

PARÁMETROS DE LAS LÍNEAS ELÉCTRICAS

Nomenclatura

$$\mu_0 = \text{permeabilidad del vacío } (\approx \text{aire}) = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\varepsilon_0 = \text{permitividad del vacío } (\approx \text{aire}) = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 299\,792\,458^2} \\ \approx 8,854\,2 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

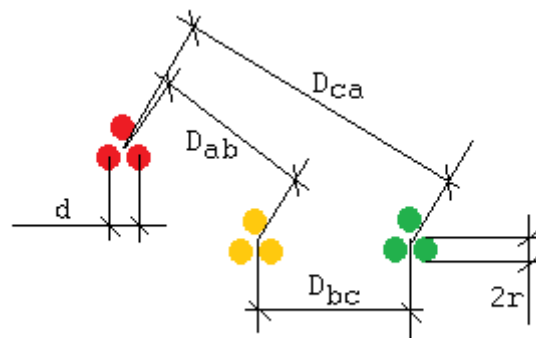
$$R_c = \text{resistencia por conductor y unidad de longitud } [\Omega \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$R = \text{resistencia por fase de la línea por unidad de longitud } [\Omega \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$D_{xy} = \text{distancia entre conductores [m]}$$

$$r = \text{radio del conductor [m]}$$

$$d = \text{distancia entre conductores de un mismo haz [m]}$$



Línea aérea trifásica simétrica



$$R = R_c [\Omega \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r \cdot e^{-\frac{1}{4}}} [\text{H} \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} [\text{F} \cdot \text{m}^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica



$$R = R_c [\Omega \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{r \cdot e^{-\frac{1}{4}}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{r}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica dúplex



$$R = \frac{R_c}{2} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{\sqrt{r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot d}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{\sqrt{r \cdot d}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica tríplex



$$R = \frac{R_c}{3} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{\sqrt[3]{r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot d^2}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{\sqrt[3]{r \cdot d^2}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica cuádruplex



$$R = \frac{R_c}{4} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{\sqrt[4]{\sqrt{2} \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot d^3}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{\sqrt[4]{\sqrt{2} \cdot r \cdot d^3}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica múltiplex de grado n:

$$R = \frac{R_c}{n} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[n]{\frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{n \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{d}{2 \sin \frac{\pi}{n}}\right)^{n-1}}}}{1} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[n]{\frac{\sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ca}}}{n \cdot r \cdot \left(\frac{d}{2 \sin \frac{\pi}{n}}\right)^{n-1}}}}{1}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica de doble circuito

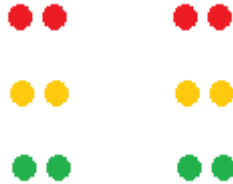


$$R = \frac{R_c}{2} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}{\sqrt{r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}{\sqrt{r} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica dúplex de doble circuito

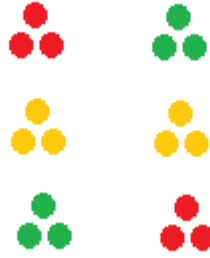


$$R = \frac{R_c}{4} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}{\sqrt[4]{r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot d} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}\sqrt[4]{D_{ca}D_{ca'}}D_{c'a}D_{c'a'}}{\sqrt[4]{r \cdot d} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica tríplex de doble circuito



$$R = \frac{R_c}{6} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}{\sqrt[6]{r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot d^2} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}\sqrt[4]{D_{ca}D_{ca'}}D_{c'a}D_{c'a'}}{\sqrt[6]{r \cdot d^2} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea trifásica asimétrica cuádruplex de doble circuito



$$R = \frac{R_c}{8} [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}{\sqrt[8]{\sqrt{2} \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{4}} \cdot d^3} \cdot \sqrt[6]{D_{aa'}D_{bb'}D_{cc'}}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{D_{ab}D_{ab'}}D_{a'b}D_{a'b'}}{\sqrt[4]{D_{bc}D_{bc'}}D_{b'c}D_{b'c'}}\sqrt[4]{D_{ca}D_{ca'}}D_{c'a}D_{c'a'}}}} [F \cdot m^{-1}]$$

Línea aérea monofásica



$$R = R_c [\Omega \cdot m^{-1}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r \cdot e^{-\frac{1}{4}}} [H \cdot m^{-1}]$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} [F \cdot m^{-1}]$$

Corrección en la capacidad de una línea aérea trifásica por efecto del terreno

Añadir al denominador de las fórmulas anteriores (líneas de un circuito):

$$- \ln \frac{\sqrt[3]{h_{12}h_{23}h_{31}}}{\sqrt[3]{h_1h_2h_3}}$$

Corrección de la resistencia del conductor teniendo en cuenta efecto pelicular y temperatura

$$R_T = R_{20^\circ\text{C}}[1 + \alpha(T - 20)]$$

Para cables de aluminio puede considerarse $\alpha = 4,03 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. La temperatura máxima de funcionamiento suele ser 85°C .

$$x_s^2 = \frac{8\pi f \cdot 10^{-7}}{R_T} k_s$$

$$y_s = \frac{x_s^4}{192 + 0,8 \cdot x_s^4}$$

$$R_{ca} = R_T(1 + y_s)$$

Para conductores cableados, $k_s=1$.

y los valores base se corresponden con los valores de módulo de las magnitudes eléctricas: valor eficaz de tensión (V), módulo de impedancia (Ω), módulo de admitancia (S), valor eficaz de corriente (A) y potencia aparente (VA). Los valores base han de cumplir las relaciones o ecuaciones modulares:

$$U_B = Z_B I_B \quad ; \quad S_B = U_B I_B \quad (2.4)$$

La transformación a valores p.u. se efectúa dividiendo la relación o ecuación en magnitudes reales por las correspondientes magnitudes base. Esto es:

$$\frac{\vec{U}}{U_B} = \frac{\vec{Z}}{Z_B} \frac{\vec{I}}{I_B} \quad ; \quad \frac{\vec{S}}{S_B} = \frac{\vec{U}}{U_B} \frac{\vec{I}^*}{I_B} \quad (2.5)$$

O bien,

$$\vec{U}_{pu} = \vec{Z}_{pu} \vec{I}_{pu} \quad ; \quad \vec{S}_{pu} = \vec{U}_{pu} \vec{I}_{pu}^* \quad (2.6)$$

Estas últimas ecuaciones tienen la misma forma que las (2.3), por tanto se puede realizar el análisis de un circuito utilizando cualquiera de los dos conjuntos de relaciones.

