



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO INGENIERÍA MECÁNICA



**ESTIMACIÓN DE TRAYECTORIA Y ACTITUD PARA UN COHETE
CHAFF**

POR

Jorge Alejandro Orozco García

Memoria de Título presentada a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Concepción para
optar al título profesional de Ingeniero Civil Aeroespacial

Profesor Guía:
Dr.(C) Alejandro Ignacio López Telgie
Ingeniero Supervisor
Dr.(C) Elías Alberto Obreque Sepúlveda

Septiembre 2022
Concepción (Chile)

© 2021 Jorge Alejandro Orozco García

© 2021 Jorge Alejandro Orozco García

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Agradecimientos

Porque no te bastó con crearme...me salvaste. Pagaste el precio en la cruz, por este pecador.

Gracias por enviar a tu hijo Jesucristo a morir por mí.

Gracias por cuidarme y formarme desde mi nacimiento mediante papá y mamá.

Gracias por mi hermano.

Gracias por mis defectos y tu perdón diario.

Gracias por interrumpir mis planes.

Lo resumo en esto: Todo lo bueno que hay en mí, si hay algo bueno en mí, no es por mí, es por Ti, Dios, el gran Yo Soy.

...por cuanto todos pecaron, y están destituidos de la gloria de Dios, siendo justificados gratuitamente por su gracia, mediante la redención que es en Cristo Jesús, a quien Dios puso como propiciación por medio de la fe en su sangre, para manifestar su justicia, a causa de haber pasado por alto, en su paciencia, los pecados pasados...

Romanos 3:23-25

Nunca se apartará de tu boca este libro de la ley, sino que de día y de noche meditarás en él, para que guardes y hagas conforme a todo lo que en él está escrito; porque entonces harás prosperar tu camino, y todo te saldrá bien. Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente; no temas ni desmayes, porque Jehová tu Dios estará contigo en dondequiera que vayas.

Josué 1:8-9

“Cuando el árbol de roble cae, todo el bosque retumba con él, pero cientos de bellotas son sembradas por una brisa inadvertida” – Thomas Carlyle

“Te enseñé mis planes y te reíste...lloré y me enfadé contigo...me tuviste la paciencia suficiente para traerme hasta aquí y hacerme ver...hoy Tú y yo nos reímos juntos” – Anónimo

“Tú me das la oportunidad de esforzarme, pero el resultado es tuyo, al igual que la honra y la gloria” – Anónimo

Te dedico esta Memoria de Título a Ti, mi Cristo, mi Rey, porque estoy seguro, muy seguro, de que yo no me traje hasta aquí.

Resumen

En este trabajo se lleva a cabo la creación de un simulador computacional capaz de obtener la trayectoria y actitud de un cohete balístico del tipo *chaff*.

El proceso comienza con la revisión del trabajo anterior del autor (Orozco García, 2021) y otros autores cuyas investigaciones y obras sean sobre temas relacionados. El objetivo de esto es identificar los fenómenos y características relevantes durante el vuelo y el modelamiento físico y matemático. Al mismo tiempo, se investiga sobre métodos para la obtención de parámetros no disponibles (al comienzo del proyecto).

Una vez los parámetros faltantes son obtenidos mediante métodos seleccionados (y descritos en este documento), el autor provee una breve introducción a la Programación Orientada a Objetos (POO) y al lenguaje de programación utilizado (Python) para dar paso a una explicación detallada de cada componente del simulador (módulos) como también los modelos implementados (y su validación correspondiente).

Con el simulador creado y descrito, se realizan dos simulaciones: una que calcula solo la trayectoria y otra que calcula trayectoria y actitud. Se presentan los resultados de ambas simulaciones y se observan diferencias no despreciables para el alcance horizontal y la altitud máxima. La primera diferencia es cercana a los 1.000 metros mientras que la segunda se aproxima a los 200 metros. En el caso del tiempo de vuelo, la diferencia se acerca a los 10 segundos. En esta comparación, la simulación de trayectoria y actitud sobrepasa a la simulación de solo trayectoria en cada aspecto.

Luego, se comparan los resultados de trayectoria y actitud con los resultados presentados por Vallejos (Vallejos Osses, 2021), Mostafa y su equipo (Mostafa, Mahmoud, & Abdalla, 2009) y la información provista por la Armada de Chile y FAMA E.

Finalmente, se concluye que el simulador entrega resultados coherentes para la simulación de este tipo de vehículo en sus seis grados de libertad. Además, se destacan tres aspectos: los parámetros aerodinámicos del cohete, la importancia de los sistemas de referencia y coordenados, y las ecuaciones involucradas en la dinámica del vehículo (resaltando el uso de cuaterniones para la actitud)

Palabras clave: Trayectoria, Actitud, Simulador, Modelo, Módulo

Abstract

In this work, the creation of a computational simulator capable of obtaining trajectory and attitude of a chaff-type ballistic rocket is carried out.

The process begins by reviewing the author's previous project (Orozco García, 2021) and other author whose work and research can be related to the topic. The purpose of this is to identify relevant phenomena and characteristics during flight and their physical and mathematical modeling. At the same time, methods to obtain not disposable parameters (at the beginning) are researched.

Once the remaining parameters are obtained via selected methods (which are described in this document), the author briefly provides an introduction to Object Oriented Programming (OOP) and the used programming language (Python) to give way to a detailed explanation of every simulator component (modules) as well as the implemented model (and their corresponding validation).

With the simulator already created and described, two simulations are carried out: one that only calculated trajectory while the other calculated trajectory and attitude. Both simulations results are presented and non-negligible differences are observed for horizontal range and maximum altitude. The first is a difference of approximately 1.000 metres while the second one is close to 200 metres. In the case of flight time, the difference is close to 10 seconds. In this comparison, the simulation for trajectory and attitude surpasses the simulation for only trajectory in every aspect.

Then, the results of the simulation of trajectory and attitude are compared to the results presented by Vallejos (Vallejos Osses, 2021), Mostafa and his team (Mostafa, Mahmoud, & Abdalla, 2009) and the information provided by the Armada de Chile and FAMAE.

Finally, it is concluded that the simulator delivers coherent results for the simulation for this kind of vehicle in its six degrees of freedom. In addition, three aspects stand out: the rocket's aerodynamic parameters, the importance of reference and coordinate systems, and the equations involved in the vehicle dynamics (highlights to the use of quaternion for attitude)

Keywords: Trajectory, Attitude, Simulation, Model, Module

Tabla de Contenidos

CAPÍTULO 1: Introducción.....	1
1.1 Contexto y descripción del problema	1
1.2 Objetivos.....	2
1.3 Metodología.....	2
CAPÍTULO 2: Sistema Z y propuesta de arquitectura de simulación	4
2.1 Sistema Z.....	4
2.2 Propuesta de arquitectura de simulación de trayectoria y actitud	6
2.3 Parámetros requeridos para simulación.....	9
CAPÍTULO 3: Estado del arte y supuestos de diseño	11
3.1 Estado del Arte	11
3.2 Condiciones de diseño del simulador	21
CAPÍTULO 4: Obtención de parámetros.....	23
4.1 Tensor de inercia y centro de masa	23
4.2 Coeficientes aerodinámicos y centro de presiones	24
CAPÍTULO 5: Lenguaje de programación	29
5.1 Función	29
5.2 Clases y objetos	30
5.3 Programas y bibliotecas.....	31
CAPÍTULO 6: Desarrollo del simulador	33
6.1 Cambios sobre la arquitectura de simulación anterior.....	33
6.2 Módulo de herramientas matemáticas: <i>MatTools</i>	37
6.3 Módulo de conversión entre sistemas: <i>GeoTools</i>	38
6.4 Módulo de cálculo de fecha y hora: <i>Clock</i>	40

6.5 Módulo de rotación planetaria: <i>Planet</i>	40
6.6 Módulo de parámetros atmosféricos: <i>Atmosphere</i>	41
6.7 Módulo de aceleración gravitacional: <i>Gravitational</i>	42
6.8 Módulo de motor del cohete: <i>Engine</i>	43
6.9 Módulo de parámetros aerodinámicos: <i>Aerodynamics</i>	44
6.10 Módulo del cohete: <i>Rocket</i>	45
6.11 Módulo principal de simulación	50
6.12 Archivos de simulación	52
CAPÍTULO 7: Simulación y resultados	53
7.1 Datos de simulación	53
7.2 Resultados de simulación sin rotación	54
7.3 Resultado de simulación con rotación	57
7.4 Comparación de resultados	60
CAPÍTULO 8: Discusión de resultados	65
8.1 Resultados de trayectoria	65
8.2 Resultados de actitud	66
CAPÍTULO 9: Conclusiones y propuestas de mejora a futuro	68
9.1 Conclusiones	68
9.2 Propuestas de trabajo a futuro	69
Bibliografía	71
Anexo A: Carta Gantt de proyecto de Memoria de Título	74
Anexo B: Coeficientes aerodinámicos	75
Anexo C: Geometría utilizada en método de Barrowman	77
Anexo D: Coeficientes de arrastre según número de Mach	78
Anexo E: Nutación, precesión y movimiento polar	79
Anexo F: Geometrías en Autodesk Inventor	80

Anexo G: Modelos matemáticos del módulo <i>GeoTools</i>	81
Anexo H: Validación modelo utilizado en <i>Atmosphere</i>	88
Anexo I: Diagrama de cuerpo libre (DCL)	89
Anexo J: Resultados de Vallejos y el autor	90

Lista de Tablas

Tabla 2.1. Propiedades del cohete Sistema Z.....	6
Tabla 2.2 Parámetros requeridos para la simulación conocidos	9
Tabla 2.3 Parámetros requeridos para la simulación desconocidos	10
Tabla 3.1 Comparación de diferentes algoritmos para obtención de coordenadas geodésicas	14
Tabla 4.1 Masa y posición de componentes del Sistema Z.....	23
Tabla 4.2 Centro de masa y tensor de inercia antes y después de la combustión	24
Tabla 4.3 Medidas del cohete para el coeficiente de sustentación.....	25
Tabla 6.1 Funciones del módulo MatTools.....	37
Tabla 6.2 Descripción de las funciones del módulo GeoTools.....	39
Tabla 6.3 Métodos del objeto Clock.	40
Tabla 6.4 Métodos de la clase Planet	40
Tabla 6.5 Métodos y usos de la clase Atmosphere.	41
Tabla 6.6 Funciones del módulo Gravitational	42
Tabla 6.7 Métodos de la clase Rocket.....	46
Tabla 6.8 Archivos del simulador	52
Tabla 7.1 Lista de parámetros iniciales de simulación.....	53
Tabla 7.2 Diferencia entre vuelo sin rotación y con rotación	61
Tabla 8.1 Comparación de parámetros de trayectoria.....	65
Tabla 12.1 Coeficientes de arrastre obtenidos por Vallejos.....	78
Tabla 15.1 Comparación de estación GPS McMurdo y método utilizado por el Autor	85
Tabla 15.2 Comparación método de Beaulne y Sikaneta y el utilizado por el Autor.	86
Tabla 15.3 Comparación método de Beaulne y Sikaneta y el utilizado por el Autor para velocidad	87
Tabla 16.1 Propiedades atmosféricas dispuestas por Gray y Autor.....	88

Lista de Figuras

Figura 1.1. Secuencia de actividades del proyecto.....	3
Figura 2.1. Trayectoria del Sistema Z en dos dimensiones.....	4
Figura 3.1 Sistema Earth Centered Inertial	12
Figura 3.2 Diferencia entre sistemas ECI y ECEF.....	12
Figura 3.3 Sistema East-North-Up	13
Figura 3.4 Definición del ángulo de ataque	15
Figura 3.5 Coeficiente de Arrastre vs Número de Mach obtenidos por Vallejos	17
Figura 3.6 Coeficiente de fuerza axial C_a y normal C_n vs altitud y ángulos de ataque (aoa).	18
Figura 3.7 Variación de la aceleración gravitacional relativa según altitud	19
Figura 4.1 Convención de ángulo de ataque α positivo y negativo	28
Figura 5.1 Ejemplo de "Suma" como función.....	29
Figura 5.2 Ejemplo de uso de clases y objetos.....	31
Figura 6.1 Arquitectura de simulación anterior propuesta.....	33
Figura 6.2 Operación del modelo Atmósfera de la arquitectura anterior.....	34
Figura 6.3 Nueva arquitectura del simulador para trayectoria y actitud	36
Figura 6.4 Conversión entre sistemas mediante GeoTools.....	38
Figura 6.5 Secuencia de simulación.....	51
Figura 7.1 Altitud vs tiempo. Vuelo sin rotación.....	54
Figura 7.2 Velocidades en bodyframe vs tiempo. Vuelo sin rotación	55
Figura 7.3 Ángulo de ataque vs tiempo. Vuelo sin rotación	56
Figura 7.4 Elevación (pitch) vs tiempo. Vuelo sin rotación.....	56
Figura 7.5 Altitud vs tiempo. Vuelo con rotación.....	57
Figura 7.6 Velocidades en bodyframe vs tiempo. Vuelo con rotación	58
Figura 7.7 Ángulo de ataque vs tiempo. Vuelo con rotación.....	59
Figura 7.8 Elevación (pitch) vs tiempo. Vuelo con rotación	59
Figura 7.9 Comparación de altitud vs tiempo	60
Figura 7.10 Comparación de altitud vs alcance horizontal	61
Figura 7.11 Trayectoria tridimensional en North-East-Up del vuelo con rotación. Caso 1.....	62
Figura 7.12 Trayectoria tridimensional en North-East-Up del vuelo con rotación. Caso 2.....	63

Figura 7.13 Trayectoria tridimensional en North-East-Up del vuelo con rotación. Caso 3.....	64
Figura 8.1 Variación del ángulo de ataque según Mostafa y su equipo.....	66
Figura 8.2 Variación del ángulo de ataque según autor	66
Figura 8.3 Variación del ángulo de pitch según Mostafa y su equipo	67
Figura 8.4 Variación del ángulo de pitch según autor.....	67
Figura 9.1 Carta Gantt de proyecto de Memoria de Título	74
Figura 10.1 Fuerzas de arrastre y sustentación	75
Figura 10.2 Fuerzas axial y normal, de arrastre y sustentación	75
Figura 11.1 Geometría externa para método de Barrowman	77
Figura 13.1 Errores calculados al no considerar nutación, precesión y movimiento polar.....	79
Figura 14.1 Modelado del Sistema Z antes de la combustión.....	80
Figura 14.2 Modelado del Sistema Z después de la combustión	80
Figura 15.1 Secuencia de rotación Yaw-Pitch-Roll y bodyframe.....	81
Figura 17.1 Diagrama de cuerpo libre del cohete	89
Figura 18.1 Altitud vs alcance horizontal según Vallejos.....	90
Figura 18.2 Altitud vs alcance horizontal según autor.....	90
Figura 18.3 Altitud vs tiempo según Vallejos.....	90
Figura 18.4 Altitud vs tiempo según autor.....	90
Figura 18.5 Velocidad vs tiempo según Vallejos.....	91
Figura 18.6 Velocidad vs tiempo según autor.....	91
Figura 18.7 Fuerza de arrastre vs tiempo según Vallejos	91
Figura 18.8 Fuerza de arrastre vs tiempo según autor.....	91

Glosario

CSV	: <i>Comma Separated Values</i>
DCM	: <i>Direction Cosine Matrix</i>
DOF	: <i>Degrees Of Freedom</i>
ECEF	: <i>Earth Centered-Earth Fixed</i>
ECI	: <i>Earth Centered Inertial</i>
ENU	: <i>East-North-Up</i>
GPS	: <i>Global Positioning System</i>
G&C	: <i>Guidance and Control</i>
GMST	: <i>Greenwich Mean Sidereal Time</i>
LEO	: <i>Low Earth Orbit</i>
NASA	: <i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PIA	: Proyecto de Ingeniería Aeroespacial
WGS84	: <i>World Geodetic System 1984</i>

Nomenclatura

Símbolo	...	Unidades
a	: Radio polar terrestre	$[m]$
b	: Radio ecuatorial terrestre	$[m]$
C_D	: Coeficiente de arrastre	$[-]$
C_N	: Coeficiente de fuerza normal	$[-]$
\mathbf{C}_M	: Vector de posición de centro de masa	$[m]$
\mathbf{C}_P	: Vector de posición de centro de presiones	$[m]$
e^2	: Primera excentricidad	$[-]$
e'^2	: Segunda excentricidad	$[-]$
\mathbf{F}	: Vector de fuerza	$[N]$
\mathbf{g}	: Vector de aceleración gravitacional	$[m/s^2]$
h	: Altitud	$[m]$
\mathbf{J}	: Vector de la diagonal del tensor de inercia	$[kg \times m^2]$

l	:	Largo	$[m]$
M	:	Número de mach	$[-]$
m	:	Masa	$[kg]$
q	:	Cuaternión	$[-]$
r	:	Vector de posición	$[m]$
T	:	Vector de torque	$[N \times m]$
t	:	Tiempo	$[s]$
V	:	Velocidad del aire	$[m/s]$
x	:	Alcance	$[m]$
X_{EST}	:	Vector Estado	$[-]$
\dot{X}_{EST}	:	Vector Dinámico	$[-]$
x_f, x_g	:	Factores de flujo a la salida de la tobera	$[-]$

Subíndices

0	:	Inicial
act	:	Activación
$b2i$:	<i>bodyframe</i> a inercial
$burn$:	Quemado
i	:	Inercial
$ecef$:	Sistema ECEF
eci	:	Sistema ECI
ext	:	Exterior
max	:	Máximo
$plat2b$:	Plataforma a <i>bodyframe</i>
$prop$:	Propelente
W	:	<i>Winds</i>

Letras griegas

α	: Ángulo de ataque	[°]
ϕ, θ, ψ	: Yaw-Pitch-Roll	[°]
θ	: Actitud	[°]
φ	: Latitud geodética	[°]
ρ_e	: Vector de dirección de flujo másico	[—]
λ	: Longitud	[°]

CAPÍTULO 1: Introducción

1.1 Contexto y descripción del problema

El presente trabajo forma parte del conjunto de proyectos asociados al convenio de cooperación entre la Universidad de Concepción y el Ministerio de Defensa Nacional. Para este caso, se trata de la creación de un simulador de trayectoria y actitud de cohetes del tipo *chaff* y similares.

La trayectoria de un cohete se define como el camino recorrido durante el movimiento traslacional del mismo respecto a un punto de origen. Mientras que la actitud, se trata del ángulo de giro del cohete en un momento dado respecto a un marco de referencia establecido. Así, la simulación de trayectoria y actitud es la técnica numérica que utiliza las ecuaciones del movimiento (en seis dimensiones para este caso) y modelos de conceptos reales para el cálculo de la posición y el ángulo del vehículo en cada punto en el tiempo.

Los modelos empleados en la simulación comprenden la relación lógica y matemática de conceptos de la realidad. En este caso, la interacción del cohete con el ambiente comprende las fuerzas aerodinámicas y perturbaciones, entre otros, que tengan un impacto sobre éste en su trayectoria y actitud. Estas interacciones se modelan matemáticamente e integran en la capacidad de simulación del cohete.

Disponer de la capacidad de simular la trayectoria y actitud para este tipo de vehículos es de importancia en el contexto de la ingeniería. Esto, debido a que cada lanzamiento real involucra costos de diversa índole, siendo los más notables los del tipo económico (Baldesi & Toso, 2021) y ambiental (Torres, 2020).

Finalmente, y adherido al punto anterior, no solo se puede reducir (parcial o totalmente) los costos antes mencionados, sino que también puede suponer un beneficio al permitir acelerar proyectos relacionados a la optimización y estudio de este tipo de vehículos y lanzamientos.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Determinar la trayectoria y actitud de un cohete *chaff* en el tiempo a través del desarrollo de un modelo de su dinámica e interacciones relevantes con el ambiente y propagación

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar características del cohete necesarias para la simulación de su trayectoria de vuelo
- Identificar características del cohete necesarias para la simulación de su actitud en vuelo
- Cuantificar interacciones relevantes del ambiente sobre el sistema cohete
- Simular la trayectoria y actitud para el caso específico de estudio
- Comparar los resultados del simulador creado con datos de lanzamiento provistos por la Armada de Chile y FAMA E
- Analizar, e interpretar, resultados y proponer mejoras para trabajos futuros

1.3 Metodología

Este trabajo comienza describiendo el caso específico de estudio nombrado como Sistema Z. Esto incluye tanto sus características físicas como también la misión que debe cumplir. A la vez, se revisa la arquitectura de simulación propuesta por el autor de este trabajo en su Proyecto de Ingeniería Aeroespacial (Orozco García, 2021). El fin es retomar tanto las ecuaciones involucradas, para trayectoria y actitud, como también los parámetros requeridos para cada simulación. Estos parámetros se ordenan y se identifica aquellos que se debe obtener mediante métodos propuestos por otros autores y por solicitud a la Armada de Chile.

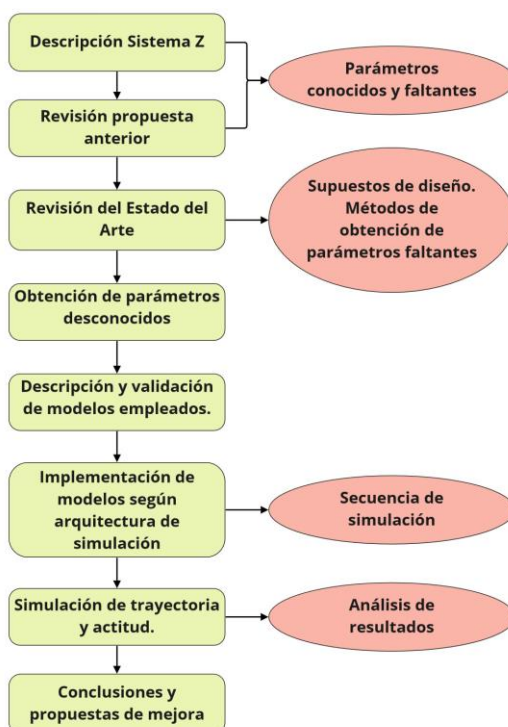
Se continua con la revisión del Estado del Arte para casos relevantes (cohetes balísticos de propelente sólido con altitud de vuelo máxima de 5.000 metros) con tal de identificar tanto las interacciones del cohete con el ambiente, como también los métodos de obtención de los parámetros desconocidos de

la etapa anterior. Esto resulta en los supuestos de diseño del simulador y en la selección, y empleo, de métodos de obtención de los parámetros mencionados.

Luego, se describen y validan los modelos a implementar comparando con resultados obtenidos por otros autores y se explica la secuencia de simulación propuesta, detallando cambios relevantes sobre la arquitectura de simulación propuesta en el proyecto anterior.

Posteriormente, disponiendo de la información necesaria y los modelos integrados en el simulador, se simula la trayectoria y actitud del cohete para analizar los resultados obtenidos y comparar con los datos provistos por otros autores y la Armada de Chile y FAMA E. El proyecto finaliza con las conclusiones extraídas de los análisis de los resultados obtenidos y con propuestas de mejora a futuro. La Figura 1.1 ilustra la metodología descrita¹

Figura 1.1. Secuencia de actividades del proyecto



Fuente: Autor

¹ La Carta Gantt que organiza las actividades implícitas de la metodología se encuentra en el Anexo A: Carta Gantt de proyecto de Memoria de Título

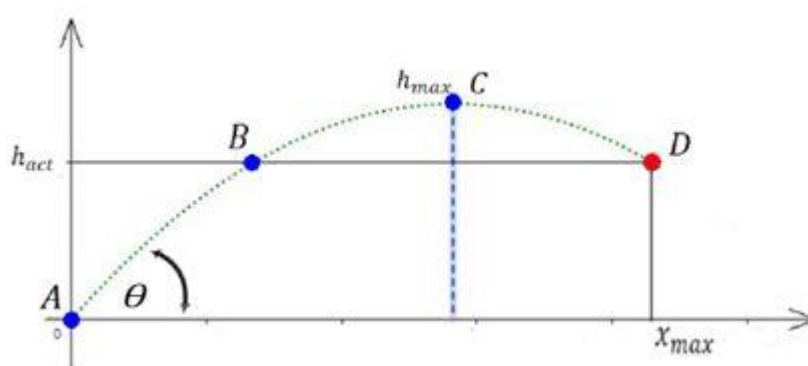
CAPÍTULO 2: Sistema Z y propuesta de arquitectura de simulación

En este capítulo, se describe el caso de estudio, Sistema Z, y se revisa el proyecto “Propuesta inicial de simulación de trayectoria y actitud de cohetes” (Orozco García, 2021). Luego se ordenan los parámetros necesarios para la simulación según su disponibilidad y necesidad de obtención.

2.1 Sistema Z

El Sistema Z es un cohete balístico del tipo *chaff*. Esto quiere decir que posee propulsión durante un tiempo breve al inicio del vuelo (*powered flight*) y continua sin ella con la velocidad proporcionada por el impulso obtenido (*ballistic flight*), describiendo una curva parabólica en su trayectoria. En su misión, debe portar una carga explosiva llamada *chaff* (de ahí el nombre), la cual detona al cumplir cierta condición con propósito antirradar para defensa. La Figura 2.1 muestra la trayectoria parabólica que describe este tipo de cohete.

Figura 2.1. Trayectoria del Sistema Z en dos dimensiones



Fuente: Autor

Durante el vuelo, en este caso, se distinguen dos fases relacionadas a la combustión del propelente:

- ***Powered flight***: esta fase comienza con la ignición del propelente y acaba al completarse la combustión de éste. Es en esta fase donde el vehículo es impulsado gracias al motor que produce la fuerza de empuje.
- ***Ballistic flight***: esta fase sigue a la fase anterior y es cuando el cohete se mantiene en vuelo gracias al impulso dado previamente y a las fuerzas aerodinámicas que puedan producirse durante el vuelo.

En la imagen anterior se pueden distinguir cuatro puntos principales por los cuales debe pasar el cohete:

- **Punto A**: Es el punto de lanzamiento (para un tiempo t_0) en el cual se dan las condiciones iniciales, como la posición y velocidad. En este punto, el ángulo inicial respecto al horizonte local, θ , es siempre 45° .
- **Punto B**: En este punto se activa la espoleta (que detona la carga útil) al llegar a h_{act} , mediante un *switch* barométrico. Esta altitud puede variar entre 900 y 1.100 metros, según se configure previamente.
- **Punto C**: Aquí se alcanza la altitud máxima, h_{max} , que se estima es de 5.000 metros.
- **Punto D**: Finalmente, al volver a pasar por h_{act} , la carga es detonada. Se espera que el alcance horizontal, x_{max} , sea de 10.000 metros.

