

antara 0 sampai 0,8 volt, 1 digunakan untuk jangkauan tegangan antara 2 volt sampai 5 volt. Jadi 0 dan 1 menyatakan variabel tegangan

Untuk dapat menyelesaikan persoalan jaringan switching kita harus mengenal terlebih dahulu hukum-hukum aljabar Boole sebagai berikut: Bila $a, b, c \in B$ (B =himpunan Boole) maka memenuhi hukum-hukum:

1. Komutatif

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

2. Distributif

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

3. Identitas

$$a + 0 = a \quad , 0 \equiv \text{elemen zero}$$

$$a \times 1 = a \quad , 1 \equiv \text{elemen unit}$$

4. Komplemen

$$a + a' = 1$$

$$a \times a' = 0$$

5. Idempoten

$$a + a = a$$

$$a \times a = a$$

6. Boundednes

$$a + 1 = 1$$

$$a \times 0 = 0$$

7. Absorbsi

$$a + (a \times b) = a$$

$$a \times (a + b) = a$$

8. Involusi

$$(a')' = a$$

$$0' = 1$$

$$1' = 0$$

9. Asosiatif

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

10. De Morgan

$$(a + b)' = a' \times b'$$

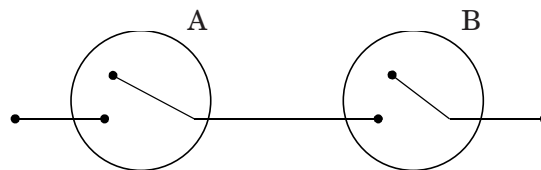
$$(a \times b)' = a' + b'$$

Kita perhatikan bahwa setiap hukum di atas mengganti operasi logik + dengan \times , \times dengan +, 0 dengan 1, 1 dengan 0. Ini menunjukkan bahwa hukum-hukum aljabar Boole memenuhi prinsip duality, yaitu dual suatu hukum merupakan hukum juga.

Jaringan switching pada umumnya dibentuk dari rangkaian dasar seri (AND) dan paralel (OR).

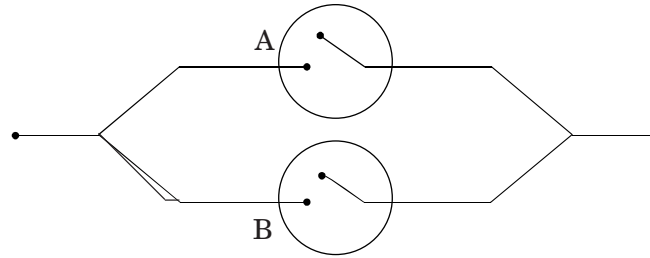
Rangkaian seri (AND)

Notasi: $A \times B$ atau $A \wedge B$ atau AB



Rangkaian paralel (OR)

Notasi: $A + B$ atau $A \vee B$

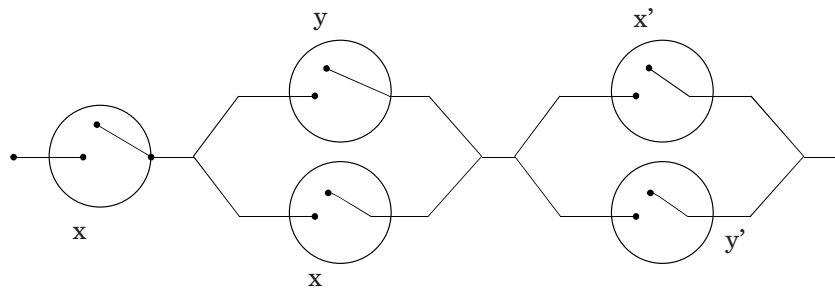


Contoh:

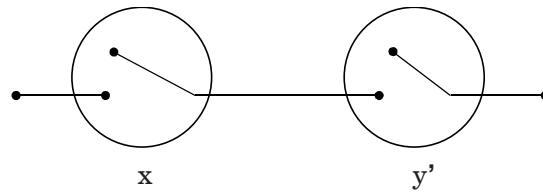
Gambarkan jaringan swiching yang diberikan oleh polinomial Boole $(x \wedge (y \vee x) \wedge (x \wedge y)')$, kemudian sederhanakanlah jaringan tersebut; Bilamana jaringan tersebut on atau off?

