

Esperienze ottica

Nicolò Bottiglioni, Marco Malucchi

26 aprile 2023

Obiettivi

Le seguenti esperienze vertono sullo studio di alcuni fenomeni ottici quali la rifrazione e riflessione di un raggio luminoso, il "funzionamento" di lenti divergenti e convergenti, l'alone lunare e l'arcobaleno. In particolare, gli obiettivi sono determinare l'indice di rifrazione di plexiglass, ghiaccio, acqua e determinare il potere diottrico di una lente divergente. Infine, dopo aver determinato gli indici di rifrazione di acqua e ghiaccio, partendo dall'analisi di due immagini, si verificherà la validità della legge empirica di Gladstone-Dale.

1 INDICE DI RIFRAZIONE DEL PLEXIGLASS

1.1 Cenni teorici

Nell'ambito dell'ottica geometrica, la legge di Snell-Cartésio descrive la rifrazione di un raggio luminoso ogni qual volta che attraversa due mezzi con indice di rifrazione differente. L'equazione della legge di Snell-Cartésio è la seguente.

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r, \quad (1)$$

dove θ_i , θ_r sono rispettivamente gli angoli di incidenza e di rifrazione del raggio luminoso, misurati rispetto alla normale al piano di incidenza, e n_1 , n_2 sono gli indici di rifrazione dei due materiali attraversati dal raggio luminoso.

1.2 Setup sperimentale

L'apparato consisteva in una sorgente di luce, con diaframma a fenditura per creare un fascio di luce sottile, e in un supporto sul quale, al di sopra di un foglio di carta quadrettata con disegnata una circonferenza, è stato posizionato il semicilindro di plexiglass. Il montaggio è stato regolato in modo che il raggio luminoso incidesse nel centro della superficie piana del semicilindro, in modo da evitare un secondo raggio in uscita. Questo passaggio è stato facilitato dal fatto che, sul foglio quadrettato, erano disegnati in maniera rimarcata una circonferenza e due suoi diametri ortogonali: in questo modo è stato possibile disporre la superficie piana del cilindro in modo simmetrico rispetto al centro della circonferenza e lungo uno di questi ultimi, e anche assicurarsi che il raggio luminoso incidesse nel centro della superficie piana, coincidente quindi con il centro della circonferenza. Di fronte alla sorgente luminosa era posizionata anche una lente convergente e, prima di cominciare con le misurazioni, è stata regolata la distanza del supporto per il semicilindro dalla sorgente di luce in modo che il raggio incidente fosse il più sottile possibile.

1.3 Misurazioni effettuate

La carta quadrettata è stata fondamentale nella fase di presa dati. Infatti, sono state scelte dieci diverse angolazioni per il raggio di incidenza e, per ciascuna di esse, sono state misurate le distanze della normale al piano di incidenza rispettivamente del raggio incidente e del raggio rifratto. Le coppie di misure effettuate sono state dunque, detto R il raggio della circonferenza e θ_i e θ_r gli angoli di incidenza e rifrazioni, le seguenti.

$R\sin\theta_r \pm 1$	[quadretti]	$R\sin\theta_i \pm 1$	[quadretti]
	11	7	
	26	17	
	16	13	
	9	6	
	5	4	
	15	10	
	25	19	
	13	9	
	29	19	
	3	4	

Tabella 1

Come incertezza è stata associata ad ogni misura quella di un quadretto, dal momento che grazie alla regolazione del montaggio i raggi, sia incidenti che rifratti, erano contenuti entro i due quadretti.

1.4 Analisi dati

A partire dalla (1), si può esplicitare $\sin\theta_i$ in funzione di $\sin\theta_r$. Nel caso delle nostre misure:

$$n_1 R\sin\theta_i = n_2 R\sin\theta_r \quad [\text{quadretti}] \quad (2)$$

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta_r \quad [\text{quadretti}] \quad (3)$$

E' stato eseguito un fit con l'algoritmo odr con un modello lineare, ottenendo il seguente risultato.

