

Densità

Marco Malucchi, Nicolò Bottiglioni

1 luglio 2023

1 Obiettivi e cenni teorici

La *densità* ρ di un materiale è definita come la massa di un oggetto composto da quel materiale per unità di volume. L'obiettivo dell'esperienza è quello di stimare la densità di tre diversi materiali -acciaio, ottone, alluminio- partendo dalla misurazione del volume e della massa di solidi composti da questi tre materiali. In particolare, data la definizione di densità, segue che:

$$V = \frac{m}{\rho} \quad [m^3] \quad (1)$$

dove V e m sono rispettivamente il volume e la massa del solido. Il modello matematico che verrà utilizzato è quello di una retta generica del tipo

$$y = mx + q \quad . \quad (2)$$

In accordo con la [1], il coefficiente e l'intercetta della [2] dovrebbero essere rispettivamente il reciproco della densità e un valore compatibile con lo 0, dato che, essendo la densità la massa per unità di volume, quando la massa è nulla anche la densità deve esserlo.

2 Misure effettuate e dati raccolti

2.1 Materiale a disposizione

- Quattro sfere di diverso raggio di acciaio;
- Due cilindri, un prisma esagonale e un parallelepipedo di ottone;
- Due cilindri e due parallelepipedi di alluminio;
- Un calibro ventesimale di risoluzione 0.05 [mm];
- Un calibro cinquantessimale di risoluzione 0.02 [mm];
- Un calibro Palmer di risoluzione 0.01 [mm];
- Una bilancia digitale di risoluzione 0.001 [g];

2.2 Misure effettuate

Prima ancora di stimare la densità dei materiali è stato necessario stimare il volume dei solidi. Per fare ciò sono state misurate le grandezze di lunghezza necessarie per ciascun solido. Per quanto riguarda i cilindri le grandezze misurate sono state il diametro della base e l'altezza, per i parallelepipedi l'altezza, la larghezza e la profondità, per il prisma a base esagonale l'altezza e il doppio dell'apotema e, infine, per le sfere il diametro. Successivamente è stata misurata anche la massa dei solidi attraverso la bilancia digitale.

2.3 Dati raccolti

Per quanto riguarda le misure di massa, ciascuna di esse è stata scalata di 6 milligrammi a causa di un errore di zero della bilancia: sul display di quest'ultima era infatti segnato tale valore in assenza di masse sul "piatto". Come incertezza è stata presa poi non la risoluzione strumentale ma il quadruplo di essa, dato che i valori delle masse segnati sul display della bilancia oscillavano di 0.004 [g].

Le misure di diametri, altezze etc. sono state effettuate più di una volta, ottenendo nella maggiorparte dei casi misure compatibili tra loro. Come valore centrale della misura è stata presa la media delle varie misurazioni di una stessa grandezza, mentre come incertezza ad essa associata è stata utilizzata la risoluzione strumentale dello strumento di misura utilizzato. Tra le misure ripetute di una stessa grandezza ve ne erano inoltre una minor parte non compatibile con le altre: queste ultime sono state scartate perché derivanti, probabilmente, da un'errata lettura dei calibri. E' importante specificare come le misure siano state prima effettuate utilizzando tutte e tre le tipologie di calibri a disposizione - tranne per le sfere, per le quali non è stato utilizzato il calibro Palmer dal momento che la misura del diametro sarebbe stata in questo caso difficoltosa e ampiamente errata a causa della sfericità del solido e della superficie piatta dell'incudine fisso e dell'asta mobile del calibro- e successivamente siano state prese in considerazione unicamente quelle effettuate dallo strumento tale che la maggior parte delle misure risultassero compatibili tra loro. Questo perché i solidi sono solo apparentemente regolari e con superfici lisce, quindi gli strumenti di risoluzione maggiore sono stati in grado di apprezzare, ad esempio, le variazioni di altezza dovute al fatto che le superfici delle basi del solido fossero scabre.