Jawab:

$$\begin{aligned} & x \wedge (y \vee x) \wedge (x \wedge y)' \\ & \equiv x \wedge (y \vee x) \wedge (x' \vee y') \quad , \text{ DeMorgan} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \equiv x \wedge (y \vee x) \wedge (x' \vee y') \quad , \text{ absorpsi} \\ & \equiv x \wedge (x' \vee y') \quad , \text{ distribusi} \\ & \equiv (x \wedge x') \vee (x \wedge y') \quad , \text{ komplemen} \\ & \equiv 0 \vee (x \wedge y') \quad , \text{ identitas} \\ & \equiv x \wedge y' \end{aligned}$$



x	y	y'	$x \wedge y'$
1	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

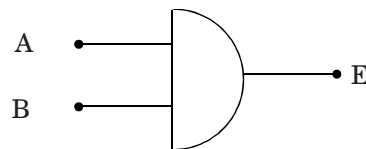
Jadi jaringan switching tersebut on bila x on dan y off atau jaringan on bila x on dan y' on.

7.2 APLIKASI ALJABAR BOOLE PADA RANGKAIAN LOGIK (GATE)

Sebagian besar rangkaian dalam hardware sistem pengolah data adalah rangkaian logik, yang dapat bekerja sebagai penguat, pembanding, merata, osilator, penjumlahan, pengendali, penyandi, dll.

Ada beberapa simbol yang sering digunakan dalam rangkaian logik yaitu:

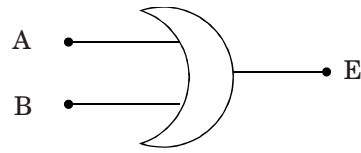
1. AND



A	B	$A \times B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$E \equiv A \times B$$

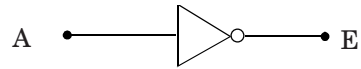
2. OR



A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$E \equiv A + B$$

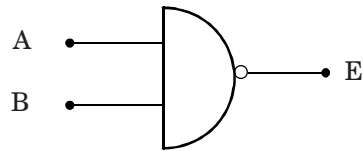
3. NOT



A	A'
0	1
1	0

$$E \equiv A'$$

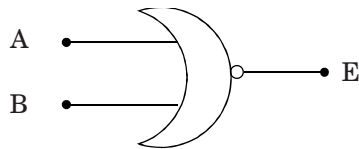
4. NOT AND (NAND)



A	B	E
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$E \equiv (A \times B)'$$

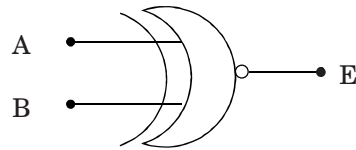
5. NOT OR (NOR)



A	B	E
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$E \equiv (A + B)'$$

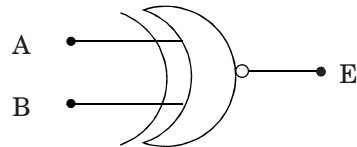
6. Exclusive OR (EXOR)



A	B	E
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$E \equiv AB' + A'B \equiv A \oplus B$$