Obsérvense las relaciones entre las cantidades base dadas por (2.4). Está claro que especificando dos cualesquiera de esas cantidades las otras quedan determinadas. Por ejemplo, si se toman U_B y S_B , que es lo habitual en el análisis de redes eléctricas, las otras cantidades base vendrán dadas por:

$$I_B = \frac{S_B}{U_B} \quad ; \quad Z_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{U_B}{S_B / U_B} = \frac{U_B^2}{S_B} \quad ; \quad Y_B = \frac{I_B}{U_B} = \frac{1}{Z_B} \quad (2.7)$$

La extensión de la normalización por unidad a otras relaciones en forma binómica es inmediata. Así:

$$\vec{Z}_{pu} = R_{pu} + jX_{pu} \quad \vec{S}_{pu} = P_{pu} + jQ_{pu} \quad (2.8)$$

donde

$$R_{pu} = \frac{R}{Z_B} \quad X_{pu} = \frac{X}{Z_B} \quad P_{pu} = \frac{P}{S_B} \quad Q_{pu} = \frac{Q}{S_B} \quad (2.9)$$

Con independencia de la forma (estrella o triángulo) en que estén conectados realmente los elementos de un sistema eléctrico, siempre puede obtenerse un equivalente en estrella, lo cual en el caso simétrico (las tres fases iguales) es sencillo: un conjunto de tres impedancias \vec{Z}_Δ conectadas en triángulo es equivalente a un conjunto de tres impedancias conectadas en estrella \vec{Z}_Y ; la relación entre ambas impedancias es $\vec{Z}_Y = \vec{Z}_\Delta / 3$. Por tanto, un sistema eléctrico en condiciones normales de funcionamiento puede ser representado por una red eléctrica trifásica simétrica, compuesta por

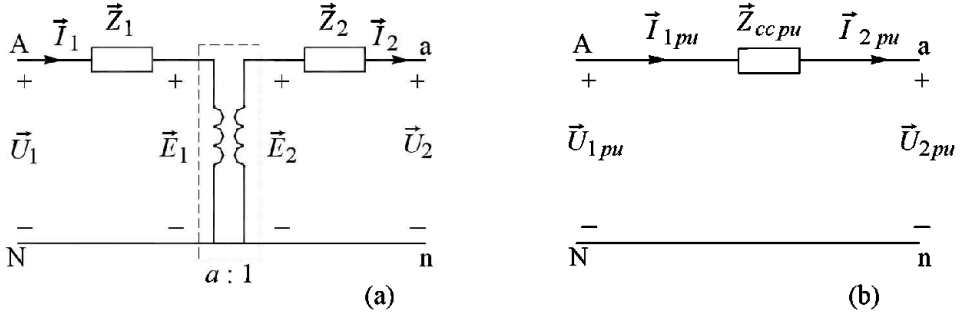


Figura 2.4 (a) Circuito equivalente fase-neutro de un transformador trifásico real con $X_\mu = R_{Fc} = 0$ y sin tener en cuenta el desfase primario-secundario. (b) Representación del transformador en el sistema por unidad.

con $X_\mu = R_{Fc} = 0$. Las impedancias que aparecen engloban los efectos de resistencia y de flujo de dispersión de los respectivos devanados $\vec{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\vec{Z}_2 = R_2 + jX_2$. Tómense como valores base para el análisis por unidad S_B y U_{1B} en el primario y S_B y U_{2B} en el secundario, de tal forma que

$$\frac{U_{1B}}{U_{2B}} = a \quad (2.14)$$

siendo 'a' la relación de transformación nominal. Ello obliga a que las corrientes base en primario y secundario y su relación sean las siguientes:

$$I_{1B} = \frac{S_B}{U_{1B}} \quad I_{2B} = \frac{S_B}{U_{2B}} \quad \frac{I_{1B}}{I_{2B}} = \frac{1}{a} \quad (2.15)$$

También obliga a que las impedancias base y su relación sean

$$Z_{1B} = \frac{U_{1B}^2}{S_B} \quad Z_{2B} = \frac{U_{2B}^2}{S_B} \quad Z_{1B} = a^2 Z_{2B} \quad (2.16)$$

Con los valores base tomados se cumple que

$$\vec{E}_{1pu} = \frac{\vec{E}_1}{U_{1B}} = \frac{a\vec{E}_2}{aU_{2B}} = \vec{E}_{2pu} \quad (2.17)$$

y también que

$$\vec{I}_{1pu} = \frac{\vec{I}_1}{I_{1B}} = \frac{\vec{I}_2 / a}{I_{2B} / a} = \vec{I}_{2pu} \quad (2.18)$$

nal. Será en general un número complejo. Las relaciones definidas están ligadas por la expresión $\vec{a}_T = a \cdot \vec{t}$.

Para un TRM es $\vec{t} = t \angle 0^\circ$ y el valor de t varía típicamente desde 0,9 a 1,1 (1,0 corresponde al caso en que no existe desvío sobre la relación nominal, es decir, para la posición del regulador correspondiente a la relación de transformación nominal). Para un TRD es $\vec{t} = 1 \angle \theta$ y el valor del desfase θ típicamente varía de -40° a $+40^\circ$.

El circuito equivalente por fase, despreciando la rama paralelo, es el mostrado en la Figura 2.10. El bloque de la derecha, que incluye a $\vec{Y}_{cci} = 1/\vec{Z}_{cci}$ (\vec{Z}_{cci} impedancia de cortocircuito referida al lado i), es el circuito equivalente por fase del transformador cuando el cambiador de tomas está en su posición nominal. El bloque de la izquierda, integrado por un transformador ideal de relación $\vec{t} : 1$, representa el circuito equivalente simplificado del cambiador de tomas.

