena in alluminio; essa è stata vincolata per due estremi ad una parete grazie all'utilizzo di nastro carta. Inoltre, è stata fissata al muro anche una scala graduata, posta orizzontalmente al terreno grazie all'utilizzo di una livella laser. La scala è stata stampata su della carta, ottenendo tre metri a nastro con risoluzione di un millimetro, che sono stati uniti con del nastro carta tra loro prima dell'affissione alla parete. Poi, onde evitare incertezze di misura dovute all'imprecisione della stampa ed agli errori dovuti alle giunture tra i 3 tratti, questa, una volta affissa alla parete è stata rimisurata con un metro a nastro professionale e si è ottenuta una lunghezza totale di 3003 ± 1 mm (prendendo come errore la risoluzione strumentale) quindi un errore dell'uno per mille circa sulla scala graduata stampata. In questo modo si è anche ricavata una stima della distanza dai due punti di vincolo della catena. Il metro a nastro stampato è stato poi utilizzato come punto di riferimento durante l'analisi dell'immagine mentre si effettuavano le misurazioni. Prima di scattare le immagini si è atteso che la catena smettesse di oscillare dopo essere stata affissa alla parete, in modo da evitare di ottenere fotografie mosse. Il luogo in cui è stato effettuato l'esperimento è stato accuratamente illuminato in modo che l'immagine venisse il più chiara possibile, così che il profilo della catena fosse in risalto rispetto al muro bianco. La foto è stata scattata con l'ausilio della fotocamera di uno smartphone, modello Samsung Galaxy S21, con una risoluzione di 64 Mpx, che è stato accuratamente posto su di un treppiede, verificando che il telefono fosse perpendicolare rispetto al suolo con l'utilizzo di un'ulteriore livella (questa volta standard) e, per quanto possibile, parallelo alla parete di affissione, misurando le distanze tra i due lati dello smartphone e la parete, verificandone le reciproche compatibilità (lo smartphone è stato posto in orizzontale sul treppiede). In questo modo si è cercato di ridurre al minimo le deformazioni dell'immagine: infatti, la telecamera dello smartphone, avendo un obiettivo grandangolare, tende a deformare qualsiasi foto che viene scattata (essenzialmente le linee verticali attorno al centro dell'immagine tendono ad essere curvate verso l'esterno). Sono state scattate diverse foto, per precisione 5, e, dopo aver selezionato la migliore per risoluzione (zoommando molto sulla catena per verificare quanto effettivamente il suo profilo fosse ben delineato), l'immagine è stata ritagliata attraverso un opportuno software in modo che contenesse solo la porzione di parete sulla quale si trovava la catena e in modo che la larghezza dell'immagine fosse il più simile possibile alla distanza tra i vincoli, l'immagine ottenuta è di 6261×913 pixel.



Figura 2: set-up sperimentale

4 Misure effettuate e dati raccolti

La foto ricavata è stata aperta sul software GIMP e in questo ambiente di lavoro sono state prese le misurazioni, tutte ovviamente in pixel, basandosi sui valori che il software dava in output considerando la posizione del cursore sull'immagine. Come già detto nel paragrafo precedente, la foto ottenuta è stata adattata alla distanza tra i punti di affissione della catena, quindi, si è dovuto decidere quali pixel dell'immagine originale prendere e quali tagliare, questa stima ha inevitabilmente portato un'incertezza sulla misura della distanza in pixel, tra i punti di affissione della catena. Difatti, quando si è effettuata questa misura con il metro a nastro professionale, si è presa la misura a partire dalla tacca del 100 più a sinistra sulla scala graduata, alla tacca dello 0 più a destra. Quindi nella stima della larghezza dell'immagine (lo si ripete ancora: pari alla distanza tra i punti di affissione della catena), si è deciso di stimare i centri di queste tacche nella foto originale, osservandole pixel per pixel, ed una volta individuati, le tacche sono state divise a metà, le quali sono state supposte corrispondere a quei punti stimati. Tenendo conto di tutto ciò, quindi, si è deciso di porre su questa misura un'incertezza di ± 4 px, ottenendo quindi la misura 6261 ± 4 px. Successivamente si sono prese le misure sulle ascisse per poter poi stimare le misure sulle ordinate. Prima si è presa una misurazione a 30 px ed un'altra a 6230 px, in questo modo lo spazio restante si poteva tranquillamente suddividere in intervalli tutti uguali di ampiezza pari a 100 px. In questo modo si è potuto porre su tutte le misure in ascissa un errore di ± 4 px. Prese