7. Exclusive NOR (EXNOR)



A	B	E
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$E \equiv AB + A'B'$$

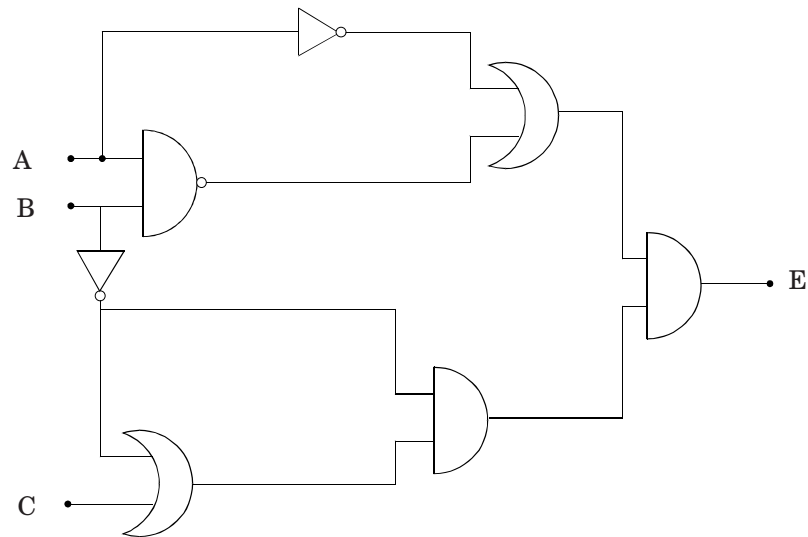
Contoh:

Gambarkan rangkaian logika yang dinyatakan oleh:

$$E = (A' \vee (A \wedge B)') \wedge (B' \wedge (B' \vee C))$$

Kemudian sederhanakan.

Jawab



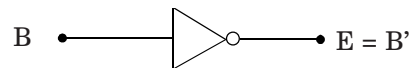
$$E \equiv (A' \vee (A \wedge B')) \wedge (B' \wedge (B' \vee C))$$

$$E \equiv (A' \vee (A \wedge B')) \wedge B' \quad , \text{Absorbsi}$$

$$E \equiv (A' \vee A' \vee B') \wedge B' \quad , \text{De Morgan}$$

$$E \equiv (A' \vee B') \wedge B' \quad , \text{Idempoten}$$

$$E \equiv B' \quad , \text{Absorbsi}$$



7.3 APLIKASI ALJABAR BOOLE DALAM OPERASI KELIPATAN PERSEKUTUAN KECIL (KPK) DAN FAKTOR PERSEKUTUAN BESAR (FPB)

Dalam aljabar Boole operasi + sama dengan operasi KPK dan operasi \times sama dengan operasi FPB, untuk mengingat kembali operasi KPK dan FPB perhatikan contoh berikut:

Contoh:

Carilah KPK dan FPB dari 45, 48 dan 72.

Jawab:

Faktor prima dari 45 adalah $3^2 \times 5$

Faktor prima dari 48 adalah $2^4 \times 3$

Faktor prima dari 72 adalah $2^3 \times 3^2$

Jadi KPK dari 45, 48 dan 72 adalah $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$

Jadi FPB dari 45, 48 dan 72 adalah 3.

Perhatikan untuk KPK, semua faktor prima yang ada dikalikan, faktor yang sama diambil pangkat tertinggi; untuk FPB hanya faktor prima yang sama dalam 45, 48 dan 72 dikalikan, diambil faktor prima dengan pangkat terendah.

Contoh:

Misalkan diketahui himpunan Boole

$$B = D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Cari:

1. $5 + 12$
KPK dari 5 dan 12 adalah 60
2. 5×12
FPB dari 5 dan 12 adalah 1
3. Elemen zero=?
 $a + 0 = a$
identitas

+	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
1	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
2	2	2	6	4	10	6	10	12	30	20	30	60
3	3	6	3	12	15	6	30	12	15	60	30	60
4	4	4	12	4	20	12	20	12	60	20	60	60
5	5	10	15	20	5	30	10	60	15	20	30	60
6	6	6	6	12	30	6	30	12	30	60	30	60
10	10	10	30	20	10	30	10	60	30	20	30	60
12	12	12	12	12	60	12	60	12	60	60	60	60
15	15	30	15	60	15	30	30	60	15	60	30	60
20	20	20	60	20	20	60	20	60	60	20	60	60
30	30	30	30	60	30	30	30	60	30	60	30	60
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60

Perhatikan, yang memenuhi rumus identitas $a + 0 = a$ adalah 1, jadi elemen zero dari $B = D_{60}$ adalah 1.