Aplicando el análisis nodal al cuadripolo elemental formado por la admitancia \vec{Y}_{cci} de la figura, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_i \vec{t}^* \\ \vec{I}_j / a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{cci} & -\vec{Y}_{cci} \\ -\vec{Y}_{cci} & \vec{Y}_{cci} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_i / \vec{t} \\ \vec{U}_j a \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Para efectuar el análisis por unidad, se elige una potencia base común S_B y unas tensiones base U_{iB} y U_{jB} , de tal manera que $U_{iB}/U_{jB} = U_{iN}/U_{jN} = a$, siendo 'a' la relación de transformación nominal del transformador. Las corrientes base están ligadas por la relación $I_{iB} = I_{jB}/a$ y las impedancias base por $Z_{iB} = a^2 Z_{jB}$, siendo $Z_{iB} = U_{iB}/I_{iB}$ y $Z_{jB} = U_{jB}/I_{jB}$.

Dividiendo la primera de las ecuaciones anteriores por I_{iB} , la segunda por I_{jB} y operando, resultan las ecuaciones en forma matricial siguientes:

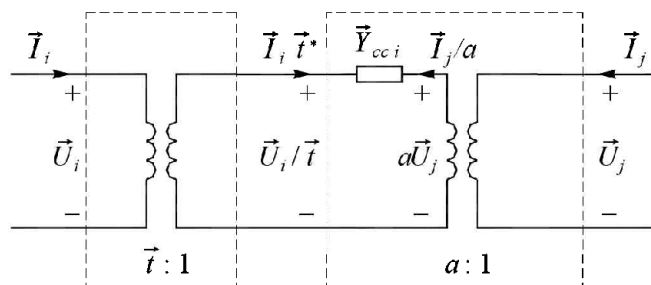


Figura 2.10 Circuito equivalente por fase de un transformador trifásico genérico.

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_{ipu} \\ \vec{I}_{jpu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{ccpu} / t^2 & -\vec{Y}_{ccpu} / \vec{t}^* \\ -\vec{Y}_{ccpu} / \vec{t} & \vec{Y}_{ccpu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{ipu} \\ \vec{U}_{jpu} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Por comodidad, en lo que sigue, se omite la indicación 'pu', que se sobreentenderá. Resultan los modelos siguientes según los casos.

TRD

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_i \\ \vec{I}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{cc} / t^2 & -\vec{Y}_{cc} / \vec{t}^* \\ -\vec{Y}_{cc} / \vec{t} & \vec{Y}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_i \\ \vec{U}_j \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Estas ecuaciones no se corresponden con un circuito equivalente.

TRM ($\vec{t} = t\angle 0^\circ$)

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_i \\ \vec{I}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{cc} / t^2 & -\vec{Y}_{cc} / t \\ -\vec{Y}_{cc} / t & \vec{Y}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_i \\ \vec{U}_j \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Estas ecuaciones describen el comportamiento del circuito en π de la Figura 2.11(a), como puede comprobarse.

Transformador de relación fija ($\vec{t} = 1\angle 0^\circ$)

$$\begin{pmatrix} \vec{I}_i \\ \vec{I}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{cc} & -\vec{Y}_{cc} \\ -\vec{Y}_{cc} & \vec{Y}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_i \\ \vec{U}_j \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Estas ecuaciones describen el comportamiento del circuito de la Figura 2.11(b), como puede comprobarse. Este último modelo coincide, como no podía ser de otra manera, con el obtenido anteriormente para el transformador sin cambiador de tomas.

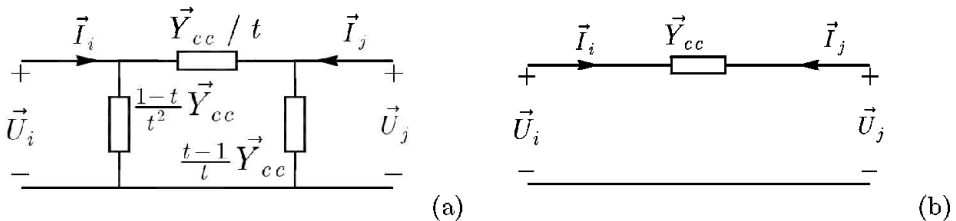


Figura 2.11 (a) Circuito equivalente fase-neutro para un TRM. (b) Circuito equivalente fase-neutro para un transformador con relación fija.

$$\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vec{\gamma}x & \vec{Z}_c \sinh \vec{\gamma}x \\ \frac{1}{\vec{Z}_c} \sinh \vec{\gamma}x & \cosh \vec{\gamma}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

En el caso particular de $x = \ell$, las ecuaciones anteriores dan las relaciones entre las variables eléctricas tensión e intensidad en los terminales de la línea (extremo emisor \vec{U}_1 e \vec{I}_1 , extremo receptor \vec{U}_2 e \vec{I}_2), esto es:

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vec{\gamma}\ell & \vec{Z}_c \sinh \vec{\gamma}\ell \\ \frac{1}{\vec{Z}_c} \sinh \vec{\gamma}\ell & \cosh \vec{\gamma}\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Ésta es la relación matricial entre las variables eléctricas de entrada y salida de un cuadripolo en la forma de parámetros de transmisión $ABCD$. Con $\vec{A} = \vec{D} = \cosh \vec{\gamma}\ell$; $\vec{B} = \vec{Z}_c \sinh \vec{\gamma}\ell$ y $\vec{C} = (1/\vec{Z}_c) \sinh \vec{\gamma}\ell$. Obsérvese que $\vec{A} = \vec{D}$ y $\vec{A}\vec{D} - \vec{B}\vec{C} = 1$ como corresponde a un cuadripolo pasivo y simétrico.

5.2.1 Circuito equivalente en π

Para obtener los parámetros del circuito equivalente en π no hay más que escribir las ecuaciones que relacionan las variables de entrada y salida en el mismo e identificar coeficientes. Así, para el circuito de la Figura 5.2 las ecuaciones que relacionan las variables eléctricas de entrada \vec{U}_1 e \vec{I}_1 en función de las de salida \vec{U}_2 e \vec{I}_2 son:

$$\vec{U}_1 = \vec{Z}' \left(\vec{I}_2 + \frac{\vec{Y}'}{2} \vec{U}_2 \right) + \vec{U}_2 \quad (5.13)$$

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{Y}'}{2} \vec{U}_1 + \vec{I}_2 + \frac{\vec{Y}'}{2} \vec{U}_2 \quad (5.14)$$