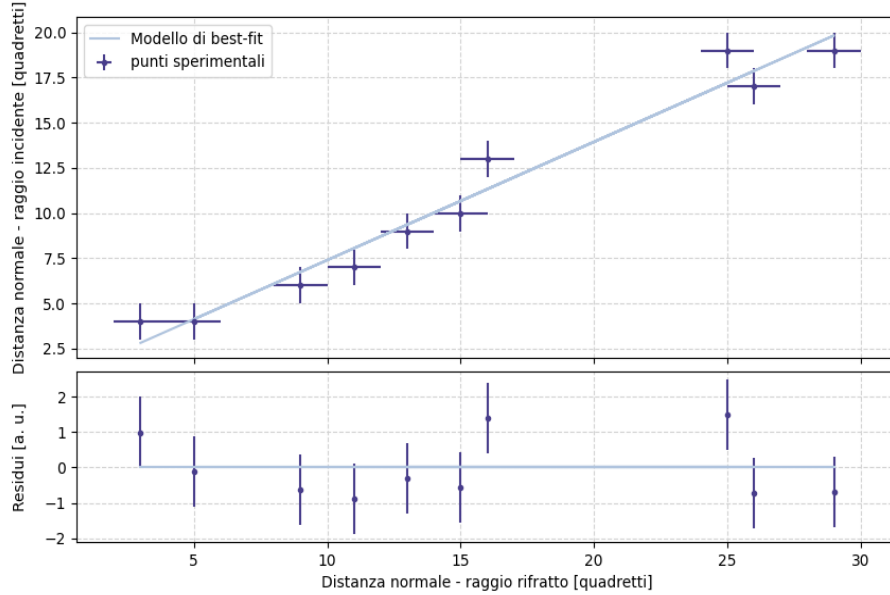


Figura 1: Grafico e residui fit odr

Il fit tramite l'algoritmo odr è stato utilizzato perchè l'incertezza sulla misura della distanza tra asse e raggio rifratto non è trascurabile rispetto alla misura della distanza tra asse e raggio incidente, ovvero non è rispettata la condizione $\frac{dy}{dx}\sigma_x \ll \sigma_y$. L'algoritmo odr permette di valutare l'accordo tra dati e modello in modo differente rispetto al fit dei minimi quadrati: infatti l'accordo viene valutato in base alla "distanza ortogonale" tra i punti e il grafico, e non in base alla loro distanza verticale, la quale non tiene conto dell'incertezza delle misure sull'asse delle ascisse.

Inoltre, per quest'esperienza è stato assunto $n_1 = 1$, con n_1 indice di rifrazione dell'aria. L'effettivo valore dell'indice di rifrazione è, invece, circa $n_1 = 1,000294$. Con tale approssimazione si è introdotto un errore relativo pari a $3 \cdot 10^{-4}$. Grazie a quest'approssimazione, il valore stimato dal fit per il coefficiente angolare coincide con il valore dell'indice di rifrazione del plexiglass.

1.5 Conclusioni

Il modello matematico utilizzato per il fit, come detto in precedenza, è quello di una retta, del tipo $y = mx + q$. Se la (3) descrive bene il fenomeno di rifrazione, i valori attesi per n_2 , q e χ^2 dovrebbero essere i seguenti.

Grandezze	Valori attesi
n_2	1.52
q	0
χ^2	8 ± 4

Tabella 2

Riportiamo di seguito i valori stimati tramite il fit.

Grandezze	Valori attesi
n_2	1.53 ± 0.10
q	0.86 ± 0.78
χ^2	7.8

Tabella 4

Notiamo che il valore dell'indice di rifrazione del plexiglass è compatibile con il valore atteso, essendo entro una σ da quest'ultimo. Il valore stimato per l'intercetta, invece, è entro 2σ dallo zero. Infine, anche il χ^2 è compatibile con il valore atteso.

L'errore relativo sulla misura di n_2 è pari a $\frac{\sigma_{n_2}}{n_2} = 0.07$. Quest'ultimo risulta molto maggiore dell'errore relativo introdotto tramite l'approssimazione $n_1 = 1$ e, ciò, giustifica l'approssimazione stessa.

2 POTERE DIOTTRICO DI UNA LENTE DIVERGENTE

2.1 Cenni teorici

Le lenti convergenti sono tali da determinare la convergenza nel proprio fuoco di un fascio di raggi paralleli incidenti all'asse ottico. Data la simmetria delle lenti convergenti, esse posseggono due fuochi. Le lenti convergenti possono formare immagini reali, virtuali, dritte, capovolte e riscalate, a seconda della posizione dell'oggetto rispetto alla lente. Le lenti divergenti sono invece tali da determinare la divergenza di un fascio di raggi paralleli incidenti all'asse ottico; i prolungamenti dei raggi rifratti divergenti converge nel fuoco della lente, il quale si trova dallo stesso lato da cui provengono i raggi incidenti. A causa di ciò, la lente divergente è solo in grado di produrre immagini virtuali, nel senso che esse non possono essere catturate su uno schermo. La legge matematica che regola il funzionamento delle lenti è

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad [m^{-1}] \quad (4)$$

dove f indica la distanza focale, ovvero la distanza del fuoco della lente dal proprio centro, p indica la distanza dell'oggetto reale dal centro della lente, mentre q indica la distanza dal centro della lente dell'immagine dell'oggetto reale, virtuale o reale che sia. A causa di quanto detto sopra, le lenti divergenti sono caratterizzate da una distanza focale negativa, mentre le lenti convergenti sono caratterizzate da una distanza focale positiva.

Infine, la quantità $\frac{1}{f}$ è detta "potere diottrico" della lente.

2.2 Setup sperimentale

L'apparato sperimentale è analogo a quello descritto per la misurazione del plexiglass, con la differenza che davanti alla sorgente di luce, al posto del diaframma a fenditura, è stato posizionato uno schermo con un foro triangolare, in modo da creare, appunto, un'immagine che avesse tale forma geometrica. A disposizione c'era anche un set di lenti, divergenti e convergenti, di diverso potere diottrico e uno schermo sul quale poter catturare l'immagine prodotta dalle lenti.

2.3 Misure effettuate

Dato che una lente divergente non produce immagini reali, è stato necessario utilizzare una lente convergente di potere diottrico maggiore in modulo di quello della lente divergente. E' stata utilizzata, in particolare, una convergente di potere diottrico +10 e una divergente di potere diottrico -5. La convergente è stata posizionata di fronte alla sorgente, in modo che quest'ultima si trovasse nel fuoco della prima. Così facendo, si è potuto creare un fascio focalizzato. Dopodichè è stato posizionato lo schermo a una distanza tale dalla convergente che l'immagine triangolare fosse a fuoco. Fatto ciò, tale posizione dello schermo è stata "marcata" con un tratteggio a matita, in modo da riposizionare lo schermo nella stessa posizione ad ogni misurazione. Dopo queste accortezze, si è passati alle misurazioni vere e proprie. Sfruttando l'immagine prodotta dalla convergente come sorgente virtuale per la divergente, è stata posizionata la lente divergente tra la convergente e lo schermo e si è misurata la grandezza p , presa con il segno negativo, tra la divergente e lo schermo stesso. E' stato poi spostato lo schermo in modo che l'immagine proiettata su esso risultasse nuovamente a fuoco e, a questo punto, è stata misurata la grandezza q , positiva, ovvero la nuova distanza tra lo schermo e la lente divergente. Tale procedura è stata iterata dieci volte, ottenendo le seguenti misure