4. Elemen Unit = ?

$$a \times 1 = a$$

identitas

×	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	1	3	1	3	3	1	3	3
4	1	2	1	4	1	2	2	4	1	4	2	4
5	1	1	1	1	5	1	5	1	5	5	5	5
6	1	2	3	2	1	6	2	6	3	2	6	6
10	1	2	1	2	5	2	10	2	5	10	10	10
12	1	2	3	4	1	6	2	12	3	4	6	12
15	1	1	3	1	5	3	5	3	15	15	15	15
20	1	2	1	4	5	2	10	4	5	20	10	20
30	1	2	3	2	5	6	10	6	15	10	30	30
60	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60

Perhatikan, yang memenuhi rumus identitas $a \times 1 = a$ adalah 60, jadi elemen unit dari $B = D_{60}$ adalah 60.

5. $10' = ?$
 $a' + a = \text{unit,}$ komplemen
 $10' + 10 = 60$
 $\dots + 10 = 60,$ lihat tabel soal nomer 3
 $\left. \begin{array}{l} 12 + 10 = 60 \\ 60 + 10 = 60 \end{array} \right\}, \text{ jadi } 10' = 12, \text{ karena 12 faktor dari 60}$

7.4 MINIMAL DNF (DISJUNCTIVE NORMAL FORM)

Minimal dnf adalah ekspresi Boole yang ada dalam bentuk minimal, dimana suku-sukunya tidak ada satu didalam yang lain. Minimal dnf dapat dicari dengan 2 cara, yaitu:

- 1) Dengan teori include dan teori konsensus.
- 2) Dengan peta karnaugh.

7.4.1 Dengan Teori Include dan Konsensus

Sebelum mempelajari teori include dan konsensus ada baiknya kita kenal dulu beberapa istilah, yaitu:

- a) Fundamental product (perkalian dasar) adalah perkalian dua atau lebih variabel-variabel Boole yang tidak memuat variabel yang saling komplemen atau sama.

Contoh:

$ab, abc', a'bc', \dots$ disebut fundamental product
 $aba, a'ba, abb', \dots$ bukan fundamental product

- b) Ekspresi Boole (E)
 Adalah penjumlahan satu atau lebih fundamental product.

Contoh:

$$E = ab + ab'c' + abc'$$

Ekspresi Boole dalam bentuk dnf, jika suku-suku E tidak ada satu di dalam yang lain.

Contoh:

$$E_1 = ab + a'bc' + ab'c \quad , \quad \text{bentuk dnf}$$

$$E_2 = ab + abc \quad , \quad \text{bukan dnf karena ab di dalam abc}$$

Teori Include

Jika fundamental product p_1 , termasuk didalam fundamental product p_2 , maka $p_1 + p_2 = p_1$

Contoh:

$$ab + abc = ab$$

Konsensus

Jika fundamental product p_1 dan p_2 memiliki satu elemen saja yang saling komplemen, maka konsensus (Q) dari p_1 dan p_2 adalah perkalian elemen-elemen p_1 dan p_2 dimana elemen-elemen yang saling komplemen dihilangkan dan tidak ada pengulangan.

