

Conducibilità termica

Nicolò Bottiglioni, Marco Malucchi

28 giugno 2023

1 Obiettivi esperienza

La conducibilità termica, o conduttività termica, è una grandezza fisica che misura l'attitudine di una sostanza a trasmettere il calore attraverso la conduzione termica. L'obiettivo di questa esperienza è proprio quello di misurare la conducibilità termica λ dell'alluminio e del rame a partire da alcune misurazioni di temperatura di due barre cilindriche di questi ultimi due materiali, riscaldati da una resistenza connessa a un generatore di corrente.

2 Cenni teorici

La grandezza fisica che misura la quantità di calore che si trasmette per conduzione nell'unità di tempo è il *flusso di calore* W :

$$W = \frac{dQ}{dt} \quad [Watt] \quad (1)$$

Indicando con S, T, x rispettivamente la sezione della barra cilindrica, la temperatura a una certa distanza dall'estremo riscaldato dalla resistenza e la distanza effettiva dall'estremo, si può dimostrare che

$$W = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad [Watt] \quad (2)$$

Fissano un opportuno x_0 e un rispettivo T_0 , a partire dalla (2) si ricava la seguente equazione

$$T_i = T_0 - \frac{W}{S\lambda} x_i \quad [^{\circ}C] \quad (3)$$

dove T_i e x_i sono la i -esima temperatura alla i -esima distanza dall'origine fissata. Si noti come la (3) sia l'equazione di una retta con pendenza negativa e il cui coefficiente angolare contiene la grandezza λ . Se non vi sono scambi di calore con l'ambiente esterno, risulta che il flusso di calore W è pari a

$$W = \frac{VI}{2} \quad [Watt] \quad (4)$$

dove V e I non solo altro che la tensione del generatore e la rispettiva corrente generata. Attraverso la (4) ed esplicitando il termine λ dalla (3) è possibile, infine, misurare la conducibilità termica di un dato materiale.

3 Apparato Sperimentale

3.1 Materiale a disposizione

- Due barre cilindriche forate di rame e alluminio;
- Due termistori per acquisire le misure di temperatura;
- Un generatore di corrente e una resistenza;
- Calcolatore con programma di acquisizione;
- Circuito di acqua corrente;
- Calibro ventesimale di risoluzione 0.05 mm;
- Metro a nastro di risoluzione 1 mm;

3.2 Descrizione set-up sperimentale

L'esperienza è stata condotta basandosi su un circuito costituito da un generatore di corrente, tale da mostrare su un display la tensione e l'intensità di corrente "circolante" nel circuito stesso, e una resistenza fissata appositamente a un'estremità delle barre cilindriche in modo che queste ultime venissero riscaldate. Nell'altra estremità, le barre cilindriche sono state collegate a un circuito di acqua corrente in modo che, avendo in ciascuna barra una differenza termica da un estremo all'altro, il flusso di calore procedesse in direzione dell'estremità più fredda a partire da quella riscaldata. I fori delle barre cilindriche sono stati poi riempiti di olio, un ottimo conduttore di calore, per fare sì che potessero essere prese in modo più efficace le misure di temperatura proprio in corrispondenza dei fori. Per poter fare ciò sono stati utilizzati dei termistori, connessi a un calcolatore collegato a sua volta a un programma di acquisizione il quale mostrava su un apposito grafico temperatura-tempo le misurazioni effettuate.



Figura 1: Set-up sperimentale

4 Misure effettuate e dati raccolti

Prima di cominciare con la misurazione della temperatura in funzione della distanza dall'estremità riscaldata dalla resistenza, sono stati contati i fori presenti su ciascuna barra, per un totale di 21 per la barra di rame e 15 per quella d'alluminio. Successivamente sono stati misurati il diametro e la distanza tra i fori di ciascuna barra cilindrica, rispettivamente mediante il calibro ventesimale e il metro a nastro. Ad ogni misura è stata associata come incertezza la risoluzione strumentale del rispettivo strumento utilizzato per ottenerla. Le misure sono:

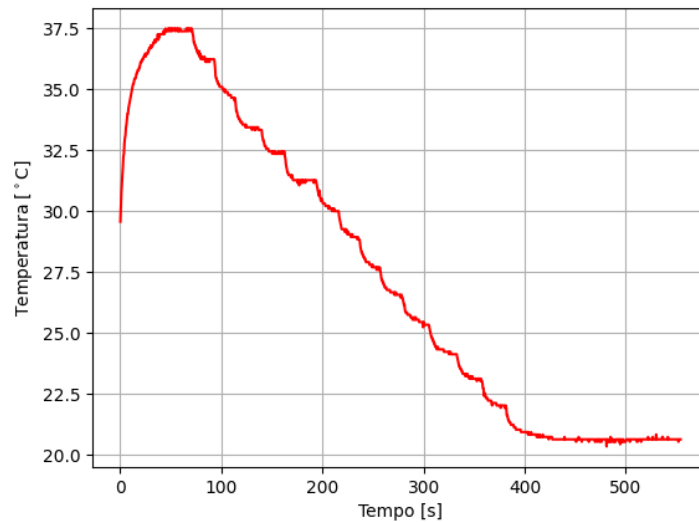
- **Barra di alluminio:** diametro $d = 25.00 \pm 0.05$ [mm]; distanza tra i fori $x = 2.5 \pm 0.1$ [cm]
- **Barra di rame:** diametro $d = 25.00 \pm 0.05$ [mm]; distanza tra i fori $x = 2.0 \pm 0.1$ [cm]

Come origine x_0 del sistema di riferimento della misura delle temperature è stato scelto il primo foro a partire dall'estremità riscaldata della barra. Successivamente sono state misurate la tensione V del generatore e la corrente I prodotta attraverso la lettura del display situato sullo stesso generatore. Si è osservato che i valori visualizzati della tensione e della corrente oscillavano rispettivamente intorno ai valori $V = 10.2$ [V] e $I = 1.61$ [A] di una quantità pari all'unità del

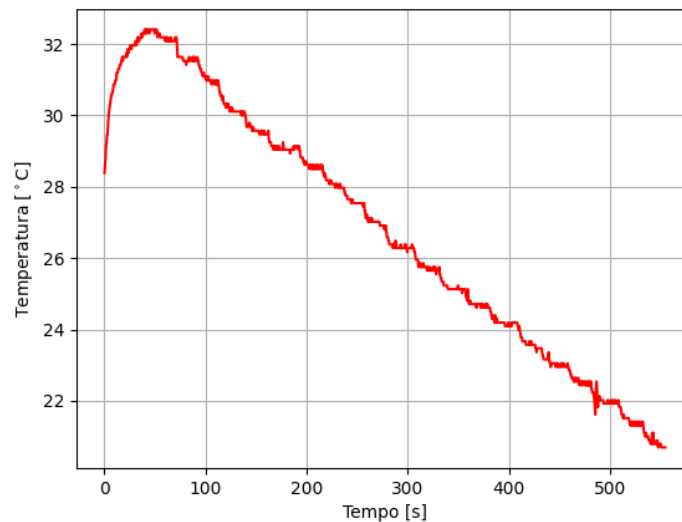
decimo di Volt e del centesimo di Ampère. Sono proprio queste ultime ad essere state selezionate come incertezze, ottenendo dunque le misure

- $V = 10.2 \pm 0.1 \text{ [V]}; \quad I = 1.61 \pm 0.01 \text{ [A]}.$

Infine sono state misurate le temperature delle barre cilindriche all'interno dei fori delle barre, precedentemente riempiti di olio, mediante i termistori. Avendo a disposizione di due di questi ultimi, sono state misurate contemporaneamente le temperature nelle due barre. E' stato inserito un termistore nel foro x_0 di ciascuna barra e, dopo aver aspettato un tempo sufficiente affinché si raggiungesse l'equilibrio termico tra l'olio all'interno dei fori e i termistori, i termistori sono stati spostati al foro successivo. Il processo è stato ripetuto per ogni foro su ciascuna barra. Come detto precedentemente, queste misure delle temperature sono state acquisite da un calcolatore e mostrate su un grafico temperatura-tempo grazie a un programma di acquisizione. Una volta terminate le misurazioni delle temperature per ogni foro, i dati acquisiti dal programma e mostrati sul grafico sono stati salvati sotto forma di dati in forma tabellare e sono stati importati su Python. Sono state scritte dunque opportune righe di codice al fine di realizzare due grafici temperatura-tempo, uno per ciascuna delle barre metalliche. Questo passaggio è stato eseguito al fine di avere una visualizzazione migliore dei dati rispetto a come la si aveva sul programma di acquisizione e per acquisire, di conseguenza, una misura della temperatura per ogni foro con un'opportuna incertezza ciascuno. I grafici ottenuti attraverso quest'ultimo passaggio sono i seguenti.