quindi queste misure, sono state poi stimate le relative misure in ordinata per tutti i 63 punti individuati, attribuendo a queste ultime un'incertezza di ± 1 px.

Coordinate ($x \pm 4$; $y \pm 1$) [px]	
30; -110	3230; -83
130; -157	3330; -837
230; -201	3430; -833
330; -244	3530; -828
430; -286	3630; -821
530; -327	3730; -813
630; -365	3830; -803
730; -403	3930; -792
830; -439	4030; -779
930; -473	4130; -764
1030; -506	4230; -749
1130; -537	4330; -731
1230; -567	4430; -713
1330; -595	4530; -692
1430; -621	4630; -670
1530; -646	4730; -647
1630; -670	4830; -622
1730; -692	4930; -596
1830; -712	5030; -568
1930; -731	5130; -538
2030; -748	5230; -507
2130; -764	5330; -474
2230; -779	5430; -440
2330; -792	5530; -404
2430; -803	5630; -367
2530; -813	5730; -328
2630; -821	5830; -287
2730; -828	5930; -244
2830; -833	6030; -202
2930; -837	6130; -157
3030; -839	6230; -111
3130; -840	

5 Analisi dei dati

Una volta che le misure sono state ottenute con le relative incertezze, queste sono state poi divise tutte per $\sqrt{12}$, dal momento che non erano affette da fluttuazioni. Successivamente si è eseguito il fit dei dati utilizzando il metodo di fit basato sui minimi quadrati condotto utilizzando la funzione `curve fit()` di python. Questo ha fatto sì che si ottenessero i valori di best fit della funzione della catenaria ottenuta relativamente ai dati misurati. In particolare si è ottenuto:

- $a = 6691.4 \pm 2.8$ px
- $y_0 = -7530.7 \pm 2.7$ px
- $x_0 = 3131.15 \pm 0.35$ px

Successivamente questi valori sono stati riconvertiti in millimetri. Per fare ciò si è dovuto trovare il fattore di conversione da pixel a millimetri e questo è stato possibile grazie al fatto che la larghezza dell'immagine è stata adattata alla distanza tra i punti di vincolo della catena alla parete. infatti conoscendo questa distanza in millimetri e l'equivalente in pixel, facendo il rapporto tra i due valori si ottiene il fattore di conversione, chiamato h :

$$h = \frac{3003}{6261} = 0.47964 \frac{mm}{px} \quad (2)$$

Chiaramente su h è presente un errore che è stato misurato con la formula di propagazione dell'errore statistico sui quozienti:

$$\sigma_q = \frac{\sqrt{\hat{x}^2 \sigma_y^2 + \hat{y}^2 \sigma_x^2}}{\hat{y}^2} \quad (3)$$

Sapendo che l'errore sulla misura della distanza tra i punti di sospensione è ± 1 mm, su questo l'errore statistico (visto che la misura non flutta) è: $1/\sqrt{12}$; allo stesso tempo l'errore statistico sulla stessa misura ma in pixel (6261 px) è pari a: $4/\sqrt{12}$. Quindi l'errore sul fattore di conversione è pari a:

$$\sigma_h = \frac{\sqrt{(3003^2)((4/\sqrt{12})^2) + (6261^2)(1/(\sqrt{12})^2)}}{6261^2} = 0.00019 \frac{mm}{px} \quad (4)$$

quindi h è pari a

$$h = 0.47964 \pm 0.00019 \frac{mm}{px} \quad (5)$$

A questo punto basta moltiplicare i valori centrali dei parametri individuati con il fit per il fattore di conversione sopra trovato e successivamente propagare i relativi errori con la formula di propagazione dell'errore statistico per i prodotti. Per quanto riguarda a , si trova che:

$$a_m = a \cdot h = 3209.4 mm \quad (6)$$

$$\sigma_a = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_h^2 + h^2 \cdot \sigma_a^2} = \sqrt{(6691.4^2)(0.00019^2) + (0.47964^2)(2.8^2)} = 1.8 mm \quad (7)$$