Si se expresan en forma de parámetros de transmisión $ABCD$, el resul-

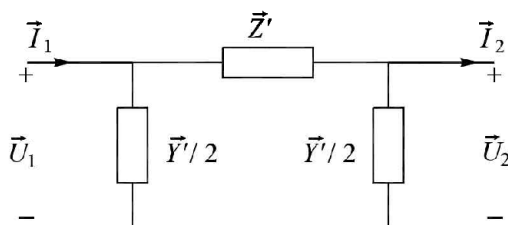


Figura 5.2 Circuito equivalente en π de una línea de parámetros distribuidos.

tado es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\vec{Z}'\vec{Y}'}{2} & \vec{Z}' \\ \vec{Y}'\left(1 + \frac{\vec{Z}'\vec{Y}'}{4}\right) & 1 + \frac{\vec{Z}'\vec{Y}'}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_2 \\ \vec{I}_2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Comparando (5.15) con (5.12), y teniendo en cuenta la igualdad $\frac{\cosh \vec{\gamma}\ell - 1}{\sinh \vec{\gamma}\ell} = \operatorname{tgh}\left(\frac{\vec{\gamma}\ell}{2}\right)$, resulta:

$$\vec{Z}' = \vec{Z}_c \sinh \vec{\gamma}\ell \quad ; \quad \frac{\vec{Y}'}{2} = \frac{1}{\vec{Z}_c} \operatorname{tgh}\left(\frac{\vec{\gamma}\ell}{2}\right) \quad (5.16)$$

También puede resultar útil expresar los parámetros del circuito equivalente en π de esta otra forma:

$$\vec{Z}' = \vec{Z} \left(\frac{\sinh \vec{\gamma}\ell}{\vec{\gamma}\ell} \right) \quad ; \quad \frac{\vec{Y}'}{2} = \frac{\vec{Y}}{2} \left(\frac{\operatorname{tgh}(\vec{\gamma}\ell/2)}{(\vec{\gamma}\ell/2)} \right) \quad (5.17)$$

Las operaciones que conducen a este último resultado son las siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{Z}' &= \vec{Z}_c \sinh \vec{\gamma}\ell = \sqrt{\frac{\vec{Z}_u}{\vec{Y}_u}} \sinh \vec{\gamma}\ell = \vec{Z}_u \ell \frac{1}{\sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} \cdot \ell} \sinh \vec{\gamma}\ell = \vec{Z} \left(\frac{\sinh \vec{\gamma}\ell}{\vec{\gamma}\ell} \right) \\ \frac{\vec{Y}'}{2} &= \frac{1}{\vec{Z}_c} \left(\frac{\cosh \vec{\gamma}\ell - 1}{\sinh \vec{\gamma}\ell} \right) = \frac{1}{\vec{Z}_c} \operatorname{tgh}\left(\frac{\vec{\gamma}\ell}{2}\right) = \frac{\vec{Y}_u \frac{\ell}{2}}{\vec{Y}_u \frac{\ell}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\vec{Y}_u}{\vec{Z}_u}} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{\vec{\gamma}\ell}{2}\right) = \frac{\vec{Y}}{2} \left(\frac{\operatorname{tgh}(\vec{\gamma}\ell/2)}{(\vec{\gamma}\ell/2)} \right) \end{aligned}$$

En la forma (5.17) el factor $(\sinh \vec{\gamma}\ell)/\vec{\gamma}\ell$ es el valor por el cual hay que multiplicar la impedancia serie total (por fase) de la línea $\vec{Z} = \vec{Z}_u \ell$, para obtener el valor exacto del parámetro \vec{Z}' del circuito equivalente en π . Y, por otro lado, el factor $(\operatorname{tgh}(\vec{\gamma}\ell/2))/(\vec{\gamma}\ell/2)$ es el valor por el que hay que multiplicar la admitancia paralelo total (fase-neutro) de la línea, $\vec{Y} = \vec{Y}_u \ell$, para obtener el valor exacto del parámetro \vec{Y}' de su circuito equivalente en π .

Ejemplo 5.1

Una línea de transmisión trifásica de 362 km de longitud, $f = 50$ Hz, suministra 40 MW a 132 kV (tensión de línea), con factor de potencia 0,95 en retraso. Los parámetros característicos son:

$$R_u = 0,105 \, \Omega/\text{km} \quad ; \quad L_u = 1,5648 \, \text{mH}/\text{km}$$

$$C_u = 0,0106 \, \mu\text{F}/\text{km} \quad ; \quad G_u = 0$$

- Calcular la tensión y la intensidad al principio de la línea y el rendimiento de la transmisión.
- Determinar los parámetros de su circuito equivalente π .

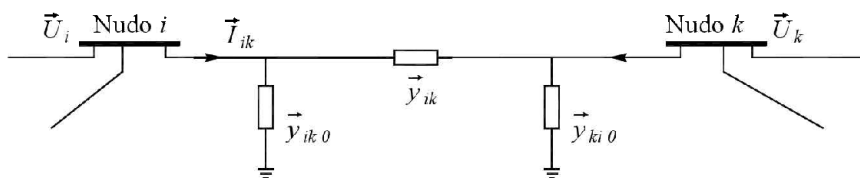


Figura 6.6 Interconexión entre dos nudos.

1. Las potencias en el nudo *slack* (nudo 1) mediante la ecuación correspondiente al nudo 1:

$$\vec{S}_1 = \vec{U}_1 \sum_{k=1}^n \vec{U}_k^* \vec{Y}_{1k}^* \quad (6.14)$$

2. Los flujos de potencia en las líneas teniendo en cuenta su modelo en π (véase la Figura 6.6) mediante

$$\vec{S}_{ik} = \vec{U}_i \vec{I}_{ik}^* = \vec{U}_i \left[(\vec{U}_i - \vec{U}_k) \vec{y}_{ik} + \vec{U}_i \vec{y}_{ik0} \right]^* \quad (6.15)$$

donde \vec{S}_{ik} es la potencia compleja saliente del nudo i hacia el nudo k ; \vec{y}_{ik} e \vec{y}_{ik0} son, respectivamente, las admittancias de las ramas serie y paralelo del circuito equivalente en π de la interconexión de los nudos i y k .

3. Las pérdidas totales del sistema pueden calcularse mediante la suma de las inyecciones de todos los nudos, esto es:

$$P_{\text{pérd}} = \sum_{i=1}^n P_i \quad (6.16)$$

Si se quieren contabilizar las pérdidas de una zona determinada habría que recurrir a calcular las pérdidas en cada línea o transformador de interconexión entre dos nudos adyacentes.