p	±	0.5	[cm]	q	±	1	[cm]
			-6.5				10
			-8.6				17
			-10.1				18
			-11.5				26
			-12.8				34
			-13.3				41
			-14.2				44
			-14.7				52
			-15.1				58
			-15.3				60

Tabella 5

Come errore associato alle misure della grandezza p non è stato possibile utilizzare la risoluzione del metro a nastro a causa della posizione della lente divergente, non ben definita perchè fissata all'interno di una ghiera. Quindi, come incertezza è stato preso il semispessore della ghiera stessa, mentre come valore centrale della misura è stata presa la distanza tra lo schermo e il punto medio tra le due estremità della ghiera.

Per quanto riguarda la misura della quantità q , l'incertezza deriva dall'essere sicuri di posizionare lo schermo alla distanza esatta per la quale l'immagine triangolare su esso fosse a fuoco. Mentre si eseguiva quest'ultima procedura, dopo aver trovato la posizione per cui l'immagine fosse a fuoco, ci si è accorti che essa rimaneva ben definita sullo schermo anche se si spostava lo schermo di circa 1[cm] verso la lente divergente oppure nel verso opposto. Dunque, l'immagine rimaneva ben definita entro un intervallo di circa 2[cm]. Come incertezza di misura è stata utilizzata la semilarghezza di tale intervallo, ossia 1[cm].

In Tabella 5 le misure riportate sono state opportunamente arrotondate alla prima cifra di cui si era incerti.

2.4 Analisi dei dati

Le misure sono state convertite in metri e successivamente si sono misurate le quantità $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$, invertendo i dati sperimentali p e q .

Per il fit dei dati è stato utilizzato un modello lineare. La (4) nel nostro caso, in cui $p < 0$, si riscrive come

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{q} & [m^{-1}] \\ \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{f} & [m^{-1}]\end{aligned}\tag{5}$$

La (5) è della forma $y = mx + k$. Utilizzando quest'ultima come modelli di fit, quindi, è possibile stimare la quantità $k = \frac{1}{f}$.

Il fit ottenuto, mediante l'algoritmo odr, è il seguente.

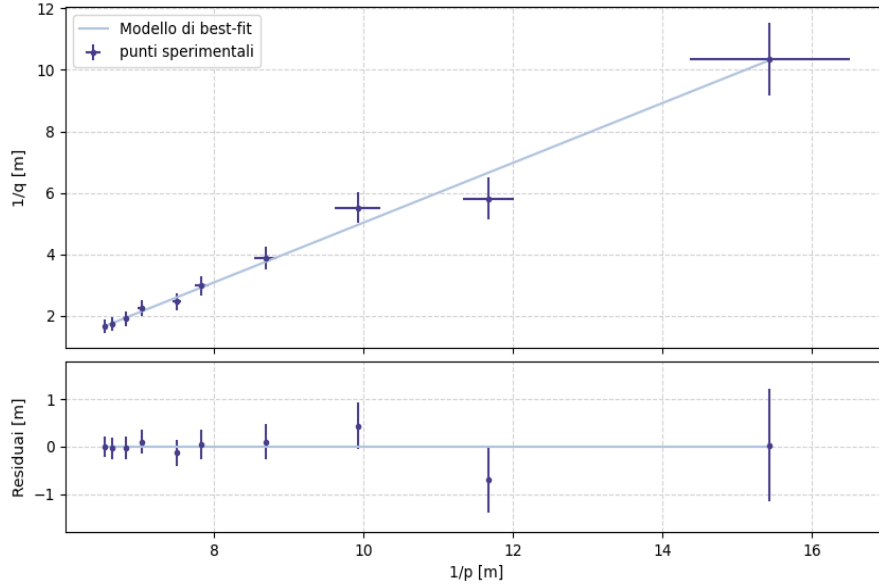


Figura 2: Grafico e residui fit odr

2.5 Conclusioni

I valori attesi per i parametri di best-fit e per il valore del χ^2 sono:

Grandezze	Valori attesi
m	1
$k = \frac{1}{f}$	-5 [m^{-1}]
χ^2	8 ± 4

Tabella 6

Le misure stimante tramite il fit dei dati è invece il seguente

Grandezze	Valori attesi
m	0.97 ± 0.09
$k = \frac{1}{f}$	-4.68 ± 0.66 [m^{-1}]
χ^2	2.7

Tabella 8

La stima del coefficiente angolare risulta compatibile con il valore atteso $m = 1$ e analogamente la stima di del potere diottrico.

Il χ^2 non è, invece, compatibile con il valore atteso. La probabilità di ottenere il valore stimato per il χ^2 è la seguente

$$P(\chi_8^2 \leq 2,7) \approx 0.05 \quad (6)$$

Ciò significa che, se ripetessimo l'esperienza con nuove coppie di dati sperimentali, avremo più probabilità di ottenere un χ^2 maggiore di 2.7.