Per quanto riguarda y_0 , si trova che:

$$y_{0m} = y_0 \cdot h = -3612.0 mm \quad (8)$$

$$\sigma_{y_{0m}} = \sqrt{y_0^2 \cdot \sigma_h^2 + h^2 \cdot \sigma_{y_0}^2} = \sqrt{(6691.4^2)(0.00019^2) + (0.47964^2)(2.8^2)} = 1.9 mm \quad (9)$$

Per quanto riguarda x_0 , si trova che:

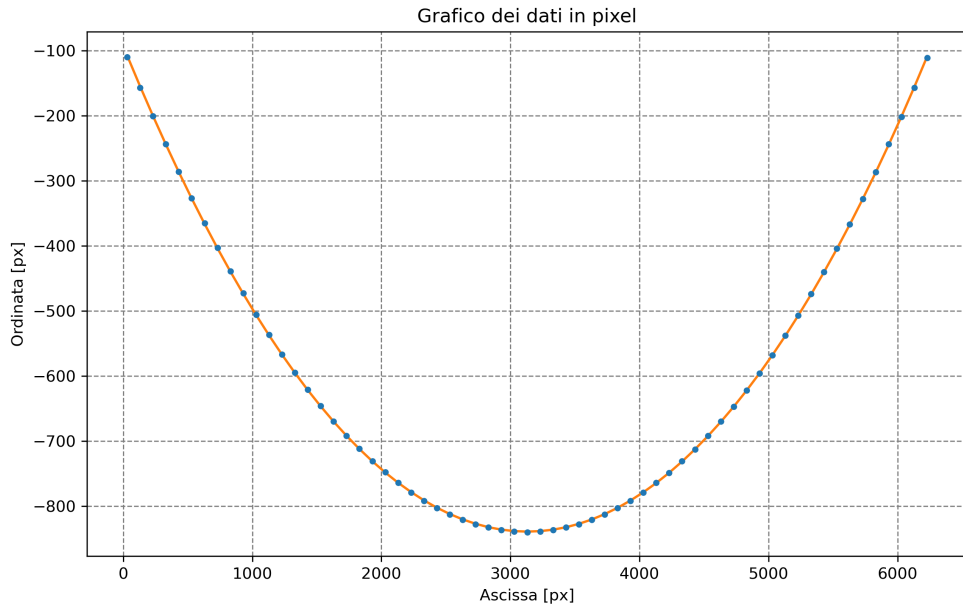
$$x_{0m} = x_0 \cdot h = 1501.81 mm \quad (10)$$

$$\sigma_{x_{0m}} = \sqrt{x_0^2 \cdot \sigma_h^2 + h^2 \cdot \sigma_{x_0}^2} = \sqrt{(6691.4^2)(0.00019^2) + (0.47964^2)(2.8^2)} = 0.61 mm \quad (11)$$

Riassumendo:

- $a_m = 3209.4 \pm 1.8$ mm
- $y_{0m} = -3612.0 \pm 1.9$ mm
- $x_{0m} = 1501.81 \pm 0.61$ mm