3 Analisi dati

3.1 Alluminio

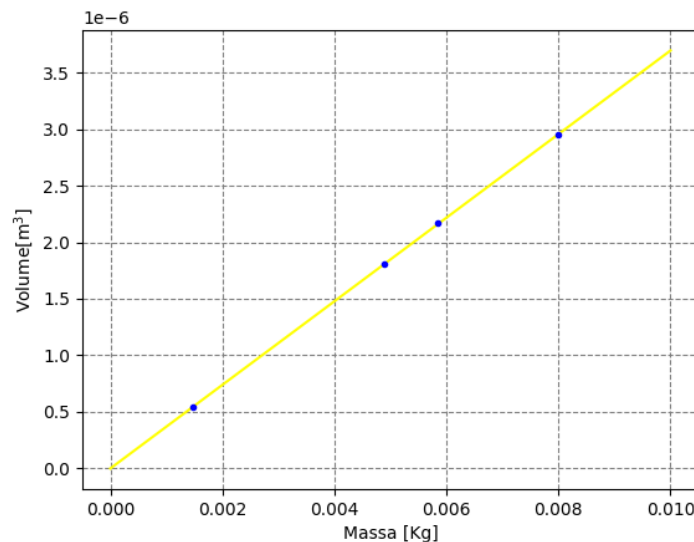
Misurato il diametro dei cilindri, i lati della superficie di base dei parallelepipedi e l'altezza di tutti i solidi, è stato misurato il volume di ciascuno dei solidi. Per i cilindri risulta

$$V = \frac{hd^2\pi}{4} \quad [m^3], \quad (3)$$

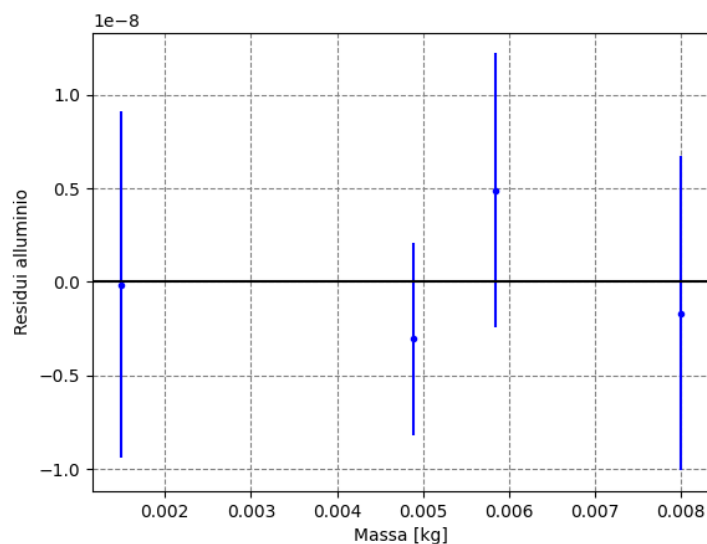
dove h e d sono l'altezza del cilindro e il diametro dell'area di base, rispettivamente. Detti h, l e p le misure dell'altezza, della lunghezza e della profondità dei parallelepipedi, risulta

$$V = hlp \quad [m^3]. \quad (4)$$

Dopo aver propagato opportunamente gli errori sulla misura del volume, è stato realizzato un grafico di best-fit volume-massa tramite il metodo dei minimi quadrati della funzione *curve_fit* di *scipy* e tramite il modello proposto dalla [2]. Per verificare la bontà del fit, è stato realizzato anche il rispettivo grafico dei residui.