Contoh:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = abc' \\ P_2 = abcd \end{array} \right\} \text{ maka konsensus dari } P_1 \text{ dan } P_2 \text{ adalah } Q = abd$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = abc' \\ P_2 = a'bcd \end{array} \right\} \text{ tidak ada konsensus sebab ada 2 elemen yang saling komplemen}$$

Teori Konsensus

Jika Q konsensus dari P_1 dan P_2 maka

$$P_1 + P_2 + Q = P_1 + P_2$$

Contoh:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} P_1 &= abc' \\ P_2 &= abcd \end{aligned} \right\} Q = abd \\
 P_1 + P_2 + Q &= abc' + abcd + abd \\
 &= abc' + abcd + (c + c')abd \\
 &= abc' + abcd + abc'd + abcd \\
 &= \underbrace{abc' + abc'd}_{\text{include}} + \underbrace{abcd + abcd}_{\text{include}} \\
 &= abc' + abcd \\
 &= P_1 + P_2
 \end{aligned}$$

Ekspresi Boole minimal adalah ekspresi Boole (E) yang semua fundamental productnya sudah minimal dnf (tidak ada satu di dalam yang lain).

Contoh:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= a'b' && , \text{ minimal dnf} \\
 E_2 &= ab + ab'c + a'bc' && , \text{ belum minimal}
 \end{aligned}$$

E_2 dapat diminimalkan dengan teori konsensus sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \text{konsensus} \\
 E_2 &= \overbrace{ab + ab'c + a'bc'}^{\text{konsensus}} \\
 E_2 &= ab + \underbrace{ac + ab'c}_{\text{konsensus}} + \overbrace{a'bc' + bc'}^{\text{include}} \\
 E_2 &= ab + ac + bc' \quad \text{include}
 \end{aligned}$$

E_2 adalah ekspresi Boole minimal

Suku-suku dari ekspresi Boole minimal disebut prime implicant (p_i) dari ekspresi Boole (B) yang memenuhi sifat

$$E + P_i = E$$

dan tidak ada fundamental product lain yang termasuk P_i mempunyai sifat-sifat tersebut.

Contoh:

bc' adalah prime implicant dari

$$E_2 = ab + ab'c + a'bc'$$

$$\begin{aligned} E_2 + P_1 &= ab + ab'c + a'bc' + bc' \text{ , karena } bc' \text{ konsensus dari } ab \\ &= ab + ab'c + a'bc' \text{ dan } a'bc' \text{ maka } ab + a'bc' + bc' \\ &= E_2 \qquad \qquad \qquad = ab + a'bc' \end{aligned}$$

Jadi ekspresi Boole minimal sama dengan jumlah dari prime implicantnya.

7.4.2 Peta Karnaugh

Adalah peta dari ekspresi Boole yang dapat digunakan untuk mencari prime implicant dan ekspresi Boole minimal.

Peta untuk 2 variable

	x	x'		
y			y \ x	
y'				

		0	1
y \ x	0		
	1		

Peta untuk 3 variable

	xy	x'y	x'y'	xy'
z				
z'				

yz \ x	0	1
00		
01		
11		
10		

Peta untuk 4 variable

	xy	x'y	x'y'	xy'
za				
z'a				
z'a'				
za'				

za \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Contoh:

Cari ekspresi Boole minimal dari:

$$E_1 = abcd + a'bcd + a'b'cd + ab'cd + abcd' + a'b'cd' + ab'cd'$$

Jawab: $E_1 = c$ (lihat peta)

$$E_2 = abcd + ab'cd + abcd' + ab'cd'$$

Jawab: $E_2 = ac$ (lihat peta)

$$E_3 = xyz'a + xyz'a' + x'y'z'a' + xy'z'a + xy'z'a'$$

Jawab: $E_3 = xz' + y'z'$ (lihat peta)