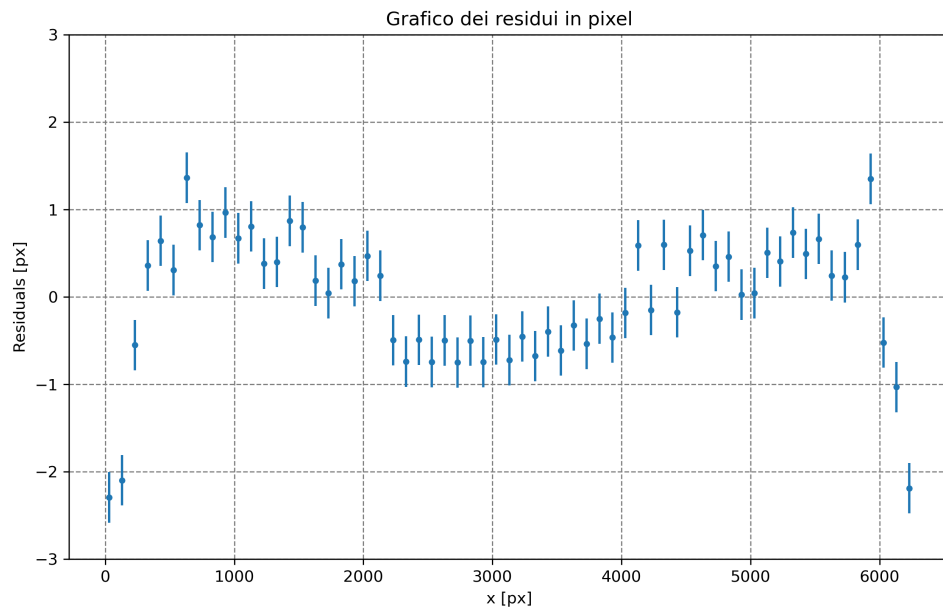
Per quanto riguarda, invece il grafico ottenuto dal fit, si è ottenuto il seguente grafico



(a) Fit dei dati in px

Le barre d'errore non sono ben visibili nè in ordinata nè in ascissa perchè le loro dimensioni sono molto più piccole rispetto a quelle delle misure sugli assi cartesiani

Successivamente, si è anche effettuato il grafico dei residui grazie al fit effettuato ed il grafico ottenuto è il seguente:



(b) Residui dei dati in px

Anche in questo caso le barre d'errore (questa volta soltanto in ascissa) non sono ben visibili in quanto sono molto più piccole rispetto alla scala presa come riferimento sul rispettivo asse coordinato.

6 Conclusioni

Dai dati raccolti, dalle loro relative incertezze e dal fit dei dati si posso constatare diversi fatti relativi all'affidabilità delle misure prese. Prima di tutto, però, è bene precisare che, avendo effettuato le misurazioni sulla foto della catena e non direttamente su di essa mentre era appesa alla parete, la deformazione dell'immagine ha avuto un certo peso sui risultati finali dell'esperimento. Innanzitutto, si osservino le misure dell'ordinata in pixel. Si è spiegato del perché è stata affiancata ad ogni misura delle ordinate dei punti un'incertezza di ± 1 px ma l'errore poi, durante l'operazione di fit, è stato diviso per $\sqrt{12}$, ottenendo

$$\frac{1}{\sqrt{12}} = 0.29 \quad (12)$$

Quindi l'errore relativo associato alla prima ed all'ultima misura, -110 e -111 è:

$$\frac{0.29}{110} = 0.0026 \quad (13)$$

$$\frac{0.29}{111} = 0.0026 \quad (14)$$

quindi, approssimando su entrambe i valori all'intero più vicino si ottiene un errore relativo di circa lo 0.3%

Invece, per quanto riguarda la misura sulle ordinate in valore assoluto maggiore (-840), si ha un errore relativo che ammonta a circa:

$$\frac{0.29}{840} = 0.0003 \quad (15)$$

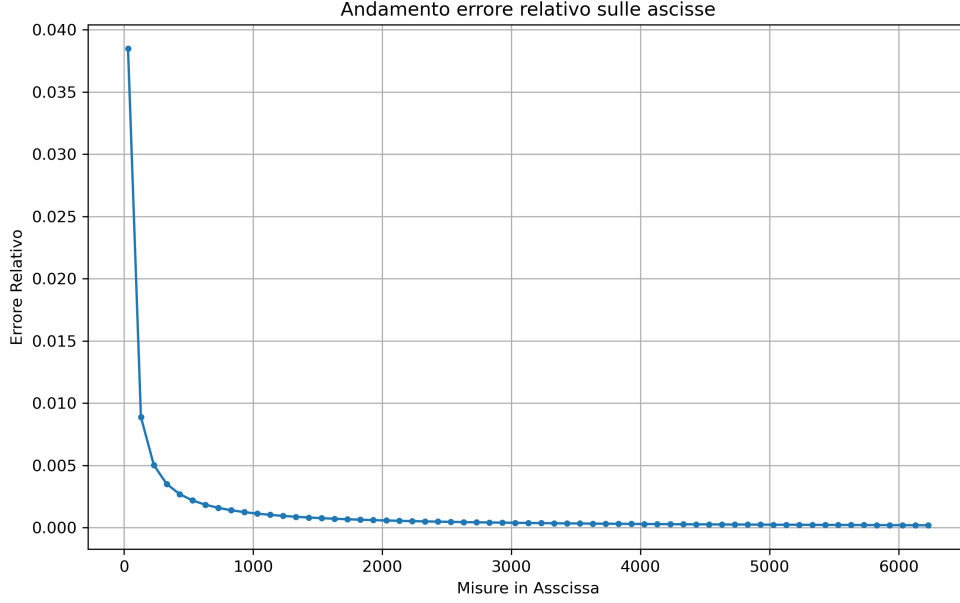
lo 0.03% del suo valore totale. Chiaramente su tutte le altre misure gli errori relativi variano tra questi due valori, o in maniera crescente o decrescente. Ciò significa che per quanto riguarda i punti più vicini al vertice della curva, si avrà un'incertezza sulla loro posizione pari a circa 0.03% del loro valore assoluto. Questa è una variazione nell'ordine di 10^{-1} o 10^{-2} sul valore assoluto delle misure, mentre questo è nell'ordine di 10^2 e per i valori più vicini al vertice si aggira attorno a 10^3 , quindi variazione di questo tipo sui dati, considerato il fatto che la loro parte rilevante, per l'esperimento, è la loro parte intera, sono sicuramente molto piccole. Inoltre è importante aggiungere che, rispetto alle ordinate, i valori misurati in prossimità del vertice, hanno precisione migliore. Considerazioni analoghe si possono fare sulle misure prese in ascissa, considerando il fatto che l'errore relativo questa volta, se prima diminuiva per poi riaumentare, ora diminuisce soltanto. Infatti, dato che su tutte le misure l'errore è di $4/\sqrt{12}$, per le prime misure, prese nel ramo sinistro della curva e soprattutto per quelle più vicine all'origine, si ha un errore relativo maggiore, rispetto a quello che affligge le misure sul ramo destro della curva. Quindi si può subito asserire che per le misure più vicine al margine destro dell'immagine si è ottenuta una precisione maggiore rispetto a quelle in prossimità del margine sinistro. Numericamente si può osservare che, per la misura più a sinistra, l'errore relativo ammonta a:

$$\frac{1.2}{30} = 0.038 \quad (16)$$

Quindi un errore di circa il 3.8% sul valore totale, mentre per la misura più a destra si ha:

$$\frac{1.2}{6230} = 0.00019 \quad (17)$$

un errore di circa lo 0.019% sul valore totale, più piccolo di ben 3 decadi. Però tutte le misure intermedie a questi due valori sono state prese ad intervalli regolari di 100px, quindi l'errore relativo dovrebbe decrescere con certa regolarità. Il seguente grafico è stato creato proprio per poter osservare questa regolarità:



(c) Errore relativo sulle ascisse

Per quanto riguarda i valori di fit ottenuti (in pixel) si ha che l'errore relativo su questi valori ammonta a: Per il fattore a :

$$\frac{2.8}{6691.4} = 0.00042 \quad (18)$$

Quindi pari allo 0.04% del valore totale, arrotondando all'intero più vicino. Per il fattore y_0 :

$$\frac{2.7}{7530.7} = 0.00036 \quad (19)$$

Pari allo 0.04% del valore totale, arrotondando all'intero più vicino. Per il fattore x_0 :

$$\frac{0.35}{3131.15} = 0.00011 \quad (20)$$

pari allo 0.01% del valore totale, sempre arrotondando all'intero più vicino.