Il valore ottenuto per il χ^2 indica la possibilità che le incertezze siano state sovrastimate. Tale possibilità è concreta e giustificata dal fatto che, come detto nella sezione precedente, vi era incertezza sia sulla posizione della lente divergente sia sulla distanza dello schermo dalla divergente per la quale l'immagine triangolare risultasse a fuoco. Tali incertezze hanno portato, probabilmente a una sovrastima dell'errore.

3 ALONE LUNARE E INDICE DI RIFRAZIONE DEL GHIACCIO

3.1 Cenni teorici

L'alone lunare è un fenomeno ottico osservabile a causa della deflessione della luce proveniente dalla Luna. La deflessione è dovuta alla presenza nell'atmosfera di cristalli di ghiaccio a struttura esagonale. Tale struttura dei cristalli fa sì che essi siano otticamente simili a prismi aventi angolo al vertice pari a 60° : infatti i prolungamenti dei lati dell'esagono convergono, definendo un angolo e formando idealmente il prisma sopracitato. L'orientazione dei cristalli nell'atmosfera è casuale ma, la deflessione della luce ha probabilità massima di avvenire per l'angolo di deflessione minima δ_m , pari a $\sim 22^\circ$ nel caso di un cristallo di ghiaccio a forma di prisma esagonale e avente angolo al vertice di 60° . L'angolo di deflessione minima si verifica, in particolare, il raggio rifratto si propaga parallelamente alla base del prisma

E' proprio quando si verifica la deflessione di un angolo $\delta_m \approx 22^\circ$ che è possibile osservare l'alone lunare. Raramente, sotto certe condizioni, è anche possibile osservare un secondo alone provocato da una deflessione della luce di $\sim 46^\circ$.

Dato che la causa della formazione dell'alone è la presenza di cristalli di ghiaccio nell'atmosfera, è possibile misurare l'indice di rifrazione n del ghiaccio tramite la seguente.

$$n = \frac{\sin(\frac{\delta_m + \phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})}. \quad (7)$$

ϕ rappresenta l'angolo al vertice, pari a 60° .

Come detto poco fa, la luce ha probabilità massima di essere deflessa di un angolo pari a $\sim 22^\circ$. Ciò è legato al fatto che, data una funzione di una variabile casuale, la funzione ha probabilità massima di assumere valori che corrispondono ai punti critici della stessa.

3.2 Analisi dell'immagine e misure effettuate

L'immagine utilizzata è la seguente.



Figura 3: Alone lunare

L'immagine è stata aperta in matplotlib al fine di poter misurare, grazie al puntatore del mouse, le coordinate dei punti sulla circonferenza data dall'alone. Come si può notare dall'immagine, l'alone presenta uno "spessore" e due diverse colorazioni: una rossastra, più interna, e una bluastra, più esterna. Per dare una spiegazione a questo fenomeno, si deve specificare che l'angolo di deflessione minima è $\sim 22^\circ$ in media, dato che la rifrazione del raggio luminoso varia in funzione della sua lunghezza d'onda. E' proprio questa variazione della rifrazione che provoca la colorazione sopracitata dell'alone lunare. Tuttavia, non approfondiamo maggiormente questo fatto perché al di fuori della nostra competenza.

Sono state misurate le coordinate di 33 punti dell'alone lunare. I campionamenti della circonferenza data dall'alone sono avvenuti in corrispondenza della "linea" di separazione tra le due regioni di colore rosso e blu, in modo da ottenere coordinate di punti equispaziati dal centro della circonferenza, coincidente con la Luna. Inoltre, la circonferenza è stata campionata in modo ragionevolmente uniforme, dal momento che le incertezze sulle coordinate del centro dell'alone e del suo raggio sono quelle stimate tramite il metodo di Kasa, utilizzato in questa esperienza come spiegato nel paragrafo seguente, se i campionamenti della circonferenza sono, appunto, uniformi. Altra condizione è che l'incertezza su questi campionamenti sia la stessa su entrambe le coordinate. L'incertezza sui campionamenti sopracitati è parente della sicurezza e della precisione con la quale si posiziona il puntatore del mouse in corrispondenza della "linea" di separazione dei due colori. Per la stima dell'incertezza si è proceduto nel seguente modo: si è effettuato un ingrandimento su una porzione d'immagine dell'alone, in modo che le due colorazioni fossero ancora ben distinguibili. Su tale porzione dell'immagine risultava che la "linea" di separazione dei colori non era ben definita, quindi come incertezza è stato preso il semispessore di questa zona di indefinizione, il quale è stato misurato direttamente con il puntatore del mouse, spostato fino a che si era sicuri di essere posizionati su una delle due colorazioni e non più sulla "zona di indefinizione". Per concludere, l'incertezza associata alle misure è di 4 pixels, sia per la coordinata sulle ascisse sia per quella sulle ordinate.

Inoltre, sono state misurate anche le coordinate delle stelle visibili nella fotografia, ovvero Arcturus, Spica e Regulus. Questa misura è stata necessaria al fine di misurare la distanza in pixels tra le stesse, funzionale alla misura del fattore di conversione da pixel a gradi. Il fattore di conversione ha un ruolo centrale, dato che permette di ottenere la misura del raggio angolare dell'alone, che corrisponde a δ_m , e utilizzare la (7) per ottenere una misura dell'indice di rifrazione del ghiaccio. Come incertezza sulle misure delle coordinate delle stelle sono stati presi 2 pixel. Anche in questo caso, l'incertezza è legata alla sicurezza con la quale si posiziona il puntatore del mouse sulla stella di interesse. Riportiamo di seguito le coordinate delle stelle. Determinare il fattore di conversione equivale a una "calibrazione". A causa di questo, si è deciso di procedere misurando la posizione di tutte e tre le stelle e di determinare, grazie a ciascuna distanza, un diverso fattore di conversione, al fine di verificare quale dei tre corrispondesse alla miglior calibrazione, data da un maggiore compatibilità tra le misure di n e m con i valori tabulati degli stessi.