Además, para cumplir con la misión, se deben cumplir dos condiciones durante la trayectoria:

- El cohete debe pasar dos veces por la misma altitud h_{act} para detonar la carga.
- Deben pasar 19 segundos entre los puntos B y D para permitir que la espoleta esté completamente lista para detonar.

Las primeras características físicas conocidas son listadas en la Tabla 2.1

Tabla 2.1. Propiedades del cohete Sistema Z

Variable	Símbolo	Valor	Unidad
Masa cohete inicial	$m(t_0)$	9,48	[kg]
Masa propelente inicial	$m_{prop}(t_0)$	3,33	[kg]
Tiempo de quemado	t_{burn}	3,15	[s]
Velocidad máxima	$\ \dot{\mathbf{r}}\ _{max}$	753	[m/s]
Mach máximo	M_{max}	2,2	[–]
Flujo másico promedio del propelente	\dot{m}_{burn}	1,057	[kg/s]
Calibre (diámetro exterior)	\emptyset_{ext}	88,9	[mm]
Largo	l	993	[mm]

Fuente: (Vallejos Osses, 2021)

2.2 Propuesta de arquitectura de simulación de trayectoria y actitud

En su Proyecto de Ingeniería Aeroespacial (Orozco García, 2021), el autor propone dos conjuntos de datos necesarios para realizar la simulación de trayectoria y actitud donde se incluyen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del cohete:

- Un vector estado $\mathbf{X}_{EST}(t)$ que reúna las variables de estado para un tiempo t
- Un vector llamado *vector dinámico* definido como $\dot{\mathbf{X}}_{EST}(t)$ que reúna las variables correspondientes a la tasa de cambio de las variables de estado en un tiempo t . Al propagar en el tiempo, se obtienen las variables de estado para un tiempo t' .

La relación entre ambos queda como:

$$\dot{\mathbf{X}}_{EST}(t) = \frac{d \mathbf{X}_{EST}(t)}{d t} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}_i(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_{b2i}(t) \\ \dot{m}_{burn}(t) \\ \dot{\mathbf{J}}(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{propagación}} \mathbf{X}_{EST}(t') = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i(t') \\ \dot{\mathbf{r}}_i(t') \\ \boldsymbol{\theta}_i(t') \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t') \\ \mathbf{q}_{b2i}(t') \\ m(t') \\ \mathbf{J}(t') \end{pmatrix} \quad (1)$$

En la Ecuación 1, el subíndice ***b*** hace referencia al sistema de referencia adjunto y fijo al cuerpo compartiendo todos sus movimientos conocidos como *bodyframe*. En el caso del subíndice ***i***, éste indica un sistema de referencial inercial en el cual se cumplen las leyes del movimiento de la mecánica newtoniana. Por último, el subíndice ***b2i*** indica la conversión desde el *bodyframe* al sistema de referencia inercial². Los demás elementos se definen como:

- $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i$: Vectores de posición, velocidad y aceleración lineal en un sistema inercial
- $\boldsymbol{\theta}_i, \dot{\boldsymbol{\theta}}_i, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i$: Vectores de actitud, velocidad y aceleración rotacional en un sistema inercial
- $\mathbf{q}_{b2i}, \dot{\mathbf{q}}_{b2i}$: Cuaternión de rotación, y su derivada, entre el *bodyframe* y el sistema inercial
- m, \dot{m}_{burn} : Masa del cohete y su tasa de quemado o flujo másico de propelente
- $\mathbf{J}, \dot{\mathbf{J}}$: Vector que contiene las componentes del tensor de inercia del cohete, en el *bodyframe*, y su tasa de cambio

² Se entiende, por lo tanto, que ***i2b*** indica la conversión inversa, es decir, desde el sistema de referencia inercial al *bodyframe*

Con esto en cuenta, $\mathbf{X}_{EST}(t_0)$ contiene las variables de estado iniciales conocidas y definidas como como:

$\mathbf{r}_i(t_0), \dot{\mathbf{r}}_i(t_0)$: Vectores de posición y velocidad iniciales dadas por la misión llevada.

$\boldsymbol{\theta}_i(t_0), \dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$: Vectores de actitud y velocidad rotacional iniciales dadas por la misión.

$\mathbf{q}_{b2i}(t_0)$: Cuaternión de rotación inicial dependiente de $\boldsymbol{\theta}_i(t_0)$.

$m(t_0)$: Masa del cohete inicial antes del lanzamiento.

$\mathbf{J}(t_0)$: Vector que contiene las componentes del tensor de inercia del cohete inicial antes del lanzamiento.

Finalmente, para la construcción del primer *vector dinámico*, $\dot{\mathbf{X}}_{EST}(t_0)$, las variables se definen como:

$\ddot{\mathbf{r}}_i(t_0), \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$: Vectores de aceleración (lineal y rotacional)³

$\dot{\mathbf{q}}_{b2i}(t_0)$: Derivada del cuaternión. Depende de $\mathbf{q}_{b2i}(t_0)$ y $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$.

$\dot{m}_{burn}(t)$: Tasa de quemado (o flujo másico de propelente)⁴.

$\dot{\mathbf{J}}(t_0)$: Vector que contiene la tasa de cambio de los componentes del tensor de inercia del cohete⁵.

³ Obtenidos mediante la Segunda Ley de Newton. Aquí tienen influencia las condiciones ambientales durante la trayectoria que definen las fuerzas y perturbaciones involucradas.

⁴ Se obtiene de la curva o tabla de empuje propias del cohete. Es un parámetro propio de la operación del vehículo.

⁵ Este vector depende de $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_i(t)$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$, $\mathbf{J}(t_0)$ y $\dot{m}_{burn}(t)$ en caso de necesitarlo para posterior propagación (Quadrelli, Cameron , Balaram, Baranwal, & Bruno, 2014)

2.3 Parámetros requeridos para simulación

En esta sección se ordena la información necesaria para realizar la simulación. Esto resulta de una comparación entre lo visto en las secciones 2.2 y 2.3 como también de la información necesaria en el cálculo de las fuerzas y torques involucrados en las ecuaciones del movimiento. La Tabla 2.2 enlista los parámetros previamente conocidos

Tabla 2.2 Parámetros requeridos para la simulación conocidos

Parámetro	Símbolo	Observaciones
Posición inicial	$\mathbf{r}_i(t_0)$	Dados por la misión
Velocidad inicial	$\dot{\mathbf{r}}_i(t_0)$	Dados por la misión
Actitud inicial	$\boldsymbol{\theta}_i(t_0)$	Dados por la misión
Velocidad rotacional inicial	$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$	Dados por la misión
Cuaternión de rotación entre <i>bodyframe</i> y sistema inercial	$\mathbf{q}_{b2i}(t_0)$	Depende solo de $\boldsymbol{\theta}_i(t_0)$
Masa inicial del cohete	$m(t_0)$	Dados por la misión
Derivada del cuaternión de rotación entre <i>bodyframe</i> y sistema inercial	$\dot{\mathbf{q}}_{b2i}(t_0)$	Depende solo de $\boldsymbol{\theta}_i(t_0)$ y $\mathbf{q}_{b2i}(t_0)$
Flujo másico inicial de la combustión del propelente	$\dot{m}_{burn}(t_0)$	Debe establecerse si se considera el empuje promedio o se busca una tabla que detalle la curva de empuje

Fuente: Autor

De la misma manera, la Tabla 2.3 lista los que deben ser obtenidos debido a no disponer de ellos previamente

Tabla 2.3 Parámetros requeridos para la simulación desconocidos

Parámetro	Símbolo	Observaciones
Tensor de inercia inicial del cohete	$J(t_0)$	Es necesario obtener mediciones y buscar un método de cálculo o estimación
Aceleración inicial	$\ddot{\mathbf{r}}_i(t_0)$	Es necesario considerar la interacción del cohete con el ambiente y las perturbaciones relevantes hasta la altitud que se espera alcanzar. Su valor se obtiene en cada ciclo
Aceleración rotacional inicial	$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$	
Tasa de cambio inicial del tensor de inercial	$\dot{J}(t_0)$	Depende de $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$, $J(t_0)$, $\dot{m}_{burn}(t_0)$ y $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_i(t_0)$. Debe definirse y seleccionar un método de obtención.
Centro de Masa	\mathbf{C}_M	Promedio de la masa de todas las partes del cuerpo, ponderada por sus distancias a un punto de referencia. Si se aplica una fuerza externa que pase por este punto, no se producen momentos. Debe definirse un método de obtención.
Centro de Presiones	\mathbf{C}_P	Es el punto geométrico en el cual se evalúan todas las fuerzas producidas por la distribución de presiones sin generar momentos sobre este mismo punto. Debe definirse un método de obtención.
Coeficientes Aerodinámicos	C_D y C_L	Valores adimensionales que indican el efecto de las fuerzas de arrastre y sustentación sobre un cuerpo. Debe definirse un método de obtención.

Fuente: Autor

CAPÍTULO 3: Estado del arte y supuestos de diseño

En este capítulo se hace un resumen de trabajos previos relacionados a cohetes balísticos de características similares al caso específico (detallado en el Capítulo 2). Esto, con tal de identificar los elementos de mayor relevancia en la trayectoria y actitud para, así, finalizar con las condiciones de diseño del simulador y consideraciones a tener en cuenta.

3.1 Estado del Arte

3.1.1 “Dynamics of Atmospheric Re-Entry” (Regan & Anandakrishnan, 1993)

En su libro, los autores explican detalladamente los conceptos matemáticos relacionados a diferentes aspectos de la dinámica de un cuerpo entrante (o reentrante, en este caso) a la atmósfera terrestre, con tal de ser capaces de estimar la trayectoria y actitud de dicho cuerpo hasta el punto de impacto en tierra. De aquí destacan tres aspectos fundamentales para el caso específico de estudio:

- Importancia de los diferentes modelos atmosféricos a utilizar. Destacan los modelos de Atmósfera Estandar de 1962 y 1976. Siendo el último aplicable hasta los 500.000 metros de manera estable. Este modelo es utilizado por diferentes autores como Vallado (Vallado & McClain, 2013), Fleeman (Fleeman, 2001) y da Silveira (da Silveira & Carrara, 2015)
- La diferencia entre los distintos sistemas de referencia y coordenados existentes. Resaltan los sistemas de referencia geocéntricos (sistemas de coordenadas cartesianos, o rectangulares, con origen en el centro de la Tierra si se considera ésta como una esfera) y los sistemas de referencia geodésicos (sistema de coordenadas esférico que considera la Tierra como un elipsoide de revolución con coordenadas sobre su superficie).
- La necesidad de evaluar las fuerzas externas y momentos producidos durante la trayectoria. Éstos deben ser evaluados en un sistema de referencia inercial en el cual la mecánica newtoniana sea aplicable. A esto se suma la variación de la aceleración gravitacional debido a

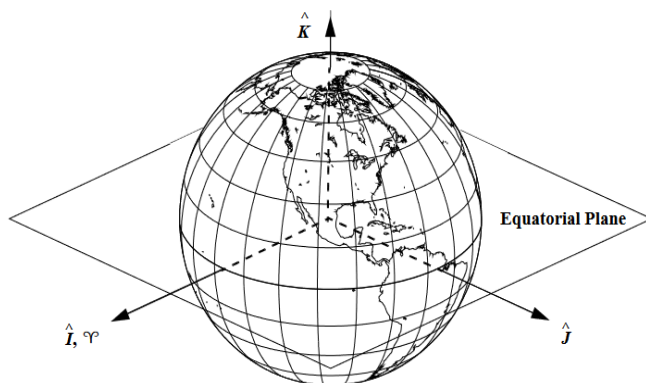
la forma no esférica de la Tierra y el efecto de la distancia entre el centro de ésta y el centro de masa del vehículo.

3.1.2 “Fundamentals of Astrodynamics and Applications” (Vallado & McClain, 2013)

En su obra, los autores presentan diferentes aspectos de la dinámica de vehículos para diferentes sistemas de referencia y la relevancia de cada uno. Para el caso específico de estudio de este trabajo (Sistema Z) y similares, destacan tres sistemas de referencia:

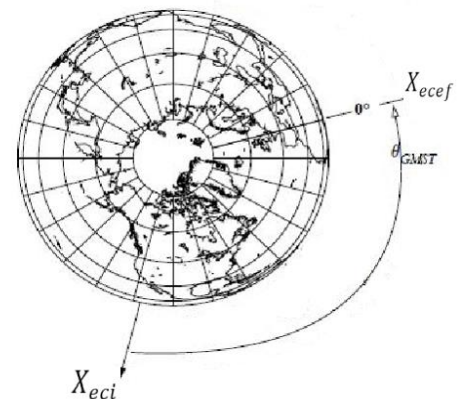
- *Earth Centered Inertial (ECI)*: Sistema de referencia inercial con coordenadas cartesianas y origen en el centro de la Tierra (geocéntrico). Su eje **X** pasa por el Equinoccio Vernal y su eje **Z** pasa por el Polo Norte, siendo el eje **Y** perpendicular a ambos siguiendo el resultado positivo del producto vectorial de ambos. La Figura 3.1 ilustra este sistema.
- *Earth Centered-Earth Fixed (ECEF)*: Sistema de referencia no inercial cuyo eje **Z** es paralelo al eje **Z** del sistema *Earth Centered Inertial*. La diferencia entre ambos sistemas se mide en radianes según el *Greenwich Mean Sideral Time (GMST)*. La diferencia entre ambos sistemas se ilustra en la Figura 3.2

Figura 3.1 Sistema *Earth Centered Inertial*



Fuente: (Vallado & McClain, 2013)

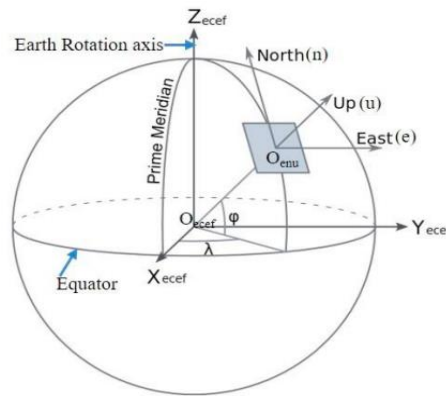
Figura 3.2 Diferencia entre sistemas *ECI* y *ECEF*



Fuente: (Vallado & McClain, 2013)

- *Topocentric Horizon Coordinate System (SEZ)*: En un sistema de referencia local con coordenadas cartesianas. No existe movimiento relativo entre el *Earth Centered-Earth Fixed* y este sistema. Su utilidad para este proyecto radica en poder simular la actitud del cohete respecto a una plataforma sobre la superficie terrestre de forma práctica para el usuario. Sin embargo, existen otros sistemas de referencia como el *East-North-Up (ENU)* cuyo eje **X** apunta hacia el Este y el eje **Y** hacia el Norte. Autores como Kuna (Kuna, Santhosh, & Perumalla, 2019) y Donelly (Donnelly, 2012) detallan y utilizan este sistema en sus trabajos publicados. La Figura 3.3 ilustra este sistema

Figura 3.3 Sistema East-North-Up



Fuente: (Kuna, Santhosh, & Perumalla, 2019)

3.1.3 “Comparison of Different Algorithms to Transform Geocentric to Geodetic” (Seemkooei, 2022)

En este documento, se realiza una comparación de diferentes métodos para la transformación entre sistemas coordenados cartesiano y geodésico en un sistema de referencia *Earth Centered-Earth Fixed*. Como se observa en la Tabla 3.1, según Seemkooei, el método de una sola iteración de Bowring resulta más rápido con un error aceptable para el caso de estudio (Sistema Z).

Tabla 3.1 Comparación de diferentes algoritmos para obtención de coordenadas geodésicas

Autor	Tiempo de proceso	Error medio ($\times 10^{-16}$)
Bowring (una iteración)	2,20	0,30
Seemkooei	3,00	0,26
Borkowski	3,30	0,53
Lin y Wang	4,90	0,35
Heiskanen y Moritz	4,00	7,00

Fuente: (Seemkooei, 2022)

3.1.4 “Tactical Missile Design” (Fleeman, 2001)

En su libro, Fleeman detalla el proceso iterativo del diseño de misiles tácticos enfocado en la ingeniería aeronáutica. Comienza con los requerimientos de la misión seguido de las características del misil en diseño. Esto incluye parámetros como empuje, estructura, aerodinámica, integración en la plataforma y carga útil. De este trabajo, destacan tres conceptos de relevancia para el Sistema Z que coinciden con los expuestos por autores como Mooji (Mooji, 1994) y Murcia y Portilla (Murcia Piñeros & Portilla, 2014)

- Sistema de empuje y desempeño del motor
- Fuerzas aerodinámicas (arrastre y sustentación) y el efecto de la geometría externa sobre éstas
- Peso del vehículo y su impacto sobre la trayectoria de éste

Además, el autor añade la importancia de considerar los vientos como una perturbación no despreciable en la trayectoria del cohete, sobre todo si la precisión es uno de los aspectos fundamentales de la misión.

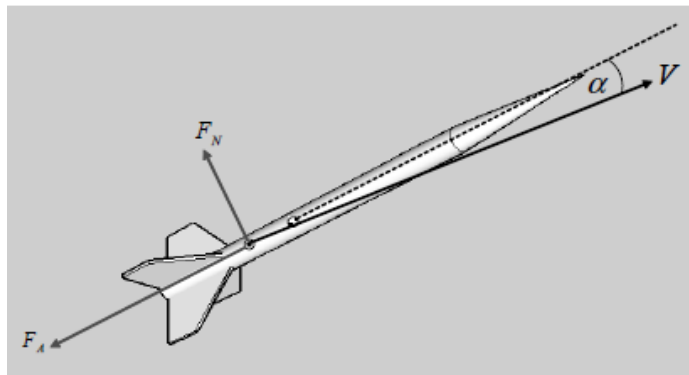
3.1.5 “Estimating the dynamic and aerodynamic parameters of passively controlled high power rockets for flight simulation” (Box, Bishop, & Hunt, 2009)

Los autores de este informe presentan el proceso de obtención de los coeficientes de sustentación y arrastre (o axial y normal para este caso⁶) mediante el uso de la geometría externa del cohete⁷. Cabe destacar que, al utilizar este método, los autores llegan a resultados que difieren por 125 metros de los resultados de un lanzamiento real.

Los cálculos se basan en el método propuesto por Barrowman (Barrowman, 1967) y tiene dos limitaciones que se mantienen a pesar de las actualizaciones de este método:

- El ángulo de ataque debe ser cercano a 0° (Box y su equipo lo mantienen cercano a 10°). Este ángulo es el que existen entre el eje axial del cohete y el vector de velocidad del centro de masa del vehículo. Su existencia produce efectos de sustentación sobre el cuerpo. La Figura 3.4 ilustra este ángulo
- El vehículo es un cuerpo sólido rígido durante todo el trayecto

Figura 3.4 Definición del ángulo de ataque



Fuente: (Box, Bishop, & Hunt, 2009)

⁶ La relación entre los coeficientes normal y axial (C_a y C_n) y los coeficientes de arrastre y sustentación (C_D y C_L) se explica en el Anexo B: Coeficientes aerodinámicos

⁷ La geometría requerida se encuentra graficada en el Anexo C: Geometría utilizada en método de Barrowman

El método presentado, para la estimación del coeficiente normal de fuerza aerodinámica, se rige por el siguiente orden:

1. Obtención del gradiente del coeficiente de cada una de las partes: $C_{N,\alpha(P)}$ donde $C_{N,\alpha}$ es el gradiente y P designa la parte evaluada.
2. Obtención del gradiente del coeficiente total del cohete mediante la suma de todos los gradientes obtenidos. Por lo que $C_{N,\alpha(Cohete)} = \sum C_{N,\alpha(P)}$
3. El coeficiente de fuerza normal depende del ángulo de ataque. De esta manera:

$$C_N = C_{N,\alpha(Cohete)} \alpha$$

La obtención del centro de presión aerodinámica, X_{cp} , es:

$$X_{cp} = \frac{\sum (C_{N,\alpha(P)} X_{cp(P)})}{C_{N,\alpha(Cohete)}} \quad [\text{mm}] \quad (2)$$

Además, los autores también emplean una la corrección de los coeficientes propuesta por Ketchledge (Ketchledge, 1993) según el número de Mach:

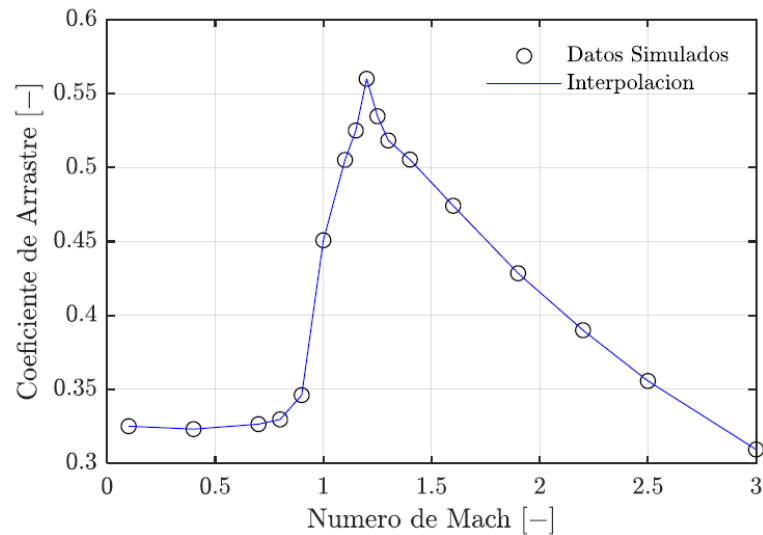
$$\begin{aligned} C'_N &= \frac{C_N}{\sqrt{1 - M^2}} && \text{Para } M < 0,8 \\ C'_N &= \frac{C_N}{\sqrt{1 - 0,8^2}} && \text{Para } 0,8 < M < 1,1 \\ C'_N &= \frac{C_N}{\sqrt{M^2 - 1}} && \text{Para } 1,1 > M \end{aligned} \quad (3)$$

3.1.6 “Mejora del alcance de un cohete *chaff*” (Vallejos Osses, 2021)

En su Memoria de Título, Vallejos propone modificaciones tanto a la geometría exterior del Sistema Z como a la tobera utilizada en el motor con el fin de optimizar el alcance de la trayectoria. Esto lo consigue reduciendo la fuerza de arrastre, F_D , y aumentando el empuje, F_T , y simulando a través de *Computational Fluid Dynamics (CFD)* mediante el software ANSYS-Fluent. El resultado es la disminución de un 8,05% del arrastre, el aumento de un 2,04% del empuje y el aumento de un 8,8% del alcance en el plano del horizonte local.

Además, presenta las curvas de coeficiente de arrastre (C_D) versus número de Mach. La Figura 3.5 muestra los resultados obtenidos⁸

Figura 3.5 Coeficiente de Arrastre vs Número de Mach obtenidos por Vallejos



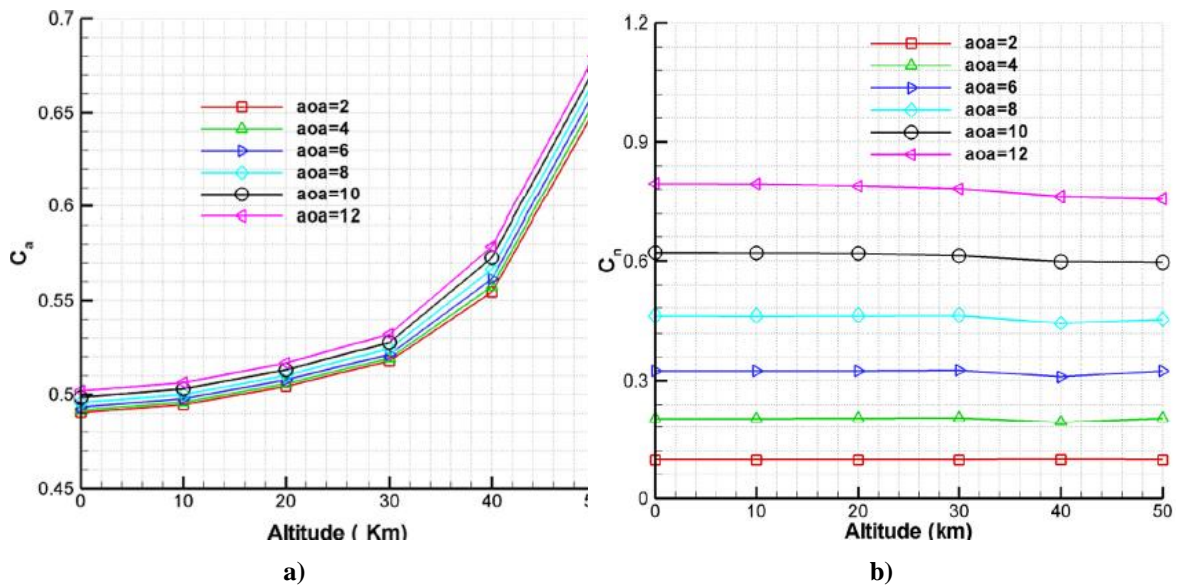
Fuente: (Vallejos Osses, 2021)

⁸ Es necesario destacar que todos los valores obtenidos por Vallejos, mediante simulación, son para condiciones atmosféricas a una altitud a nivel de mar y con ángulo de ataque de 0°. La tabulación de estos resultados se encuentra en el Anexo D: Coeficientes de arrastre según número de Mach

3.1.7 “Variation in aerodynamic coefficients with altitude” (Shahid, Hussain, Baig, & ul Haq, 2017)

En este trabajo, los autores hacen uso del software Gridgen y ANSYS-Fluent para estudiar la variación de los coeficientes aerodinámicos según altitud. Shadid y su equipo realizan las simulaciones sobre el cohete balístico HB-1 para diferentes ángulos de ataque. Los resultados de interés se muestran en la Figura 3.6

Figura 3.6 Coeficiente de fuerza axial C_a y normal C_n vs altitud y ángulos de ataque (aoa)⁹.



