

Dinamica dei rimbalzi

Nicolò Bottiglioni, Marco Malucchi

Gennaio 2023

1 Obiettivi e cenni teorici

Semplificando di molto, si può assumere che una pallina elastica rimbalzante su una superficie rigida perda una frazione γ della propria energia indipendente dalla velocità prima dell’impatto. Detta h_0 un’altezza nota da cui viene fatta cadere una pallina con velocità iniziale nulla, risulta che l’altezza massima raggiunta dopo n rimbalzi è pari a

$$h_n = h_0 \gamma^n \quad [m]. \quad (1)$$

Se si conoscono anche gli istanti t_n e t_{n-1} di due rimbalzi successivi, l’altezza massima raggiunta tra questi ultimi risulta

$$h_n = \frac{g(t_n - t_{n-1})^2}{8} \quad [m]. \quad (2)$$

Alla luce di ciò, l’obiettivo dell’esperienza è, partendo dall’analisi della registrazione audio dei rimbalzi di una pallina, ricavare il parametro γ e confrontare il valore misurato di h_0 con il valore stimato attraverso il fit dei dati.

2 Apparato sperimentale

2.1 Materiale e strumenti utilizzati

- metro a nastro di risoluzione 1 mm;
- livella;
- pallina di materiale plastico;
- smartphone iPhone modello XR;
- software per l’editing audio Audacity.

2.2 Setup sperimentale

Al fine di acquisire una registrazione audio dei rimbalzi della pallina la più pulita possibile, l’esperienza è stata condotta in una fascia oraria in cui nessun rumore esterno avrebbe potuto influenzare la registrazione e in una stanza allestita in modo da eliminare ogni rumore di sottofondo apprezzabile. Prima di cominciare a registrare il rumore dei rimbalzi, si è proceduto alla misura dell’altezza iniziale h_0 con il metro a nastro. Per assicurarsi di posizionare il metro a nastro perpendicolarmente al terreno e misurare l’altezza esatta, ci si è serviti di un tavolo che è stato ribaltato e posizionato verticalmente al centro della stanza. Per assicurarsi che anch’esso fosse ortogonale al terreno, è stata utilizzata la livella. Dopodiché è stata misurata l’altezza del tavolo “ribaltato”. Successivamente, se la pallina fosse stata lasciata cadere in prossimità del tavolo, ci sarebbe stato il rischio di un urto contro lo stesso durante i rimbalzi. Per ovviare a questo problema non è stato sufficiente allontanarsi dal tavolo e far cadere la pallina: in questo modo non si avrebbe avuto più la certezza dell’altezza iniziale di caduta, perché la lontananza dal tavolo rende difficoltoso il preciso posizionamento della pallina all’altezza voluta. E’ stato sfruttato un piccolo asse di legno rettangolare di spessore trascurabile: è stato posizionato sulla superficie del tavolo, perpendicolarmente ad esso e parallelamente al terreno, in modo che sporgesse da quest’ultimo di una lunghezza sufficiente a evitare urti della pallina con il tavolo durante i rimbalzi. Dopo aver preso tutte queste accortezze, è stato registrato il file audio: uno dei due si è occupato di far cadere la pallina, l’altro di registrare il file. Nella registrazione, lo smartphone non è stato tenuto a mezz’aria ma è stato appoggiato al suolo. Sono state effettuate quattro registrazioni.

3 Dati raccolti e analisi dei dati

L'alteza iniziale misurata è

$$h_0 = 125.3 \pm 0.5 \text{ [cm]}. \quad (3)$$

Come incertezza di misura non è stata scelta la risoluzione strumentale. Abbiamo deciso di procedere così perchè abbiamo voluto tenere conto sia di possibili imprecisioni durante le accortezze descritte nella sezione precedente, sia di imprecisioni durante il posizionamento della pallina all'altezza iniziale. Per quanto riguarda i file audio, essi sono stati convertiti in formato .wav e tramite brevi linee di codice su Python è stato realizzato un grafico per ciascuno di essi. I grafici sono stati determinanti, perchè grazie ad essi è stato possibile selezionare il file audio ritenuto migliore al fine di procedere con l'esperienza, mentre gli altri tre sono stati scartati. Il grafico del file audio scelto è il seguente.