(a) Grafico volume-massa solidi di alluminio



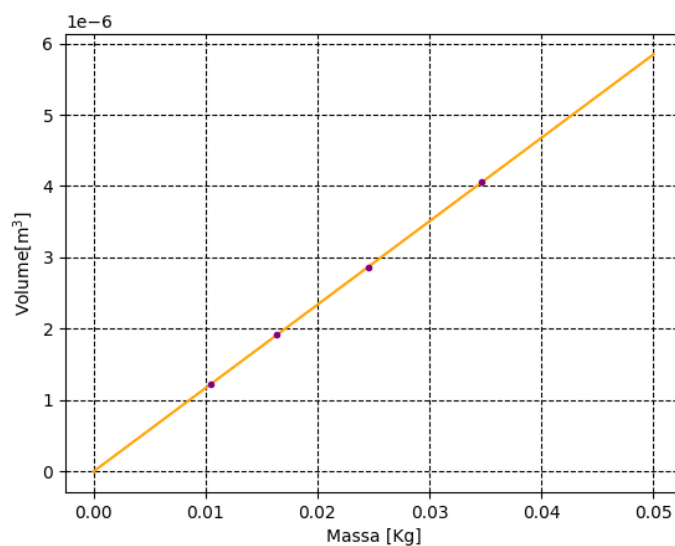
(b) Residui alluminio

3.2 Ottone

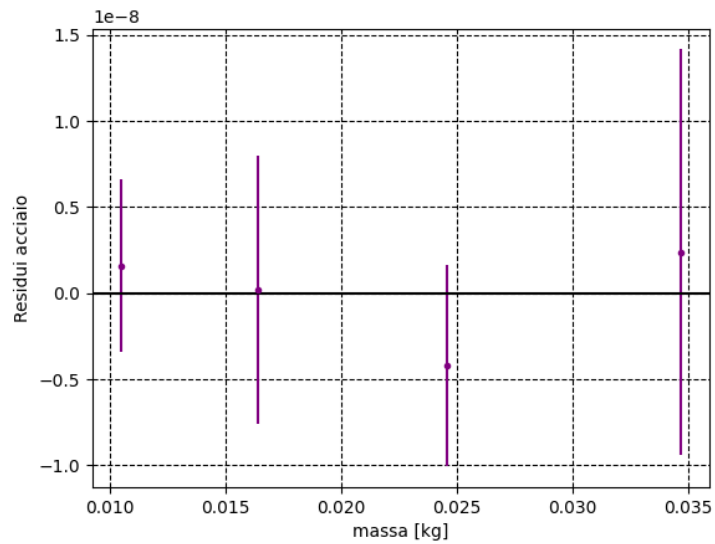
Per il volume dei cilindri e del parallelepipedo di ottone sono state utilizzate la [3] e la [4], mentre per il prisma a base esagonale, detta h la sua altezza, detto a l'apotema e dato che l'esagono è regolare entro la risoluzione del calibro cinquantessimale, è stata utilizzata la seguente.

$$V = 6ha^2 \tan(30) \quad [m^3] \quad (5)$$

Si è poi proceduto analogamente a quanto fatto per l'ottone, Ottenendo i seguenti