6.4 Método de Gauss-Seidel

Se trata de una aplicación directa al caso no lineal de una las técnicas de resolución iterativa de sistemas lineales. Su interés en la práctica de los programas comerciales es, hoy día, muy reducido, ya que presenta problemas de convergencia y necesita del orden de n iteraciones. De todos modos

$i_{\sim} = \frac{\sqrt{2} U}{Z_K} \sin(\omega t + \psi - \varphi_K)$, es la componente de alterna;

$i_{-} = -\frac{\sqrt{2} U}{Z_K} e^{-t/T_K} \sin(\psi - \varphi_K)$, es la componente de continua;

Z_K módulo de la impedancia, $\vec{Z}_K = R_K + jX_K$; $Z_K = \sqrt{R_K^2 + X_K^2}$;

φ_K ángulo de la impedancia de cortocircuito de la red ($= \arctg \frac{X_K}{R_K}$);

T_K constante de tiempo de la componente de continua ($= \frac{L_K}{R_K}$);

I_K valor eficaz de la componente de alterna ($= \frac{U}{Z_K}$).

La corriente de cortocircuito $i_K(t)$ se ha representado en la Figura 8.3 junto con sus dos componentes: la componente de alterna que es una senoide y la componente de continua que es una exponencial decreciente con constante de tiempo T_K . El valor de la primera punta I_S de la corriente de cortocircuito se denomina **corriente de choque**.

Se observa que, para una misma impedancia Z_K , el valor eficaz de la componente de alterna es independiente del ángulo φ_K de la impedancia. El mayor valor inicial de la componente de continua se da para un ángulo de fase inicial $\psi = \varphi_K - 90^\circ$. En el caso de φ_K igual a 90° , es decir, en el caso (habitual en la práctica en redes de transporte) de que la resistencia sea pequeña en comparación con la inductancia, corresponde $\psi = 0^\circ$. Para $\psi = \varphi_K$ no aparece componente de continua; la corriente de cortocircuito

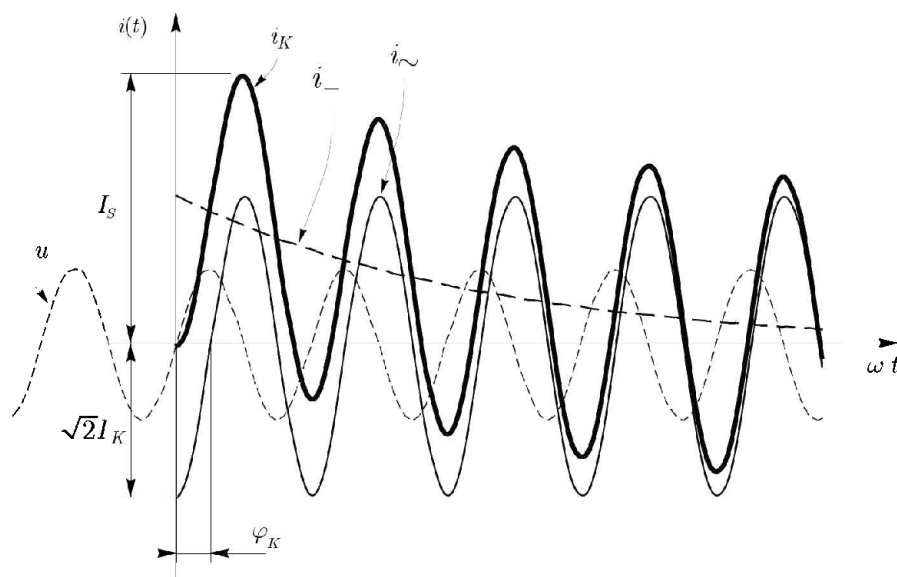


Figura 8.3 Evolución de la corriente de cortocircuito en el circuito de la figura anterior.

Tabla 8-II Valores de la tensión de prefallo en el punto de fallo a considerar según CEI 909.

Tensión nominal	Para corriente de cortocircuito máxima	Para corriente de cortocircuito mínima
Baja tensión (hasta 1 kV)	1,00 ÷ 1,05	0,95 ÷ 1,00
Media tensión (hasta 35 kV)	1,10	1,00
Alta tensión	1,10	1,00

Más concretamente, la impedancia del equivalente Thévenin puede considerarse formada por una parte correspondiente a todos los generadores síncronos presentes en el sistema ($\vec{Z}_G'' = R_G + jX_G''$, $\vec{Z}_G' = R_G + jX_G'$, $\vec{Z}_G = R_G + jX_G$, según el período en estudio) en serie con una parte debida al resto de los elementos del sistema ($\vec{Z}_r = R_r + jX_r$). Se tendrá así una impedancia $\vec{Z}_K'' = \vec{Z}_G'' + \vec{Z}_r$, $\vec{Z}_K' = \vec{Z}_G' + \vec{Z}_r$ ó $\vec{Z}_K = \vec{Z}_G + \vec{Z}_r$ según el régimen de cortocircuito considerado. El valor de la fuente de tensión del equivalente Thévenin es igual al valor de la tensión en el nudo considerado antes del fallo y su determinación puede llevarse a cabo, según la precisión requerida y los medios de cálculo disponibles, mediante uno de los siguientes procedimientos: (i) por cálculo mediante la ejecución de un flujo de cargas; (ii) usando la simplificación de despreciar el estado de carga y considerando todas las tensiones de la red antes del fallo iguales a $1\angle 0^\circ$ p.u.; (iii) considerando el valor que indica la norma CEI-909, tal y como se muestra en la Tabla 8-II.