Fuente: (Shahid, Hussain, Baig, & ul Haq, 2017)

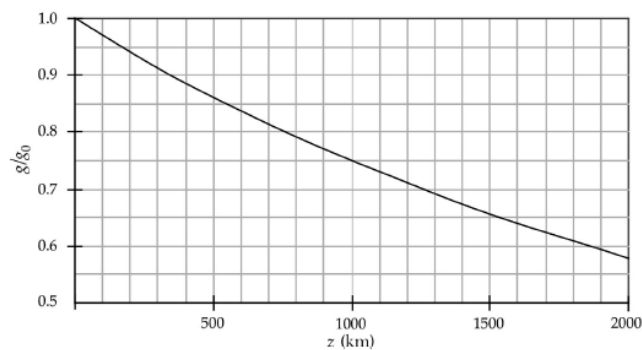
Como se observa en la figura, durante los primeros diez kilómetros, el mayor cambio ocurre en el coeficiente de fuerza axial, mostrando un cambio no mayor a 0,01 [—] para cualquier ángulo de ataque. Estos valores son contrastados con el trabajo de Gray (Gray, 1964), quien realiza la simulación para el HB-1 a diferentes números de Reynolds en un túnel de viento y llegando a resultados similares.

⁹ Como en la sección 3.1.5, la relación entre los coeficientes normal y axial (C_a y C_n) y los coeficientes de arrastre y sustentación (C_D y C_L) se explican en el Anexo B: Coeficientes aerodinámicos

3.1.8 “Orbital Mechanics for Engineering Students” (Curtis, 2020)

En la sección dedicada al tema específicamente, Curtis indica que, si bien la aceleración cambia drásticamente al depender de la distancia al centro terrestre al cuadrado, el peso es despreciable a menos que la estructura sea de masa considerable. La Figura 3.7 muestra la variación de la aceleración gravitacional a medida que aumenta la altitud

Figura 3.7 Variación de la aceleración gravitacional relativa según altitud



Fuente: (Curtis, 2020)

3.1.9 “Wind Effects on Launch Vehicles” (Advisory Group for Aerospace Research and Development of NATO, 1970)

En este documento se explica los efectos del viento para los sistemas espaciales en las etapas en las cuales el vehículo se encuentra en la atmósfera terrestre. Destacan los efectos de los conocidos como vientos cruzados (o *cross-winds*) debido al impacto que tienen sobre la trayectoria tanto por el desplazamiento que provocan sobre el cohete como el momento generado.

Este equipo propone el uso de un modelo de vientos unidireccional con un incremento logarítmico en su magnitud descrito por la Ecuación 4, donde U y U_0 son la magnitud del viento para cierta altitud y la magnitud del viento a nivel de la plataforma de lanzamiento. Lo mismo ocurre para la altitud h .

Destaca en la ecuación el exponente adimensional p cuyo valor depende solo del tipo de terreno que considere la plataforma de lanzamiento¹⁰

$$U = U_0 \left(\frac{h}{h_0} \right)^p \quad [m/s] \quad (4)$$

Esta forma de calcular la magnitud del viento de manera aproximada también es utilizada por autores como Johnson y Vaughan (Johnson & Vaughan, 2020) y en el simulador para cohetes creado por da Silveira y su equipo (da Silveira & Carrara, 2015).

¹⁰ Este exponente puede tomar valores menores a 0.2 según el terreno de lanzamiento.

3.2 Condiciones de diseño del simulador

Con la información recopilada hasta aquí, se concluye que las condiciones de diseño a utilizar en el simulador son:

1. Los tres sistemas de referencia principales son el *Earth Centered Inertial (ECI)*, el *Earth Centered-Earth Fixed (ECEF)* y el *East-North-Up (ENU)*. A estos, se agrega el *bodyframe* el cual facilita el cálculo de las fuerzas y momentos externos sobre el cohete. Además, al tener la Tierra una velocidad rotacional de $7,2722 * 10^{-5} \text{ rad/s}$ (Regan & Anandakrishnan, 1993), y un vuelo del Sistema Z de un minuto aproximadamente, la diferencia entre el *ECEF* y *ECI* es de $4,36332 * 10^{-3} [\text{rad}]$ aproximadamente, por lo cual se considera el sistema *ECEF* como inercial en el caso específico de estudio de este proyecto¹¹.
2. En consecuencia a lo anterior, si el sistema *Earth Centered-Earth Fixed* es considerado como inercial, no se considera la aceleración centrípeta y otros efectos de la rotación en el caso de estudio .
3. Debido a su uso extendido en diferentes trabajos recientes, se considera válido el modelo de Atmósfera Estandar de 1976.
4. Según Shadid y su equipo (Shahid, Hussain, Baig, & ul Haq, 2017), se considera como válidos, para diferentes altitudes, los valores obtenidos tanto por Vallejos (Vallejos Osses, 2021) para el coeficiente de arrastre como los obtenidos mediante el método utilizado por Box y su equipo (Box, Bishop, & Hunt, 2009) para el coeficiente de sustentación.
5. Seguido de lo anterior, el método de Barrowman empleado por Box posee limitaciones que se aplican a las condiciones de diseño: el ángulo de ataque del cohete no supera los 10° en magnitud (por lo que no se dispone tampoco del coeficiente de sustentación para valores

¹¹ En el Anexo E: Nutación, precesión y movimiento polar se explica por qué no se considera los efectos nutación y precesión de la Tierra.

superiores) y el cohete no sufre deformaciones durante el vuelo, por lo que las distancias entre las partes del vehículo no varían.

6. También debido al pequeño ángulo de ataque y, según el mismo Barrowman (Barrowman, 1967), los coeficientes de fuerza normal y axial se pueden considerar, o igualar en este caso, a los coeficientes de sustentación y arrastre, respectivamente.
7. Debido a lo expuesto en el tercer punto, el simulador no considera, durante este proyecto, el efecto de las componentes de velocidad del viento perpendiculares al eje axial del cohete, por lo cual, el efecto de los vientos no está considerado en el diseño del simulador. Sin embargo, se reserva una sección de éste para realizar cálculos a futuro considerando los efectos mencionados y considerados como perturbaciones.
8. El centro de flujo másico, ρ_e , indica el punto de salida efectivo de los gases resultantes de la combustión del propelente (Janssens & van der Ha, 2005). Para este caso, este punto es colineal con el eje de axisimetría del cohete al igual que el centro de masas. Debido a esto, el empuje no genera momentos sobre el vehículo.
9. Finalmente, debido a que el cohete posee aletas rectas, se asume que el vehículo no gira sobre su eje axial (no se produce el movimiento de *roll*)

CAPÍTULO 4: Obtención de parámetros

En este capítulo se obtienen los parámetros inicialmente desconocidos, mostrados la Tabla 2.3, mediante diferentes métodos y respondiendo a los supuestos de diseño mencionados en el Capítulo 3. Los parámetros por obtener son:

- Tensor de inercia y centro de masa
- Coeficientes aerodinámicos y centro de presiones aerodinámicas

Las aceleraciones lineal y rotacional, junto a la tasa de cambio de la inercia, dependen del resto de parámetros y modelos a emplear, por lo que no se necesitan obtener en este capítulo.

4.1 Tensor de inercia y centro de masa

Para la obtención de ambos parámetros, se masan los componentes más relevantes (sobre 0,2 kg) en la totalidad del cohete y se localiza su posición dentro del vehículo teniendo como referencia la punta de la ojiva. La masa y posición de los componentes medidos se muestra en la Tabla 4.1

Tabla 4.1 Masa y posición de componentes del Sistema Z

Componente	Masa [<i>kg</i>]	Distancia [<i>mm</i>]
Tobera	0,509	935,20
Propelente	3,330	493,20
Chaff	1,375	237,15
Espoleta	0,297	155,50
Plomo (contrapeso)	1,135	56,40
Cohete total	9,48	-

Fuente: Autor

Estos componentes se modelan en el software de diseño Autodesk Inventor como piezas sólidas axialmente simétricas y geoméricamente simples¹². Una vez se construye el cohete en el software, se ingresan las masas de los componentes y se obtienen tanto el tensor de inercia en el centro de masa y la posición de este último. Debido a que la masa cambia debido a la combustión del propelente, se realizan los cálculos para los casos antes y después de la combustión total. La Tabla 4.2 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 4.2 Centro de masa y tensor de inercia antes y después de la combustión

	Antes de la combustión	Después de la combustión
Masa total [kg]	9,4800	6,1500
Posición del centro de masa [m]	0,5109	0,4022
Tensor de inercia [kg m ²]	$\begin{pmatrix} 0,0091 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7840 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7840 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0063 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5226 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5226 \end{pmatrix}$

Fuente: Autor

4.2 Coeficientes aerodinámicos y centro de presiones

4.2.1 Coeficientes aerodinámicos

Como se vio en el Capítulo 3, Vallejos obtiene los coeficientes de arrastre (C_D) para un ángulo de ataque igual a cero y dependiente del número de Mach, por lo que sus resultados son los que se utilizan en este proyecto.

En cuanto al coeficiente de sustentación (C_L), siguiendo los supuestos de diseño para un ángulo de ataque pequeño, se puede obtener al calcular el coeficiente de fuerza normal sobre el cohete. Su obtención sigue el método de Barrowman (Barrowman, 1967) con las correcciones realizadas por Box

¹² El Anexo F: Geometrías en Autodesk Inventor muestra la geometría y resultados obtenidos en el software Autodesk Inventor

y su equipo (Box, Bishop, & Hunt, 2009). La Tabla 4.3 presenta las medidas requeridas para la obtención de estos parámetros

Tabla 4.3 Medidas del cohete para el coeficiente de sustentación

Medida	Distancia [mm]	Medida	Distancia [mm]	Medida	Distancia [mm]
X_b	205,35	l_r	76,36	d_n	88,90
X_f	856,00	l_t	33,67	d_b	88,90
X_c	936,00	l_m	46,64	d_f	88,90
l_n	205,35	l_c	62,00	d_u	88,90
l_b	730,00	l_s	41,75	d_d	93,00

Fuente: Autor

A continuación, se presenta el cálculo de los gradientes del coeficiente de fuerza normal de cada parte del cuerpo del cohete:

- **Ojiva:** El X_{cp} de la ojiva puede cambiar según la forma que ésta posea. Para el caso de estudio de este proyecto, la formula correspondiente es la de la Ecuación 6

$$C_{N,\alpha,(ojiva)} = 2 \quad [-] \quad (5)$$

$$X_{cp,(ojiva)} = 0.466 l_n = 95,69 \quad [mm] \quad (6)$$

- **Cambio en el diámetro del cuerpo principal:** Este cambio se produce cerca de la zona de la tobera e influye sobre la sustentación tanto si aumenta o disminuye el diámetro.

$$C_{N,\alpha,(diámetro)} = 2 \left[\left(\frac{d_d}{d_n} \right)^2 - \left(\frac{d_u}{d_n} \right)^2 \right] = 0,19 \quad [-] \quad (7)$$

$$X_{cp,(diámetro)} = X_c + \frac{l_c}{3} \left[1 + \frac{1 - \frac{d_u}{d_d}}{1 - \left(\frac{d_u}{d_d}\right)^2} \right] = 967 \text{ [mm]} \quad (8)$$

Aquí, X_c corresponde a la distancia desde la punta de la ojiva hasta el comienzo del cambio de diámetro.

- **Aletas:** Este cálculo es útil para aletas trapezoidales en cantidades de 3 o 4 unidades.

$$C_{N,\alpha,(aletas)} = K_{fb} \frac{4n \left(\frac{l_s}{d_n}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2l_m}{l_r + l_t}\right)^2}} = 2,31 \text{ [-]} \quad (9)$$

$$K_{fb} = 1 + \frac{\frac{d_f}{2}}{\left(l_s + \frac{d_f}{2}\right)} = 1,52 \text{ [-]} \quad (10)$$

$$X_{cp,(aletas)} = X_f + \frac{l_m(l_r + 2l_t)}{3(l_r + l_t)} + \frac{1}{6} \left[l_r + l_t - \frac{l_r l_t}{l_r + l_t} \right] = 890,75 \text{ [mm]} \quad (11)$$

Aquí, X_f es la distancia entre la punta de la ojiva y el punto en el cual se encuentran el cuerpo principal y la aleta, y n es el número de aletas. K_{fb} corresponde a un coeficiente que considera el incremento de fuerza normal debido a los efectos de la interferencia entre el cuerpo principal y la aleta.

- **Cuerpo principal¹³:**

$$C_{N,\alpha,(cuerpo)} = \frac{l_b}{d_b 0.25\pi} \alpha = 10,45 \alpha \quad [-] \quad (12)$$

$$X_{cp,(cuerpo)} = X_b + 0,5l_b = 570,35 \quad [mm] \quad (13)$$

Aquí, X_b es la distancia desde la punta de la ojiva hasta el comienzo del cuerpo principal. Como se puede observar, el gradiente es una función del ángulo de ataque, α en radianes.

Con los cálculos realizados, se procede a la obtención del coeficiente de fuerza normal del total del cohete

$$C_{N,\alpha(Cohete)} = \sum C_{N,\alpha(P)} = 4,56 + 10,45 \alpha \quad [-] \quad (14)$$

$$C_N = C_{N,\alpha(Cohete)} \alpha = 4,56 \alpha + 10,45 \alpha^2 \quad [-] \quad (15)$$

¹³ Un método alternativo considera que el coeficiente de fuerza normal es igual al doble del ángulo de ataque para ángulos entre 0° y 15° (Fleeman, 2001)

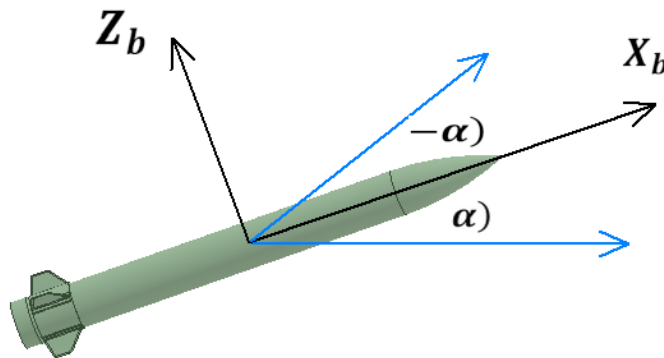
4.2.2 Centro de presiones

Como se puede observar en la Ecuación 16, la posición el centro de presiones (medida desde la punta de la ojiva) también depende del ángulo de ataque, por lo cual considerarlo fijo solo es una opción cuando se considera un ángulo muy pequeño.

$$X_{cp} = \frac{\sum (C_{N,\alpha(P)} X_{cp(P)})}{C_{N,\alpha(Cohete)}} = \frac{2.435,19 + 5.963,11\alpha}{4,56 + 10,45 \alpha} \quad [mm] \quad (16)$$

Por último, se establece por convención, que el ángulo de ataque es positivo en sentido horario en el plano XZ del *bodyframe*. La Figura 4.1 ilustra dicha convención

Figura 4.1 Convención de ángulo de ataque α positivo y negativo



Fuente: Autor

CAPÍTULO 5: Lenguaje de programación

El lenguaje de programación seleccionado para este proyecto es Python debido a la familiarización del autor con este lenguaje, como también a las ventajas presentes en su uso. Dentro de estas ventajas se encuentra el ser un lenguaje de código abierto (*Open Source*) que permite el uso gratuito y la colaboración entre diferentes usuarios. Esto ha permitido que sea uno de los lenguajes más utilizados en el campo de la Ciencia de Datos (*Data Science*), Aprendizaje Automático (*Machine Learning*) y otros (Srinath, 2017).

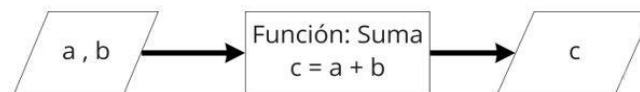
Además, el uso de Python para este proyecto apunta a la programación orientada a objetos (*Object-Oriented Programming*) para llevar a cabo la simulación de trayectoria y actitud del cohete, considerando cada aspecto de ésta como un objeto según la necesidad.

En este capítulo se revisan conceptos clave para entender la estructura del código a utilizar para la simulación y su uso.

5.1 Función

Una función es un código reutilizable que recibe una serie de datos, o variables, (*Input*) con las cuales realiza una tarea específica y devuelve un resultado (*Output*). Un ejemplo simple es una función llamada “Suma” que realice una tarea como se muestra la Figura 5.1

Figura 5.1 Ejemplo de "Suma" como función



Fuente: Autor

5.2 Clases y objetos

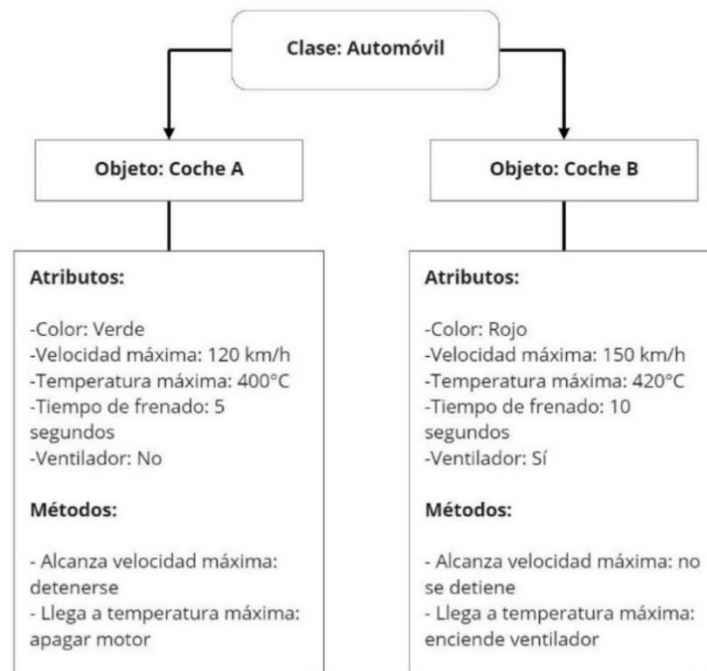
Una clase es una herramienta enfocada en la abstracción de propiedades y comportamientos de una entidad o un concepto, sea real o imaginario. Esta abstracción permite la creación de diferentes objetos (“instanciación”) que comparten características de manera general.

A las propiedades o información contenida en una clase se les denomina “atributos” (o “campos” según diferentes autores), mientras que a los comportamientos definidos dentro de la clase se les denomina “métodos”. Estos métodos agrupan instrucciones que permiten la modificación de los atributos, obtener nuevas variables o interactuar con otros objetos.

Si bien tanto métodos como funciones son conjuntos de instrucciones, la diferencia entre ellos radica en que los métodos se encuentran siempre asociados a un objeto (o clase) y es parte de la funcionalidad de éste. Mientras que, la función, está definida por sí misma y no depende de ninguna clase, por lo que puede ser utilizada incluso para definir un método.

Finalmente, un objeto es la instanciación, o la representación concreta, de una clase con características específicas definidas. Debido a esto, con una misma clase se pueden definir diferentes objetos de la misma categoría, pero con características específicas que los diferencien entre sí. Un ejemplo simplificado de esto se muestra en la Figura 5.2

Figura 5.2 Ejemplo de uso de clases y objetos



Fuente: Autor

5.3 Programas y bibliotecas

Un programa es un archivo en el cual se predefine la instanciación de clases (creación de objetos) y la ejecución de sus métodos y de funciones en un orden establecido para el proceso de la información. A la vez, una biblioteca (o “librería” en la jerga informática) se puede definir como un conjunto de programas autónomo listo para ser utilizado por otros programas sin alterar su propio código.

Debido a la extensa cantidad de operaciones que debe llevarse a cabo durante la construcción del simulador, o de cualquier otro programa, el uso de bibliotecas es de ayuda al facilitar operaciones esenciales. Dentro de las más usadas en el lenguaje Python, se encuentran:

- *Numpy*: utilizada para el cálculo numérico mediante la creación de un tipo de elemento llamado *array*, el cual sirve para el almacenamiento de datos matricialmente y su operación entre sí, entre otras utilidades. Otras bibliotecas relacionadas son *Cmath* y *Scipy*

- *Matplotlib*: utilizada para la generación de gráficos bidimensionales para la visualización de datos.
- *Pandas*: permite ordenar, almacenar y manejar paquetes de datos de otros formatos como *Comma Separated Value* (CSV) o Microsoft Excel, entre otros.

Además de estas bibliotecas, existen otras creadas por autores independientes que permiten obtener información de otras categorías. Un ejemplo de esto es la biblioteca *fluids.atmosphere* (Bell, 2021). Esta biblioteca contiene diferentes modelos atmosféricos que permiten la obtención de propiedades atmosféricas como densidad, presión, etc. Por último, debido a su uso extenso en este proyecto, es necesario definir tres elementos clave de la programación en Python:

- **Tupla** (del inglés *tuple*): Es un elemento que colecciona valores o datos de manera inmutable. Su ventaja radica en que, al no ser mutable, utiliza menos espacio en la memoria.
- **Lista** (en inglés *list*): Es un elemento similar a la tupla pero con la capacidad de ser mutable. Si bien es más utilizado por los usuarios de Python debido a la capacidad de ser modificado, posee la desventaja de ocupar más memoria. Es útil para guardar información.
- **Arreglo** (en inglés *array*): Este elemento es similar a la lista pero su diferencia radica en ser una colección de datos no redimensionable. Esto quiere decir que al definir un *array* ya se definen las dimensiones de éste y su número de elementos. Si bien es una desventaja en ese aspecto, es una ventaja al necesitar menos memoria que la lista, por lo que es útil para operaciones matemáticas con diferentes niveles de complejidad si se requiere rapidez de operación. También se utilizan para definir vectores y matrices.

CAPÍTULO 6: Desarrollo del simulador

Este capítulo presenta los cambios realizados sobre la arquitectura anterior (Orozco García, 2021) y detalla los componentes que generan la capacidad de simulación de trayectoria y actitud. Finalmente, se describe la secuencia de operación utilizada en el simulador.

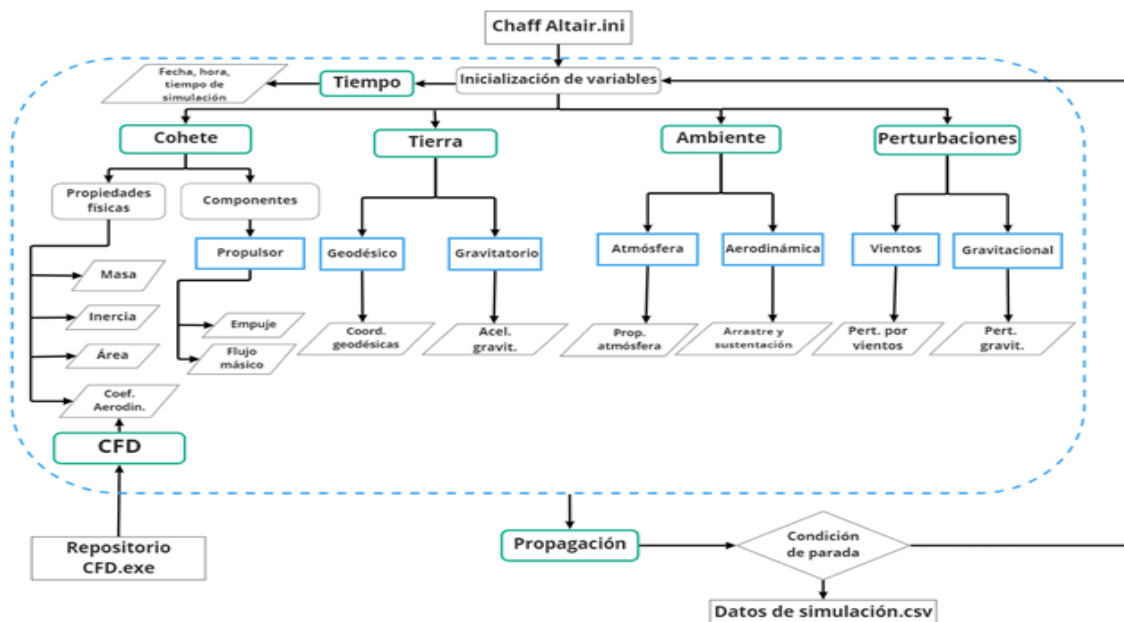
6.1 Cambios sobre la arquitectura de simulación anterior

En esta sección se revisa con brevedad la arquitectura propuesta anteriormente mediante un ejemplo de su forma de operación

6.1.1 Arquitectura de simulación anterior

La arquitectura anterior propuesta se presenta en la Figura 6.1

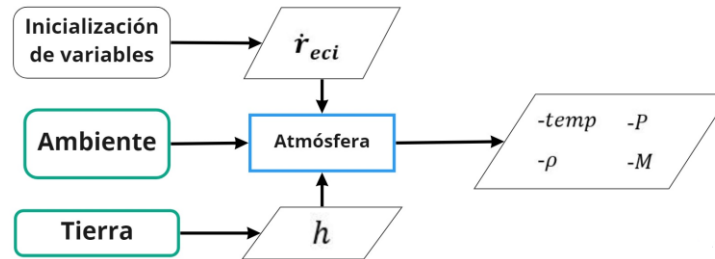
Figura 6.1 Arquitectura de simulación anterior propuesta



Fuente: (Orozco García, 2021)

Como se observa en la imagen, el acceso a un modelo (en verde) se realiza a través de un módulo que lo contenga (en azul). La operación para la obtención de variables se muestra en la Figura 6.2

Figura 6.2 Operación del modelo Atmósfera de la arquitectura anterior



Fuente: (Orozco García, 2021)

En este caso, para la obtención de las variables atmosféricas (temperatura, presión, etc.) se debía acceder al módulo que dispone el modelo receptor de las variables necesarias (altitud y posición).