Stella	Posizione ± 2 [px]
Spica	(606;529)
Regulus	(701;61)
Arcturus	(325;445)

Tabella 9

Per ottenere il fattore di conversione da pixel a gradi sopracitato, si è dovuto anche sfruttare i valori tabulati delle distanze angolari tra le tre stelle, riportati nel sito raggiungibile al link "<https://stjerneskin.com/angular-distance-between-stars.htm>". Riportiamo di seguito tali valori.

Stelle	Distanza angolare α
Spica-Regulus	54.1°
Regulus-Arcturus	59.7°
Arcturus-Spica	38.2°

Tabella 10

3.3 Analisi dei dati

Con i dati ottenuti tramite l'analisi dell'immagine è stato eseguito il fit con una circonferenza tramite l'algoritmo di Kasa, il quale ha permesso di stimare la misura del raggio in pixel r dell'alone e la misura delle coordinate del centro dell'alone x_c e y_c . L'incertezza su queste grandezze, come accennato nel paragrafo precedente, se i campionamenti dell'alone sono uniformi e se l'errore su questi ultimi è lo stesso per ogni campionamento su entrambe le coordinate, sono della forma

$$\sigma_{x_c} = \sigma_{y_c} = \sigma \sqrt{\frac{2}{c}} \quad [px];$$

$$\sigma_r = \sigma \sqrt{\frac{1}{c}} \quad [px] \quad (8)$$

dove σ rappresenta l'incertezza sui campionamenti dell'alone e c rappresenta il numero di campionamenti (è stata volutamente utilizzata tale lettera al posto della classica n al fine di non incorrere in abusi di notazione).

Il fit ottenuto è il seguente.

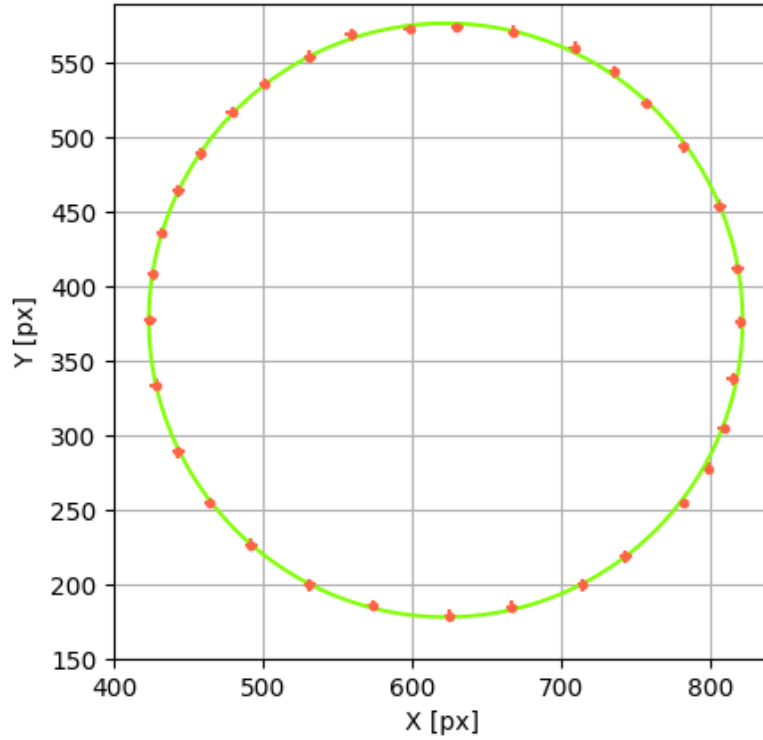


Figura 4: Fit dei dati mediante l'algoritmo di Kasa

Inoltre, come già accennato nel paragrafo precedente, grazie alle misure della distanza tra le stelle in pixel e in gradi, sono stati misurati i fattori di conversione grazie alla seguente

$$f = \frac{\alpha}{d} \quad \left[\frac{gradi}{pixel} \right].$$

dove d rappresenta la distanza in pixel tra le stelle. Tramite f , la misura del raggio r dell'alone stimato grazie al metodo di Kasa è stata convertita da pixel a gradi, ottenendo così la misura del raggio angolare dell'alone δ_m . Quest'ultima è stata utilizzata poi per misurare l'indice di rifrazione del ghiaccio mediante la (7).

3.4 Conclusioni

Dopo aver misurato il raggio angolare dell'alone e l'indice di rifrazione del ghiaccio con le tre diverse calibrazioni, ovvero mediante i tre diversi fattori di conversione, si è osservato come la maggiore compatibilità tra i valori tabulati di queste ultime grandezze e i valori tabulati si verifica determinando il fattore di conversione grazie alle distanze tra Arcturus e Regulus. Riportiamo di seguito le grandezze stimate mediante il fit e i valori misurati del raggio angolare e dell'indice di rifrazione del ghiaccio.