Se llega así a los circuitos equivalentes por fase para cada uno de los regímenes de cortocircuito mostrados en la Figura 8.9. Las corrientes en cada uno de esos regímenes se calcularán mediante las expresiones

$$\vec{I}_K'' = \frac{\vec{U}_{th}}{\vec{Z}_K''} \quad ; \quad \vec{I}_K' = \frac{\vec{U}_{th}}{\vec{Z}_K'} \quad ; \quad \vec{I}_K = \frac{\vec{U}_{th}}{\vec{Z}_K} \quad (8.11)$$

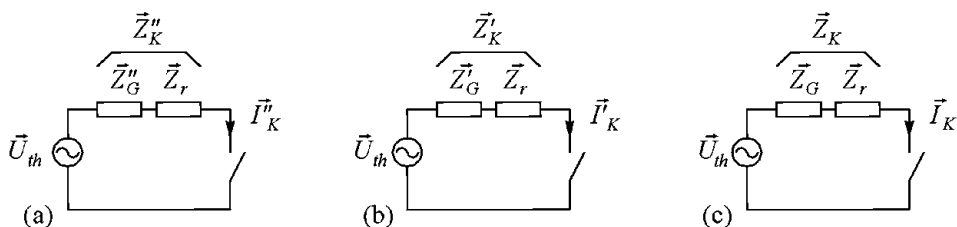


Figura 8.9 Circuito equivalente por fase de un sistema de energía eléctrica genérico para calcular la componente de alterna en los instantes posteriores a un cortocircuito trifásico: (a) período subtransitorio, (b) período transitorio, (c) período permanente.

para analizar un sistema en el que se produce un cortocircuito de tipo genérico en un nudo cualquiera del mismo. Este análisis permite deducir expresiones especialmente aptas para su utilización en programas de ordenador.

9.2 Componentes simétricas

Supóngase un conjunto arbitrario de tres fasores, $\vec{I}_a, \vec{I}_b, \vec{I}_c$ [ejemplo: los dibujados con línea más gruesa en la Figura 9.1(a)]. Se pretende representar este conjunto en términos de nueve componentes simétricas, $\vec{I}_a^0, \vec{I}_a^+, \vec{I}_a^-, \vec{I}_b^0, \vec{I}_b^+, \vec{I}_b^-, \vec{I}_c^0, \vec{I}_c^+, \vec{I}_c^-$, de manera que sea

$$\begin{aligned}\vec{I}_a &= \vec{I}_a^0 + \vec{I}_a^+ + \vec{I}_a^- \\ \vec{I}_b &= \vec{I}_b^0 + \vec{I}_b^+ + \vec{I}_b^- \\ \vec{I}_c &= \vec{I}_c^0 + \vec{I}_c^+ + \vec{I}_c^-\end{aligned}\quad (9.1)$$

donde:

- $\vec{I}_a^0, \vec{I}_b^0, \vec{I}_c^0$ es un conjunto de fasores de **secuencia cero u homopolar**, es decir, tres fasores de igual módulo y desfasados entre sí 0° , esto es, tienen la propiedad $\vec{I}_a^0 = \vec{I}_b^0 = \vec{I}_c^0$ [Figura 9.1(d)].

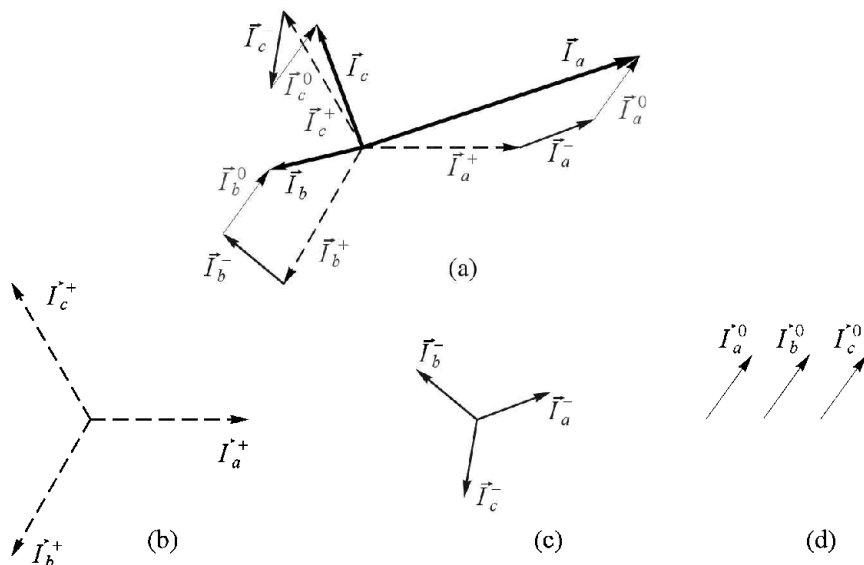


Figura 9.1 Conjunto de fasores trifásicos desequilibrados descompuestos en componentes simétricas.

- $\vec{I}_a^+, \vec{I}_b^+, \vec{I}_c^+$ es un conjunto de fasores de **secuencia positiva o directa**, es decir, tres fasores de igual módulo y desfasados entre sí 120° , sucediéndose en el orden $a-b-c$ [Figura 9.1(b)].
- $\vec{I}_a^-, \vec{I}_b^-, \vec{I}_c^-$ es un conjunto de fasores de **secuencia negativa o inversa**, es decir, tres fasores de igual módulo y desfasados entre sí 120° , sucediéndose en el orden $a-c-b$ [Figura 9.1(c)].

Es claro que solamente tres de las nueve componentes pueden tomarse independientemente. La práctica habitual es tomar \vec{I}_a^0, \vec{I}_a^+ e \vec{I}_a^- como variables independientes y expresar las restantes variables en función de ellas. Así, la expresión (9.1) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \\ \vec{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vec{a}^2 & \vec{a} \\ 1 & \vec{a} & \vec{a}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_a^0 \\ \vec{I}_a^+ \\ \vec{I}_a^- \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

donde $\vec{a} = e^{j2\pi/3}$ y $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = \vec{a}^* = e^{-j2\pi/3}$. Resulta útil pensar en el número complejo \vec{a} como un operador: la multiplicación de un número complejo \vec{I} por \vec{a} da como resultado un número complejo con el mismo módulo que \vec{I} y con el argumento incrementado en 120° (esto es, gira al fador \vec{I} un ángulo positivo de 120°).

La ecuación (9.2) escrita en forma compacta, utilizando notación matricial, es

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{I}_s \quad (9.3)$$

donde \mathbf{A} es la llamada **matriz de transformación de componentes simétricas**, \mathbf{I} es el vector columna de las corrientes de fase e \mathbf{I}_s es el vector columna de las componentes simétricas de las corrientes.