(a) Andamento temperatura nella barra d'alluminio



(b) Andamento temperatura nella barra di rame

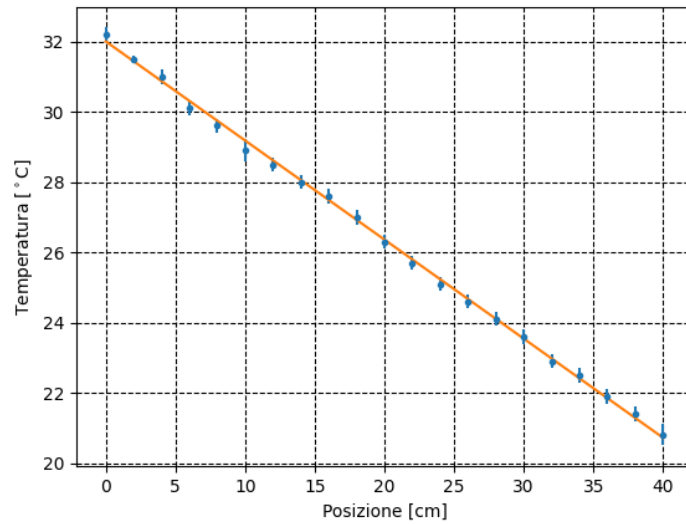
Dai grafici (a) e (b) si può osservare che gli intervalli nei quali la temperatura è pressochè costante sono quelli in cui era stato raggiunto l'equilibrio termico tra il termistore e l'olio all'interno del foro. Viceversa, l'intervallo di tempo iniziale e gli intervalli in cui la misura della temperatura decresce sono quelli in cui l'equilibrio termico ancora non era stato raggiunto. E' possibile inoltre osservare, nel grafico (b), un'oscillazione della temperatura poco prima dei 500 secondi. Ciò è stato causato da un errore durante la fase di misurazione: il termistore non era stato inserito correttamente all'interno del foro e successivamente esso è fuoriuscito per pochi istanti, causando appunto la sopracitata oscillazione. E' possibile evincere anche come il numero di intervalli in cui si è stabilito l'equilibrio termico corrispondano esattamente al numero di fori su ciascuna barra: 21 per quella di rame e 15 per quella di alluminio. Un altro dato ricavabile dai grafici è come, nell'ultimo foro di ciascuna barra, la temperatura fosse molto simile, causa del collegamento al medesimo circuito ad acqua corrente. Per quanto riguarda le misure vere e proprie della temperatura per ciascun foro, esse sono state acquisite direttamente dai grafici (a) e (b): tramite Python i grafici sono stati ingranditi in prossimità di ciascun intervallo di equilibrio termico e come valore centrale della temperatura è stato utilizzato il valore medio assunto dalla temperatura. Come incertezza, dato che comunque in questi intervalli di equilibrio la temperatura presentava varie oscillazioni, è stata presa l'ampiezza massima di queste ultime. Si è deciso di procedere in questo modo per quanto riguarda le incertezze dal momento che non si disponeva della massima fiducia negli strumenti utilizzati: la misura della temperatura passava dalla barra al calcolatore attraverso l'olio, i termistori, i cavi e un rilevatore ed è molto probabile che essi avessero un errore sistematico. Conseguenza di ciò è che la temperatura registrata e mostrata dal programma di acquisizione probabilmente non fosse quella effettiva e che se fosse stata presa la deviazione standard come incertezza, il misurando non sarebbe stato contenuto nella misura della temperatura stimata perchè essa scala di un fattore $\frac{1}{\sqrt{N}}$ e a nostra disposizione vi era un numero di dati dell'ordine di 1000 per ciascuna barra. Una conseguenza diretta di questa decisione per quanto riguarda l'incertezza di misura di temperatura è che ogni foro non necessariamente ha la medesima incertezza. In ultima analisi, ogni misura di temperatura è stata associata al corrispettivo foro grazie al fatto che la successione di intervalli di equilibrio termico corrisponde alla successione dei fori a partire dal foro x_0 . I dati che, quindi, sono stati utilizzati per stimare le due conducibilità termiche sono i seguenti.