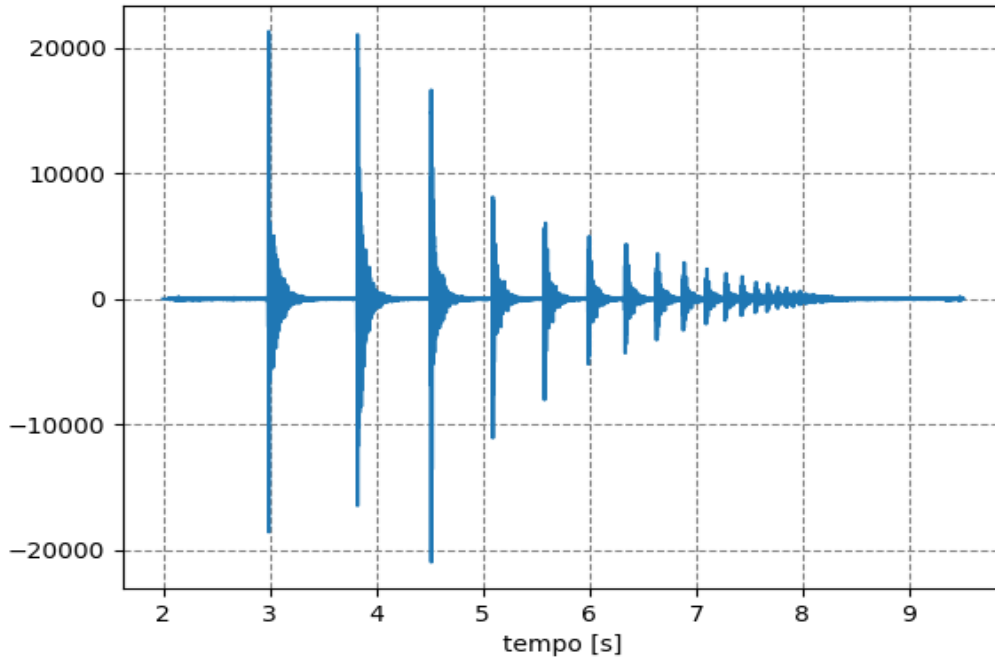


Figura 1: Grafico del file audio dei rimbalzi

Il grafico in questione è stato utilizzato per stimare gli istanti dei rimbalzi. Per fare ciò si è utilizzato il puntatore del mouse: ogni rimbalzo è caratterizzato, nel grafico, dal "picco", per cui effettuando uno zoom su di esso e con il puntatore del mouse è stato possibile stimare l'istante. Come incertezza sui tempi è stata fatta una stima ragionevole in base al fatto in questo contesto l'errore rispecchia la precisione con cui si sceglie il momento dell'impatto. Sono stati misurati gli istanti in cui sono avvenuti i primi $n = 8$ rimbalzi, ottenendo i seguenti valori.

Numero del rimbalzo	Istante di tempo	$\pm 0.004[s]$
1	2.991	
2	3.825	
3	4.516	
4	5.094	
5	5.580	
6	5.995	
7	6.341	
8	6.635	

Tabella 1: Misure raccolte degli istanti di tempo degli urti

Queste misure di tempo sono state utilizzate per stimare l'altezza massima tra due rimbalzi tramite la [2]. Successivamente, tramite a queste ultime stime, è stato realizzato uno scatter plot con le coppie ordinate di punti (numero del rimbalzo, altezza massima raggiunta) ed è stato fatto un fit con il modello proposto dalla [1]. Notiamo che la [1] è una legge esponenziale, per cui i dati si posizionano lungo una retta in un grafico in scala semilogaritmica. E' stato realizzato anche un grafico dei residui, in modo da verificare la bontà del fit e trarre conclusioni su quanto il modello della [1] descriva bene il fenomeno dei rimbalzi della pallina. Il fit dei dati è stato eseguito grazie alla funzione *curve_fit* di *scipy*, la quale esegue il fit tramite al metodo dei minimi quadrati. I grafici ottenuti sono i seguenti