(c) Grafico volume-massa solidi di alluminio



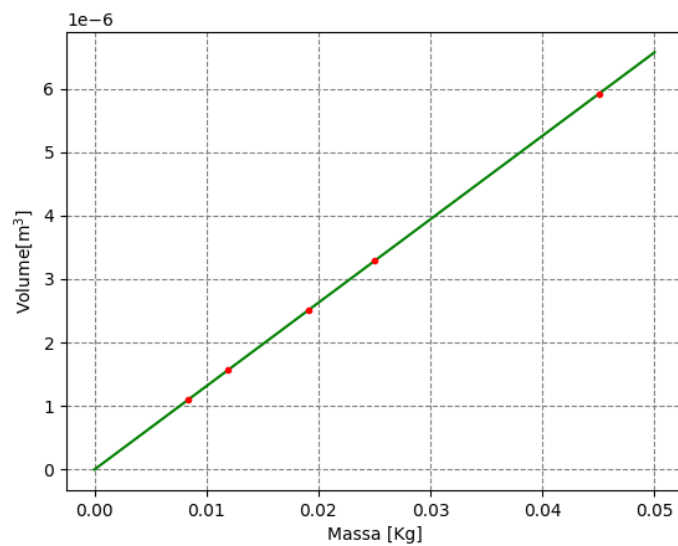
(d) Residui alluminio

3.3 Acciaio

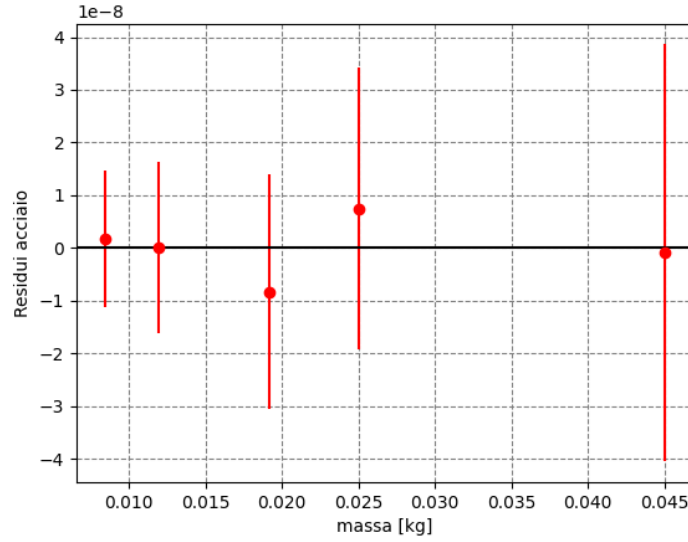
Detta d la misura del diametro, il volume della sfera risulta

$$V = \frac{d^3\pi}{6} \quad [m^3]. \quad (6)$$

Si è quindi realizzato un grafico di best-fit e un grafico dei residui in maniera analoga a quanto fatto con gli altri due materiali.



(e) Grafico volume-massa solidi di acciaio



(f) Residui acciaio

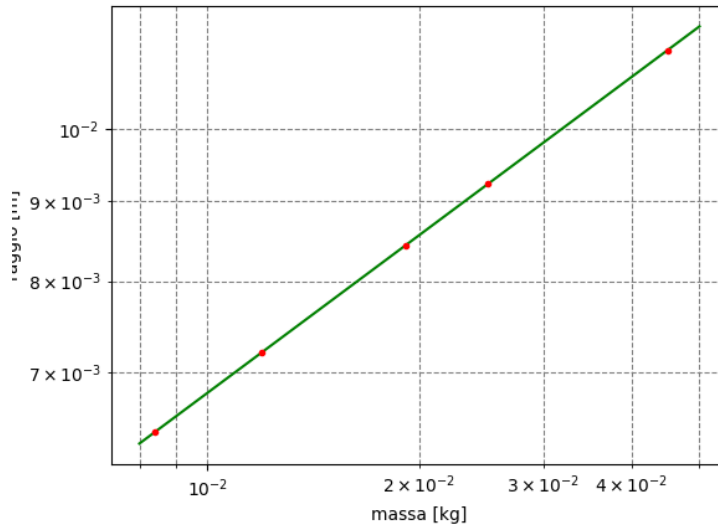
Inoltre, per quanto riguarda le sfere vale la seguente relazione del tipo legge di potenza tra massa m e raggio r .

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} = km^{1/3} \quad [m] \quad (7)$$

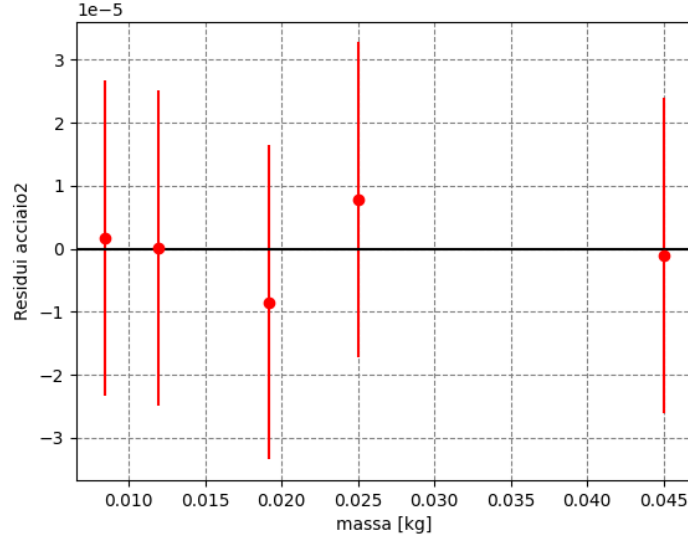
In questo caso, $1/3$ è l'indice o esponente della legge di potenza e