RAME		ALLUMINIO	
$x \pm 0.1[cm]$	$T [^{\circ}C]$	$x \pm 0.1[cm]$	$T [^{\circ}C]$
0.0	32.2 ± 0.2	0.0	37.4 ± 0.2
2.0	31.5 ± 0.1	2.5	36.2 ± 0.2
4.0	31.0 ± 0.2	5.0	34.9 ± 0.3
6.0	30.1 ± 0.2	7.5	33.4 ± 0.3
8.0	29.6 ± 0.2	10.0	32.4 ± 0.2
10.0	28.9 ± 0.3	12.5	31.3 ± 0.2
12.0	28.5 ± 0.2	15.0	30.1 ± 0.2
14.0	28.0 ± 0.2	17.5	28.9 ± 0.2
16.0	27.6 ± 0.2	20.0	27.7 ± 0.2
18.0	27.0 ± 0.2	22.5	26.5 ± 0.2
20.0	26.3 ± 0.2	25.0	25.4 ± 0.2
22.0	25.7 ± 0.2	27.5	24.1 ± 0.2
24.0	25.1 ± 0.2	30.0	23.1 ± 0.2
26.0	24.6 ± 0.2	32.5	22.0 ± 0.2
28.0	24.1 ± 0.2	35.0	20.7 ± 0.3
30.0	23.6 ± 0.2		
32.0	22.9 ± 0.2		
34.0	22.5 ± 0.2		
36.0	21.9 ± 0.2		
38.0	21.4 ± 0.2		
40.0	20.8 ± 0.3		

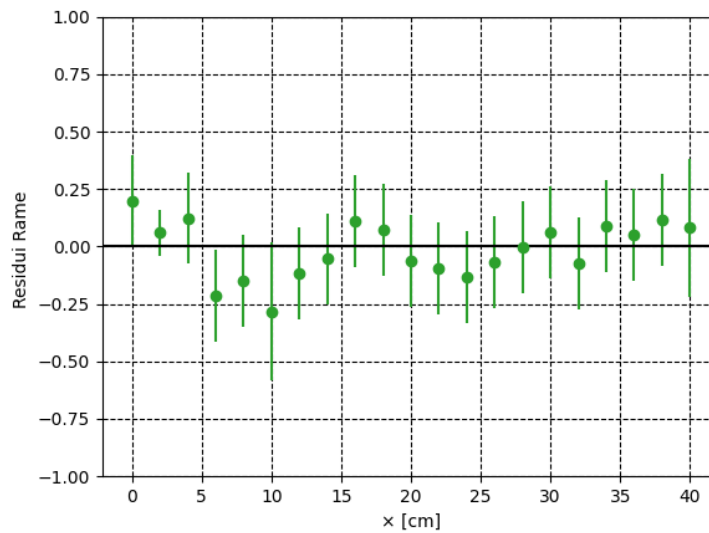
5 Analisi dati

Dopo aver misurato i valori di temperatura per ciascuna barra, su Python è stato eseguito il fit lineare dei dati, basandosi sul modello proposto dalla (3), grazie alla funzione *curve_fit* di scipy, la

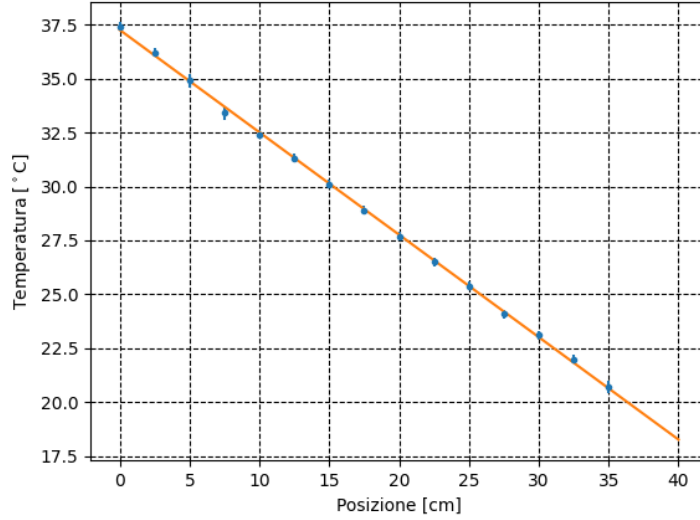
quale esegue il fit di un certo numero di dati mediante il metodo dei minimi quadrati. E' da sottolineare che, nell'eguire questo fit, è stato presa in considerazione solamente l'incertezza di misura dei valori della temperatura, escludendo quindi l'incertezza sulla posizione dei fori. Dopodichè, per verificare la validità del modello proposto dalla (3) nell'esprimere l'andamento della temperatura lungo le barre cilindriche, Sono stati realizzati anche i grafici dei residui. Osservando questi ultimi, si può notare che la funzione di fit segue l'andamento dei dati sperimentali. Sono stati ottenuti i seguenti.