Es fácil confirmar que $\det\{\mathbf{A}\} = 3(\vec{a} - \vec{a}^2)$. Por ser $\det\{\mathbf{A}\} \neq 0$, la matriz inversa existe y es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vec{a} & \vec{a}^2 \\ 1 & \vec{a}^2 & \vec{a} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Con lo que se tiene una expresión para calcular \mathbf{I}_s a partir de \mathbf{I} ,

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I} \quad (9.5)$$

O más explícitamente,

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_a^0 \\ \vec{I}_a^+ \\ \vec{I}_a^- \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vec{a} & \vec{a}^2 \\ 1 & \vec{a}^2 & \vec{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ \vec{I}_b \\ \vec{I}_c \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Una vez calculada \mathbf{I}_s (que da las componentes simétricas principales $\vec{I}_a^0, \vec{I}_a^+, \vec{I}_a^-$), se pueden calcular las restantes seis componentes haciendo uso de las propiedades de los conjuntos de secuencias homopolar, directa e inversa, a los cuales representan.

Ejemplo 9.1

Dados $\vec{I}_a = 1\angle 0^\circ$, $\vec{I}_b = 1\angle -90^\circ$ e $\vec{I}_c = 2\angle 135^\circ$, hallar \vec{I}_a^0 , \vec{I}_a^+ e \vec{I}_a^- .

Resolución

Aplicando (9.6),

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_a^0 \\ \vec{I}_a^+ \\ \vec{I}_a^- \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vec{a} & \vec{a}^2 \\ 1 & \vec{a}^2 & \vec{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\angle 0^\circ \\ 1\angle -90^\circ \\ 2\angle 135^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,195\angle 135^\circ \\ 1,311\angle 15^\circ \\ 0,495\angle -105^\circ \end{bmatrix}$$

Como comprobación, con los valores calculados se tiene que:

$$\vec{I}_a = \vec{I}_a^0 + \vec{I}_a^+ + \vec{I}_a^- = 1\angle 0^\circ$$

9.2.2 Potencia en función de las componentes simétricas

Considérese la potencia compleja suministrada a la red de la Figura 9.2, que vendrá dada por

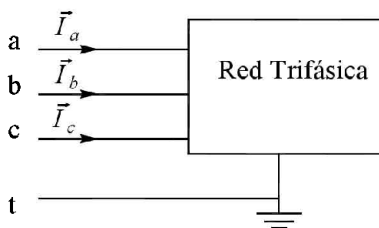


Figura 9.2 Red trifásica genérica desequilibrada.

mitancias paralelo de las líneas de transmisión y las ramas paralelo de los transformadores. En lo que sigue se ofrece una justificación cualitativa de tales modelos.

Tabla 9-I Modelos de comportamiento para las tres secuencias.

ELEMENTO	SECUENCIA DIRECTA	SECUENCIA INVERSA	SECUENCIA HOMOPOLAR
GENERADOR	<div></div> <div>Valores típicos $X^+ > X^- > X^0$ X^+ ($X'' = 0,12$; $X' = 0,20$; $X_s = 1,1$) p.u. X^- 0,12 p.u. X^0 0,05 p.u.</div>	<div></div>	<div></div> <div>$R/X = 0,05 \div 0,07$ (AT); 0,15 (BT)</div>
LÍNEA (*) TRANSMISIÓN	<div></div> <div>Valores típicos $X^+ = X^-$; $X^0 = 2,5 \div 3 X^+$ X^+ Línea aérea: $0,3 \div 0,4 \Omega/\text{km}$ $R/X = 0,1 \div 0,3$ (AT); 1,20 (MT); 2,7 (BT) Cable: $0,1 \div 0,15 \Omega/\text{km}$ $R/X = 0,7$ (AT); $2 \div 3$ (MT); 5,8 (BT)</div>	<div></div>	<div></div>
TRANSFORMADOR	<div></div>	<div></div>	<div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div>

(*) En el análisis de fallos fase-tierra en sistemas con el neutro aislado se considerarán también las capacidades paralelo.

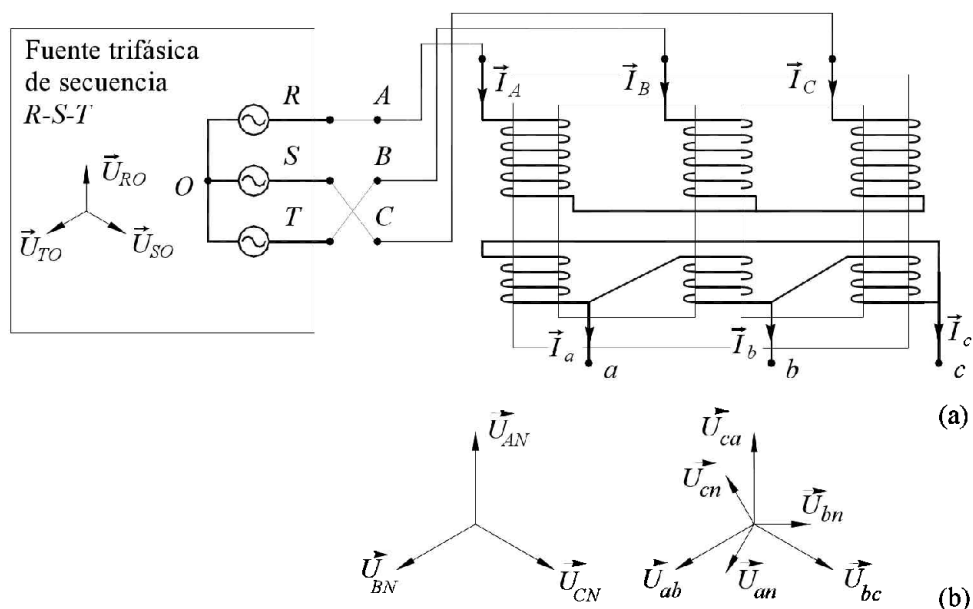
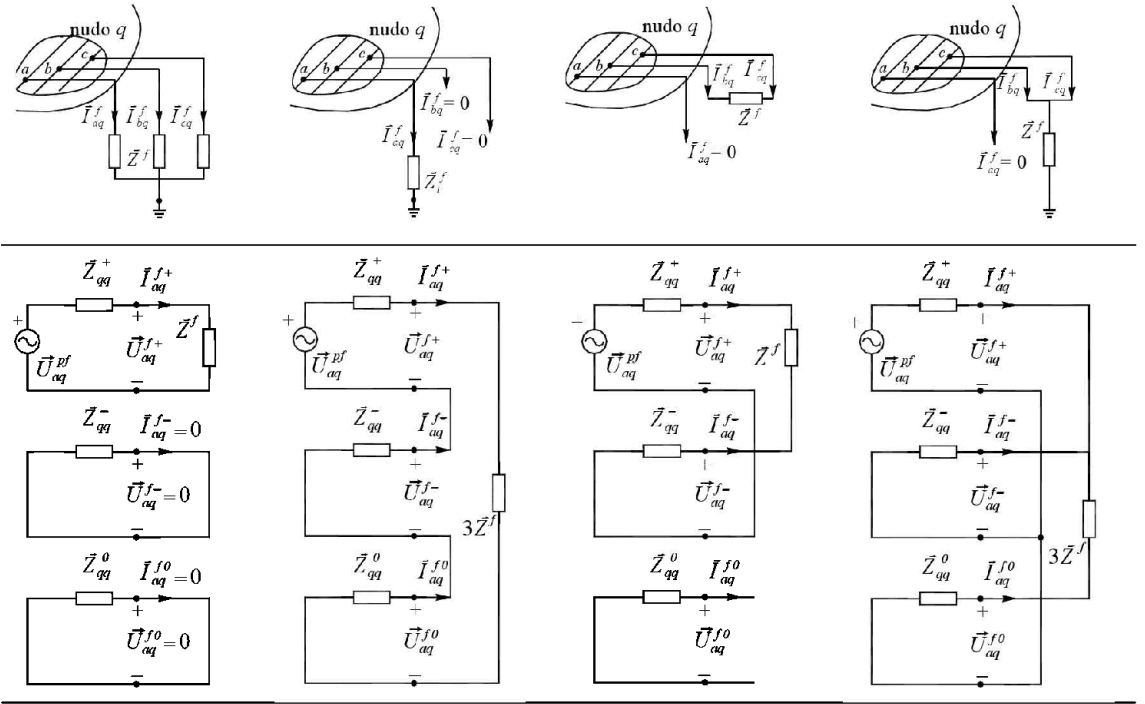