Grandezze	Valori
x_c	$622 \pm 1 \quad [px]$
y_c	$377 \pm 1 \quad [px]$
r	$199.1 \pm 0.6 \quad [px]$
δ_m	$22.1 \pm 0.1 \quad [gradi]$
n	1.314 ± 0.002

Tabella 11

Notiamo che il raggio angolare dell'alone è compatibile l'angolo di deflessione minima del raggio luminoso prevista dalla modellizzazione teorica del fenomeno dell'alone, mentre il valore misurato dell'indice di rifrazione del ghiaccio è entro due σ_n dal valore tabulato, pari a 1.31.

Si può dunque concludere che, come previsto, l'alone lunare è provocato dalla presenza nell'atmosfera di cristalli di ghiaccio a forma di prisma esagonale.

In particolare, è curioso specificare come si conoscano circa una ventina di forme assunte dall'acqua nel processo di cristallizzazione. Solo due di queste venti si osservano nelle condizioni ambientali della biosfera, mentre tutte le altre sono ottenute in particolari condizioni create in laboratorio. Queste due strutture prevalenti assunte dai cristalli di ghiaccio sono la struttura esagonale, che risulta quella dominante sulla superficie terrestre e in condizioni ambientali normali, e la struttura cubica metastabile (la metastabilità è una condizione di equilibrio che non corrisponde a un minimo assoluto dell'energia che, solitamente, caratterizza un sistema stabile. Un sistema metastabile perdura in condizione di equilibrio fintanto che non viene fornito al sistema un quantitativo sufficiente di energia che lo porta a una nuova condizione, metastabile o stabile), la quale si forma in condizioni estreme nell'alta atmosfera in un intervallo di temperatura che va da 130 a 220 Kelvin. A partire da 240 Kelvin circa, tale struttura cubica si trasforma nella più ordinaria struttura esagonale. I cristalli a struttura esagonale sono un'ipotesi sensata per spiegare la formazione dell'alone a causa delle loro proprietà ottiche descritte brevemente nel paragrafo 3.1 e a causa della loro presenza in elevate quantità nella biosfera. I cristalli a struttura cubica invece non sono in grado di produrre gli stessi effetti ottici della struttura esagonale per due motivi principali. Innanzitutto, i cristalli cubici sono presenti occasionalmente nell'atmosfera superiore e non in quantità sufficienti a produrre, ad esempio, l'alone. In secondo luogo, come scritto nel paragrafo 3.1, la deflessione del raggio luminoso nel caso di struttura esagonale dipende dall'angolo individuato dalla convergenza dei prolungamenti dei lati dell'esagono, il quale è pari a 60° . Nel caso del cristallo cubico, i suddetti prolungamenti non convergono e, quindi, non individuano alcun angolo.

4 ARCOBALENO E INDICE DI RIFRAZIONE DELL'ACQUA

4.1 Cenni teorici

L'arcobaleno è un fenomeno ottico causato dalla deflessione dei raggi luminosi per mezzo di gocce d'acqua sospese nell'atmosfera, presenti solitamente dopo la pioggia. In particolare, l'arcobaleno è un fenomeno che si verifica quando il raggio luminoso subisce rifrazione con riflessioni interne. In questo caso la deflessione totale θ risulta

$$\theta = 2(i - r) + k(\pi - 2r) \quad (9)$$

dove i , r , k sono rispettivamente l'angolo di incidenza sulla superficie della goccia d'acqua, l'angolo di rifrazione e il numero di riflessioni interne.

Per $k=1$ e $k=2$ risulta $\theta_1 \approx 138^\circ$ e $\theta_2 \approx 129^\circ$. Si verifica quindi una retro-diffusione della luce, che permette di osservare un arcobaleno, avendo il sole alle proprie spalle. Secondo questo modello, ci si aspetta inoltre che l'arcobaleno mostri un arco principale di dimensione angolare pari al supplementare di θ_1 e un secondo arco di dimensione angolare pari al supplementare di θ_2 .

Nella descrizione del fenomeno ottico dell'arcobaleno, vale la legge di Snell-Cartesio

$$\sin i = n \sin r \quad (10)$$

Grazie alle ultime due equazioni, per $k=1$ e $k=2$ si ottengono rispettivamente le seguenti espressioni per θ_1 e θ_2 .

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \\ \theta_2 &= 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{8n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{8}} \end{aligned} \quad (11)$$

Nelle ultime equazioni, n rappresenta l'indice di rifrazione dell'acqua.

4.2 Misure effettuate

Le misure sono state effettuate sulla base della seguente immagine.



Figura 5: Doppio arcobaleno

L'immagine è stata aperta in matplotlib e sono stati campionati entrambi gli archi. Affinchè le misure fossero più ragionevoli possibili, gli archi sono stati campionati in corrispondenza dello stesso colore, ossia il giallo. I campionamenti, come nel caso dell'alone lunare, sono stati effettuati uniformemente lungo gli archi, dato che anche in questa esperienza si è utilizzato l'algoritmo di kasa per il fit dei dati. L'incertezza sui campionamenti è legata alla sicurezza con la quale si posiziona il puntatore del mouse in corrispondenza della banda gialla che si sta campionando. Alla luce di ciò, è stata associata ad ogni campionamento un'incertezza di 4 pixel.

4.3 Analisi dati

Partendo dai campionamenti effettuati, grazie all'algoritmo di Kasa sono state stimate le coordinate del centro e le misure in pixel dei raggi dei due archi. Riportiamo di seguito il fit dei campionamenti.