6.1.2 Nueva arquitectura de simulación

Los cambios, a describir, se centran en la reagrupación de los módulos, la generación de jerarquía entre ellos y la modificación en los objetivos de cada uno. Si bien, los conceptos y objetivos necesarios para la simulación se mantienen, se distribuyen de manera diferente consiguiendo la simplificación y facilidad de expansión del proyecto. Los principales cambios realizados son:

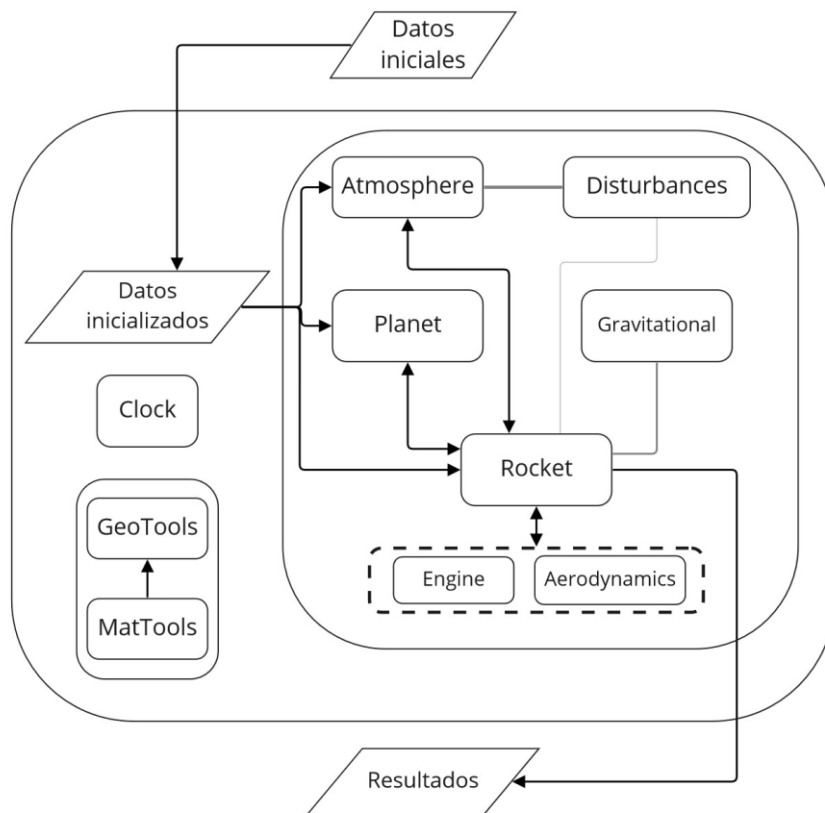
- Los módulos, correspondiente a su concepto informático, se encuentran en un archivo homónimo a cada uno con la extensión “.py”. Así mismo, las clases contenidas en un módulo son también homónimas.
- Los módulos ya no poseen modelos de los conceptos a los que representan, si no que utilizan estos modelos para realizar los cálculos necesarios. Esto quiere decir que, ya no se accede a un modelo a través de un módulo, si no que se accede al módulo para realizar la operación necesaria según un modelo establecido.

- Ahora, existe el módulo de simulación principal *Main_Simulator*, en el cual se ingresan las variables iniciales conocidas de la misión, se inicializan estas variables para crear los objetos de simulación, y se ordena la secuencia necesaria. Este módulo accede a los demás para realizar las operaciones establecidas.
- También, existen tres módulos principales: *Planet*, *Atmosphere* y *Rocket*. Éste último es el módulo que realiza la mayoría de los cálculos necesarios, además de ser el que guarda la información obtenida de la simulación.
- El módulo *Rocket* accede a dos módulos propios que no operan fuera de él: *Aerodynamics* y *Engine*. Los cálculos de fuerzas aerodinámicas sobre el cohete los realiza ahora *Rocket* y ya no dependen del módulo encargado de las condiciones ambientales.
- El módulo previamente llamado *Ambiente* pasa a ser el módulo *Atmosphere* y solo cumple el objetivo del cálculo de propiedades ambientales según el modelo utilizado para ello.
- Junto a lo anterior, el módulo *Tierra* pasa a ser el módulo *Planet*, y solo tiene el objetivo de actualizar la rotación actual entre los sistemas *Earth Centered Inertia* y *Earth Centered-Earth Fixed*.
- Se crea el módulo *Gravitational*, emancipando la función de cálculo de aceleración gravitacional del módulo encargado de las características de la Tierra.
- Se crean dos módulos auxiliares: *MatTools* y *GeoTools* los cuales sirven de herramientas de cálculo para operaciones matemáticas y de conversión entre sistemas de referencia y de coordenadas. Éstos no dependen de ninguna secuencia dentro de la simulación y solo contienen funciones (no clases) para cumplir los objetivos.
- Se dispone del módulo *Disturbances* el cual permite la adición opcional de perturbaciones no consideradas en los modelos de otros módulos que lo permitan. Un ejemplo es la perturbación por vientos.

- Finalmente, se crea el módulo *Clock*, el cual sirve para obtener variables relacionadas a la fecha y hora, como el día juliano y el *GMST*. Este módulo opera independientemente de cualquier otro.

Como punto a considerar, los cambios en cuanto a las variables utilizadas para la dinámica del cohete se encuentran detallados en la sección 6.10 del Capítulo 6. Con esto, la nueva arquitectura de simulación queda ilustrada en la Figura 6.3

Figura 6.3 Nueva arquitectura del simulador para trayectoria y actitud



Fuente: Autor

En el resto del capítulo, se explica el funcionamiento de cada uno de los componentes del simulador para el cálculo de trayectoria y actitud, para finalizar con la explicación de la secuencia de simulación.

6.2 Módulo de herramientas matemáticas: *MatTools*

Este módulo, al igual que *GeoTools* (visto en la siguiente sección), tiene como propósito reunir funciones que asistan en diferentes operaciones matemáticas en diferentes módulos del simulador. La Tabla 6.1 lista las funciones incluidas su descripción.

Tabla 6.1 Funciones del módulo *MatTools*

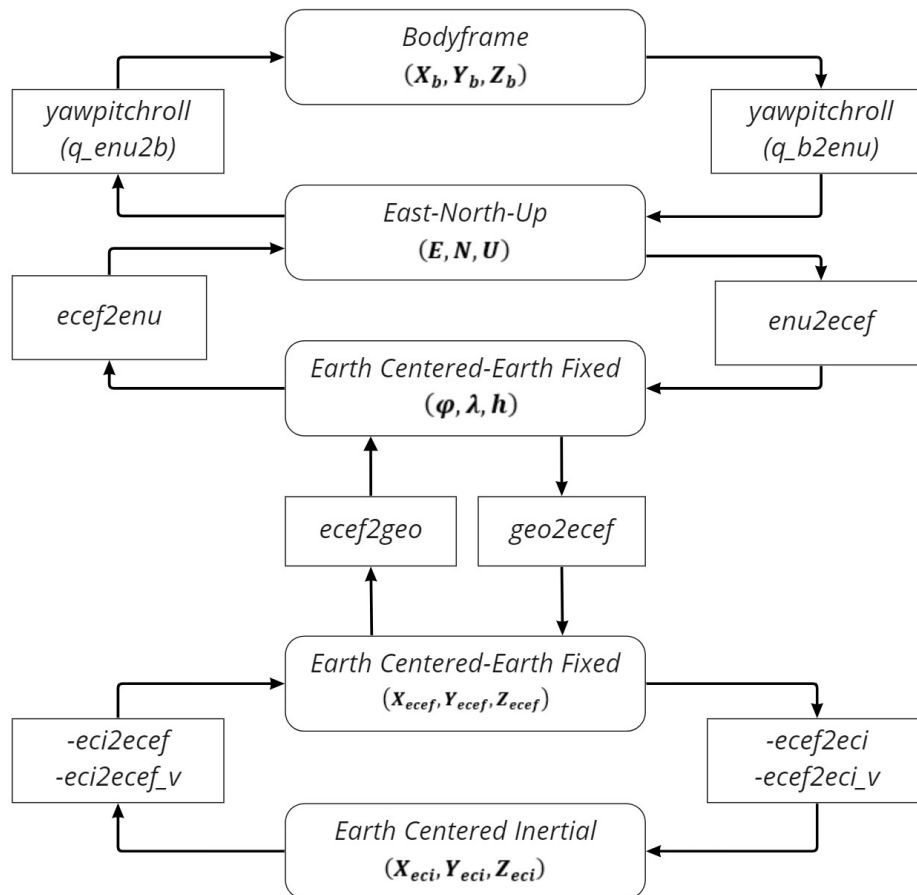
Función	Descripción
<i>hexa2dec</i>	Convierte una coordenada geodésica en numeración hexadecimal a numeración decimal
<i>skew3</i>	Convierte un vector de tres elementos a una matriz antisimétrica de rango 3
<i>skew4</i>	Convierte un vector de tres elementos a una matriz antisimétrica de rango 4
<i>mat2quat</i>	Convierte una matriz de rotación en un cuaternión equivalente
<i>quat2mat</i>	Convierte un cuaternión en una matriz de rotación equivalente
<i>check</i>	Convierte todos los elementos de un vector que sean menores a 10^{-8} en 0 (modificable según necesidad)
<i>normalise</i>	Obtiene el vector unitario de cualquier vector
<i>vec2mat</i>	Convierte un vector de tres elementos en una matriz diagonal de rango 3
<i>q_rot</i>	Rota un vector de tres elementos según el cuaternión de rotación utilizado. Esta función permite la rotación en el sentido descrito por el cuaternión y el sentido inverso
<i>hamilton</i>	Realiza la multiplicación entre dos cuaterniones
<i>angle_vector_z</i>	Obtiene el ángulo entre la primera y tercera componente de un vector. Utilizado para calcular el ángulo de ataque

Fuente: Autor

6.3 Módulo de conversión entre sistemas: *GeoTools*

Este módulo contiene las funciones necesarias para las diferentes conversiones entre sistemas de referencia y de coordenadas. La Figura 6.4 ilustra las conversiones que se pueden realizar con este módulo

Figura 6.4 Conversión entre sistemas mediante *GeoTools*



Fuente: Autor

Cada una de las funciones de este módulo se encuentra tabulada en la Tabla 6.2 mientras que el modelo matemático (y su validación) se encuentra en el Anexo G: Modelos matemáticos del módulo *GeoTools*.

Tabla 6.2 Descripción de las funciones del módulo *GeoTools*

Función	Descripción
<i>yawpitchroll</i>	Genera una matriz de rotación de rango 3 desde la plataforma de lanzamiento al <i>bodyframe</i> . Debe recibir un arreglo con la secuencia de rotación de <i>yaw</i> , <i>pitch</i> y <i>roll</i> (en grados)
<i>ecef2enu</i> y <i>ecef2enu</i>	Realizan la conversión entre los sistemas <i>Earth Centered-Earth Fixed</i> y <i>East-North-Up</i> , y viceversa. Es necesario conocer las coordenadas geodésicas de la plataforma de lanzamiento o punto de referencia
<i>ecef2geo</i> y <i>geo2ecef</i>	Realizan la conversión entre coordenadas geodésicas y cartesianas del sistema <i>Earth Centered-Earth Fixed</i> .
<i>eci2ecef</i> y <i>ecef2eci</i>	Realizan la conversión del vector de posición entre los sistemas <i>Earth Centered-Earth Fixed</i> y <i>Earth Centered Inertial</i> . Es necesario conocer el ángulo de rotación entre ambos (<i>Greenwich Mean Sidereal Time</i> ¹⁴)
<i>eci2ecef_v</i> y <i>ecef2eci_v</i>	Realizan la conversión del vector de velocidad entre los sistemas <i>Earth Centered-Earth Fixed</i> y <i>Earth Centered Inertial</i> . Es necesario conocer el ángulo de rotación entre ambos (<i>Greenwich Mean Sidereal Time</i>) y la velocidad de rotación terrestre

Fuente: Autor

¹⁴ Se suele abreviar como *GMST* en distintos documentos

6.4 Módulo de cálculo de fecha y hora: *Clock*

Este módulo consta de una clase ya instanciada como objeto: *Clock*. Este objeto tiene como objetivo ofrecer diferentes utilidades mediante sus métodos presentes en la Tabla 6.3

Tabla 6.3 Métodos del objeto *Clock*.

Método	Uso
<i>time_utc</i>	Obtiene la fecha y hora actual en Greenwich de manera automática mediante la biblioteca <i>datetime</i>
<i>julian_day</i>	Calcula el Día Juliano según la fecha y hora con el método propuesto por Vallado (Vallado & McClain, 2013)
<i>gmst</i>	Calcula el <i>GMST</i> según el Día Juliano con el método directo propuesto por Vallado (Vallado & McClain, 2013)

Fuente: Autor

6.5 Módulo de rotación planetaria: *Planet*

Este módulo contiene la clase *Planet* y la instanciación de ésta se realiza ingresando el valor del *Greenwich Mean Sidereal Time* (o *GMST*) inicial, el cual se puede obtener mediante el uso del objeto *Clock*. Su uso radica solamente en cambiar el *GMST* inicial al sumarle la velocidad angular terrestre multiplicada por el paso de tiempo de cada ciclo. Este nuevo *GMST* es entregado al objeto del módulo del cohete para realizar las conversiones entre sistemas de referencia. La Tabla 6.4 presenta los métodos pertenecientes a esta clase y su uso

Tabla 6.4 Métodos de la clase *Planet*

Método	Uso
<i>update</i>	Actualiza el <i>GMST</i> según el paso de tiempo de cada ciclo
<i>save_data</i>	Guarda la información en una tupla
<i>get_gmst</i>	Entrega el valor del <i>GMST</i> actual

Fuente: Autor

6.6 Módulo de parámetros atmosféricos: *Atmosphere*

Este módulo contiene la clase *Atmosphere* que opera mediante el modelo de la Atmósfera Estándar de EE. UU. 1976 (*US Standard Atmosphere* 1976). Depende ampliamente de la biblioteca *fluids.atmosphere* y tiene como objetivo entregar las propiedades atmosféricas dependiendo de la altitud a la que se encuentre el cohete.

El motivo de utilizar este modelo atmosférico recae en que la mayoría de los autores lo utilizan (considerando o no el *offset* de temperatura) y por la disponibilidad de éste.

El objeto se crea con la temperatura inicial (medida en terreno), en Celsius, para ajustarse automáticamente a partir de los 15°C que se consideran a nivel de mar. Así se crea un *offset* que diferencia una atmósfera de día y una de noche, o una en el norte del país y otra en el sur.

Una vez creado el objeto con la clase *Atmosphere*, en cada ciclo éste entrega diferentes valores según el método de la clase utilizado. Éstos se muestran en la Tabla 6.5

Tabla 6.5 Métodos y usos de la clase *Atmosphere*.

Método	Uso
<i>get_temp</i>	Entrega la temperatura atmosférica según altitud en $[K]$
<i>get_press</i>	Entrega la presión atmosférica según altitud en $[Pa]$
<i>get_dens</i>	Entrega la densidad del aire según altitud en $[kg/m^3]$
<i>get_v_sonic</i>	Entrega la velocidad del sonido en el medio según la altitud en $[m/s]$

Fuente: Autor

La validación de este modelo se encuentra en el Anexo H: Validación modelo utilizado en *Atmosphere*

6.7 Módulo de aceleración gravitacional: *Gravitational*

Este módulo contiene dos funciones encargadas del cálculo de parámetros gravitacionales: aceleración gravitacional y el torque por gradiente gravitacional. En este modelo, la aceleración gravitacional se basa en lo expuesto en el Capítulo 3, donde se asume que para la altitud máxima la aceleración gravitacional relativa es superior a un 0,98, lo que permite considerar el valor de $9,81 \text{ m/s}^2$ como constante.

Por último, el torque por gradiente gravitacional se calcula en *bodyframe* según la Ecuación 17 basado en lo expuesto por Schaub (Schaub, 2017) para vehículos espaciales.

$$\mathbf{T}_{b,gg} = \frac{3GM_e}{\|\mathbf{r}_{eci}\|^5} \times \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \mathbf{r}_b \quad [N \cdot m] \quad (17)$$

Donde:

- $\mathbf{T}_{b,gg}$: Torque por gradiente gravitacional medido en el *bodyframe*
- \mathbf{r}_{eci} y \mathbf{r}_b : Vector de posición en sistema *Earth Centered Inertial* y *bodyframe*
- G : Constante de gravitación universal
- M_e : Masa de la Tierra

Las funciones se listan en la Tabla 6.6

Tabla 6.6 Funciones del módulo *Gravitational*

Función	Objetivo
<i>g_accel</i>	Recibe la posición en el sistema <i>Earth Centered Inertial</i> y entrega el vector de aceleración gravitacional
<i>g_torque</i>	Recibe la posición en el sistema <i>Earth Centered Inertial</i> y la inercia. Entrega el vector de torque por gradiente gravitacional

Fuente: Autor

6.8 Módulo de motor del cohete: *Engine*

Este módulo posee la clase *Engine* y su propósito es contener y proveer la información relacionada al motor del cohete para ser utilizada por el módulo *Rocket* según lo requiera. Toda la información relacionada al motor debe ser configurada previamente ya que sólo posee atributos dependientes del tiempo de simulación y la presión atmosférica que son entregados por el módulo solicitante. La información contenida es:

- Flujo másico [kg/s]
- Velocidad de salida de los gases de combustión [m/s]
- Presión a la salida de la tobera [Pa]
- Área de salida de la tobera [m^2]
- Empuje (calculado según los atributos anteriores) [N]

Esta es una clase que es instanciada en cada ciclo según el tiempo de simulación que reciba y deja de utilizarse al terminar cada ciclo para ser reemplazada por la siguiente instanciación.

6.9 Módulo de parámetros aerodinámicos: *Aerodynamics*

Este módulo se encarga de ordenar y entregar la información referente los coeficientes aerodinámicos previamente establecidos mediante la clase *Aerodynamics*. Este, al igual que *Engine* es instanciado cada ciclo por *Rocket* y reemplazado en el siguiente.

En el caso de los coeficientes de fuerza axial, se utilizan los coeficientes de arrastre obtenidos por Vallejos (expuesto en el Capítulo 3) para un ángulo de ataque de 0° . Estos resultados son operados por la función *interpolate* de la biblioteca *Scipy* la cual genera una curva que permite la obtención de valores mediante una función continua en lugar de puntos.

Para el caso de los coeficientes de fuerza normal y el centro de presiones aerodinámico, se considera lo visto en las secciones 4.2.1 y 4.2.2. Las ecuaciones 18 y 19 definen los parámetros para la sustentación en base a las ecuaciones 15 y 16 y considerando la aproximación planteada en las condiciones de diseño del simulador

$$C_L \approx C_{N,\alpha(Cohete)} \alpha = 4,56\alpha + 10,45 \alpha^2 \quad [-] \quad (18)$$

$$X_{cp} = \frac{\sum(C_{N,\alpha(P)} X_{cp(P)})}{C_{N,\alpha(Cohete)}} = \frac{2435,19 + 5963,11\alpha}{4,56 + 10,45 \alpha} \quad [mm] \quad (19)$$

Es necesario recordar que el ángulo de ataque no puede superar los 10° en magnitud. Por lo que para ángulos de ataque superiores es necesario utilizar otro método de obtención.

6.10 Módulo del cohete: *Rocket*

Este módulo posee la clase *Rocket*, la cual define completamente las características del cohete durante la simulación. Es el módulo más complejo y el que lleva a cabo la obtención de nuevos datos cada ciclo de simulación. Además, es el encargado de obtener información de los objetos provenientes de las clases *Planet* y *Atmosphere*.

Comenzando por la sección de los atributos de esta clase, ésta posee los atributos iniciales con los que se instancia la clase y se define el objeto:

- Posición [m] y velocidad [m/s] desde la plataforma de lanzamiento según el sistema *East-North-Up*
- Cuaternión de rotación $[-]$ desde el sistema *East-North-Up* al *bodyframe*
- Velocidad angular [rad/s] del cohete en el sistema *East-North-Up*

Los métodos incluidos en la clase de este módulo se muestran en la Tabla 6.7

Tabla 6.7 Métodos de la clase *Rocket*

Método	Objetivo
<i>update_gmst</i>	Obtiene el GMST actual del ciclo de simulación desde el objeto definido por la clase <i>Planet</i>
<i>update_mass_related</i>	Define tanto el tensor de inercia como la posición del centro de masa según el tiempo de simulación y de quemado
<i>update_pos_vel</i>	Obtiene vectores de posición y velocidad en otros sistemas de referencia y coordenadas. Debe recibir las coordenadas geodésicas de la plataforma de lanzamiento. Se dispone también para cualquier cálculo relacionado a posición, actitud y velocidad.
<i>update_atmosphere</i>	Obtiene propiedades atmosféricas del objeto definido por la clase <i>Atmosphere</i> .
<i>update_aerodynamics</i>	Instancia la clase <i>Aerodynamics</i> y obtiene los coeficientes aerodinámicos y el centro de presiones.
<i>update_engine</i>	Instancia la clase <i>Engine</i> y obtiene los parámetros de operación de éste.
<i>update_forces_aero</i>	Obtiene los vectores de fuerzas aerodinámicas en el <i>bodyframe</i> ¹⁵
<i>update_forces_engine</i>	Obtiene los vectores de fuerza de empuje en el <i>bodyframe</i>
<i>update_forces_torques</i>	Calcula los vectores de fuerza y torques en el resto de los sistemas de referencia
<i>update_g_accel</i>	Calcula el vector de aceleración gravitacional en diferentes sistemas de referencia
<i>dynamics</i>	Calcula las derivadas respecto al tiempo de las variables iniciales utilizando las ecuaciones del movimiento (Segunda Ley de Newton) y el flujo másico
<i>RK4_update</i>	Integra las variables obtenidas por el método <i>dynamics</i> mediante el método de Runge-Kutta de 4 ^{to} orden. Estas nuevas variables son las variables iniciales del siguiente ciclo.
<i>save_data</i>	Guarda las variables utilizadas en el ciclo actual dentro de las listas conocidas como “históricos” (o <i>historics</i>).
<i>update_time</i>	Actualiza un contador propio del cohete según el ciclo de simulación

Fuente: Autor

¹⁵ Todos los métodos que calculan fuerzas en el *bodyframe* también obtienen los torques

Como se indica en la tabla, el método *dynamics* calcula las derivadas respecto al tiempo de las variables del vector estado. En contraste a la propuesta del proyecto anterior, tanto el vector estado como el dinámico presentan diferencias. El nuevo proceso se presenta como en la Ecuación 20

$$\dot{X}_{EST}(t) = \frac{d X_{EST}(t)}{d t} = \begin{pmatrix} \dot{r}_{enu}(t) \\ \ddot{r}_{enu}(t) \\ \dot{q}_{enu2b}(t) \\ \dot{\theta}_b(t) \\ \dot{m}(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{propagación}} X_{EST}(t') = \begin{pmatrix} r_{ecef}(t') \\ \dot{r}_{ecef}(t') \\ q_{ecef2b}(t') \\ \dot{\theta}_b(t') \\ m(t') \end{pmatrix} \quad (20)$$

Los cambios realizados son:

- Ausencia del vector que describe la actitud del cohete. Se debe a que esta información ya se puede obtener del cuaternión utilizado.
- La velocidad y aceleración angular, $\dot{\theta}_b$ y $\ddot{\theta}_b$, se miden respecto al *bodyframe* y no respecto a un marco inercial. Esto es debido a la relación entre la ecuación del movimiento rotacional y la derivada del cuaternión como también a la simplificación del proceso a la hora de evaluar torques e inercia sobre este sistema en lugar del *East-North-Up*
- El cuaternión representa la rotación desde el sistema *East-North-Up* al sistema *bodyframe*
- La variación de la inercia se evalúa solo para dos momentos: antes y después de la combustión. Estos valores se obtienen según lo visto en el Capítulo 4. Debido a esto, no se utiliza la derivada respecto al tiempo de la inercia para su propagación en el tiempo.

A continuación, se presenta brevemente el modelo utilizado para describir las variables involucradas en el vector dinámico, mientras que en el Anexo I: Diagrama de cuerpo libre (DCL) se presenta el diagrama de cuerpo libre utilizado para modelar la dinámica del cohete.

6.10.1 Modelo para trayectoria

Para el caso de la dinámica de trayectoria se utiliza el sistema de referencia *East-North-Up* como inercial debido al tiempo de vuelo y altitud considerados, como también el hecho de no existir movimiento relativo entre este sistema y el *Earth Centered-Earth Fixed*. La derivada, respecto al tiempo, de la posición es asignada como la velocidad conocida al principio de cada ciclo

$$\dot{\mathbf{r}}_{enu} = \dot{\mathbf{r}}_{enu} \quad [m/s] \quad (21)$$

En el caso de la aceleración, se cumple que es la sumatoria de las fuerzas dividida por la masa del cohete:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{enu} = \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{enu} \quad [m/s^2] \quad (22)$$

En este caso $\sum \mathbf{F}_{enu}$ incluye las fuerzas aerodinámicas, el empuje y el peso. Se dispone para añadir de manera aditiva la fuerza provocada por perturbaciones por vientos.

6.10.2 Modelo para actitud

Este modelo considera tanto el sistema *East-North-Up* como el *bodyframe* al mismo tiempo. El primer caso corresponde a la derivada del cuaternión de rotación desde el sistema *East-North-Up* al *bodyframe*.

$$\dot{\mathbf{q}}_{enuf2b} = \frac{1}{2} [\dot{\boldsymbol{\theta}}_{enu}]_{\times} \mathbf{q}_{enu2b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_{b,z} & -\dot{\theta}_{b,y} & \dot{\theta}_{b,x} \\ -\dot{\theta}_{b,z} & 0 & \dot{\theta}_{b,x} & \dot{\theta}_{b,y} \\ \dot{\theta}_{b,y} & -\dot{\theta}_{b,x} & 0 & \dot{\theta}_{b,z} \\ -\dot{\theta}_{b,x} & -\dot{\theta}_{b,y} & -\dot{\theta}_{b,z} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{pmatrix} \quad [-] \quad (23)$$

El segundo caso corresponde a la aceleración rotacional del vehículo en el *bodyframe*. La utilidad de usar el *bodyframe* y no el sistema *East-North-Up* es la obtención previa de los torques e inercia en este sistema.

$$\ddot{\theta}_b = [J^{-1}] \left(-\dot{\theta}_b \times ([J] \dot{\theta}_b) + \sum T_b \right) \quad [rad/s^2] \quad (24)$$

En la ecuación, $\sum T_b$ incluye los torques producidos por la sustentación aerodinámica y el torque por gradiente gravitacional (este último es opcional y disponible en el módulo *Gravitational*). Al igual que para las fuerzas, al ser de carácter aditivo, queda disponible y simplificada la inclusión de efectos del viento.