Jawab:

	ab	a'b	a'b'	ab'
cd				
c'd				
c'd'				
cd'				

$$E_1 = c$$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$$E_1 = c$$

	ab	a'b	a'b'	ab'
cd	√			√
c'd				
c'd'				
cd'	√			√

$$E_2 = ac$$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11			√	√
10			√	√

$$E_2 = ac$$

	xy	x'y	x'y'	xy'
zd				
z'a	√		√	√
z'a'	√		√	√
za'				

$$E_3 = xz' + y'z'$$

xy \ za	00	01	11	10
00	√		√	√
01	√		√	√
11				
10				

$$E_3 = xz' + y'z'$$

SOAL-SOAL

1. Gambarkanlah jaringan switching yang dinyatakan dengan polinomial Boole di bawah, kemudian sederhanakan dan gambarkan bentuk sederhananya, kapan jaringan tersebut on atau off.
 - a) $(A \wedge B) \vee (A \wedge B') \vee (A'B')$
 - b) $(A \wedge (C \vee B') \vee (B \wedge C'))'$
 - c) $((A \vee B) \wedge C) \vee A' \wedge B$
 - d) $(A \wedge B) \vee (A' \wedge (B' \vee A \vee B))$
 - e) $(A \vee B) \wedge C \wedge (A \vee B \vee C')$
 - f) $(A \wedge B) \vee C \vee (A' \vee C')$
 - g) $(B \wedge (A \vee C)) \vee (A \vee C)$
 - h) $(A \wedge (B \vee A) \wedge (A \wedge B'))' \wedge (A' \vee B)'$
2. Gambarkanlah gebang logika yang dinyatakan dengan ekspresi Boole di bawah, kemudian sederhanakan dan gambarkan bentuk sederhananya.
 - a) $((A' + A) \times (B \times B'))' = E$
 - b) $((A \times B') + ((A \times B) + B) \times B) + A = E$
 - c) $((A + B) \times C)' + (((A + B) \times C) \times D) = E$
 - d) $(A' \times A) + B + (B + B) = E$
 - e) $(A' \times A') + (B' \times A) = E$
 - f) $((A \times B) + C)' \times D \times (((A \times B) + C) + D) = E$
 - g) $ABC + AB'(A'C')' = E$
 - h) $A'B'C' + A'BC' + AB'C' + ABC' = E$
 - i) $(A+B+C)(A+B+C')(A'+B+C')(A'+B+C'')(A'+B'+C') = E$
 - j) $A'BC' + (A+B')C = E$
 - k) $[BC \{(A' + AB)' + (ABC)'\}]'$

3. Rancanglah sebuah jaringan logika penjumlah yang mempunyai 3 inputan dan 2 outputan, yaitu x, y, z sebagai input dan c, s sebagai output, dimana $c = 1$ bila 2 atau 3 inputnya sama dengan 1 serta $s = 1$ bila hanya 1 atau ketiga inputnya sama dengan 1 .
4. Bila diketahui $B = D_{70}$, carilah:
 - a) elemen zero
 - b) elemen unit
 - c) $10 + (35 \times 70)$
 - d) $10'$
5. Bila diketahui $B = D_{90}$, carilah:
 - a) elemen zero
 - b) elemen unit
 - c) $15 \times (30 + 18)$
 - d) $30'$
6. Cari prime implicant dari ekspresi Boole dibawah:

$$E_1 = a'b'c'd' + ab'c'd' + a'bc'd + a'b'cd + a'bcd + abcd + a'b'cd' + abcd' + ab'cd'$$

$$E_2 = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + abc'd + ab'c'd + ab'cd + a'bcd'$$

$$E_3 = a'b'c'd' + a'bc'd' + abc'd' + ab'c'd' + a'b'c'd + abc'd + abcd + ab'cd'$$

$$E_4 = a'bc'd + abc'd + a'b'cd + a'bcd + abcd + ab'cd + a'b'cd' + abcd' + ab'cd'$$