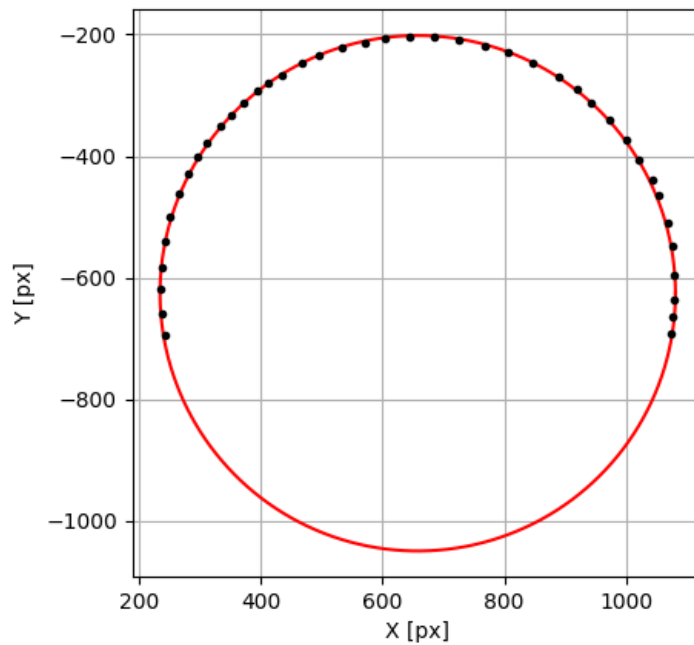


Figura 6: Arco interno

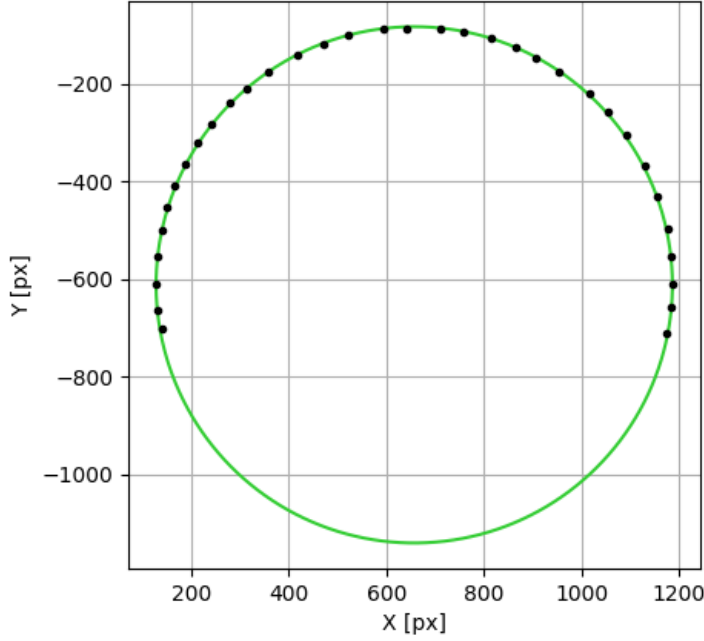


Figura 7: Arco esterno

Inoltre, vale

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{R_2}{R_1} \quad (12)$$

dove R_1 e R_2 sono rispettivamente i raggi in pixel dell'arco interno e dell'arco esterno. L'uguaglianza vale perchè le quantità θ e R rappresentano la stessa grandezza ma espressa in unità di misura differenti, dato che la prima è espressa in gradi e la seconda in pixel. Da ciò, segue che i rapporti sopra riportati rappresentino uno stesso valore adimensionale.

Conoscendo le espressioni per θ_1 e θ_2 , ossia le equazioni (11), è possibile determinare l'indice di rifrazione dell'acqua risolvendo la (12). A questo fine, è utile definire la funzione ausiliaria

$$f(n) = \frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{R_2}{R_1} = \frac{4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{8n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{8}}}{4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}} - \frac{R_2}{R_1} \quad (13)$$

e determinarne una radice compatibile, entro l'incertezza di misura, con il valore tabulato per l'indice di rifrazione per l'acqua. L'equazione $f(n) = 0$ non è risolvibile analiticamente, per questo la soluzione dell'equazione si ricava numericamente tramite l'algoritmo di bisezione. Come incertezza sulla misura dell'indice di rifrazione dell'acqua è stato associato l'errore su $\frac{R_2}{R_1}$. E' stata presa questa decisione perché l'impossibilità di risolvere analiticamente l'equazione $f(n) = 0$ implica anche l'impossibilità di propagare l'errore sull'indice di rifrazione stesso.

4.4 Conclusioni

Riportiamo di seguito i valori stimati grazie al fit dei campionamenti.

		Arco interno	Arco esterno
Coordinate centro della circonferenza ± 1	[px]	(658;626)	(657;612)
Raggio ± 1	[px]	424	529

Tabella 12

Di seguito, invece, riportiamo il valore stimato e il valore tabulato dell'indice di rifrazione dell'acqua

Valore stimato	Valore tabulato
1.333 ± 0.002	1.33

Tabella 13

Notiamo come l'indice di rifrazione dell'acqua stimato risulta essere entro due σ dal valore tabulato. Una considerazione aggiuntiva che si può fare riguardo l'indice di rifrazione dell'acqua è che esso varia in base alla lunghezza d'onda della luce incidente: è proprio questo aspetto a causare la "larghezza" dell'arco, dato che ogni colore dell'arcobaleno corrisponde a una lunghezza d'onda differente.