Figura 9.5 Transformador Yd alimentado por un sistema trifásico de tensiones de secuencia inversa.

En un transformador trifásico con índice horario h (por ejemplo, Yd5), si circulan por el lado de BT un conjunto de corrientes de secuencia directa, las correspondientes corrientes en el lado de AT están adelantadas un ángulo $h \cdot 30^\circ$, esto es, en valores por unidad $\vec{I}_A^+ = \vec{I}_a^+ e^{+j h \cdot 30^\circ}$; si circulan por el lado de BT un conjunto de corrientes de secuencia inversa, las correspondientes corrientes en el lado de AT están retrasadas un ángulo $h \cdot 30^\circ$, esto es, en valores por unidad $\vec{I}_A^- = \vec{I}_a^- e^{-j h \cdot 30^\circ}$.

9.3.3 Modelos para la secuencia homopolar

Cuando por un sistema circulan sólo corrientes de secuencia homopolar, los modelos de los elementos (generadores, líneas de transmisión y transformadores) son los mostrados en la tercera columna de la Tabla 9-I. He aquí algunos detalles justificativos:

Tabla 9-II Resumen de esquemas y expresiones para el análisis sistemático de cortocircuitos.


$$\begin{aligned}
 \vec{I}_{aa}^{f0} &= 0 \\
 \vec{I}_{aa}^{f+} &= \frac{\vec{U}_{aa}^{pf}}{\vec{Z}_{aa}^+ + \vec{Z}^f} \\
 \vec{I}_{aa}^{f-} &= 0 \\
 \vec{I}_{aa}^{f0} &= \frac{\vec{U}_{aa}^{pf}}{\vec{Z}_{aa}^0 + \vec{Z}_{aa}^+ + \vec{Z}_{aa}^- + 3\vec{Z}^f} \\
 \vec{I}_{aa}^{f+} &= \vec{I}_{aa}^{f0} \\
 \vec{I}_{aa}^{f-} &= \vec{I}_{aa}^{f0} \\
 \vec{I}_{aa}^{f0} &= 0 \\
 \vec{I}_{aa}^{f+} &= \frac{\vec{U}_{aa}^{pf}}{\vec{Z}_{aa}^+ + \vec{Z}_{aa}^- + \vec{Z}^f} \\
 \vec{I}_{aa}^{f-} &= -\vec{I}_{aa}^{f+} \\
 \vec{I}_{aa}^{f0} &= (-\vec{I}_{aa}^{f+}) \frac{\vec{Z}_{aa}^-}{\vec{Z}_{aa}^+ + \vec{Z}_{aa}^0 + 3\vec{Z}^f} \\
 \vec{I}_{aa}^{f+} &= \frac{\vec{U}_{aa}^{pf}}{\vec{Z}_{aa}^+ + \left[\frac{\vec{Z}_{aa}^- (\vec{Z}_{aa}^0 + 3\vec{Z}^f)}{\vec{Z}_{aa}^- + \vec{Z}_{aa}^0 + 3\vec{Z}^f} \right]} \\
 \vec{I}_{aa}^{f-} &= (-\vec{I}_{aa}^{f+}) \frac{\vec{Z}_{aa}^0 + 3\vec{Z}^f}{\vec{Z}_{aa}^+ + \vec{Z}_{aa}^0 + 3\vec{Z}^f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_{ai}^{f0} &= -\vec{Z}_{iq}^0 \vec{I}_{aq}^{f0} \\
 \vec{U}_{ai}^{f+} &= \vec{U}_{ai}^{pf} - \vec{Z}_{iq}^+ \vec{I}_{aq}^{f+} \\
 \vec{U}_{ai}^{f-} &= -\vec{Z}_{iq}^- \vec{I}_{aq}^{f-} \\
 i &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{I}_{i-j}^0 &= \frac{\vec{U}_{ai}^{f0} - \vec{U}_{aj}^{f0}}{\vec{Z}_{inca \ i-j}^0} \\
 \vec{I}_{i-j}^+ &= \frac{\vec{U}_{ai}^{f+} - \vec{U}_{aj}^{f+}}{\vec{Z}_{inca \ i-j}^+} \\
 \vec{I}_{i-j}^- &= \frac{\vec{U}_{ai}^{f-} - \vec{U}_{aj}^{f-}}{\vec{Z}_{inca \ i-j}^-} \\
 i, j &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$