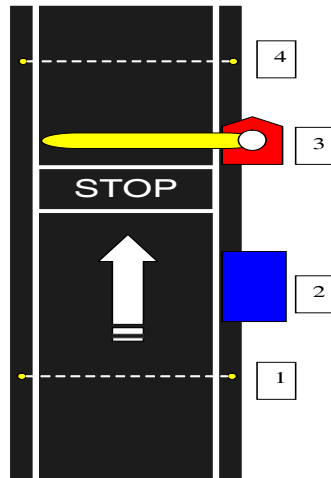
$$E_5 = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + abc'd + a'b'cd + abcd + ab'cd + abcd' + ab'cd'$$

7. Rancang sebuah jaringan logika pengurang yang mempunyai 3 inputan x, y, dan z dan 2 keluaran b dan d. b=1 bila ketiga inputnya sama dengan 1 atau z=1 atau y=1 atau z=y=1. d=1 bila ketiga inputnya atau satu inputnya sama dengan 1.
8. Rancang sebuah jaringan logika pembanding 1 bit yang mempunyai 2 inputan A dan B dan 3 outputan yaitu x bila $A < B$, y bila $A = B$ dan z bila $A > B$.
9. Kembangkan rancangan jaringan logika pada soal no. 8 untuk pembanding 2 bit.
10. Seorang mahasiswa ingin merancang sebuah jaringan logika yang mampu merubah bilangan biner tak berbobot menjadi bilangan biner berbobot (dekoder) seperti :

Desimal	Biner tak berbobot	Biner berbobot	
25	11001	$\frac{0010}{2}$	$\frac{0101}{5}$
43	101011	$\frac{0100}{4}$	$\frac{0011}{3}$

bila mahasiswa tersebut membatasi hanya untuk bilangan biner 4 bit atau maksimum 1111 selesaikan pekerjaan mahasiswa tersebut.

11.



Gambar diatas adalah gerbang TOL otomatis dengan 4 alat yaitu

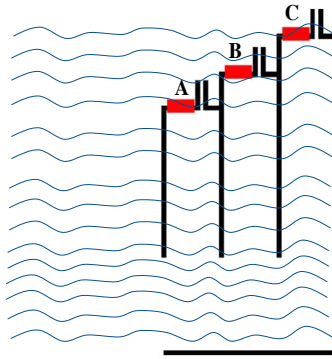
1. Sensor masuk mobil,
2. Box kartu yang memiliki sensor,
3. Mesin portal,
4. Sensor keluar mobil.

Berikut mekanismenya;

1. Jika alat sensor masuk = 1 , Sensor Box = 0 dan sensor keluar = 0, maka mesin box mengeluarkan kartu tanda masuk TOL
2. Jika pengemudi telah mengambil kartu pada box kemudian sensor box aktif yaitu = 1 , sensor masuk = 0, sensor keluar = 0, maka mesin portal terbuka.
3. Jika mobil telah melewati sensor keluar sehingga sensor masuk = 0 , sensor box = 0 dan sensor keluar = 1 , maka mesin portal tertutup kembali.

Rancanglah rangkaian logika dengan 3 inputan X untuk sensor masuk, Y untuk sensor box, Z untuk sensor keluar, disertai dengan tabel kebenaran.

12.



Gambar di atas adalah alat peringatan dini bahaya banjir, Pada alat tersebut terdapat 3 buah sensor yang berfungsi mengecek ketinggian air. berikut mekanisme kerja alat tersebut;

1. Saat keadaan normal ketiga sensor = 0.
2. Siaga 3 saat air menyentuh sensor A, maka $A = 1$, $B=0$ dan $C =0$.
3. Siaga 2 saat air menyentuh sensor B, maka $A=1$, $B=1$, dan $C =0$.
4. Siaga 1 saat air menyentuh sensor C, maka ketiga sensor = 1.

buatlah rangkaian logika untuk alat tersebut yang dapat memberikan peringatan dini pada saat siaga1, siaga2 dan siaga3.

13. Integrasikanlah soal nomor 3 dan soal no 7 sehingga menjadi sebuah jaringan logika dengan 3 inputan dan 4 outputan.

-oo0oo-