$$k = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho}} \quad [m \cdot kg^{-1/3}] \quad (8)$$

è la norma o costante della legge di potenza. Una legge di potenza di questo tipo, se rappresentata su un grafico bilogarithmico dove le distanze sugli assi cartesiani sono distanze in decadi, risulta essere linearizzata e più facilmente leggibile. E' stato quindi realizzato un grafico di best-fit massa-raggio tra i dati sperimentali, ricavando r dimezzando banalmente le misure ottenute del diametro delle sfere, utilizzando sempre la funzione *curve_fit* di scipy e come modello l'espressione analitica di una legge di potenza come la [7], avente norma C e indice Γ



(g) Grafico bilogarithmico raggio-massa



(h) Residui raggio-massa

4 Conclusioni

Osservando i residui dei vari materiali, possiamo notare come il modello lineare descriva bene la correlazione tra volume e massa. Inoltre, dato che la [1] è l'equazione di una retta passante per l'origine avente come coefficiente angolare il reciproco della densità, il modello di fit proposto dalla [2] dovrebbe restituire valori di m pari al reciproco della densità del materiale e valori dell'intercetta compatibili con lo zero. Innanzitutto, riportiamo i valori tabulati delle densità di alluminio, acciaio e ottone.

Materiale	$\rho \text{ kg/m}^3$
Alluminio	2710
Acciaio	7480-8000
Ottone	8400-8700

Riportiamo adesso le misure delle densità ρ e dei valori dell'intercetta q ottenuti mediante il fit dei dati raccolti.

Riguardo l'alluminio, le misure ottenute sono

$$\rho_{al} = 2704.5 \pm 6.5 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] ; q_{al} = -1.4 \pm 5.0 \text{ [mm}^3\text{]} \quad (9)$$

Per l'ottone si ha

$$\rho_{ot} = 8546.0 \pm 14.4 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] ; q_{ot} = -4.0 \pm 4.6 \text{ [mm}^3\text{]} \quad (10)$$

e infine per l'acciaio risulta

$$\rho_{ac} = 7597.2 \pm 13.0 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] ; q_{ac} = -4.9 \pm 5.7 \text{ [mm}^3\text{]} \quad (11)$$

Come si può osservare, tutti i valori delle densità ottenuti sono compatibili con quelli tabulati, mentre i valori dell'intercetta sono compatibili con lo 0. Considerando ora il grafico massa-raggio realizzato per le sfere d'acciaio, i valori ottenuti dal fit della norma C e dell'indice di potenza Γ sono i seguenti.

$$C = 0.0316 \pm 0.0007 \text{ [m} \cdot \text{kg}^{-1/3}\text{]} ; \Gamma = 0.334 \pm 0.001. \quad (12)$$

Si può notare come Γ sia compatibile l'indice $1/3$ della [7]. Inoltre, se misuriamo il valore k secondo la [8] utilizzando la densità dell'acciaio [11] appena stimata, otteniamo il valore

$$k = 0.0316 \pm 0.0002 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right], \quad (13)$$

che è compatibile con il valore C . Alla luce di tutto ciò e osservando nuovamente i vari grafici dei residui, si può concludere che il modello teorico proposto dalla [1] descriva molto bene il rapporto tra massa e volume di un solido composto da un determinato materiale e che la [7] descriva altrettanto bene il rapporto tra la massa e il raggio di una sfera.