6.10.3 Modelo para variación de masa

Como se menciona antes, la inercia no se propaga en este modelo, por lo que solo se considera la variación de la masa del cohete. Ésta coincide con el flujo másico a la salida de la tobera, por lo que la ecuación de la derivada de la masa queda como

$$\dot{m} = -\dot{m}_{burn} \quad [kg/s] \quad (25)$$

6.11 Módulo principal de simulación

Aquí es dónde el usuario ingresa las variables iniciales para que el mismo módulo inicialice y cree los objetos necesarios mediante las clases de los módulos *Planet*, *Atmosphere* y *Rocket*. Además, aquí se ordena la secuencia de simulación mediante la cual se obtendrán los valores de trayectoria y actitud (y otra información dependiendo de lo que se quiera evaluar).

Para comenzar, el usuario debe ingresar los valores correspondientes a los siguientes parámetros

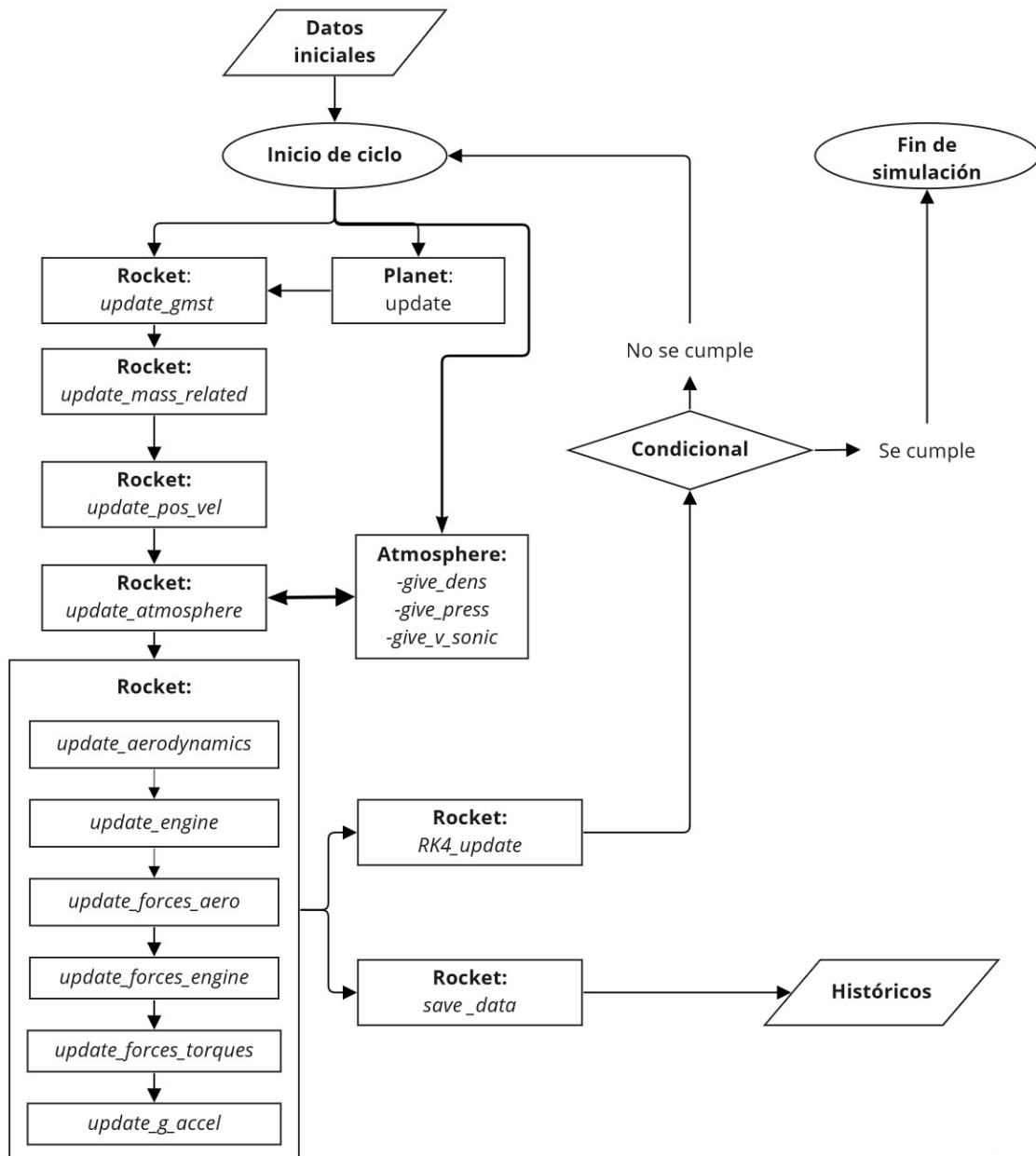
- Tiempo de simulación en $[s]$
- Paso de tiempo de cada ciclo en $[s]$
- Fecha y hora $[año, mes, día, hora, minuto, segundo]$
- Coordenadas de la plataforma de lanzamiento en $[^{\circ}]$ y $[m]$
- Velocidad de la plataforma de lanzamiento en coordenadas Norte-Este (ENU) en $[m/s]$
- Orientación del cohete en coordenadas Norte-Este e inclinación en $[^{\circ}]$
- Velocidad rotacional del cohete sobre la plataforma $[rad/s]$
- Temperatura ambiental en $[^{\circ}C]$
- Altitud y alcance máximo¹⁶ en $[m]$

Luego de ingresar la información inicial, el módulo está programado para inicializar automáticamente esta información y distribuirla a cada módulo que la requiera.

Finalmente, sigue la simulación realizada en bucle hasta que se cumpla una condición establecida (como el aterrizaje del cohete) o se acabe el tiempo de simulación ingresado como variable inicial. La Figura 6.5 muestra la secuencia establecida

¹⁶ Sirven para detener la simulación cuando estos valores sobrepasan lo esperado. Así, la simulación no toma tiempo innecesario

Figura 6.5 Secuencia de simulación



Fuente: Autor

6.12 Archivos de simulación

Con tal de resumir la función de cada módulo, se listan y describen los archivos que los contienen en la Tabla 6.8

Tabla 6.8 Archivos del simulador

Archivo	Descripción
Aerodynamics.py	Contiene la clase <i>Aerodynamics</i> la cual calcula parámetros aerodinámicos (coeficientes aerodinámicos, centro de presiones, etc.)
Atmosphere.py	Contiene la clase <i>Atmosphere</i> encargada de entregar parámetros atmosféricos (temperatura, presión, etc.) mediante el modelo de Atmósfera Estándar de 1976
Clock.py	Contiene la clase instanciada <i>Clock</i> la cual entrega valores relacionados al tiempo (fecha y hora actual, Día Juliano, etc.)
Engine.py	Contiene la clase <i>Engine</i> encargada de entregar parámetros de operación del motor cohete
GeoTools.py	Contiene funciones relacionadas a la transformación entre sistemas de referencia y coordenadas
Gravitational.py	Contiene funciones encargadas de calcular parámetros asociados a la aceleración gravitacional
Main_Simulator.py	Recibe e inicializa los datos iniciales solicitados. Ordena la secuencia de simulación.
MatTools.py	Contiene funciones encargadas de realizar operaciones matemáticas
Planet.py	Contiene la clase <i>Planet</i> encargada de actualizar el <i>Greenwich Mean Sidereal Time</i>
Rocket.py	Contiene la clase <i>Rocket</i> encargada de realizar todos los cálculos relacionados a la misión del cohete y guardar la información obtenida. Realiza la comunicación con el resto de los módulos.

Fuente: Autor

CAPÍTULO 7: Simulación y resultados

En este capítulo, se presentan los resultados obtenidos del simulador para el caso específico de estudio. Se realizan dos simulaciones: sin rotación y con rotación. La diferencia radica en la presencia o ausencia de torques externos

7.1 Datos de simulación

En esta sección se establecen los parámetros generales ingresados al simulador para la obtención de resultados. La Tabla 7.1 listas dichos parámetros

Tabla 7.1 Lista de parámetros iniciales de simulación

Parámetros	Valor del parámetro
Tiempo de simulación máximo	60 [s]
Paso de tiempo (dt)	0,001 [s]
Fecha y hora	16 de mayo de 2022 a las 00:00:00 horas
Latitud	-36°
Longitud	-70°
Altitud	0 [m]
Velocidad inicial (<i>East-North-Up</i>)	0 [m/s]
Dirección (<i>yaw</i>) ¹⁷	0°
Elevación (<i>pitch</i>)	45°
Giro axial (<i>roll</i>)	0°
Velocidad rotacional inicial (<i>East-North-Up</i>)	0 [rad/s]
Temperatura ambiental en plataforma	25 °C
Altitud máxima	5.000 [m]
Alcance horizontal máximo	12.000 [m]

Fuente: Autor

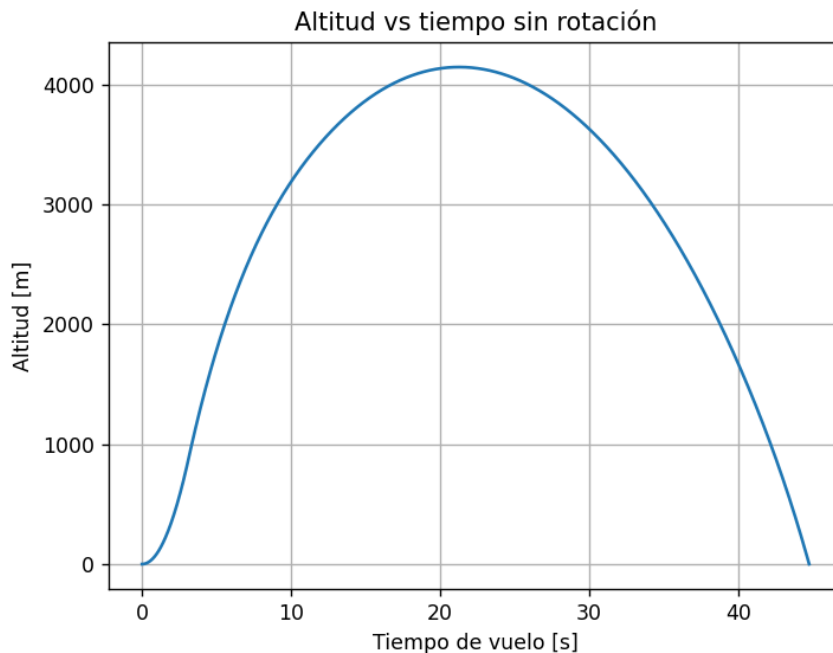
¹⁷ Debido al sistema *East-North-Up*, 0° en *yaw* indica que el cohete apunta hacia el Este

Si bien se espera que la carga detone al volver a pasar por los 1.100 metros (o 900 metros según previa configuración de la espoleta), la simulación se realiza hasta que el cohete aterriza. El fin de esto es observar el comportamiento que tendría durante toda la trayectoria.

7.2 Resultados de simulación sin rotación

En esta sección se presentan los resultados de simulación sin considerar la presencia de torques externos sobre el cohete, los cuales generarían los cambios de actitud. La Figura 7.1 muestra la trayectoria según el tiempo de simulación

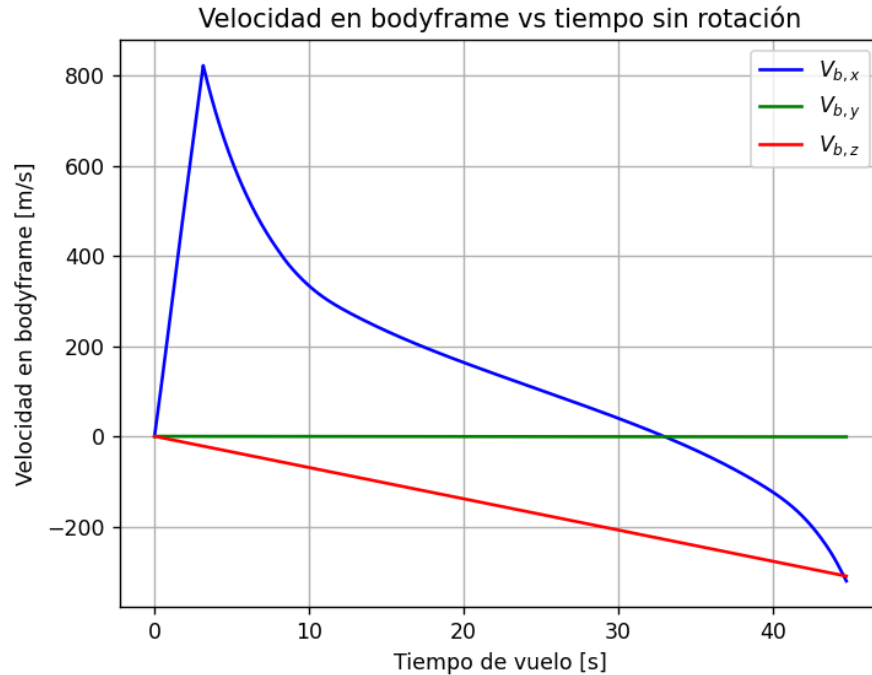
Figura 7.1 Altitud vs tiempo. Vuelo sin rotación



Fuente: Autor

El vuelo dura 44,763 segundos y su altitud máxima es de 4.147,862 metros (a los 21,286 segundos). La Figura 7.2 muestra la velocidad del cohete evaluada desde el *bodyframe*. Esto con el fin de observar si se producen ángulos de ataque y en qué planos del *bodyframe*.

Figura 7.2 Velocidades en *bodyframe* vs tiempo. Vuelo sin rotación



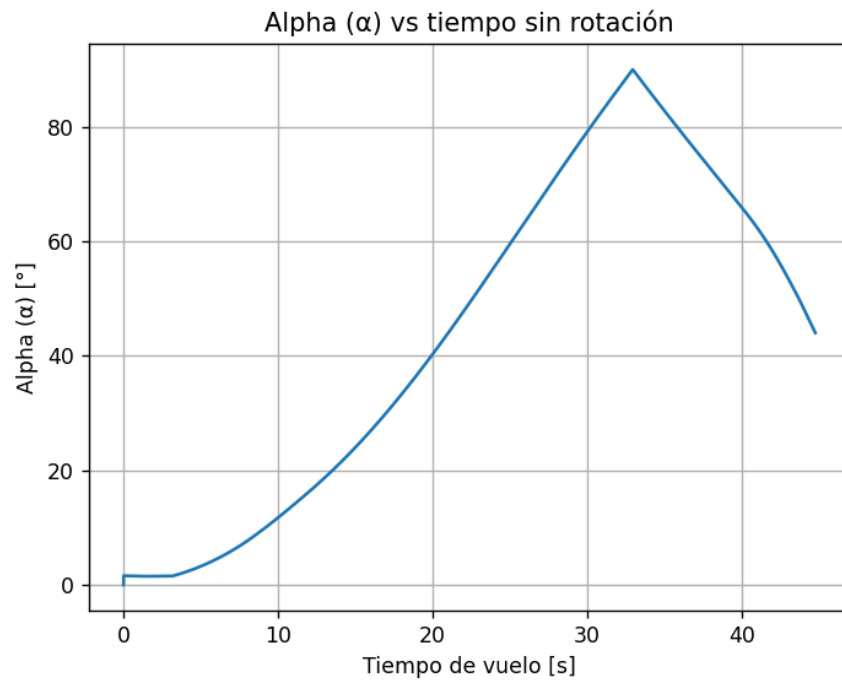
Fuente: Autor

Como se puede observar, al no considerar torques sobre el cohete, se observa que la componente $V_{b,z}$ de la velocidad no es 0 metros por segundo, lo que indica la presencia de ángulo de ataque en el plano **XZ**, el cual está relacionado con *pitch* del cohete. También se observa que la componente $V_{b,y}$ sí se mantiene en 0 metros por segundo, lo que indica la ausencia de ángulo de ataque en el plano **XY** del *bodyframe*, relacionado con el *yaw*.

Cabe también señalar que la componente $V_{b,x}$ pasa por valores negativos hacia el final del vuelo. Esto se produce debido a que, en esta etapa de la trayectoria, el cohete cae en 45° respecto a la horizontal de la plataforma mientras que su velocidad se encuentra en el tercer cuadrante del plano **XZ**.

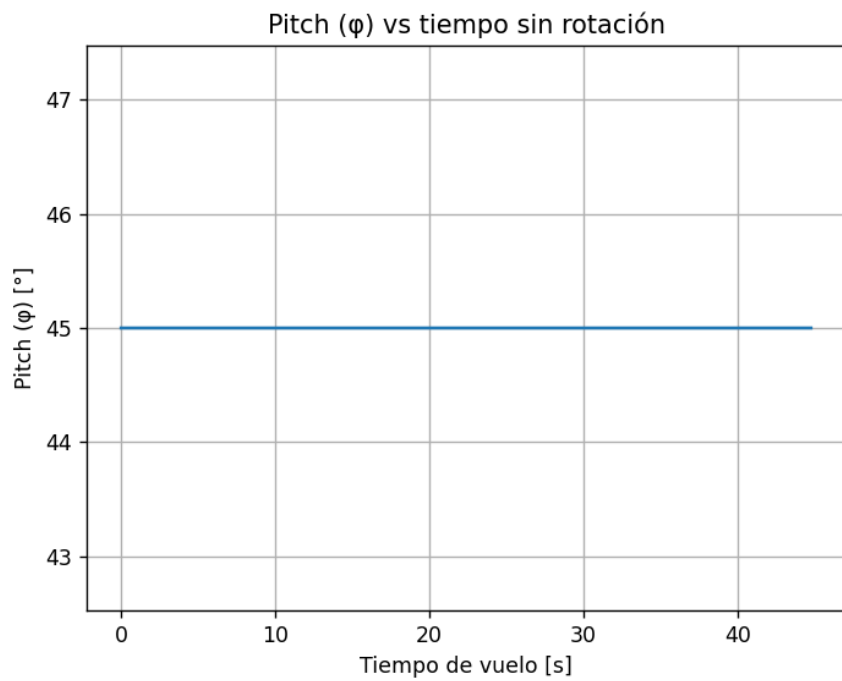
En la Figura 7.3 y la Figura 7.4 se ilustra la variación del ángulo de ataque en el plano **XZ** y el *pitch* constante durante el vuelo.

Figura 7.3 Ángulo de ataque vs tiempo. Vuelo sin rotación



Fuente: Autor

Figura 7.4 Elevación (pitch) vs tiempo. Vuelo sin rotación



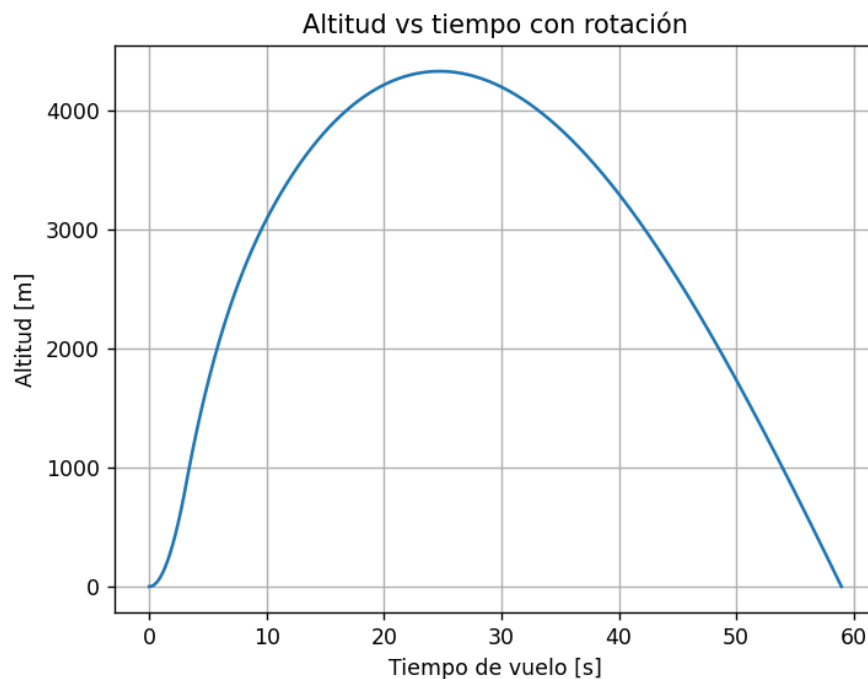
Fuente: Autor

Como es de esperarse, el ángulo de ataque tiene el valor de 45,027 grados al pasar por la altitud máxima a los 21,286 segundos, mientras que este ángulo alcanza su valor máximo después de pasar por este punto para disminuir gradualmente a medida que cae hasta aterrizar.

7.3 Resultado de simulación con rotación

En esta sección se presenta los resultados de la simulación que sí considera los torques sobre el cohete, en este caso en especial, los torques aerodinámicos producidos debido a la presencia de ángulo de ataque en el plano **XZ**. La Figura 7.5 muestra la altitud en función del tiempo

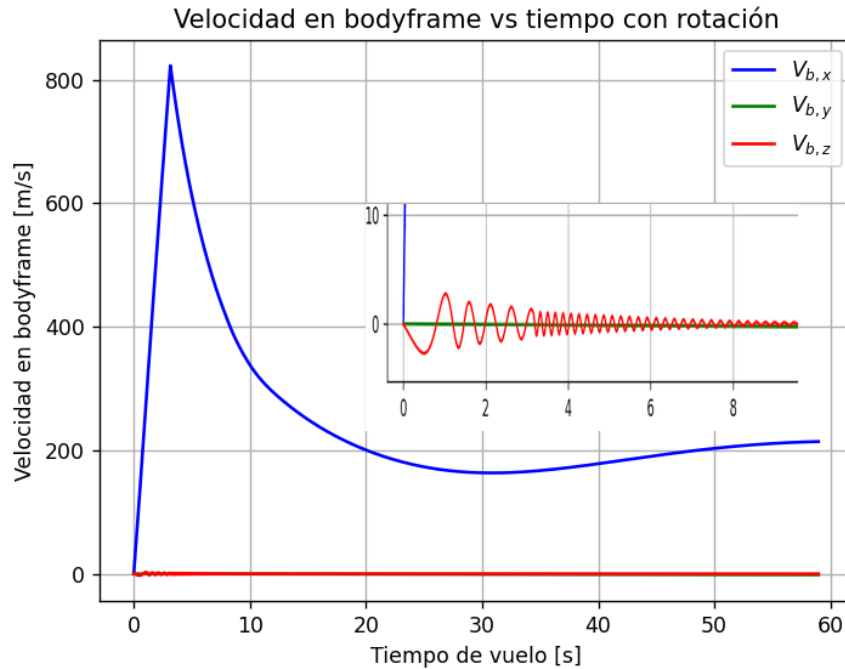
Figura 7.5 Altitud vs tiempo. Vuelo con rotación



Fuente: Autor

El vuelo dura 58,966 segundos y su altitud máxima es de 4.326,261 metros (a los 24,729 segundos). La Figura 7.6 muestra la velocidad del cohete evaluada desde el *bodyframe*.

Figura 7.6 Velocidades en *bodyframe* vs tiempo. Vuelo con rotación

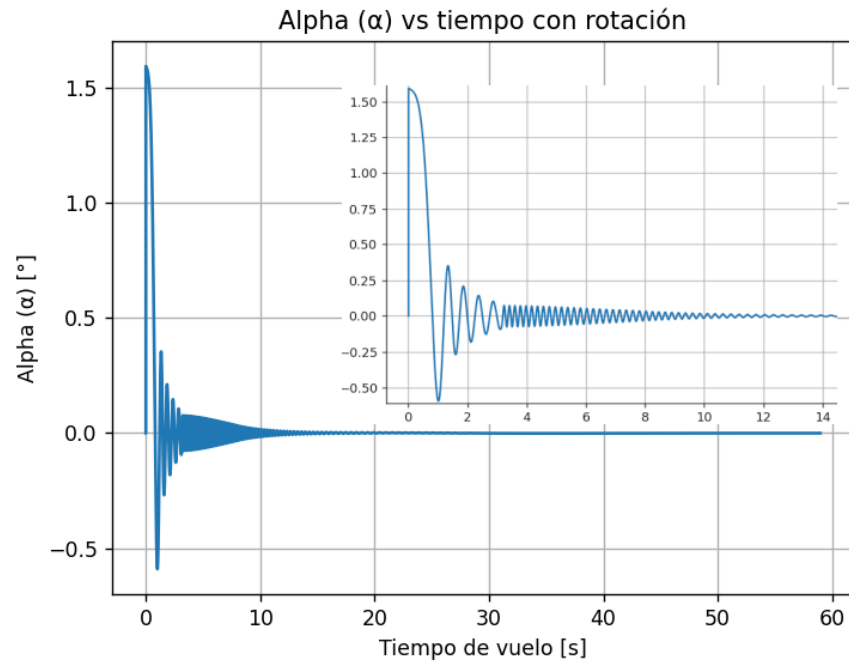
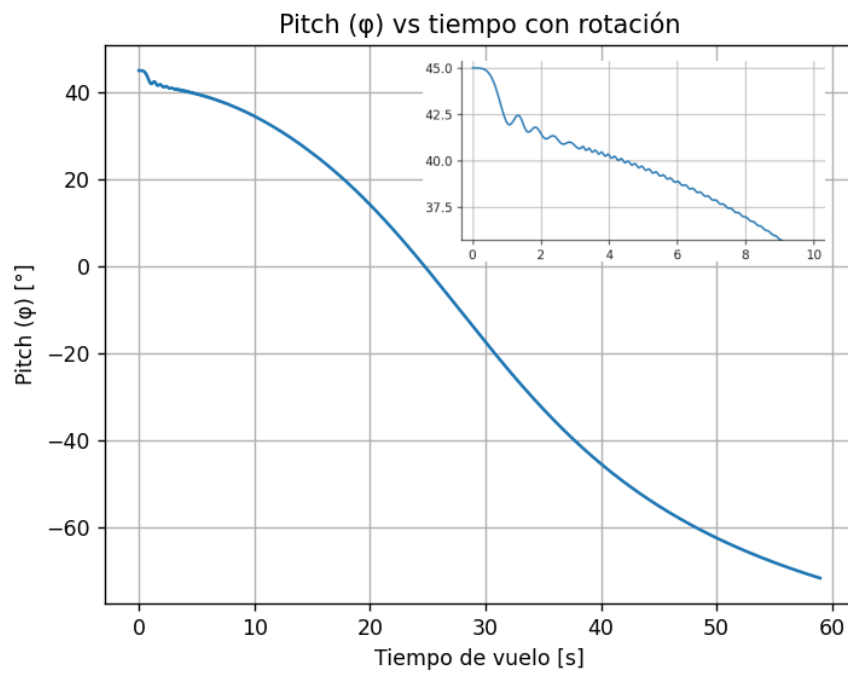


Fuente: Autor

En este caso, el existir torques aerodinámicos producto del ángulo de ataque, la componente $V_{b,z}$ se aproxima a cero de manera gradual y cíclica en el tiempo, mientras que la componente $V_{b,y}$ se mantiene en 0 metros por segundo. Esto coincide con la tendencia a 0° del ángulo de ataque ilustrado en la Figura 7.7, también de manera gradual y cíclica.