5 LEGGE DI GLADSTONE-DALE

5.1 Cenni teorici

La legge di Gladstone-Dale è una relazione empirica che lega l'indice di rifrazione n di una sostanza con la densità ρ della stessa, attraverso una costante k . La legge è la seguente

$$n - 1 = k\rho \quad (14)$$

In particolare, la costante k varia da sostanza a sostanza e può variare a seconda della temperatura, dell'indice di rifrazione e della pressione della sostanza stessa.

5.2 Misure effettuate e analisi

Le misurazioni effettuate per questa esperienza sono essenzialmente legate alla misurazione della densità di ghiaccio e acqua.

Acqua

La densità dell'acqua è stata misurata utilizzando un cilindro graduato capace di misurare il volume di un liquido in millilitri e di risoluzione pari a 1 millilitro e una bilancia digitale da cucina di risoluzione strumentale pari a 1 grammo.

E' stato misurato il peso del cilindro graduato vuoto. E' stato poi versato nel cilindro graduato un quantitativo d'acqua e infine è stato pesato nuovamente il cilindro. Le misure ottenute, con incertezze associate pari alle varie risoluzioni strumentali, sono le seguenti.

Quantità misurata	Valore misurato
Massa cilindro graduato	100 ± 1 [g]
Volume acqua	100 ± 1 [ml]
Massa cilindro + acqua	196 ± 1 [g]

Tabella 14

Dato che vale l'equivalenza $1\text{cm}^3 = 1\text{ml}$, risulta che il volume dell'acqua misurato è pari a 100 ± 1 [cm³].

Sottraendo la massa del cilindro alla massa del cilindro contenente l'acqua è possibile determinare la massa dell'acqua. Successivamente, è possibile determinarne la densità. Il valore misurato per la densità dell'acqua è il seguente.

$$\rho_{\text{acqua}} = 0.960 \pm 0.016 \quad \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$$

A questo punto, utilizzando il valore misurato, nell'esperienza dell'arcobaleno, dell'indice di rifrazione dell'acqua, è stata determinata, invertendo la (14), la costante k che verifica la legge di Gladstone-Dale. Il valore ottenuto è il seguente:

$$k = 0.347 \pm 0.006 \quad \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}\right] \quad (15)$$

Ghiaccio

Per la misura della densità del ghiaccio ci si è serviti della stessa bilancia digitale e di uno stampo per cubetti di ghiaccio. E' stata misurata la massa dello stampo, sia vuoto sia riempito d'acqua. Tramite una sottrazione, è stata poi misurata la massa dell'acqua con la quale è stato riempito lo stampo. Tale quantità è stata poi divisa per il numero totale di cubetti realizzabili grazie allo stampo, ovvero 6, in modo da ottenere la massa dell'acqua che andrà a formare un singolo cubetto di ghiaccio. Le due masse, quella dell'acqua di un singolo stampo e quella di un cubetto di ghiaccio, saranno le stesse, dato che durante il cambiamento di stato non varia la massa della sostanza. La misura del volume di un cubetto di ghiaccio è stata facilitata dal fatto che gli stampi erano cubici e, quindi, anche i cubetti di ghiaccio avevano tale forma. Dopo aver atteso che l'acqua all'interno dello stampo si solidificasse, si sono misurate con un metro a nastro le tre dimensioni del cubo di ghiaccio. Non si è misurata solo una dimensione per verificare entro quale incertezza il cubo fosse effettivamente tale. Quest'ultima misurazione è stata effettuata il più velocemente possibile, in modo da evitare una eccessiva fusione.

Le grandezze misurate direttamente sono le seguenti.

Quantità misurata	Valore misurato	
Massa dello stampo vuoto	123 ± 1	[g]
Massa dello stampo con acqua	870 ± 1	[g]
Lunghezza cubo di ghiaccio	5.1 ± 0.1	[cm]
Larghezza cubo di ghiaccio	5.1 ± 0.1	[cm]
Altezza cubo di ghiaccio	5.2 ± 0.1	[cm]

Tabella 15

Come incertezza alle misure riportate in Tabella 15 è stata associata la risoluzione rispettivamente della bilancia e del metro a nastro. Notiamo che le misure delle dimensioni del cubo di ghiaccio indicano che quest'ultimo è effettivamente un cubo entro la risoluzione del metro a nastro.

Grazie a queste misure, è stato possibile stimare la densità del ghiaccio. Prima di tutto, come già accennato sopra, è stata misurata la massa d'acqua che si sarebbe poi solidificata in un cubo di ghiaccio. E' stato poi misurato il volume di un cubo di ghiaccio moltiplicando tra loro le dimensioni e, infine, si è misurata la densità vera e propria, riportata di seguito.

$$\rho_{ghiaccio} = 0.921 \pm 0.002 \quad \left[\frac{g}{cm^3}\right]$$

Invertendo la (14) e utilizzando per l'indice di rifrazione del ghiaccio il valore stimato grazie all'esperienza dell'alone lunare, è stata poi misurata la costante che verifica la legge di Gladston-Dale

$$k = 0.341 \pm 0.001 \quad \left[\frac{cm^3}{g}\right] \quad (16)$$

5.3 Conclusioni

Notiamo innanzitutto che i valori stimati per le densità di acqua e ghiaccio distano più di due σ dai valori tabulati e quindi non risultano compatibili con essi. Tuttavia, i valori stimati per la costante k sono compatibili tra loro e, ciò, indica che la legge è verificata, dal momento che la costante, come già scritto a inizio sezione, dipende prevalentemente dal tipo di sostanza.