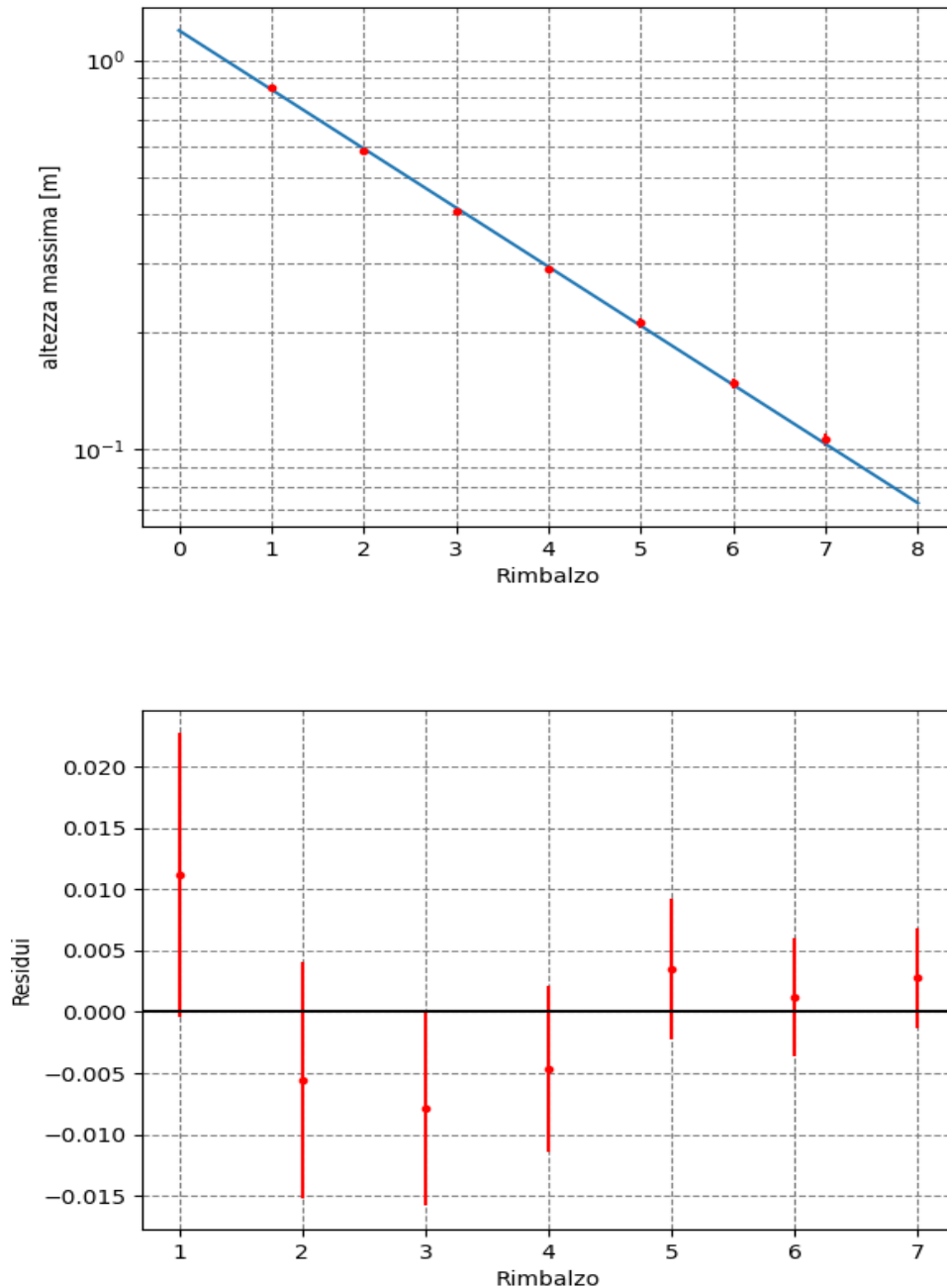


Figura 2: Grafico e residui dell'altezza dei rimbalzi

4 Conclusioni

Consideriamo gli errori relativi delle misure effettuate. Per quanto riguarda l'altezza iniziale si ha

$$\frac{0.5}{125.3} = 0.004 \quad (4)$$

quindi un errore circa del 0.4%. Per le misure dei tempi gli errori relativi variano leggermente, più precisamente tendono a diminuire man mano che si procede "in avanti" nel tempo. Mediamente, tutti questi restano nell'ordine dello 0.1%. Ciò indica che queste misure sono considerevolmente precise. Riguardo, invece, ai valori stimati di h_0 e γ mediante il fit dei dati, risulta

$$h_0 = 1.192 \pm 0.015 \quad [m] \quad ; \quad \gamma = 0.705 \pm 0.003 \quad . \quad (5)$$

(γ è un fattore a dimensionale) Gli errori relativi associati a queste ultime due misure sono rispettivamente circa 1.2% e 0.4%. Dal grafico di fit e quello dei residui, si evince poi come il modello utilizzato per interpretare i dati descriva bene la dinamica dei rimbalzi di una pallina. Nonostante ciò, il valore stimato di h_0 mediante fit non è compatibile con quello misurato. Questo è dovuto, probabilmente, al fatto che il modello utilizzato non considera la resistenza dell'aria sulla pallina ed inoltre non si può di certo assumere che la pallina utilizzata fosse, per esempio, perfettamente elastica, anzi, tutt'altro, come non si può neppure assumere che il pavimento sul quale la pallina è stata fatta rimbalzare fosse perfettamente rigido. Inoltre il modello non considera neppure il fatto che la pallina possa ruotare durante il suo moto e che subisca anche uno spostamento orizzontale oltre che verticale (cioè non rimbalza sempre nello stesso punto ma si sposta, anche se questo è certamente dovuto in parte anche al fatto che la pallina ruoti). Quindi, probabilmente, il fatto che il modello utilizzato trascuri tutti questi fattori è la causa dell'incompatibilità tra i due valori di h_0 .