Al tener estas dos componentes el valor de 0 metros por segundo, la componente $V_{b,x}$ es la única que posee un valor diferente de cero, esta vez, sin tomar valores negativos, indicando que el eje axial del cohete coincide, durante casi todo el vuelo (menos durante la etapa cíclica de la componente $V_{b,z}$) con la tangente de la trayectoria (o velocidad).

La Figura 7.7 y la Figura 7.8 muestran la variación del ángulo de ataque en el plano **XZ** y la variación del *pitch*.

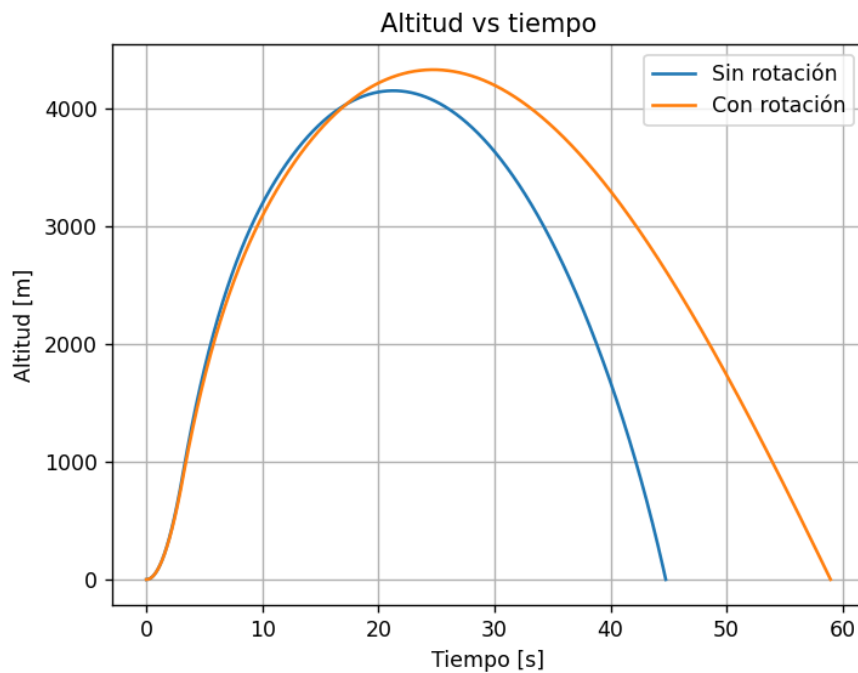
Figura 7.7 Ángulo de ataque vs tiempo. Vuelo con rotación**Fuente:** Autor**Figura 7.8 Elevación (pitch) vs tiempo. Vuelo con rotación****Fuente:** Autor

Como es de esperarse, el ángulo de ataque se aproxima cíclica y gradualmente a 0 grados al principio de la trayectoria y se mantiene en este valor hasta el final del vuelo. En el caso del *pitch*, éste varía cíclicamente durante los primeros segundos al igual que el ángulo de ataque y la componente $V_{b,z}$ y toma el valor de -0,016 grados en la altitud máxima, el cual se puede aproximar a 0 grados. Esto tiene sentido considerando que la tangente de la trayectoria en el punto de máxima altitud debe ser paralela a la horizontal de la plataforma de lanzamiento.

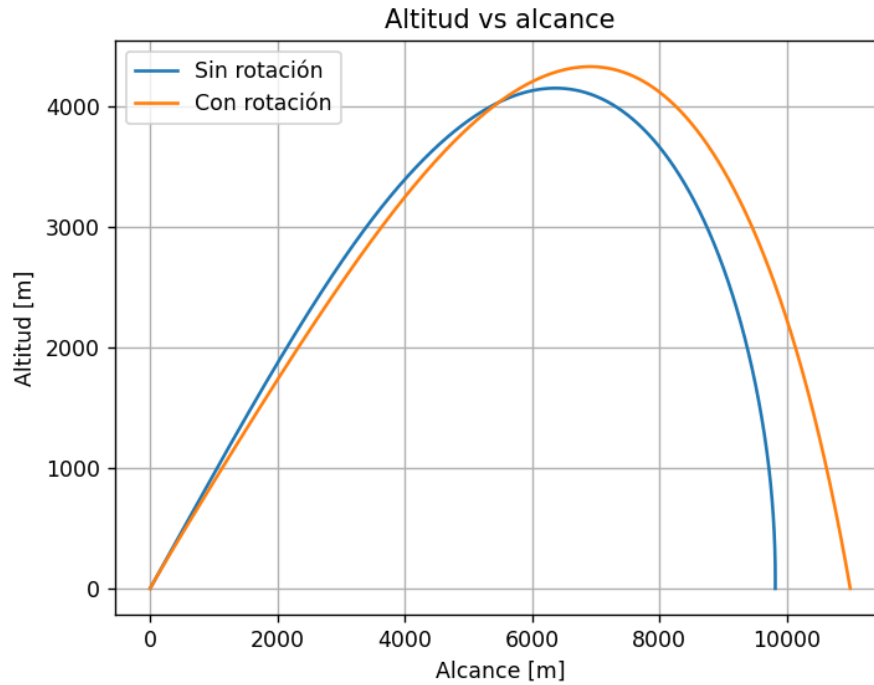
7.4 Comparación de resultados

En esta sección se comparan los resultados de las secciones previas para destacar la importancia de considerar el cohete como un cuerpo con movimiento en sus seis grados de libertad. La Figura 7.9 muestra la comparación de ambos casos para la altitud en función del tiempo, mientras que la Figura 7.10, muestra la misma comparación, pero en función del alcance horizontal.

Figura 7.9 Comparación de altitud vs tiempo



Fuente: Autor

Figura 7.10 Comparación de altitud vs alcance horizontal**Fuente:** Autor

La Tabla 7.2 muestra las diferencias más relevantes entre ambos casos

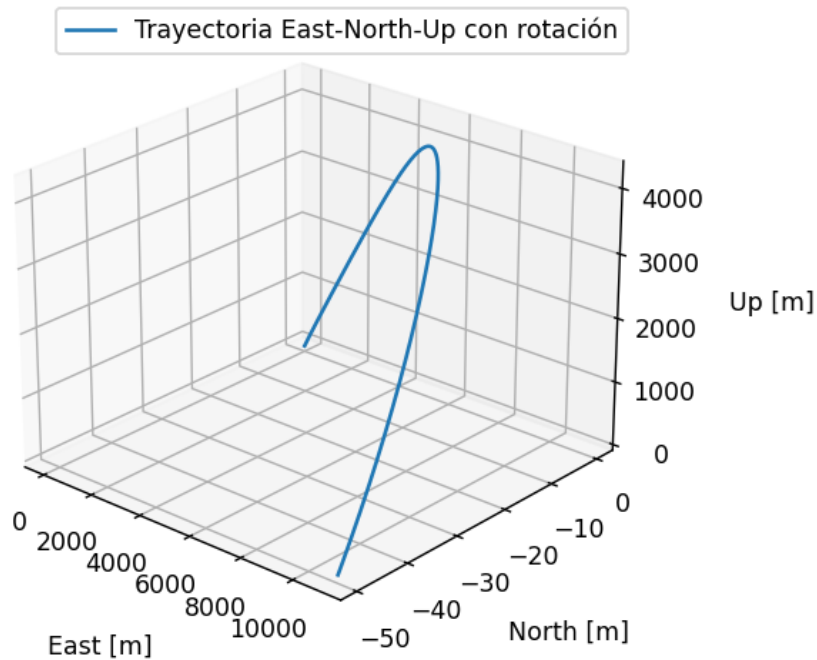
Tabla 7.2 Diferencia entre vuelo sin rotación y con rotación

Parámetro	Sin rotación	Con rotación	Diferencia
Tiempo de vuelo [s]	44,763	58,966	14,203
Tiempo de altitud máxima [s]	21,286	24,729	3,443
Altitud máxima [m]	4.147,862	4.326,261	178,399
Alcance máximo [m]	9.821,008	10.998,930	1.177,922
Pitch en altitud máxima [°]	45,000	−0,016	44,984
Angulo de ataque en altitud máxima [°]	45,027	0,000	45,027

Fuente: Autor

Finalmente, se presenta una proyección tridimensional de la trayectoria en la cual se aprecia el efecto de la aceleración gravitacional sobre la trayectoria del cohete. Para esto, se utiliza el caso con rotación. La Figura 7.11 presenta el efecto mencionado

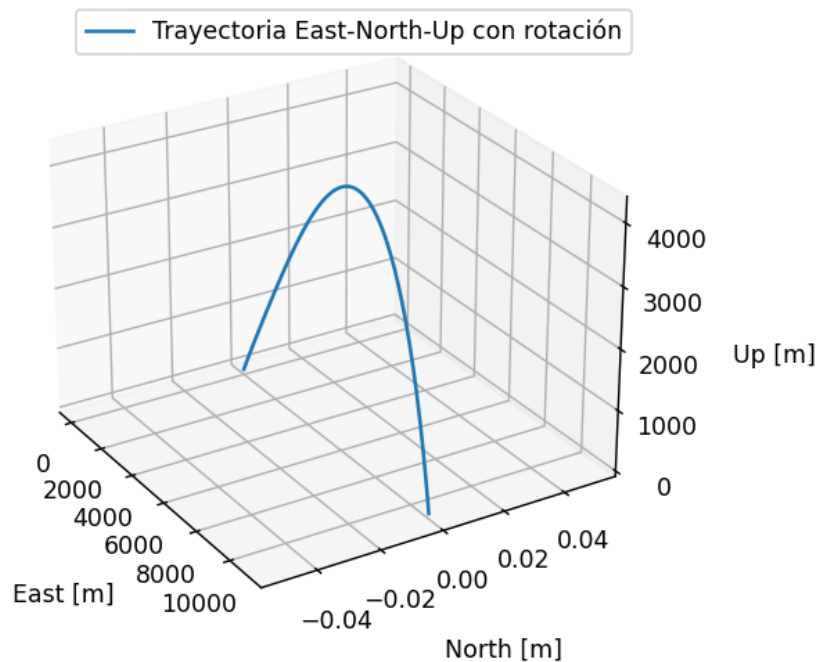
Figura 7.11 Trayectoria tridimensional en *North-East-Up* del vuelo con rotación. Caso 1



Fuente: Autor

Si bien el cohete se lanza en dirección hacia el Este, el vehículo se desvía 50 metros aproximadamente hacia el sur (-50 metros Norte). Esto se debe a que el vector de aceleración gravitacional no necesariamente es paralelo al vector direccional de la altitud (o *Up* en la figura según el sistema *East-North-Up*). La aceleración gravitacional en este caso es paralela y colineal (pero de sentido contrario) a la posición del vehículo en el sistema *Earth Centered-Earth Fixed*. La Figura 7.12 presenta la trayectoria tridimensional del cohete al considerar el vector de aceleración gravitacional siempre paralelo al vector direccional de la altitud (*Up*).

Figura 7.12 Trayectoria tridimensional en North-East-Up del vuelo con rotación. Caso 2

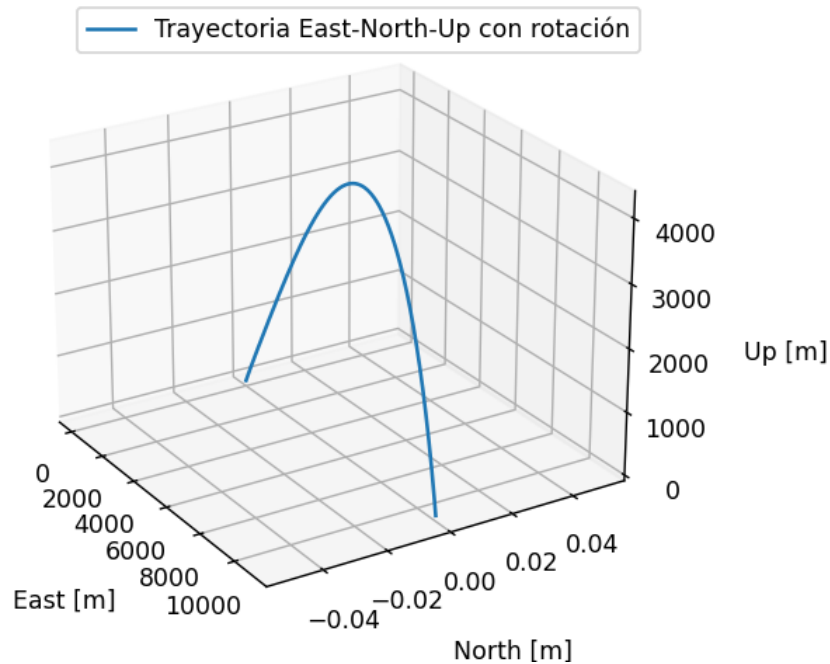


Fuente: Autor

Al considerar el vector de aceleración gravitacional de esta manera, el cohete no es desviado de su trayectoria. Aun así, se debe considerar el primer caso (con el desvío de trayectoria) ya que la aceleración gravitacional siempre es paralela al vector de posición que apunta hacia el centro de la Tierra, el cual no siempre coincide con el vector perpendicular a la plataforma de lanzamiento en su plano local (el vector altitud o Up).

Esto se comprueba con un lanzamiento hacia el Este en una latitud de cero grados y con el vector de aceleración apuntando hacia el centro terrestre. En este caso, este vector apunta al centro terrestre y a la vez es paralelo al vector direccional perpendicular a la plataforma de lanzamiento. La Figura 7.13 ilustra lo expuesto

Figura 7.13 Trayectoria tridimensional en North-East-Up del vuelo con rotación. Caso 3



Fuente: Autor

La figura muestra un resultado similar al de la Figura 7.12. Con esto se comprueba que el desvío de la trayectoria depende exclusivamente de las coordenadas geodésicas de la plataforma de lanzamiento debido a que el vector perpendicular a la horizontal de la plataforma de lanzamiento coincide con el vector de aceleración gravitacional dependiendo de las coordenadas geodésicas.

Con todo esto, para la discusión de resultados y comparación con la literatura disponible, el caso a considerar es el que considera los torques externos sobre el cohete (es decir, con rotación) y cuyo vector de aceleración gravitacional apunta siempre hacia el centro de la Tierra.

CAPÍTULO 8: Discusión de resultados

En este capítulo, se comparan los resultados del vuelo con rotación (y vector de aceleración gravitacional apuntado hacia el centro terrestre) obtenidos en el capítulo anterior con la información y resultados obtenidos por otros autores.

8.1 Resultados de trayectoria

En esta sección, se comparan los resultados de trayectoria del Capítulo 7 con la información provista por la Armada de Chile y FAMAE, y los resultados obtenidos por Vallejos en su Memoria de Título (Vallejos Osses, 2021). La Tabla 8.1 presenta estos resultados

Tabla 8.1 Comparación de parámetros de trayectoria

Parámetro	Armada de Chile y FAMAE	Vallejos	Autor
Tiempo de vuelo [s]	60,0	57,0	54,5
Altitud máxima [m]	5.000,0	3.982,0	4.326,3
Alcance horizontal máximo [m]	10.000,0	9.083,0	10.998,9
Número de Mach máximo [–]	–	2,3	2,4
Velocidad máxima [m/s]	–	781,0	823,0
Fuerza de arrastre máxima [N]	–	946,0	838,5

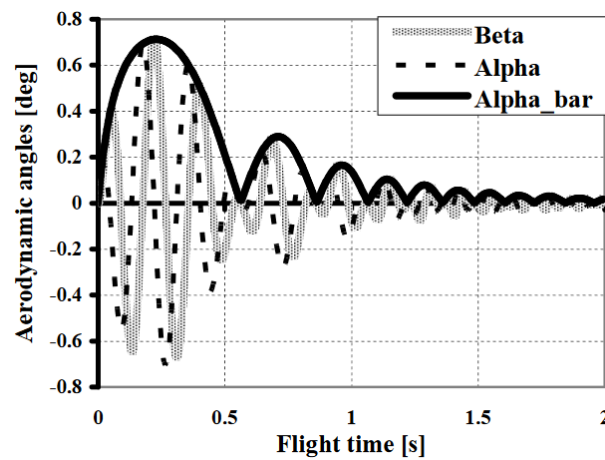
Fuente: Autor

Como se puede observar, existen diferencias claras en cuanto a lo que indican FAMAE y la Armada de Chile respecto a los resultados obtenidos por Vallejos y lo obtenido con el simulador de este proyecto. En el Anexo J: Resultados de Vallejos y el autor, se comparan los resultados gráficos obtenidos por Vallejos y el autor en los cuales se aprecia el comportamiento similar de la curva de trayectoria de ambas simulaciones.

8.2 Resultados de actitud

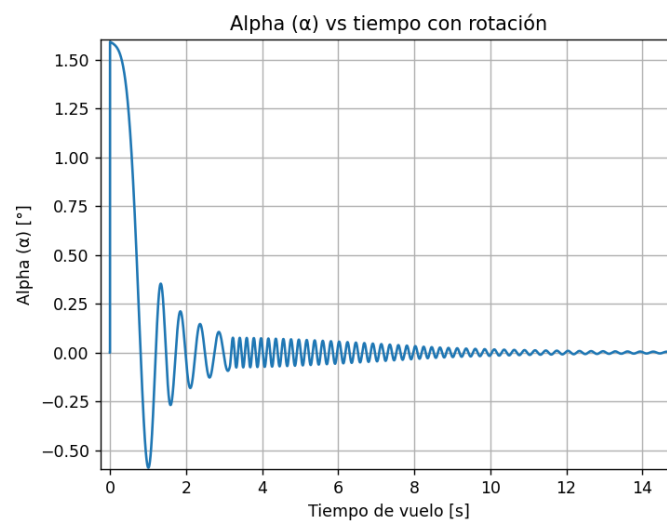
En esta sección se compara la actitud del cohete de estudio con los resultados del cohete balístico simulado por Mostafa y su equipo (Mostafa, Mahmoud, & Abdalla, 2009). La Figura 8.1 y la Figura 8.2 muestran el comportamiento del ángulo de ataque de ambos cohetes durante los primeros segundos.

Figura 8.1 Variación del ángulo de ataque según Mostafa y su equipo



Fuente: (Mostafa, Mahmoud, & Abdalla, 2009)

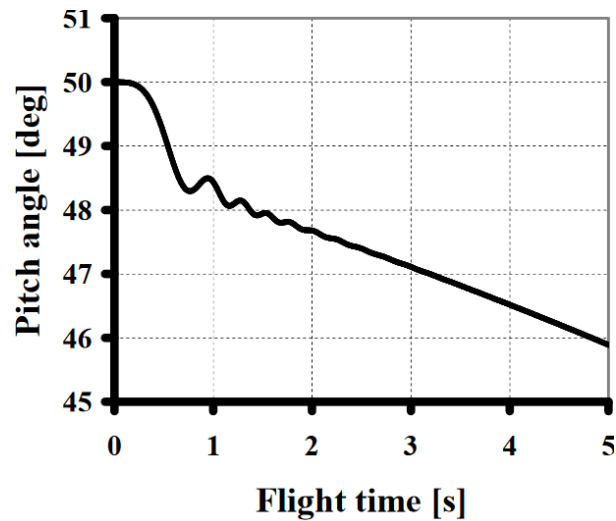
Figura 8.2 Variación del ángulo de ataque según autor



Fuente: Autor

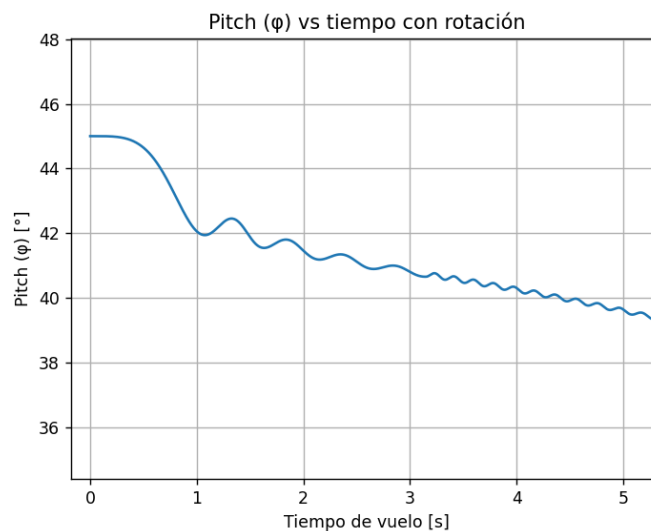
Como se puede observar de las figuras, el ángulo de ataque, en ambos casos, disminuye cíclica y gradualmente hasta llegar a cero grados para ambas simulaciones. Este mismo comportamiento se observa en la variación del ángulo de *pitch* durante los primeros segundos ilustrado en la Figura 8.3 y la Figura 8.4

Figura 8.3 Variación del ángulo de *pitch* según Mostafa y su equipo



Fuente: (Mostafa, Mahmoud, & Abdalla, 2009)

Figura 8.4 Variación del ángulo de *pitch* según autor



Fuente: Autor

CAPÍTULO 9: Conclusiones y propuestas de mejora a futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones de los resultados obtenidos y se proponen mejoras para el futuro del simulador creado en este proyecto.

9.1 Conclusiones

- En base a los resultados obtenidos para la trayectoria y comparados con los resultados presentados por Vallejos (Vallejos Osses, 2021) y los parámetros técnicos provistos por la Armada de Chile, se concluye que se ha generado un simulador capaz de modelar la trayectoria de un cohete balístico durante el vuelo.
- En base a los resultados obtenidos para la actitud y comparados con el trabajo de Mostafa y su equipo (Mostafa, Mahmoud, & Abdalla, 2009), se concluye que el simulador es capaz de modelar la variación de la actitud del cohete durante el vuelo, principalmente la variación del *pitch*.
- Las interacciones relevantes del cohete con el ambiente se resumen y reflejan en los coeficientes aerodinámicos. En esto, la geometría externa del cohete y las condiciones ambientales (temperatura, densidad, presión atmosférica, etc) son clave e imprescindibles para la operación del simulador.
- Los sistemas de referencia a utilizar resultan de suma relevancia a la hora calcular tanto la trayectoria y la actitud. En cuanto a la trayectoria, el efecto de la aceleración gravitacional terrestre genera un desvío del cohete de hasta 50 metros en el caso específico de estudio. En el caso de la actitud, ésta depende completamente del sistema de referencia local, ya que es según este sistema que se evalúa dicho parámetro.
- Los sistemas de referencia clave durante el proyecto han sido el *Earth Centered-Earth Fixed*, el *East-North-Up* y el *bodyframe*. Aún así, para casos de mayor altitud o tiempo de vuelo esperados, es necesario considerar el sistema *Earth Centered Inertial*.

- En cuanto a los coeficientes aerodinámicos, resulta recomendable un método de obtención que abarque todos los ángulos de ataque posibles (hasta 90°) ya sea mediante simulación por *CFD* al igual que el proyecto llevado a cabo por Vallejos, o mediante un método aritmético como el propuesto por Barrowman y utilizado en este proyecto. Esto es debido a que, al no poseer dichos coeficientes, no es posible evaluar el efecto de los vientos transversales al eje axial del cohete.
- Relacionado también a los coeficientes aerodinámicos, se concluye que los parámetros utilizados son válidos para altitudes máximas de 5.000 metros (Capítulo 3) y deben ser evaluados para mayores altitudes.

9.2 Propuestas de trabajo a futuro

- A la hora de establecer el *yaw* inicial del cohete en otra dirección que no sea el Este, el simulador obtiene resultados que no resultan coherentes con la realidad. Debido a esto, es necesario mejorar el uso de los cuaterniones involucrados ya sea mediante las bibliotecas de Python empleadas o en las operaciones matemáticas propias de los cuaterniones provistas por los módulos *GeoTools* y *MatTools*
- Utilizar un sistema de referencia local diferente al *East-North-Up* para evitar los errores debido a la circunferencia de la tierra a partir de los 4.000 metros y, de requerir una mayor precisión, considerar las ondulaciones terrestres según el sistema utilizado basado en la región de lanzamiento¹⁸.
- Como punto adicional relacionado a los sistemas de referencia, considerar el uso del sistema *Earth Centered Inertial* disponible en el simulador para casos en los que se estime altitud, alcance horizontal y tiempo de vuelo mayores como, por ejemplo, el caso de un cohete sonda.

¹⁸ En el caso de Chile, se utiliza el Modelo Gravimétrico Mundial de 1996 (EGM96) [31]. Estas undulaciones pueden indicar la diferencia de altitud en una localización geodésica del orden de 100 metros, según la región

- Disponer de coeficientes de fuerza normal para ángulos de ataque mayores a 10° y evitar asumir ángulos de ataque bajos que permitan igualar los coeficientes fuerza normal y axial con los de sustentación y arrastre, respectivamente.
- Seguido de lo anterior, realizar una evaluación de los alcances y posibles variaciones del método de Barrowman para considerar ángulos mayores. Esto puede llevarse a cabo mediante simulación por *CFD* para los coeficientes de fuerza normal (y posición del centro de presión aerodinámico) a diferentes ángulos de ataque para comparar los resultados de los métodos disponibles.
- Incorporar el efecto de los vientos en diferentes direcciones sobre la trayectoria y actitud. Al considerar componentes de la dirección del viento normales a la dirección axial del cohete, se producen ángulos de ataque de hasta 90° , lo que no se puede evaluar con el método de Barrowman utilizado en este proyecto.
- Disponer de un perfil de velocidades de viento que refleje con mayor precisión la realidad para ambientes marítimos. Uno de los puntos importantes a considerar es la fluctuación de la velocidad del viento (en magnitud y dirección).
- Ligado a los puntos sobre fuerzas aerodinámicas, es necesario establecer un modelo atmosférico capaz de ajustarse con mayor fidelidad al ambiente real de lanzamiento. Para ello, la comparación entre diferentes modelos, o la medición de parámetros de dicha índole, son opciones válidas para dicho fin
- Así mismo, obtener la curva de variación de la inercia y centro de masa respecto al tiempo para evitar el uso de estos parámetros solo antes y después de la combustión. Esto puede conseguirse conociendo la geometría del propelente en diferentes instantes de la combustión y generar una curva de estos parámetros mediante el uso de Autodesk Inventor.