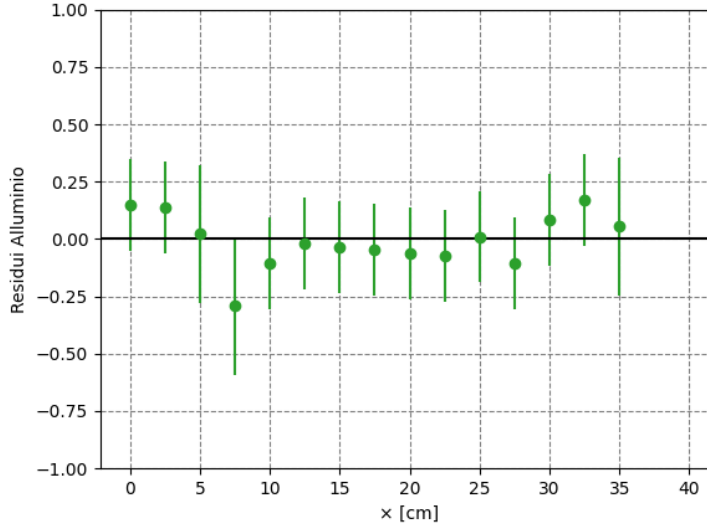
(c) Grafico di best-fit nella barra di rame



(d) Grafico dei residui rame



(e) Grafico di best-fit nella barra di alluminio



(f) Grafico dei residui alluminio

6 conclusioni

Nei grafici di best-fit realizzati il coefficiente angolare m della retta rappresenta, secondo la (3), la quantità

$$m = -\frac{W}{S\lambda} \quad \left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{cm}}\right]. \quad (5)$$

Nel nostro caso le misure di m , ottenute tramite la scrittura di alcune righe di codice su Python permettenti di dare in output la misura del coefficiente angolare, sono state, rispettivamente per il rame e per l'alluminio, $m_r = -0.282 \pm 0.002 \left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{cm}}\right]$ e $m_a = -0.474 \pm 0.003 \left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{cm}}\right]$. Successivamente le misure dei coefficienti angolari e del diametro delle barre sono state convertite ed espresse rispettivamente in $\left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{cm}}\right]$ e $[m]$. Per misurare le conducibilità termiche dei due materiali, mediante la (4), la (5) e sapendo che la sezione delle barre cilindriche è pari a $S = \frac{\pi d^2}{4}$, è stato ottenuto

$$\lambda = -\frac{2VI}{\pi d^2 m} \left[\frac{W}{^{\circ}\text{Cm}}\right]. \quad (6)$$

Le misure della conducibilità termica rispettivamente del rame e dell'alluminio sono quindi $\lambda_r = 593 \pm 8 \left[\frac{W}{^{\circ}\text{Cm}}\right]$ e $\lambda_a = 352 \pm 5 \left[\frac{W}{^{\circ}\text{Cm}}\right]$.

E' da notare come queste ultime due misure non siano affatto compatibili con i valori tabulati $\lambda_r \sim 400 \left[\frac{W}{^\circ C m} \right]$ e $\lambda_a \sim 200 \left[\frac{W}{^\circ C m} \right]$, ma rientrino in essi di un fattore 2. Ciò è dovuto ad alcuni fattori principali: innanzitutto, il modello matematico da noi assunto e citato nella sezione 2 prevede l'equazione $W = \frac{VI}{2}$, valida solamente in caso di assenza di scambio di calore con l'ambiente circostante. Nella realtà dei fatti, però, lo scambio di calore tra le barre metalliche e l'aria circostante può aver influito nella misura della conducibilità in maniera notevole. Un altro fattore che può aver influenzato la misura finale della conducibilità, oltre alla già citata poca fiducia avuta nei confronti degli strumenti a disposizione e allo scambio di calore tra l'aria e le barre metalliche, è costituito dalla dilatazione termica delle barre durante la fase di presa dati. Quest'ultimo aspetto ha sicuramente inciso sulla misura del diametro, della sezione e infine della conducibilità termica. In conclusione è possibile affermare che il modello matematico offerto dalla (3) segue l'andamento dei dati raccolti e, ciò, è proprio quello che ci si aspettava, dato che il decrescere della temperatura è lineare all'allontanamento dalla fonte di calore. Al fine di ottenere una stima delle conducibilità termiche del rame e dell'alluminio che sia compatibile con i valori tabulati, sarebbe necessario utilizzare degli strumenti più affidabili e avere una stima del flusso di calore W che tenga conto anche dello scambio di calore di un sistema con l'ambiente esterno.