Ejercicios de Probabilidad Conjunta

Estudiante: Nicolás Rozo Cárdenas 20232020087
Curso: Probabilidad y Estadística

24 de octubre de 2025

Ejercicio 1: Selección de Estudiantes

Enunciado

Se selecciona al azar 2 estudiantes de un salón que contiene 3 estudiantes de sistemas, 2 de electrónica y 3 de industrial. Si X es el número de estudiantes de sistemas y Y es el número de estudiantes de electrónica, hallar:

1. La función de probabilidad conjunta
2. $P(x, y) \in R$ tal que $R = \{(x, y)/x + y \leq 1\}$

Solución

1. Función de Probabilidad Conjunta

El espacio muestral total es:

$$\binom{8}{2} = 28$$

La función de probabilidad conjunta es:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{3}{x} \cdot \binom{2}{y} \cdot \binom{3}{2-x-y}}{28}$$

Los valores posibles y sus probabilidades son:

x	y	$P(X = x, Y = y)$
0	0	$\frac{3}{28}$
0	1	$\frac{6}{28}$
0	2	$\frac{1}{28}$
1	0	$\frac{9}{28}$
1	1	$\frac{6}{28}$
2	0	$\frac{3}{28}$

2. Probabilidad $P((x,y) \in R)$

Para $R = \{(x,y)/x+y \leq 1\}$, los pares que cumplen son: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

$$P(R) = P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{9}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

$$\boxed{\frac{9}{14}}$$

Ejercicio 2: Función de Densidad Conjunta

Enunciado

Una fábrica de dulces distribuye cajas de chocolate, cuya función de densidad es dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Verificar que $f(x,y)$ es una función de densidad conjunta
2. Calcular $P((x,y) \in R)$ tal que $R = \{(x,y) : 0 < x \leq y \leq \frac{1}{2}\}$

Solución

1. Verificación de función de densidad

Para que sea función de densidad debe cumplir:

- $f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y)
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$

Primera condición: Como $2x+3y \geq 0$ en $[0,1] \times [0,1]$, entonces $f(x,y) \geq 0$.
Segunda condición:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\, dx\, dy = 1$$

Resolviendo:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\, dx\, dy = \frac{2}{5} \int_0^1 \left[x^2 + 3xy\right]_0^1 dy$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 (1+3y)\, dy = \frac{2}{5} \left[y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$$

Por lo tanto, $f(x,y)$ es una función de densidad válida.

2. Cálculo de $P((x, y) \in R)$

Para $R = \{(x, y) : 0 < x \leq y \leq \frac{1}{2}\}$:

$$P(R) = \int_0^{1/2} \int_0^y \frac{2}{5}(2x + 3y)\, dx\, dy$$

Resolviendo la integral interior:

$$\int_0^y \frac{2}{5}(2x + 3y)\, dx = \frac{2}{5}\left[x^2 + 3xy\right]_0^y = \frac{2}{5}(y^2 + 3y^2) = \frac{8}{5}y^2$$

Resolviendo la integral exterior:

$$\int_0^{1/2} \frac{8}{5}y^2\, dy = \frac{8}{5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{24} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

$$\boxed{\frac{1}{15}}$$

Ejercicio 3: Función de Probabilidad Discreta

Enunciado

Dada la función de probabilidad $f(x, y) = \frac{x+y}{36}$ para $x = 1, 2, 3$ y $y = 1, 2, 3$, calcular:

1. $P(x + y = 4)$
2. $P(x > y)$
3. $P(x \geq 2, y \leq 1)$
4. $P(x \leq 2, y = 1)$

Solución

La función de probabilidad conjunta es:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{36} \quad \text{para } x, y = 1, 2, 3$$

1. $P(x + y = 4)$

Los pares que cumplen $x + y = 4$ son: $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$

$$P(1, 3) = \frac{1 + 3}{36} = \frac{4}{36}, \quad P(2, 2) = \frac{2 + 2}{36} = \frac{4}{36}, \quad P(3, 1) = \frac{3 + 1}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(x + y = 4) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

2. $P(x > y)$

Los pares que cumplen $x > y$ son: $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$

$$P(2,1) = \frac{3}{36}, \quad P(3,1) = \frac{4}{36}, \quad P(3,2) = \frac{5}{36}$$

$$P(x > y) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

3. $P(x \geq 2, y \leq 1)$

Los pares que cumplen son: $(2, 1)$, $(3, 1)$

$$P(2,1) = \frac{3}{36}, \quad P(3,1) = \frac{4}{36}$$

$$P(x \geq 2, y \leq 1) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$$

$$\boxed{\frac{7}{36}}$$

4. $P(x \leq 2, y = 1)$

Los pares que cumplen son: $(1, 1)$, $(2, 1)$

$$P(1,1) = \frac{2}{36}, \quad P(2,1) = \frac{3}{36}$$

$$P(x \leq 2, y = 1) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$$

$$\boxed{\frac{5}{36}}$$