Bibliografia

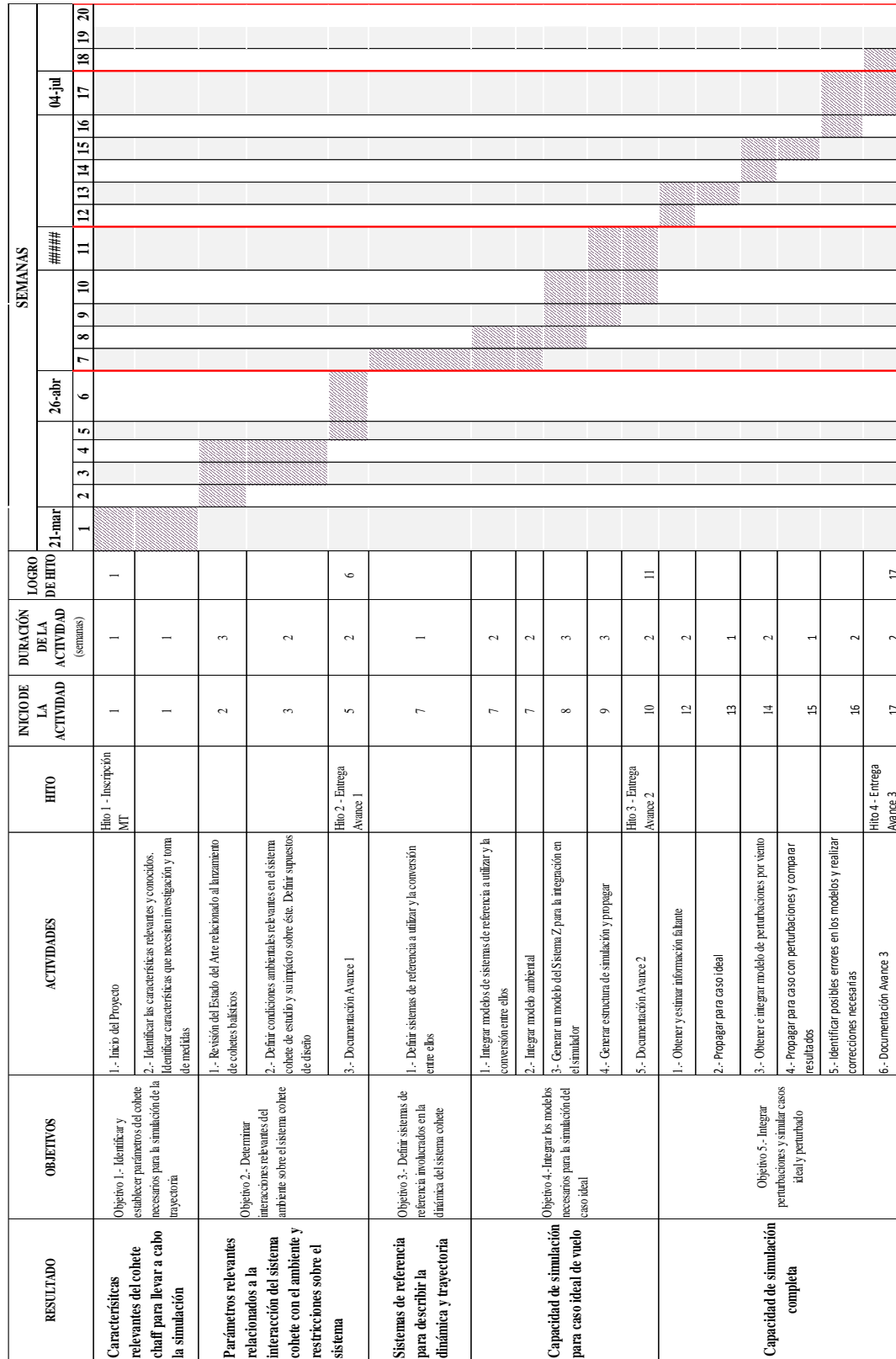
- Advisory Group for Aerospace Research and Development of NATO. (1970). *Wind Effects on Launch Vehicles*. Huntsville: Technivision Services Slough.
- Baldesi, G., & Toso, M. (2021). *ESA Launcher Flight Dynamics Simulator Used for System and Subsystem Level Analyses*. Noordwijk.
- Barrowman, J. (1967). *The Practical Calculation of the Aerodynamic Characteristics of Slender Finned Vehicles*. Washington, D.C.
- Beaulne, P., & Sikaneta, I. (2005). *A Simple and Precise Approach to Position and Velocity Estimation of Low Earth Orbit Satellites*. Ottawa.
- Bell, C. (2021). *fluids: Fluid dynamics component of Chemical Engineering Design Library (ChEDL)*. Obtenido de <https://github.com/CalebBell/fluids>
- Box, S., Bishop, C., & Hunt, H. (2009). *Estimating the dynamic and aerodynamic parameters of passively controlled high power rockets for flight simulation*.
- Braeunig, R. (2020). *Aerodynamics*. Obtenido de http://www.braeunig.us/space/aerodyn_wip.htm
- Curtis, H. (2020). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Daytona Beach: Elsevier.
- da Silveira, G., & Carrara, V. (2015). A Six Degrees-of-Freedom Flight Dynamics Simulation Tool of Launch Vehicles. *Journal of Aerospace Technology and Management*.
- Department of Geoscience, University of Alaska Fairbanks. (2019). *Coordinate Conversions*. Obtenido de http://www.grapenthin.org/teaching/geodesy/LAB02_linear_algebra_coordinates.html
- Donnelly, N. (2012). Determining Coordinates in a Local Reference Frame from Absolute ITRF Positions A New Zealand Case Study.
- Du, Y., Zhang, F., Xu, T., Gao, F., & Xu, G. (2021). Correction of precession-nutation and polar motion in analytical solutions of satellite. *Elsevier (Advances in Space Research)*.
- Fleeman, E. (2001). *Tactical Missile Design*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- Gray, D. (1964). *Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2*. Tennessee: Defense Technical Information Center.
- Gray, S. A. (2014). *Planetary Atmosphere Models: A Research and Instructional Web-Based Resource*. Tuscaloosa.
- Janssens, F., & van der Ha, J. (2005). Jet-Damping and Misalignment Effects During Solid-Rocket-Motor Burn. *Journal of Guidance, Control, and Dynamic*.

- Johnson, D., & Vaugham, W. (2020). The Wind Environment Interactions Relative to Launch Vehicle Design. *Journal of Aerospace Technology and Management*.
- Ketchledge, D. (1993). Active guidance and dynamics for model rockets. *High Power Rocketry*.
- Kuna, D., Santhosh, N., & Perumalla, N. (2019). Preliminary Analysis of Standalone Galileo and NavIC in the context of Positioning Performance for Low Latitude Region. *Third International Conference on Computing and Network Communications (CoCoNet'19)*. Telengana.
- Mooji, I. (1994). *The Motion of a Vehicle in a Planetary Atmosphere*. Delft.
- Mostafa, K., Mahmoud, O., & Abdalla, H. (2009). Trajectory Prediction for a Typical Fin Stabilized Artillery Rocket. *Aerospace Sciences and Aviation Technology*. Cairo.
- Murcia Piñeros, J., & Portilla, J. (2014). A Preliminary Study of the Placement of an Artificial Satellite by a Rocket Launched from Colombian Territory. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*.
- National Aeronautics and Space Administration. (Octubre de 1976). *US Standard Atmosphere, 1976*. Obtenido de https://www.ngdc.noaa.gov/stp/space-weather/online-publications/miscellaneous/us-standard-atmosphere-1976/us-standard-atmosphere_st76-1562_noaa.pdf
- Orozco García, J. A. (2021). *Propuesta inicial de simulación de trayectoria y actitud de cohetes*. Concepción.
- Pryss, R., Geiger, P., Schickler, M., Schobel, J., & Reichert, M. (2016). Advanced Algorithms for Location-Based Smart Mobile Augmented Reality Applications. *The 13th International Conference on Mobile Systems and Pervasive Computing (MobiSPC 2016)*. Ulm.
- Quadrelli, M., Cameron, J., Balaram, B., Baranwal, M., & Bruno, A. (2014). Modeling and Simulation of Flight Dynamics of Variable Mass Systems. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*. San Diego.
- Regan, F., & Anandakrishnan, S. (1993). *Dynamics of Atmospheric Re-Entry*. Maryland: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- Schaub, H. (2017). *Kinetics: Studying Spacecraft Motion*. Obtenido de <https://www.coursera.org/lecture/spacecraft-dynamics-kinetics/1-1-gravity-gradient-torque-in-body-frame-polU2>
- Seemkoei, A. (2022). Comparison of Different Algorithms to Transform Geocentric to Geodetic.
- Shahid, F., Hussain, M., Baig, M., & ul Haq, I. (2017). Variation in aerodynamic coefficients with altitude. *Elsevier*.
- Srinath, K. (2017). Python – The Fastest Growing Programming Language. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*.

- Torres, A. (2020). Reusable Rockets and the Environment. *UC Merced Undergraduate Research Journal*.
- Vallado, D., & McClain, W. (2013). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Space Technology Library.
- Vallejos Osses, C. R. (2021). *Mejora del alcance de un cohete chaff*. Concepción.

Anexo A: Carta Gantt de proyecto de Memoria de Título

Figura 11.1 Carta Gantt de proyecto de Memoria de Título

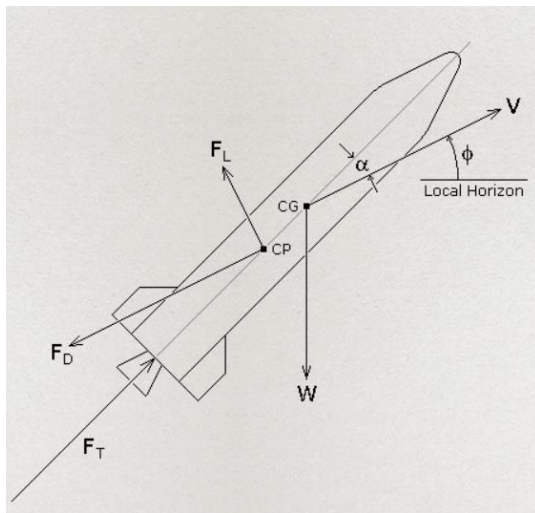


Fuente: Autor

Anexo B: Coeficientes aerodinámicos

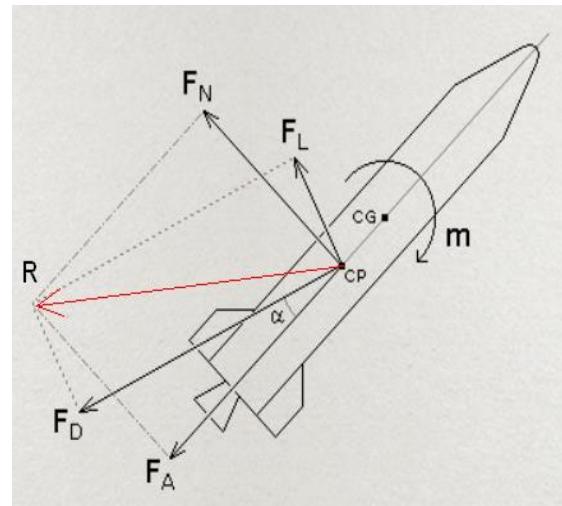
En este apartado, se explica la diferencia entre los coeficientes de fuerza axial y normal, y los coeficientes de arrastre y sustentación. La diferencia ocurre cuando el eje axial del cohete no coincide con el vector de velocidad actual del mismo (\mathbf{V}). Esta diferencia genera un ángulo conocido como ángulo de ataque (α). La Figura 12.1 presenta las direcciones de las fuerzas de arrastre y sustentación durante el vuelo y la Figura 12.2 ilustra la relación entre ambos pares de fuerzas

Figura 12.1 Fuerzas de arrastre y sustentación



Fuente: (Braeunig, 2020)

Figura 12.2 Fuerzas axial y normal, de arrastre y sustentación



Fuente: (Braeunig, 2020)

Como se puede observar, la fuerza de arrastre (\mathbf{F}_D) es paralela al vector de velocidad (\mathbf{V}) mientras que la fuerza de sustentación (\mathbf{F}_L) es perpendicular a ambos. Pero el cálculo de fuerzas y momentos sobre el cohete se simplifica al utilizar el *bodyframe* como sistema de referencia, por lo que conviene evaluar las fuerzas aerodinámicas según el eje axial del vehículo. Es aquí cuando aparecen las fuerzas normales (\mathbf{F}_N) y axiales (\mathbf{F}_A), relacionándose mediante el ángulo de ataque.

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{F}_N \sin \alpha + \mathbf{F}_A \cos \alpha \quad [N] \quad (26)$$

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_N \cos \alpha - \mathbf{F}_A \sin \alpha \quad [N] \quad (27)$$

Si el ángulo de ataque es cercano a 0° , se produce la aproximación utilizada en este proyecto tanto para las fuerzas como para los coeficientes aerodinámicos (Barrowman, 1967)

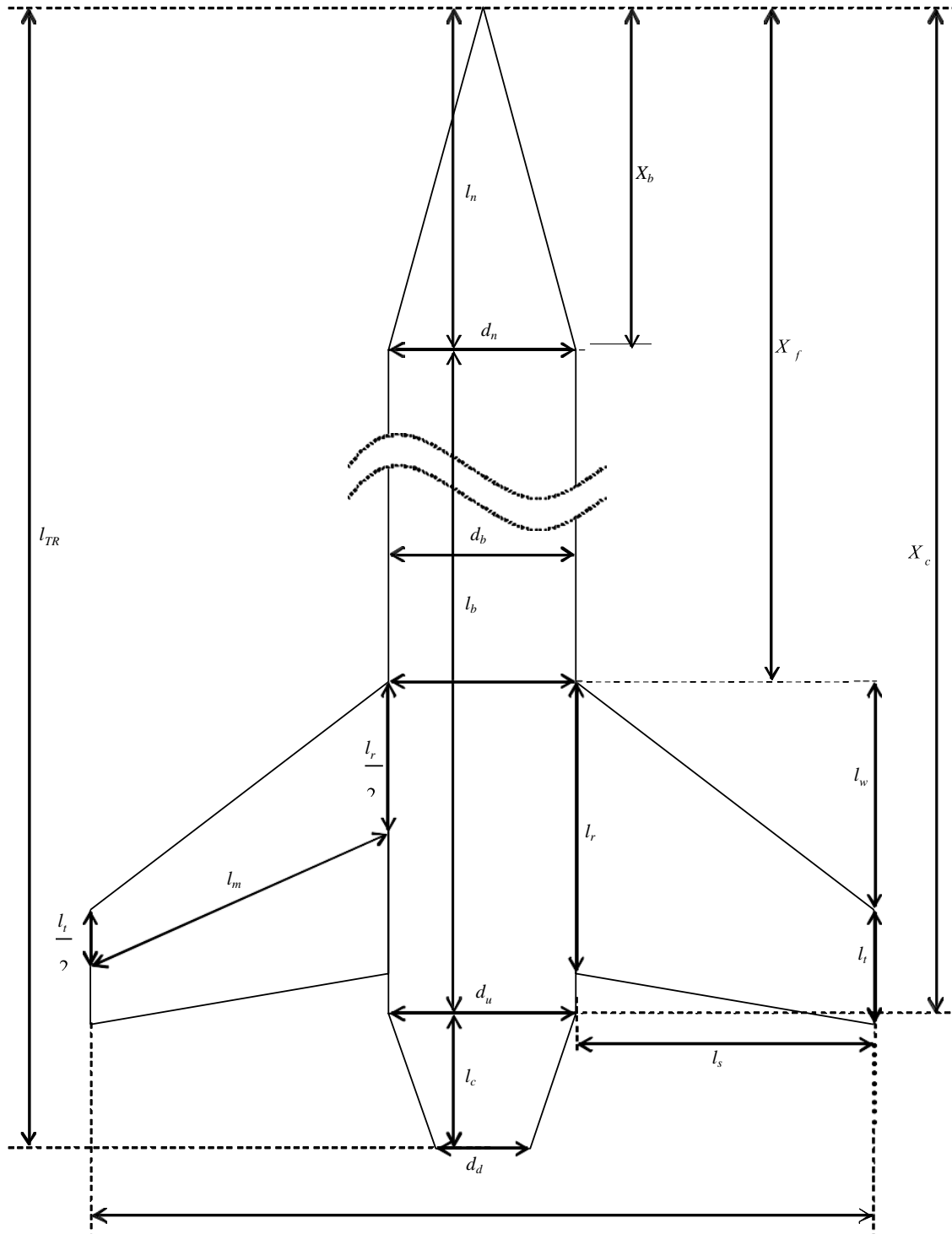
$$\mathbf{F}_D \approx \mathbf{F}_A \quad [N] \rightarrow C_D \approx C_A \quad [-] \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_L \approx \mathbf{F}_N \quad [N] \rightarrow C_L \approx C_N \quad [-] \quad (29)$$

Cabe resaltar que la fuerza resultante (\mathbf{R}) será siempre la misma al sumar cada par de fuerzas y que todas las fuerzas aerodinámicas, se calculan en el centro de presiones (CP) y, al no coincidir con el centro de gravedad (CG), o centro masa, se generan momentos (\mathbf{m}) sobre el vehículo.

Anexo C: Geometría utilizada en método de Barrowman

Figura 13.1 Geometría externa para método de Barrowman



Fuente: (Box, Bishop, & Hunt, 2009)

Anexo D: Coeficientes de arrastre según número de Mach

En este apartado se tabulan los datos obtenidos por Vallejos (Vallejos Osses, 2021) en la Tabla 14.1

Tabla 14.1 Coeficientes de arrastre obtenidos por Vallejos

Número de Mach [-]	Coeficiente de Arrastre [-]	Número de Mach [-]	Coeficiente de Arrastre [-]	Número de Mach [-]	Coeficiente de Arrastre [-]
0,1	0,325	1,10	0,505	1,6	0,474
0,4	0,323	1,15	0,525	1,9	0,428
0,7	0,326	1,20	0,560	2,2	0,390
0,8	0,330	1,25	0,535	2,5	0,356
0,9	0,346	1,30	0,518	3,0	0,309
1,0	0,451	1,40	0,505	-	-

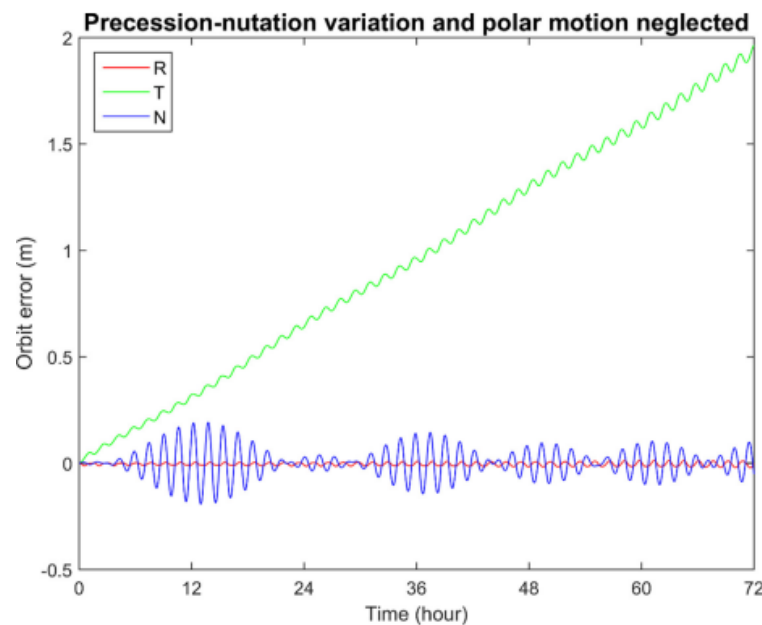
Fuente: (Vallejos Osses, 2021)

Estos coeficientes son utilizados en la función *Spline* de Python para generar una curva que permita obtener el coeficiente para cualquier número de Mach en el que se encuentre el cohete según cada simulación.

Anexo E: Nutación, precesión y movimiento polar

En su trabajo, Du y su equipo (Du, Zhang, Xu, Gao, & Xu, 2021) calculan el error en el cálculo de posición de un satélite en órbita LEO¹⁹ al no considerar los efectos de nutación, precesión y movimiento polar. Estos errores se calculan en un sistema cartesiano para la posición radial (R), dirección de trayectoria (T) y normal a éstas (N). El resultado se presenta en la Figura 15.1

Figura 15.1 Errores calculados al no considerar nutación, precesión y movimiento polar



Fuente: (Du, Zhang, Xu, Gao, & Xu, 2021)

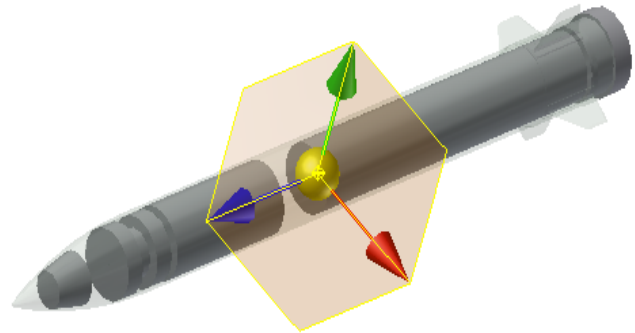
Como se puede observar de la figura, el error (en metros) de la posición puede considerarse tolerable para el caso en cuestión, ya que dos de las componentes de posición (radial y normal) muestran cambios apreciables a partir de más de una hora de órbita y en el caso de la componente de trayectoria, el error no supera los 0,25 metros. Estos errores se pueden despreciar para el caso de un cohete con 5.000 metros de altitud máxima y 60 segundos de vuelo aproximado.

¹⁹ Del inglés *Low Earth Orbit*

Anexo F: Geometrías en Autodesk Inventor

Figura 16.1 Modelado del Sistema Z antes de la combustión

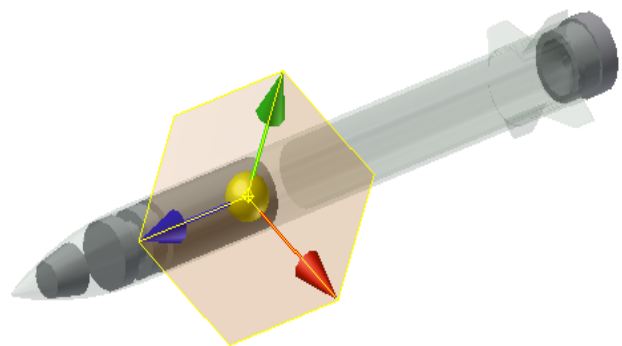
Mass Moments					
Ixx	784037.564 kg	Calculated using negative integral.			
Ixy	0.001 kg mm ²	Iyy	784037.556 kg		
Ixz	0.012 kg mm ²	Iyz	0.000 kg mm ²	Izz	9057.381 kg m



Fuente: Autor

Figura 16.2 Modelado del Sistema Z después de la combustión

Mass Moments					
Ixx	522648.769 kg	Calculated using negative integral.			
Ixy	0.001 kg mm ²	Iyy	522648.762 kg		
Ixz	0.015 kg mm ²	Iyz	0.000 kg mm ²	Izz	6258.100 kg m



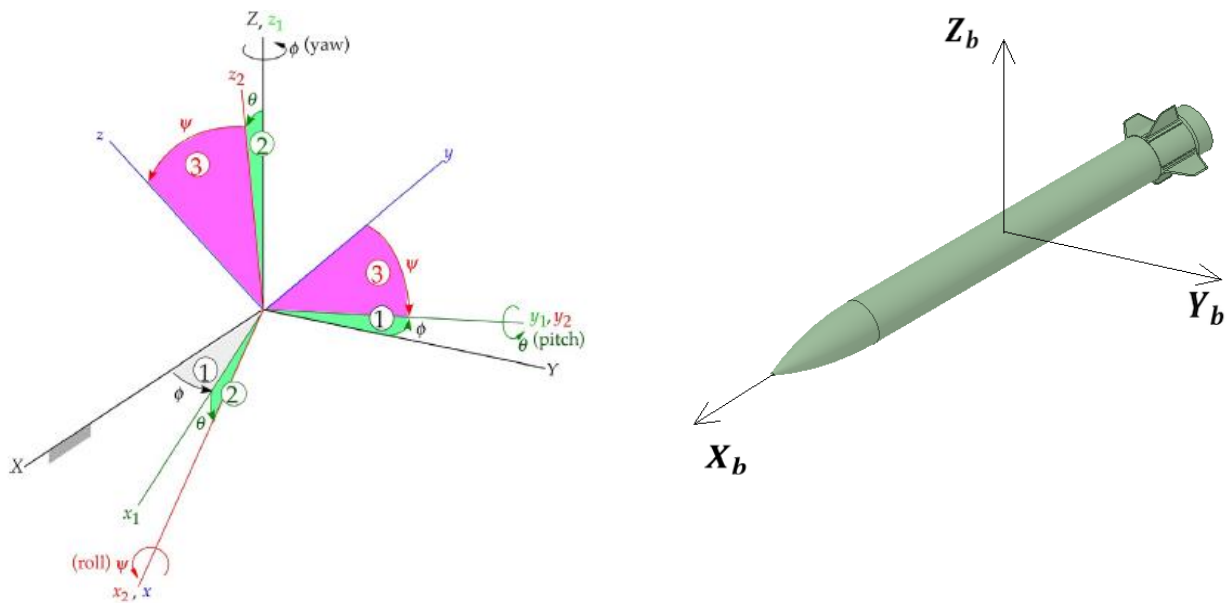
Fuente: Autor

Anexo G: Modelos matemáticos del módulo *GeoTools*

1. Función: *yawpitchroll*

Esta función recibe un arreglo que contiene la orientación del cohete respecto a la plataforma de lanzamiento y entrega una matriz de rotación desde la plataforma hacia el *bodyframe*. Los elementos del arreglo deben seguir el orden de rotación *Yaw-Pitch-Roll*, secuencia ilustrada en la Figura 17.1 junto a los ejes direccionales del *bodyframe*.