Invece, gli errori relativi per i valori in metri sono: Per a_m :

$$\frac{1.8}{3209.4} = 0.00057 \quad (21)$$

Pari allo 0.06% sul valore totale, arrotondando all'intero più vicino. Per y_{0m} :

$$\frac{1.9}{-3612.0} = 0.00053 \quad (22)$$

Pari allo 0.05% sul valore totale, arrotondando all'intero più vicino. Per x_{0m} :

$$\frac{0.61}{1501.81} = 0.00040 \quad (23)$$

Pari allo 0.04% sul valore totale, arrotondando all'intero più vicino.

Come si vede immediatamente dai risultati numerici, ovviamente gli errori relativi sono maggiori sulle misure trasformate, ma questo è un fatto alquanto ovvio, dati gli effetti della propagazione degli errori. Comunque per ragionamenti analoghi fatti sui dati raccolti, sono errori molto piccoli rispetto ai valori di fit, sia quelli trasformati che quelli in pixel, quindi la probabilità di aver ottenuto un buon fit è alta. Infine le ultime valutazioni sono relative al grafico dei residui ottenuto. Innanzi tutto si vede come le misure in ordinata dei punti più vicini al vertice della curva siano anche le più vicine alla curva di fit, quindi anche le migliori, mentre invece più ci si muove verso i punti di sospensione più le misure si distanziano dal grafico di fit. Inoltre si nota come le misure in prossimità degli estremi della catena siano anche le peggiori di tutto l'esperimento in quanto distano ben più di due barre d'errore dal grafico di fit. Sul totale delle 63 misure, con una stima

qualitativa del grafico, si può affermare che sicuramente 5 siano misure sbagliate, tutte le altre, all'incirca rientrano nel range delle 2 barre d'errore di distanza, quindi si posso considerare più affidabili. Sempre attraverso una stima qualitativa del grafico si nota anche che le misure probabilmente meglio eseguite sono, invece, 12, in quanto sono le uniche la cui barra d'errore interseca il grafico.

Il fatto più rilevante che può essere notato osservando il grafico dei residui, però, è il loro andamento, che pare seguire una certa regolarità. Ciò è dovuto alla presenza di un errore sistematico, la cui natura sta nella già citata deformazione dell'immagine, che tende ad accentuarsi sempre più verso i lati dell'immagine. Questo, però, non spiega le fluttuazioni dei punti agli estremi della curva, che risultano essere simmetriche rispetto al centro del grafico. Ciò non è dovuto soltanto alla deformazione dell'immagine (che comunque ha una certa influenza), ma al fatto che in prossimità dei vincoli probabilmente la catena non assume subito la posizione che dovrebbe seguire secondo il modello matematico ma, a cuasa delle azioni vincolari, questa viene deviata di un certo angolo dalla curva della catenaria. In sostanza, la catena è stata fissata alla parete in maniera incorretta, facendo sì che questa fosse più inclinata di quanto sarebbe stata se avesse agito solamente la forza peso. Questo spiega anche perché le misure in prossimità dei punti di affissione siano le peggiori. Come si sarebbero potuti evitare questi errori? Sicuramente, per quanto riguarda il problema dei punti di affissione, se la catena fosse stata appesa a due ganci piuttosto che fissata alla parete con dello scotch, questa avrebbe subito preso le forme di una catenaria, evitando deviazioni strane; per quanto riguarda invece l'errore dovuto alla deformazione dell'immagine, si sarebbe potuto operare su questa con qualche software particolare per ridurre questo effetto, come per esempio AUTOCAD, che nonostante sia un software per il disegno, inserendovi all'interno un'immagine rimuove di default tutte le deformazioni, oppure utilizzando per esempio GIMP o PHOTOSHOP si sarebbe riusciti ad ottenere comunque lo stesso risultato.