Figura 17.1 Secuencia de rotación *Yaw-Pitch-Roll* y *bodyframe*



Fuente: (Vallado & McClain, 2013)

Fuente: Autor

Se entiende, de la figura, que ϕ , θ y ψ corresponden a las rotaciones *Yaw*, *Pitch* y *Roll*, respectivamente. De esta manera, la matriz de rotación de esta secuencia queda como

$$DCM_{plat2b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [-] \quad (30)$$

2. Funciones: *enu2ecef* y *ecef2enu*

Estas funciones tienen como objetivo realizar la conversión de un vector entre el sistema de referencia *East-North-Up* y el sistema de referencia *Earth Centered-Earth Fixed*. Esta conversión se realiza considerando que la plataforma es un marco de referencia cuyos ejes direccionales coinciden con el sistema *East-North-Up* en el momento de lanzamiento. De esta manera, se puede realizar la conversión desde el *bodyframe* al sistema de la plataforma, mediante la función anterior, y luego al sistema *Earth Centered-Earth Fixed*, y viceversa.

Para realizar la conversión, se considera la siguiente ecuación en la cual coinciden diferentes autores como los equipos de Kuna (Kuna, Santhosh, & Perumalla, 2019) y de Pryss (Pryss, Geiger, Schickler, Schobel, & Reichert, 2016), y Donnelly (Donnelly, 2012).

$$\begin{pmatrix} X_{ecef} \\ Y_{ecef} \\ Z_{ecef} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \cos \varphi \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E \\ N \\ U \end{pmatrix} [m] \quad (31)$$

Debido a que la matriz es ortogonal, se cumple que el proceso inverso se realiza mediante la matriz transpuesta a la Ecuación 31. Además, al no haber rotación entre ambos sistemas, este método es apto para convertir vectores tanto de posición como de velocidad, y otros.

3. Funciones: *geo2ecef* y *ecef2geo*

Estas funciones realizan la conversión entre los sistemas de coordenadas geodésico y geocéntrico al recibir un arreglo con las coordenadas geodésicas o un vector con las coordenadas geocéntricas, según la función a la que se acceda.

Diferentes autores coinciden en que la conversión de coordenadas geodésicas a geocéntricas se realiza con la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} X_{ecef} \\ Y_{ecef} \\ Z_{ecef} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N(b^2/a^2) + h) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad [m] \quad (32)$$

Aquí, φ , λ y h corresponden a la latitud, longitud y altitud, mientras que a y b son el radio polar y ecuatorial respectivamente (los valores de éstos dependerán del modelo geodésico seleccionado). El valor de N viene dado como

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{0.5}} \quad [m] \quad (33)$$

Donde e^2 es el cuadrado de la primera excentricidad

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad [-] \quad (34)$$

En el caso de convertir de geocéntrico a geodésico, existen diferentes métodos según cada autor, pero por lo visto en el Capítulo 3, el método directo de Bowring sobrepasa al resto tanto en rapidez de cálculo como en precisión. Debido a esto, es el método seleccionado para este proyecto. Con esto, el método comienza calculando la segunda excentricidad, e'^2 , y la proyección del vector posición sobre el Plano Ecuatorial, p

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad [-] \quad (35)$$

$$p = (X_{ecef}^2 + Y_{ecef}^2)^{0.5} \quad [m] \quad (36)$$

Luego se crea la variable auxiliar theta

$$theta = \tan^{-1} \left(\frac{a Z_{ecef}}{b p} \right) \quad [-] \quad (37)$$

Finalmente, se dispone de la fórmula para la obtención de las coordenadas geodésicas

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{Z_{ecef} + b e'^2 \sin^3(theta)}{p - a e^2 \cos^3(theta)} \right) \quad [^\circ] \quad (38)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y_{ecef}}{X_{ecef}} \right) \quad [^\circ] \quad (39)$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N \quad [m] \quad (40)$$

Como se menciona antes, los radios polar y ecuatorial se dan según el modelo geodésico que define el elipsoide de revolución a utilizar como referencia. Para este proyecto, se utiliza el modelo WGS84²⁰ el cual es utilizado hoy en día en los sistemas GPS²¹ y por diferentes autores en la literatura disponible. Con esto definido, los valores de a y b quedan como 6.378.137 metros y 6.356.752,314 metros (Kuna, Santhosh, & Perumalla, 2019), respectivamente.

Debido a que los autores mencionados no presentan resultados de estas conversiones de coordenadas, se realiza la validación mediante los datos obtenidos en la página del Departamento de Geociencias de la Universidad de Alaska (Department of Geoscience, University of Alaska Fairbanks, 2019). La Tabla 17.1 muestra los valores obtenidos para la estación McMurdo en la Antártida y los obtenidos por el autor, validando el modelo empleado en esta función.

²⁰ *World Geodetic System 1984* (Sistema Geodésico Mundial de 1984)

²¹ *Global Positioning System* (Sistema de Posicionamiento Global)

Tabla 17.1 Comparación de estación GPS McMurdo y método utilizado por el Autor

Estación McMurdo					
Geocéntricas			Geodésicas		
$X_{ecef} [m]$	$Y_{ecef} [m]$	$Z_{ecef} [m]$	$\varphi [^\circ]$	$\lambda [^\circ]$	$h [m]$
-1.311.703,17	310.814,98	-6.213.255,16	-77,84	166,67	98,02
Método utilizado por el Autor					
<i>geo2ecef</i>			<i>ecef2geo</i>		
-1.311.703,17	310.814,98	-6.213.255,16	-77,84	166,67	98,02
Diferencia ²²					
< 0,001 %	< 0,001 %	< 0,001%	< 0,001%	< 0,001%	< 0,001%

Fuente: Autor

4. Funciones: *ecef2eci* y *eci2ecef*

Estas funciones realizan la conversión del vector de posición entre los sistemas de referencia *Earth Centered-Earth Fixed* y *Earth Centered Inertial*. Para ello, es necesario conocer el Tiempo Medio Sideral de Greenwich (*Greenwich Mean Sidereal Time*) y el vector de posición a convertir. Esto se realiza solo considerando la rotación del planeta²³, por lo que la conversión queda como se expresa en la ecuación ...

$$\begin{pmatrix} X_{eci} \\ Y_{eci} \\ Z_{eci} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{GMST} & -\sin \theta_{GMST} & 0 \\ \sin \theta_{GMST} & \cos \theta_{GMST} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{ecef} \\ Y_{ecef} \\ Z_{ecef} \end{pmatrix} \quad [m] \quad (41)$$

Para la validación de resultados, se utilizan los datos obtenidos en el Departamento de Defensa, Investigación y Desarrollo de Canadá (Beaulne & Sikaneta, 2005). La Tabla 17.2 presenta la comparación de resultados entre este método y el método utilizado en este proyecto.

²² Considerando incluso hasta cuatro decimales la diferencia no llega al 0,001 %

²³ Esto debido a lo expuesto sobre nutación y precesión (Du, Zhang, Xu, Gao, & Xu, 2021) en el Anexo E: Nutación, precesión y movimiento polar y establecido en el Capítulo 3 en cuanto a las condiciones de diseño del simulador.

Tabla 17.2 Comparación método de Beaulne y Sikaneta y el utilizado por el Autor.

Método de Baulne y Sikaneta					
$X_{ecef} [m]$	$Y_{ecef} [m]$	$Z_{ecef} [m]$	$X_{eci} [m]$	$Y_{eci} [m]$	$Z_{eci} [m]$
$2,0378 \times 10^6$	$-6,8774 \times 10^6$	$3,7348 \times 10^2$	$-3,8052 \times 10^6$	$6,0805 \times 10^6$	$3,7348 \times 10^2$
Método Autor					
$eci2ecef$			$ecef2eci$		
$2,0378 \times 10^6$	$-6,8774 \times 10^6$	$3,7348 \times 10^2$	$-3,8051 \times 10^6$	$6,0804 \times 10^6$	$3,7348 \times 10^2$
Diferencia porcentual²⁴					
< 0,001 %	< 0,001 %	< 0,001 %	< 0,001 %	< 0,001 %	< 0,001 %

Fuente: Autor

5. Funciones: $eci2ecef_v$ y $ecef2eci_v$

Estas funciones también realizan la conversión entre *Earth Centered-Earth Fixed* y *Earth Centered Inertial*, pero para vectores de velocidad. La diferencia se produce debido a la velocidad angular de la Tierra (considerada dentro del módulo inherentemente). Esta conversión se realiza siguiendo la regla de la cadena en la derivación

$$\mathbf{r}_{eci} = \mathbf{R}_{ecef}^{eci} \mathbf{r}_{ecef} \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{eci} = \dot{\mathbf{R}}_{ecef}^{eci} \mathbf{r}_{ecef} + \mathbf{R}_{ecef}^{eci} \dot{\mathbf{r}}_{ecef} \quad (43)$$

En la ecuación mostrada, $\dot{\mathbf{R}}_{ecef}^{eci}$ es la derivada de la matriz de rotación, la cual está dada por

$$\dot{\mathbf{R}}_{ecef}^{eci} = [\dot{\boldsymbol{\theta}}_{Tierra}]_{\times} \mathbf{R}_{ecef}^{eci} \quad (44)$$

²⁴ Considerando incluso hasta cuatro decimales la diferencia no llega al 0,001 %

Donde $[\dot{\theta}_{Tierra}]_{\times}$ corresponde a la matriz antisimétrica de rango 3 formada por el vector de velocidad de rotación de la Tierra respecto al sistema *Earth Centered Inertial*. De esta manera, la transformación de velocidad queda

$$\dot{\mathbf{r}}_{eci} = \left([\dot{\theta}_{Tierra}]_{\times} \mathbf{R}_{ecef}^{eci} \right) \mathbf{r}_{ecef} + \mathbf{R}_{ecef}^{eci} \dot{\mathbf{r}}_{ecef} \quad (45)$$

Los resultados se comparan con los resultados de Beaulne y Sikaneta (Beaulne & Sikaneta, 2005) y se comparan en la Tabla 17.3

Tabla 17.3 Comparación método de Beaulne y Sikaneta y el utilizado por el Autor para velocidad

Método de Beaulne y Sikaneta					
$\dot{X}_{ecef} [m/s]$	$\dot{Y}_{ecef} [m/s]$	$\dot{Z}_{ecef} [m/s]$	$\dot{X}_{eci} [m/s]$	$\dot{Y}_{eci} [m/s]$	$\dot{Z}_{eci} [m/s]$
$-1,5694 \times 10^3$	$-4,5565 \times 10^2$	$7,3729 \times 10^3$	$9,4666 \times 10^2$	$5,8181 \times 10^2$	$7,3729 \times 10^3$
Método utilizado por el Autor					
$eci2ecef_v$			$ecef2eci_v$		
$-1,5638 \times 10^3$	$-4,5401 \times 10^2$	$7,3729 \times 10^3$	$9,5153 \times 10^2$	$5,8486 \times 10^2$	$7,3729 \times 10^3$
Diferencia porcentual					
0,3568 %	0,3599 %	0 %	0,5144 %	0,5242 %	0 %

Fuente: Autor

Los resultados muestran una diferencia máxima de 0,5242 %. Para el proyecto actual se considera una diferencia aceptable, por lo que el método se considera válido.

Anexo H: Validación modelo utilizado en *Atmosphere*

Con el objetivo de validar este modelo, se comparan los resultados disponibles en la tesis de Gray (Gray S. A., 2014) coincidentes con los expuestos por el documento de la Atmósfera Standard de 1976 dispuesto por la NASA (National Aeronautics and Space Administration, 1976). La Tabla 18.1 presenta los resultados obtenidos por el autor de este proyecto (utilizando la biblioteca *fluids.atmosphere*) y los obtenidos por Gray

Tabla 18.1 Propiedades atmosféricas dispuestas por Gray y Autor

Altitud Geométrica [m]	Temperatura [K]	Presión [Pa]	Densidad [kg/m ³]	Velocidad del sonido [m/s]	Fuente
0	288,16	101.325	1,23	340	Gray
	288,15	101.325	1,23	340	Autor
1000	281,66	89.874,34	1,11	336	Gray
	281,65	89.876,29	1,11	336	Autor
2000	275,16	79.494,81	1,01	333	Gray
	275,15	79.501,42	1,01	333	Autor
3000	268,66	70.108,01	0,91	329	Gray
	268,66	70.121,16	0,91	329	Autor
4000	262,16	61.639,61	0,82	325	Gray
	262,17	61.660,44	0,82	325	Autor
5000	255,66	54.019,24	0,74	321	Gray
	255,68	54.048,29	0,74	321	Autor

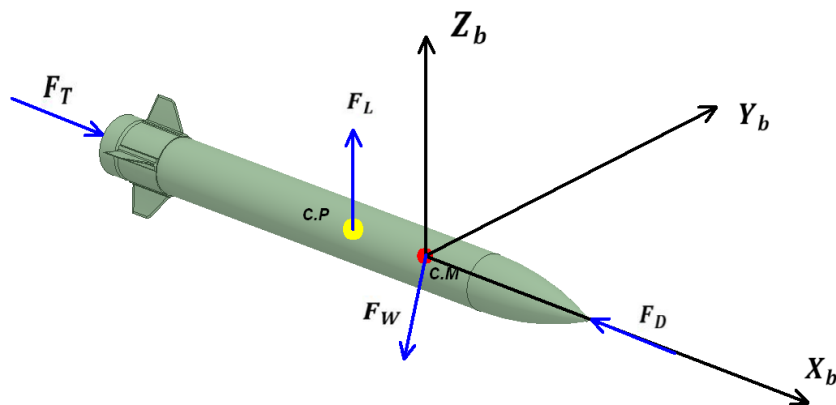
Fuente: Autor

Como se puede observar, la diferencia máxima ocurre a los 5.000 metros de altitud para la presión y es de un 0,054 %, debido a esto, se considera que el método utilizado por el autor mediante la biblioteca *fluids.atmosphere* es válido para este proyecto.

Anexo I: Diagrama de cuerpo libre (DCL)

En este capítulo se visualiza el diagrama de cuerpo libre (DCL) del cohete considerado para la sumatoria de fuerzas y torques necesarias en las ecuaciones del movimiento para el modelo matemático de la trayectoria y actitud de acuerdo con la Segunda Ley de Newton. La Figura 19.1 presenta el diagrama de cuerpo libre del cohete en estudio

Figura 19.1 Diagrama de cuerpo libre del cohete



Fuente: Autor

Donde:

X_b, Y_b y Z_b : Ejes direccionales del *bodyframe*

$C.M$: Centro de masa

$C.P$: Centro de presión aerodinámica

F_T : Fuerza de empuje

F_L : Fuerza de sustentación (en este caso se aproxima también a F_N de las fuerzas aerodinámicas)

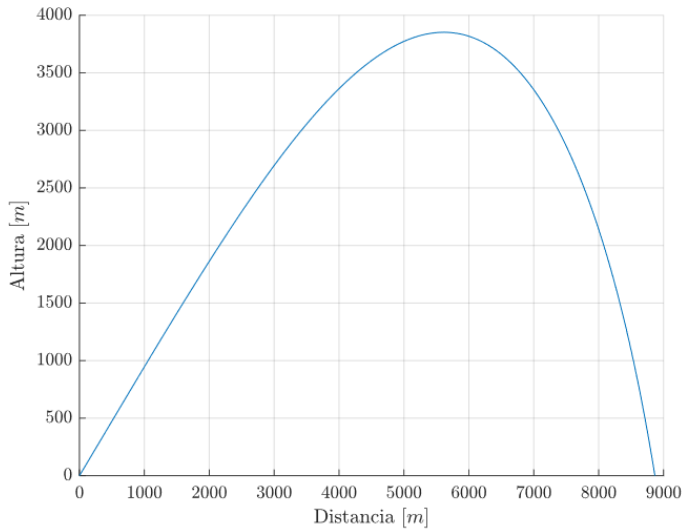
F_D : Fuerza de arrastre (en este caso se aproxima también a F_A de las fuerzas aerodinámicas)

F_W : Peso del cohete. También se puede reemplazar por la aceleración gravitacional al dividirlo por la masa

Anexo J: Resultados de Vallejos y el autor

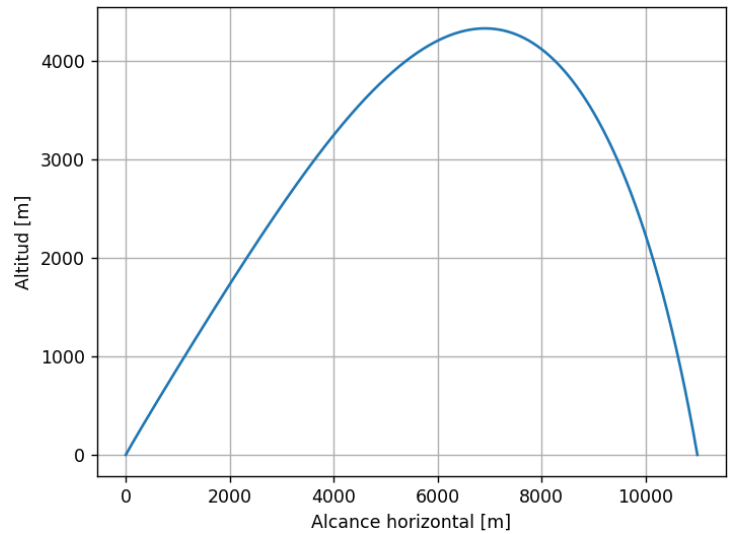
En las siguientes figuras se compara el comportamiento de las curvas obtenidas por el autor y Vallejos ya que los parámetros exactos a comparar se encuentran en la Tabla 8.1 del Capítulo 8

Figura 20.1 Altitud vs alcance horizontal según Vallejos



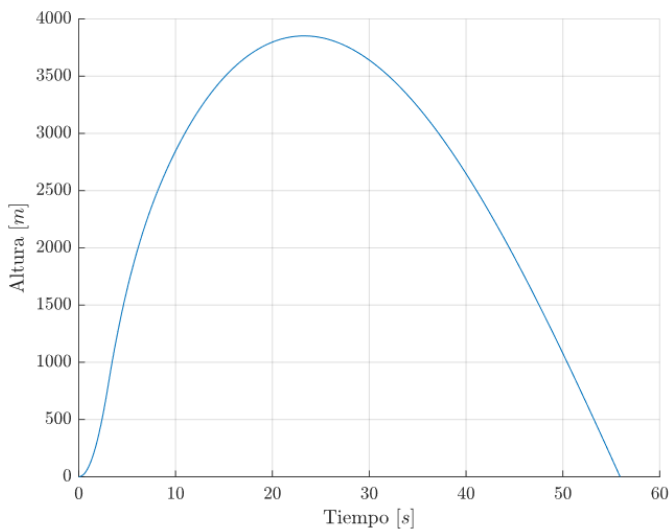
Fuente: (Vallejos Osses, 2021)

Figura 20.2 Altitud vs alcance horizontal según autor



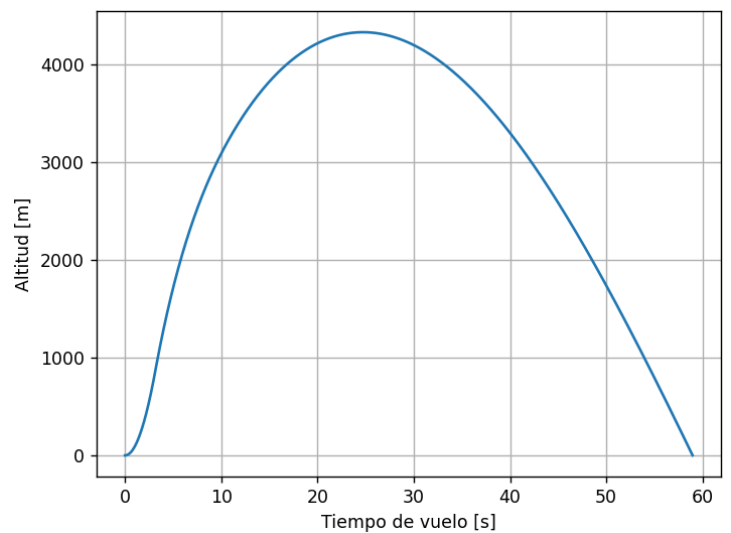
Fuente: autor

Figura 20.3 Altitud vs tiempo según Vallejos

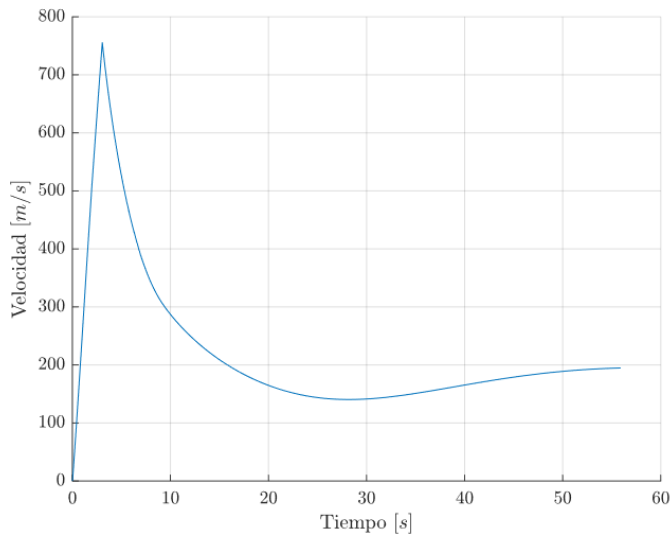
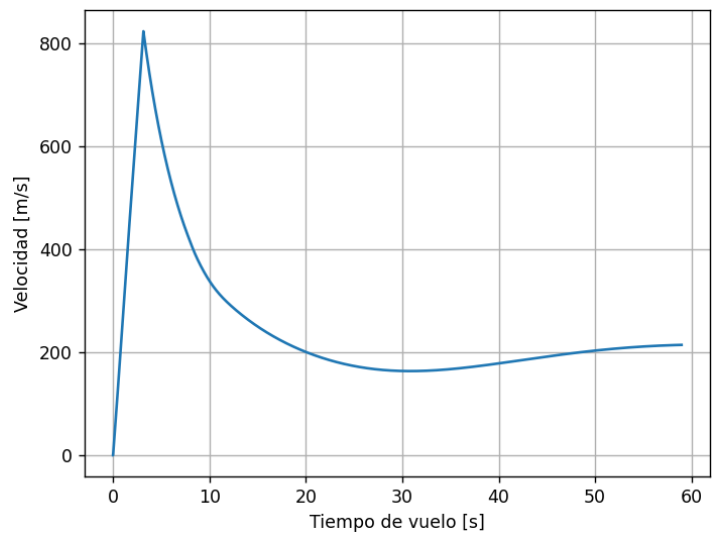
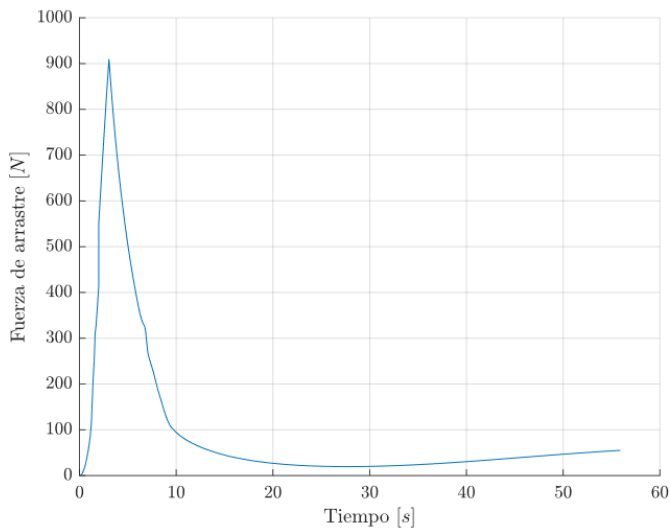
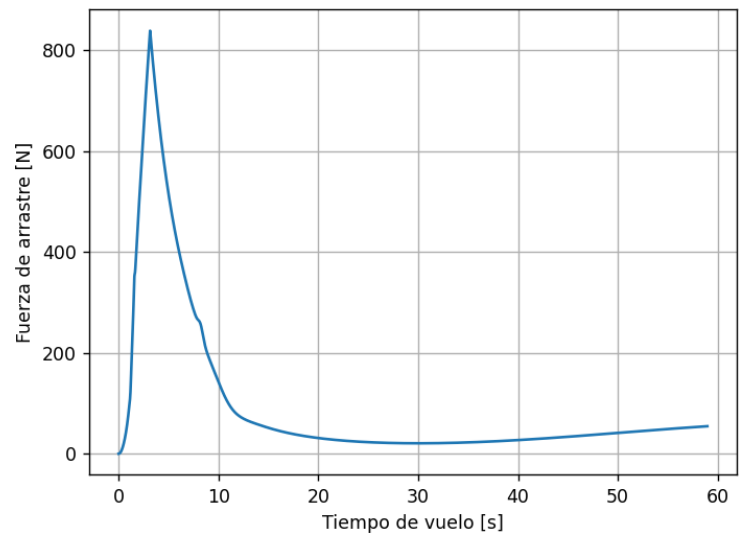


Fuente: (Vallejos Osses, 2021)

Figura 20.4 Altitud vs tiempo según autor



Fuente: autor

Figura 20.5 Velocidad vs tiempo según Vallejos**Fuente:** (Vallejos Osses, 2021)**Figura 20.6 Velocidad vs tiempo según autor****Fuente:** autor**Figura 20.7 Fuerza de arrastre vs tiempo según Vallejos****Fuente:** (Vallejos Osses, 2021)**Figura 20.8 Fuerza de arrastre vs tiempo según autor****Fuente:** autor

Como se puede observar, si bien los valores obtenidos son diferentes, el comportamiento de las curvas de cada parámetro, obtenido mediante el simulador, es idéntico al presentado por Vallejos (Vallejos Osses, 2021).